

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İDEAL TABANLI SIFIR BÖLEN ÇİZGELERİNİN
GENELLEŞTİRİLMESİ

Hüseyin Tarık TUNA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İDEAL TABANLI SIFIR BÖLEN ÇİZGELERİNİN GENELLEŞTİRİLMESİ

Hüseyin Tarık TUNA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ali Bülent EKİN

Bu tezde graf teori ve cebiri birbirine bağlayan sıfır bölen grafları ve ideal tabanlı sıfır bölen graflarına yoğunlaşmıştır. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde grafın tanımı ve graf teorisinin üzerinde çalıştığı problemlerden bazıları verilmiştir. Üçüncü bölümde cebirsel graflardan Cayley Grafları, sıfır bölen grafları, ideal tabanlı sıfır bölen grafları tanımlanmış ve örnekler verilmiştir. Dördüncü bölümde bir graf verildiğinde bu grafın ideal tabanlı graf olup olmadığı araştırılmıştır. Beşinci bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Ağustos 2024, 40 sayfa

Anahtar Kelimeler: Graf Teori, Cayley Grafları, Sıfır Bölen Grafları, İdeal Tabanlı Sıfır Bölen Grafları

ABSTRACT

Master Thesis

A GENERALIZED IDEAL BASED ZERO DIVISOR GRAPHS

Hüseyin Tarık TUNA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Ali Bülent EKİN

This thesis focuses on zero divisor graphs and ideal-based zero divisor graphs, which connect graph theory and algebra. The thesis consists of five chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, the definition of a graph and some of the problems studied in graph theory are provided. In the third chapter, algebraic graphs such as Cayley graphs, zero divisor graphs, and ideal-based zero divisor graphs are defined and examples are given. In the fourth chapter, it is investigated whether a given graph is an ideal-based graph. The fifth chapter is dedicated to discussion and conclusions.

August 2024, 40 pages

Key Words: Graph Theory, Cayley Graphs, Zero Divisor Graphs, Ideal-Based Zero Divisor Graphs

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimin ders döneminde ve tez çalışmamın her aşamasında bana rehberlik eden, bilgi ve tecrübeleriyle katkıda bulunan danışman hocam Prof. Dr. Ali Bülent EKİN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu süreçte bana her daim sabır ve anlayış gösteren, moral ve motivasyonumu yüksek tutmamı sağlayan sevgili eşim Sultan ULUSU TUNA'ya minnettarım.

Bu tez "TÜBİTAK 2210-A Genel Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Sağlamış oldukları maddi destek için Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (TÜBİTAK) teşekkürlerimi sunarım.

Hüseyin Tarık TUNA
Ankara, Ağustos 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. GRAFLAR	2
2.1 Gezgin Satıcı Problemi	5
2.2 İki Parçalı Graflar	6
2.3 Tam Graflar	11
3. CEBİRSEL GRAFLAR	12
3.1 Cayley Grafları	12
3.2 Sıfır Bölen Grafları	14
3.3 İdeal Tabanlı Graflar	19
3.4 İdeal Tabanlı Modül Graflar	22
4. GRAFA UYGUN CEBİRSEL YAPIYI BULMA	25
4.1 Bir Köşeli Graflar	26
4.2 İki Köşeli Graflar	26
4.3 Üç Köşeli Graflar	27
4.4 Dört Köşeli Graflar	27
4.5 Beş Köşeli Graflar	30
4.6 Altı Köşeli Graflar	31
4.7 Yedi Köşeli Graflar	33
4.8 Sekiz Köşeli Graflar	34
4.9 Dokuz Köşeli Graflar	36
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	38
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ	40

SİMGELER DİZİNİ

$\Gamma(R)$	R halkasının sıfır bölen grafi
$\Gamma_I(R)$	R halkası ve I İdeali ile oluşturulan ideal tabanlı graf
$\deg(v)$	v köşesinin derecesi
$Z(R)$	R halkasının sıfır bölenler kümesi
$\Upsilon_I(M)$	M modülü ve I ideali ile oluşturulan graf
K^n	n köşeli tam (complete) graf
$N(v)$	v köşesinin komşu olduğu köşeler kümesi
$d(a, b)$	a ve b köşeleri arasındaki mesafe
$\text{diam}(G)$	G grafindaki en uzak iki köşe arasındaki mesafe



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Basit bir graf örneği	2
Şekil 2.2	Basit bir graf örneği	2
Şekil 2.3	Königsberg Köprüsü	3
Şekil 2.4	Königsberg Grafı	3
Şekil 2.5	Mektup Zarfı	4
Şekil 2.6	Gezgin Satıcı Problemi	5
Şekil 2.7	Ağırlıklı Gezgin Satıcı Problemi	5
Şekil 2.8	İki Parçalı Graf	7
Şekil 2.9	Altıgen Graf	7
Şekil 2.10	Sekizgen Graf	8
Şekil 2.11	Sekizgen Graf	9
Şekil 2.12	Sekizgen Graf	10
Şekil 2.13	Altıgen Graf	10
Şekil 2.14	5 Köşeli Tam Graf	11
Şekil 3.1	Yönlü Graf	13
Şekil 3.2	$(\mathbb{Z}, +)$ grubu ve $\{1\}$ üreteç kümesi	13
Şekil 3.3	$(\mathbb{Z}, +)$ grubu ve $\{2, 3\}$ üreteç kümesi	13
Şekil 3.4	D_4 Dihedral Grup	14
Şekil 3.5	S_3 Permütasyon Grubu	14
Şekil 3.6	$\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ Grafı	15
Şekil 3.7	$\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ Grafı	16
Şekil 3.8	$\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ Grafı	16
Şekil 3.9	$\Gamma(\mathbb{Z}_2[x, y]/(x^2, xy, y^2))$ Grafı	17
Şekil 3.10	$\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ Grafı	17
Şekil 3.11	$\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ Grafı	17
Şekil 3.12	$\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4)$ Grafı	18
Şekil 3.13	$\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ Grafı	18
Şekil 3.14	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3)$	20
Şekil 3.15	$\Upsilon_{2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı	23
Şekil 3.16	$\Upsilon_{4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı	24
Şekil 3.17	$\Upsilon_{2\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_4)$ Grafı	24
Şekil 4.1	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ Grafı	27
Şekil 4.2	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3)$ Grafı	27
Şekil 4.3	Dört Köşeli Sıfır Bölen Olmayan Graf	28
Şekil 4.4	Dört Köşeli Sıfır Bölen Olmayan Graflar	29
Şekil 4.5	$\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı	29
Şekil 4.6	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ Grafı	29
Şekil 4.7	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_5}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5)$ Grafı	31
Şekil 4.8	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı	32
Şekil 4.9	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^3 \rangle \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı	32
Şekil 4.10	$\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$ Grafı	33
Şekil 4.11	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)$ Grafı	33
Şekil 4.12	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7)$ Grafı	34

Şekil 4.13	$\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafi	34
Şekil 4.14	$\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafi	35
Şekil 4.15	$\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$ Grafi	35
Şekil 4.16	$\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_8}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8)$ Grafi	36
Şekil 4.17	$\Gamma_{\langle 8 \rangle}(\mathbb{Z}_{24})$ Grafi	37



1. GİRİŞ

Graf, köşeler ve bu köşeler arasındaki çizgilerden oluşan bir yapıdır. Graf teori Euler'in ortaya attığı Königsberg Köprüsü problemi ile ortaya çıkmıştır. O zamandan beri bir çok matematikçi bu alanı geliştirmiş ve günümüzde yaygın bir uygulama alanına kavuşmuştur. Graflar bazı kombinatorial problemleri tanımlama ve modelleme konularında oldukça önemli kolaylıklar sağlamaktadır. Cebir ise matematiğin temel alanlarından biridir. Beck 1988 yılında bu iki alanı birbiriyle ilişkilendirerek cebirsel yapılar kullanarak graflar tanımlamıştır. Bir halkanın tüm elemanlarını grafin köşeleri olarak almış, eğer iki elemanın çarpımı sıfır ise bu iki eleman arasında bir kenar koymuştur. Beck çalışmasında daha çok grafların renklendirilmesi problemi üzerinde durmuştur (Beck 1988). 1999 yılında Anderson ve Livingston bu fikri daha da geliştirmişler ve sıfır bölen graflarının bazı önemli özelliklerini ve sonuçlarını vermişlerdir. Sıfır bölene sahip bir halkada sıfır bölenler kümesi grafin köşelerini oluşturur ve iki elemanın çarpımı sıfırsa bu iki elemanın arasında bir çizge vardır (Anderson ve Livingston 1999). 2003 yılında Redmond sıfır bölen graflarını ideallere taşıyarak ideal tabanlı grafları tanıtmıştır (Redmond 2003). Redmond'un tanımladığı bu grafta köşeler çarpımları idealde olan elemanlardan oluşur ve iki elemanın çarpımı idealdeyse bu iki köşenin arasında bir kenar vardır.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde grafların tanımı yapılmış, graf teorisinin temel kavramları ve graf teorisinin üzerinde çalıştığı problemlerden bazıları verilmiştir. Üçüncü bölümde Anderson ve Livingston'un sıfır bölen grafları çalışmasına ve Redmond'un ideal tabanlı sıfır bölen grafları çalışmalarına yer verilmiştir. Cebirsel yapılar kullanılarak graflar oluşturulurken şu soru aklımıza gelir: Köşe sayısı ve çizgeleri belirli bir graf verildiğinde bu grafin üzerinde cebirsel bir yapı oluşturabilir miyiz? Dördüncü bölümde hangi grafların sıfır bölen grafi yada ideal tabanlı sıfır bölen grafi olabileceği üzerinde durulmuştur. Beşinci bölümde ise bu çalışmada verilenlere ek olarak neler yapılabileceğinden bahsedilmiştir.

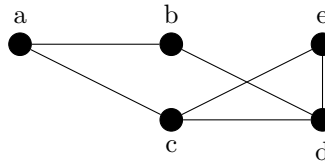
2. GRAFLAR

Bu bölümde grafların tanımı ve temel özellikleri verilecektir. Ayrıca Graf teorisinin üzerinde çalıştığı problemler açıklanacaktır. Bu bölüm, ilerleyen bölümlerde açıklanacak olan Cayley Grafları, sıfır bölen grafları, ideal tabanlı sıfır bölen grafları ve modüller üzerinde tanımlanan ideal tabanlı graflar için temel oluşturacaktır.

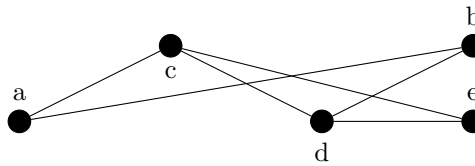
Tanım 2.1 Bir G grafi boş olmayan bir V kümesi ve boş da olabilen E kümesinden oluşan ikili bir yapıdır. $G = (V, E)$ şeklinde gösterilir. E kümesinin elemanları V kümesinin elemanlarının sıralı olmayan ikililerinden oluşur. V kümesinin elemanlarına köşe yada düğüm denir. Bir G çizgesindeki tüm köşelerin kümesi $V(G)$ ile gösterilir. E kümesinin elemanlarına kenar veya bağlantı denir ve bir G grafindaki tüm kenarların kümesi $E(G)$ şeklinde gösterilir (Aldous ve Wilson 2000).

Eğer E kümesi boş olursa bu grafa boş (empty) graf denir.

Örnek 2.1 Köşe (vertex) kümesi olarak $V = \{a, b, c, d, e\}$ kümesini ve kenar (edge) kümesi olarak $E = \{ab, ac, bd, cd, ce, de\}$ kümesini alalım. Bu grafi şekil 2.1'deki gibi görselleştirebiliriz. Burada örneğin a ile b köşeleri arasında mesafenin önemi yoktur. Önemli olan aralarında kenarın olup olmamasıdır. Aynı graf farklı şekillerde de görselleştirilebilir. Örneğin şekil 2.1'de verilen graf ile 2.2'de verilen graf aynı grafi ifade eder. Çünkü köşelerin yerleri önemli değildir. Önemli olan aralarında kenar olup olmamasıdır.

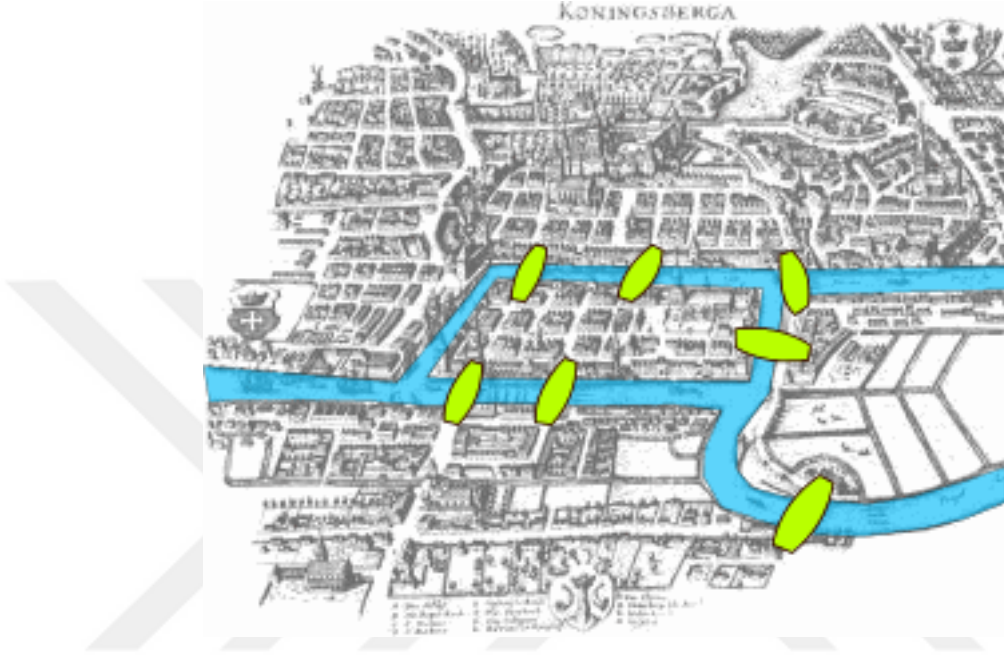


Şekil 2.1. Basit bir graf örneği



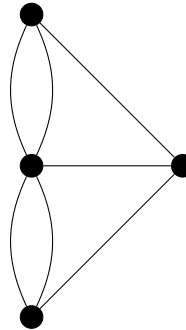
Şekil 2.2. Basit bir graf örneği

Euler'in 1976 yılında yazdığı bir makale, graf teorisinin başlangıcı olarak kabul edilir. Bu makale Königsberg'in Yedi Köprüsü problemi ile ilgilidir. Şekil 2.3'de Königsberg şehrinin haritası verilmiştir. Bu haritada bir yerden başlayıp köprülerin hepsinden yalnızca bir kere geçerek başlanılan yere dönmek mümkün müdür? Euler bunu hayır olarak cevaplamıştır.



Şekil 2.3. Königsberg Köprüsü

Euler önce gereksiz ayrıntılardan kurtulmak için bu haritadaki kara parçalarını, köşe ile kara parçaları arasında bağlantı sağlayan köprüleri kenar ile göstererek şekil 2.4'de verilen grafi oluşturmuştur.



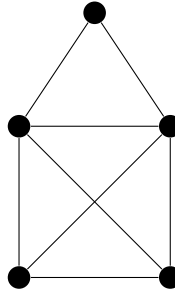
Şekil 2.4. Königsberg Grafı

Burada problem "Bir köşeden başlayıp bütün kenarlardan bir kez geçerek başladığımız köşeye dönebilir miyiz?" sorusuna dönüşmüştür. Bunun mümkün olabilmesi

için her köşenin derecesi çift olmalıdır.

Tanım 2.2 Bir grafta aralarında kenar bulunan iki köşeye komşu köşeler denir. Bir v köşesinin komşu olduğu köşeler kümesi $N(v)$ ile gösterilir. v 'nin komşu olduğu köşe sayısına, yani $N(v)$ kümesinin eleman sayısına, v 'nin derecesi denir ve $deg(v)$ ile gösterilir (Aldous ve Wilson 2000).

Königsberg Köprü Problemi'ndeki temel mantık şudur: Bir köşeden başlayıp tekrar aynı yere gelebilmesi için gittiği bütün köşelerden ayrılması gerekir. Dolayısıyla her köşenin derecesi çift olmalıdır. Eğer bu problemden başladığı noktaya dönme şartını kaldırırsak (yani bir noktadan başlayalım bütün köprülerden sadece bir kez geçelim ancak sonunda başladığımız noktaya geri dönmeyelim) bu durumda sadece iki köşenin derecesi tek olabilir. Bu köşelerin biri başlangıç diğeri bitiş köşesidir. Diğer köşelerin derecesi yine çift olmak zorundadır. Königsberg Köprü probleminde bütün köşelerin derecesi tektir. Dolayısıyla herhangi bir noktadan başlayarak bütün köprülerden bir kere geçmek imkansızdır. Bu problemin bir benzeri de elimizi kaldırmadan mektup zarfı çizme örneğidir. Bu soru hepimiz karşısına çıkmıştır. Örneğin



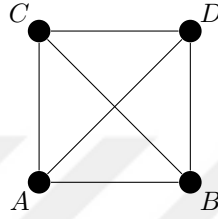
Şekil 2.5. Mektup Zarfı

şekil 2.5'de verilen grafi herhangi bir köşeden başlayarak elimizi kaldırmadan çizebilir miyiz? Bu sorunun cevabı da Königsberg Köprü Problemi'yle aynıdır. Bu grafta tek dereceli iki köşe vardır. Eğer bu köşelerden birini başlangıç, diğerini bitiş köşesi seçersek bu şekli elimizi hiç kaldırmadan çizmek mümkündür.

Şimdi graf teorisinin uğraştığı diğer problemlere bir göz atalım.

2.1 Gezgin Satıcı Problemi

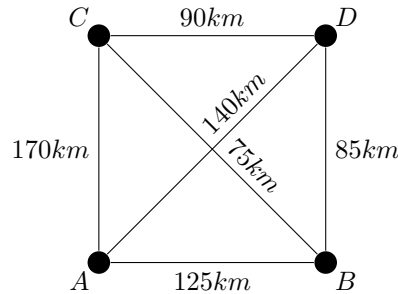
Bir satıcı düşünelim. Elindeki ürünleri farklı şehirlerde satmak ve şehirleri dolaştıktan sonra evine dönmek istiyor. Elinde de gideceği şehirlerin bir listesi ve bu şehirler arasındaki mesafeler var. Bütün şehirleri gezerken aynı zamanda yolun kısa olmasını da istiyor. Bunu nasıl yapabilir? Bunu daha iyi anlayabilmek için önce 4 şehirli bir yer düşünelim. A, B, C ve D şehirleri diyelim. Bu problemi şekil 2.6 ile gösterebiliriz. Burada sadece şehirler ve şehirler arasındaki yollar gösterilmiştir. Yol-



Şekil 2.6. Gezgin Satıcı Problemi

ların uzunluğuyla ilgili herhangi bir bilgi verilmemiştir. Grafa yolların uzunluğunu da ekleyebiliriz.

Tanım 2.3 Bir grafta her kenara bir sayı verdiğimizde elde ettiğimiz grafa ağırlıklı graf denir. Verdiğimiz bu sayıya da kenarın ağırlığı ya da maliyeti denir. Ağırlık grafın temsil ettiği şeye göre değişkenlik gösterebilir. Örneğin bir graf şehirleri ve şehirler arasındaki yolları gösteriyorsa ağırlık yol uzunluğu olabilir, ya da bir şehirden diğerine gitmek için ödediğimiz ücret olabilir. Oluşturduğumuz bir graf bir bilgisayar ağını temsil ediyorsa ağırlıklar bilgisayarları birbirine bağlayan kabloların taşıyabileceği veri miktarı olabilir.



Şekil 2.7. Ağırlıklı Gezgin Satıcı Problemi

Şekil 2.7'da yukarıda aldığımız 4 şehirli grafın şehirler arasındaki mesafenin kenarlara ağırlık olarak eklenmiş hali görünmektedir. Gezgin satıcı A şehrinden başlayıp diğer

bütün şehirleri dolaşıp başladığı noktaya geri dönecektir. İkinci şehir için gidebileceği 3 şehir vardır. (D şehrine gittiğini düşünelim.) Üçüncü şehir için iki seçenek kaldı elinde. (C şehrine ve ardından B şehrine giderek başladığı nokta olan A şehrine geri dönsün.) Bu şekilde $3! = 6$ farklı seçenek var.

Bir de yolun maliyetini hesaplayalım. Varsayalım ki $ABCD A$ yolunu takip etti. AB arası $125km$, BC arası $75km$, CD arası $90km$ ve son olarak DA arası $140km$ olduğundan satıcı bu yolu izleyerek toplam $430km$ yol almış olur. Aynı yolu tersten gittiğini düşünelim. Yine A 'dan başlayıp $ADCBA$ yolunu takip etsin. Yol uzunluğu yine $140km$ olacaktır. Dolayısıyla seçenek sayısı yarıya inmiş oluyor. $\frac{3!}{2} = 3$ farklı seçenek vardır.

3 seçenek çok değildir. Bu seçeneklerin hepsi tek tek yazılıp, mesafeler hesaplanarak en kısa yol bulunabilir. Bu formülü n şehir için genelleştirecek olursak $\frac{(n-1)!}{2}$ formülü elde edilir. Gezgin satıcının gitmesi gereken şehir sayısı 4 değil de 10 olursa $\frac{9!}{2} = 181440$ farklı durum hesaplamamız gerekir. Bu sonuç tek tek yazılıp hesaplanabilecek bir sayı değildir. Bu konuda bilgisayarlardan yardım alabiliriz. Saniyede 1000 farklı durum hesaplayabilen bir bilgisayar düşünelim. Gezin satıcının gezeceği 10 şehir içerisinde en kısa olanı 3 dakikada bulabilecektir. Şehir sayısını 10'dan 20'ye çıkarırsak yaklaşık olarak $\frac{19!}{2} = 6,08.10^{16}$ farklı seçenek karşımıza çıkıyor. Yine saniyede 1000 işlem yapan bilgisayarla bu seçenekleri hesaplamaya çalışırsak 2 milyon yıl sürüyor. Şehir sayısı arttıkça hesaplanacak seçenek sayısı ve hesaplama süresinin artışı hızlanıyor. Buradaki örnekte bütün yolları çift yönlü gibi düşündük. Bir de bu yollara yön koyarsak en kısa yolu hesaplamak daha da karmaşık hale geliyor.

2.2 İki Parçalı Graflar

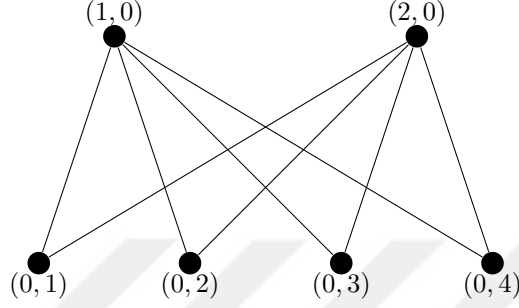
Burada daha sonra anlatacaklarımıza temel oluşturması açısından iki parçalı graflar açıklanacaktır.

Tanım 2.4 Bir grafın köşe kümesi V_1 ve V_2 olarak iki ayrık kümeye ayrılabilir ve her kenar bir ucu V_1 diğer ucu V_2 kümesine ait olan bir köşe çiftini birleştiriyorsa bu grafa iki-parçalı (bipartite) graf denir.

$G(V, E)$ iki-parçalı bir graftır $\iff V = V_1 \cup V_2$ ve $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ Her $e \in E$ için

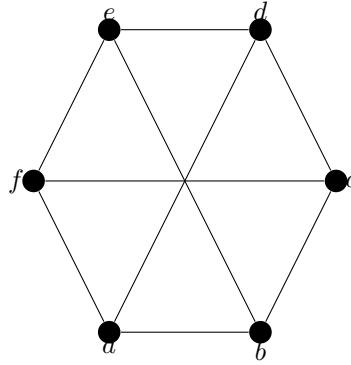
$e = (v_1, v_2)$, $v_1 \in V_1$ ve $v_2 \in V_2$ olmalıdır (Aldous ve Wilson 2000).

Örnek 2.2 Aşağıda şekil 2.8'de verilen grafin köşelerini $V_1 = \{(1, 0), (2, 0)\}$ kümesi ve $V_2 = \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4)\}$ kümesi olmak üzere iki ayrık kümeye ayırdığımızda, graftaki bütün kenarların bir köşesi V_1 kümesinde, diğer köşesi V_2 kümesinde olduğundan bu graf iki parçalı bir graftır.



Şekil 2.8. İki Parçalı Graf

İki-parçalı grafin tanımını verdikten sonra şu soru aklımıza gelir. Bir graf verildiğinde bu grafin iki-parçalı olup olmadığını nasıl anlarız? Örneğin şekil 2.9'de verilen graf iki-parçalı bir graf mıdır?

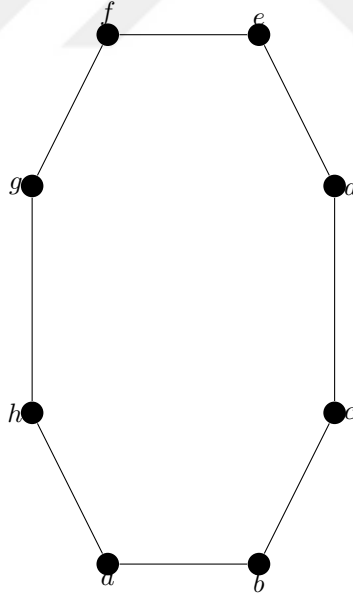


Şekil 2.9. Altıgen Graf

Şekil 2.9'de verilen grafin iki parçalı olup olmadığını bakarak anlamamız zordur. Bunu kolaylaştırmak için bir algoritma verebiliriz. Komşu olan köşeler farklı renkte olmak koşuluyla grafi en az sayıda renk ile boyamak istiyoruz. İki-parçalı graflarda köşeler iki ayrık kümeye ayrılır. Bir kümedeki köşeler arasında kenar olmadığı için aynı kümedeki köşeleri aynı renge boyayabiliriz. Dolayısıyla iki-parçalı graflar sadece iki renk ile boyanabilen graflardır. O halde şöyle bir algoritma verebiliriz:

1. Herhangi bir köşeyi seç ve maviye boya.
2. Bir önceki adımda maviye boyadığın köşelerin herhangi bir renge boyanmamış komşularını kırmızıya boya.
3. Bir önceki adımda kırmızıya boyanmış köşelerin hiçbir renge boyanmamış komşularını maviye boya.
4. Tüm köşeler boyanana kadar 2. ve 3. adımları tekrarla.
5. Eğer komşu iki köşe aynı renge boyanmışsa bu graf iki-parçalı değildir. Aksi takdirde bu graf iki-parçalıdır.
6. Eğer graf iki parçalı ise bu grafın köşe kümesi kırmızı renkli köşeler ve mavi renkli köşeler olmak üzere ikiye ayrılır.

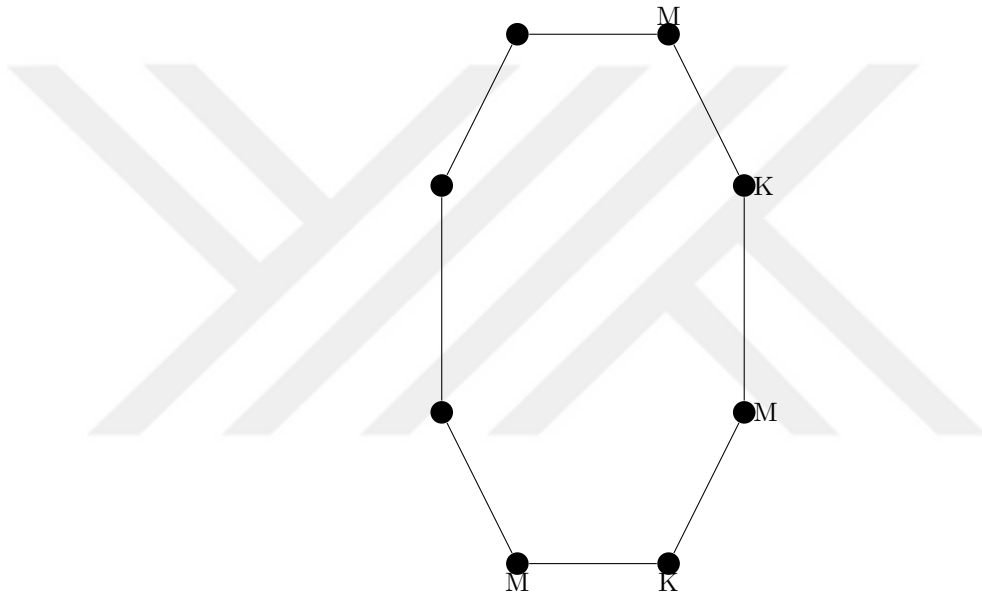
Örnek 2.3 Aşağıda şekil 2.10'de verilen grafın iki-parçalı olup olmadığını tespit etmek için verilen algoritmayı uygulayalım.



Şekil 2.10. Sekizgen Graf

- Birinci adımda rastgele bir köşe seçeceğiz. c köşesini seçelim ve maviye boyayalım.
- İkinci adımda c köşesinin komşuları olan b ve d köşelerini kırmızıya boyayalım.

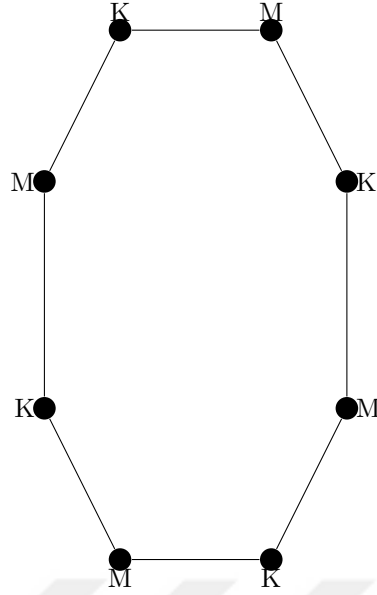
- Üçüncü adımda b ve d 'nin komşuları olan e ve a köşelerini maviye boyayalım. Böylelikle 2.11'de görünen grafi elde etmiş olduk.



Şekil 2.11. Sekizgen Graf

- 2. ve 3. adımları tekrarlayacağız. a ve e köşelerinin komşuları h ve f köşelerini kırmızıya boyayalım.

- h ve f köşelerinin komşuları olan g 'yi maviye boyayalım. Bütün köşeler boyandığı için algoritma tamamlandı. Böylelikle şekil 2.12'te verilen grafi elde etmiş olduk.

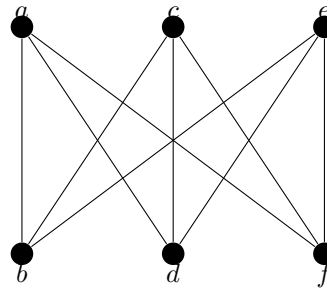


Şekil 2.12. Sekizgen Graf

Aynı renge boyalı komşu köşe bulunmadığından verilen graf iki parçalı bir graftır.

$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ köşe kümesi $V_1 = \{a, c, e, g\}$ ve $V_2 = \{b, d, f, h\}$ olmak üzere iki parçaya ayrılır.

Şekil 2.9'de verilen graf için de aynı algoritmayı uyguladığımızda a, c ve e köşelerinin aynı renkli, b, d ve f köşelerinin aynı renkli olduğu görülür. Aynı renkli köşeleri farklı kümelere koyarsak, köşe kümesi $V_1 = \{a, c, e\}$ ve $V_2 = \{b, d, f\}$ olmak üzere iki parçaya ayrılır. V_1 kümesindeki köşeleri üste, V_2 köşesindeki köşeleri alta yazarak aynı grafı çizdiğimizde şekil 2.13'ü elde ederiz. Bu şekilde çizdiğimizde iki-parçalı graf olduğu daha kolay görülebilir.



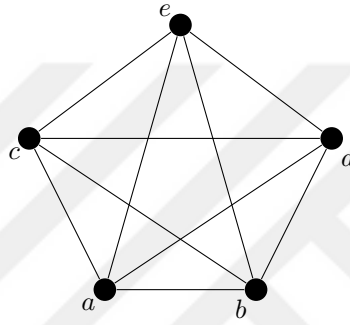
Şekil 2.13. Altıgen Graf

2.3 Tam Graflar

Bu bölümde daha sonra kullanacağımız için tam graflar ve iki parçalı tam graflar açıklanacaktır.

Tanım 2.5 Bir grafta herhangi iki köşe arasında bir kenar varsa bu grafa tam graf (complete graf) denir. K^n ile n köşeli bir tam grafı göstereceğiz. K^n grafında toplam $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ adet kenar vardır (Aldous ve Wilson 2000).

Örnek 2.4 Şekil 2.14'ta 5 köşeli bir tam graf verilmiştir.



Şekil 2.14. 5 Köşeli Tam Graf

İki parçalı tam graflar $K^{m,n}$ ile gösterilir. Burada köşe kümesi m elemanlı ve n elemanlı iki ayrık kümeye ayrılmıştır. Aynı kümede olmayan bütün köşeler arasında bir kenar vardır. Şekil 2.8'de verilen graf $K^{2,4}$ grafına, şekil 2.13'de verilen graf $K^{3,3}$ grafına bir örnektir.

3. CEBİRSEL GRAFLAR

Bu bölümde cebirsel yapıları kullanarak graflar tanımlanacaktır. Örneğin bir grup verildiğinde bu gruba uygun Cayley Grafları, bir halka verildiğinde bu halkaya uygun sıfır bölen grafları ve ideal tabanlı sıfır bölen grafları tanımlanacaktır. Bu bölümle birlikte cebir ve graf teoriiyi birbiriyle ilişkilendirmiş olacağız. Bir sonraki bölümde bu probemin tersi üzerinde durulacaktır. Yani bir graf verildiğinde bu grafa uygun bir cebirsel yapı var mıdır?

3.1 Cayley Grafları

Cayley Grafları bir grup ve üreteç kümesi ile tanımlanır. Bunun için önce konuya cebirsel giriş yapalım ve grup kavramını verelim.

Tanım 3.1 G bir küme ve $+$, G kümesi üzerinde tanımlanan bir ikili işlem olsun. Eğer $+$ işlemi aşağıdaki üç özelliği sağlıyorsa $(G, +)$ ikilisine grup denir (Fraleigh 2014).

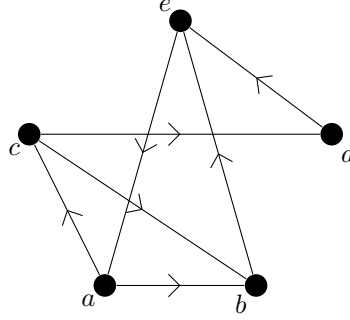
1. $\forall a, b, c \in G$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$ olmalıdır. Bu özelliğe birleşme özelliği denir.
2. Öyle bir $e \in G$ vardır ki $\forall a \in G$ için $a + e = e + a = a$ şartı sağlanır. Bu e elemanına grubun birim (etkisiz) elemanı denir.
3. $\forall a \in G$ için $a + (-a) = (-a) + a = e$ şartını sağlayan bir $-a \in G$ vardır. $-a$ elemanına a elemanının tersi denir.

Tanım 3.2 $(G, .)$ bir grup ve $S \subseteq G$ olsun. Eğer G grubunun her bir elemanı, S kümesindeki elemanlarının sonlu çarpımı olarak yazılabiliyorsa S kümesine G grubunun üreteç kümesi denir (Fraleigh 2014).

Bir grubu ve üreteç kümesini tanımladık. Cayley Grafları yönlü graflar olacağı için Cayley Graflarını tanımlamadan önce yönlü grafi tanımlayalım.

Tanım 3.3 Kenarlar üzerinde bir yön bulunan graflara yönlü graf (directed graf, digraf) denir. $G(V, E)$ olmak üzere $E = \{(a, b) \mid a, b \in V\}$ 'dir. Burada yön olduğundan dolayı $\{a, b\}$ yerine (a, b) sıralı ikilisi alınmıştır. E kümesinin elemanlarına yönlü kenar ya da kenar denir (Aldous ve Wilson 2000).

Örnek 3.1 $V = \{a, b, c, d, e\}$ köşe kümesi, $E = \{(a, b), (a, c), (c, d), (b, e), (d, e), (e, a)\}$ kenar kümesi olsun. $G = (V, E)$ yönlü grafi şekil 3.1'de verilmiştir.

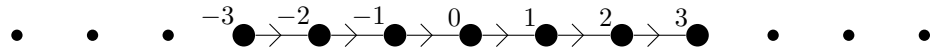


Şekil 3.1. Yönlü Graf

Şimdi Cayley Grafının tanımını verebiliriz.

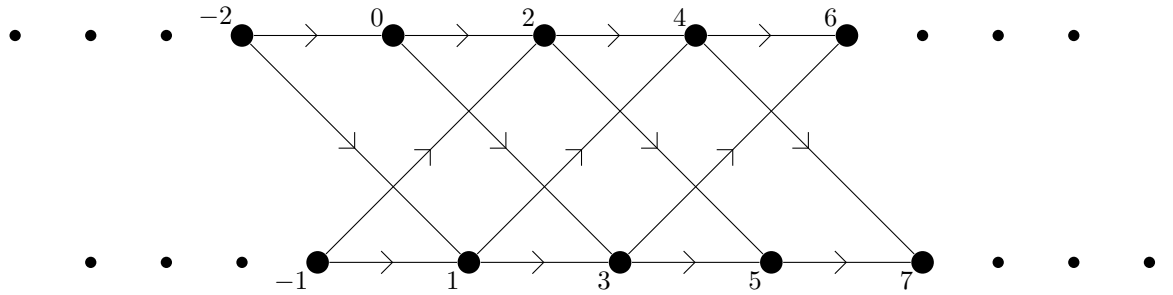
Tanım 3.4 $(G, .)$ bir grup olsun. Cayley Grafı'nın köşeleri G grubunun elemanlarından oluşur. G grubunun bir S üreteç kümesini alalım. $x.s = y$ şartını sağlayan bir $s \in S$ varsa x den y ye bir yönlü kenar vardır.

Örnek 3.2 Şekil 3.2'de verilen graf $(\mathbb{Z}, +)$ grubu ve $\{1\}$ üreteç kümesi ile üretilen bir Cayley Grafıdır.



Şekil 3.2. $(\mathbb{Z}, +)$ grubu ve $\{1\}$ üreteç kümesi

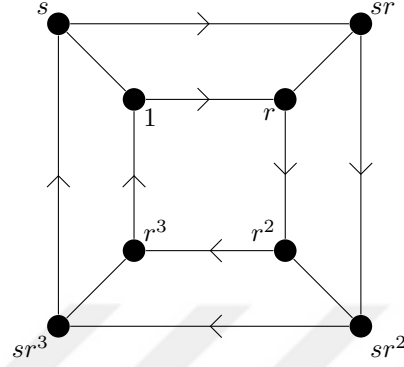
Örnek 3.3 Şekil 3.3'de verilen graf $(\mathbb{Z}, +)$ grubu ve $\{2, 3\}$ üreteç kümesini ile üretilen Cayley Grafıdır.



Şekil 3.3. $(\mathbb{Z}, +)$ grubu ve $\{2, 3\}$ üreteç kümesi

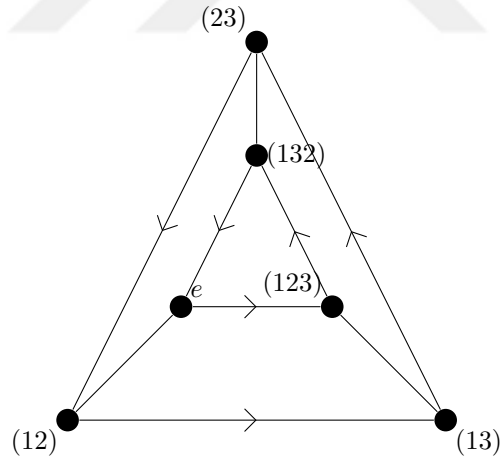
Bu örneklerden de görüleceği üzere bir gruptan birden fazla Cayley Grafi elde etmek mümkündür. Grubun her üreteç kümesi için farklı bir Cayley Grafi elde edilir.

Örnek 3.4 $D_4 = \langle (r, s) | r^4 = s^2 = 1, srs = s^{-1} \rangle$ Dihedral grubu ve üreteç kümesi $S = \{r, s\}$ ile üretilen Cayley Grafi şekil 3.4'de verilmiştir.



Şekil 3.4. D_4 Dihedral Grup

Örnek 3.5 $S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$ permütasyon kümesi ve $S = \{(12), (123)\}$ üreteç kümesi ile oluşturulan Cayley grafi şekil 3.5'de verilmiştir.



Şekil 3.5. S_3 Permütasyon Grubu

Grupları ya da üreteçleri çeşitlendirerek Cayley Graflarını çoğaltmak mümkündür.

3.2 Sıfır Bölen Grafları

Cayley Grafları ile bir grup ve üreteç kümesi verildiğinde bu gruba uygun grafi tanımladık. Grup değil de halka kullanarak bir graf yapısı tanımlayabilir miyiz? Bu

bölümde ve bir sonraki bölümde halka yapısı kullanarak bir graf tanımlayacağız. Bunun için önce halka tanımını verelim.

Tanım 3.5 R bir küme, $+$ ve $\cdot$ R kümesi üzerinde ikili işlemler olsunlar. $(R, +, \cdot)$ yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(R, +, \cdot)$ yapısına halka denir (Fraleigh 2014).

1. $(R, +)$ yapısı değişmeli bir grup olmalıdır.
2. $\forall a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ olmalıdır. Yani çarpma işlemi de R kümesi üzerinde birleşmeli olmalıdır.
3. $\forall a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ ve $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ olmalıdır. Bu özelliğe dağılma özelliği denir.

Eğer $\forall a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$ oluyorsa R halkasına değişmeli halka denir. Eğer çarpma işleminin birim elemanı varsa R ye birimli halka denir (Fraleigh 2014).

Tanım 3.6 Bir halkada sıfırdan farklı iki elemanın çarpımı sıfır oluyorsa bu iki elemana sıfır bölen denir. R bir halka, $a \in R$ ve $a \neq 0$ olsun. Eğer $a \cdot b = 0$ olacak şekilde $0 \neq b \in R$ elemanı varsa a ye R halkasının sıfır böleni denir (Fraleigh 2014). Bir R halkasının sıfır bölenleri kümesini $Z(R)$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.7 $(R, +, \cdot)$ değişmeli bir halka olsun. R halkasının sıfır bölen grafının köşeleri $Z(R)$ kümesinin elemanlarıdır, yani R halkasının sıfır bölenleridir. Bu graftan birbirinden farklı a ve b köşeleri alalım. Eğer $a \cdot b = 0$ ise a ve b köşeleri arasında bir kenar vardır. Bu grafi $\Gamma(R)$ ile göstereceğiz (Anderson ve Livingston 1999).

Örnek 3.6 $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ halkasını inceleyelim. Bu halkanın sıfır böleni $Z(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{2}\}$ 'dir. Sıfır bölenleri tek bir elemandan oluştuğu için sıfır bölen grafı bir köşelidir.



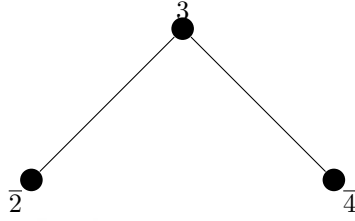
Şekil 3.6. $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$ Grafı

Örnek 3.7 $(\mathbb{Z}_9, +, \cdot)$ halkasını inceleyelim. $\bar{3} \cdot \bar{6} = \bar{0}$ olduğundan dolayı bu halkanın sıfır bölenleri $Z(\mathbb{Z}_9) = \{\bar{3}, \bar{6}\}$ 'dir. Bu iki köşe arasında da bir kenar vardır.



Şekil 3.7. $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ Grafi

Örnek 3.8 $(\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$ halkasını inceleyelim. Bu halkanın sıfır bölenleri $Z(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$ ve $\bar{3} \cdot \bar{4} = \bar{0}$ olduğundan $\bar{2} - \bar{3}$ kenarı ve $\bar{3} - \bar{4}$ kenarı olmalıdır. Ancak $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{2}$ olduğundan $\bar{2} - \bar{4}$ kenarı yoktur. Dolayısıyla $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ grafi şekil 3.8'deki gibi elde edilir.



Şekil 3.8. $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ Grafi

Üç köşeli iki farklı bağlantılı graf vardır. Bir tanesi şekil 3.8'de verilen graftır. Diğer için $\mathbb{Z}_2[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ halkasını inceleyelim. Bunun için önce bölüm halkasının tanımını verelim.

Tanım 3.8 R bir halka ve I , R halkasının bir ideali olsun. Her $a, b \in R$ için $a \sim b$ bağıntısını $a - b \in I$ şeklinde tanımlayalım. Bu bağıntı bir denklik bağıntısıdır. Şimdi bir $r \in R$ için bu bağıntıya göre denklik sınıfını bulalım.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \{x \in R | x \sim r\} \\ &= \{x \in R | x - r \in I\} \\ &= \{x \in R | x = r + a, a \in I\} \\ &= \{r + a | a \in I\} \\ &= r + I \end{aligned}$$

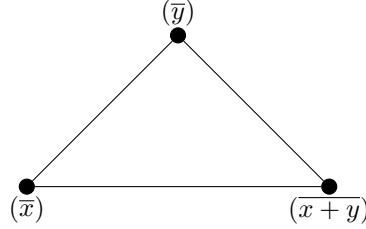
R/I ile denklik sınıflarının kümesini gösterelim. $R/I := \{a + I | r \in R\}$ Bu küme üzerinde toplama ve çarpma işlemleri tanımlayalım.

$$(r + I) \oplus (s + I) = (r + s) + I$$

$$(r + I) \odot (s + I) = (r \cdot s) + I$$

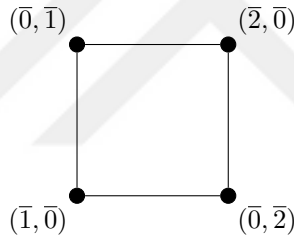
R/I kümesi yukarıda tanımlanan $\oplus$ ve $\odot$ işlemleriyle bir halkadır. Bu halkaya R 'nin bölüm halkası denir (Fraleigh 2014).

$Z(\mathbb{Z}_2[x, y]/(x^2, xy, y^2)) = \{\bar{x}, \bar{y}, \overline{x+y}\}$ 'dir. Bu halkada $\bar{x}.\bar{y} = \bar{0}$, $\bar{x}.\overline{x+y} = \bar{0}$ ve $\bar{y}.\overline{x+y} = \bar{0}$ 'dir. O halde $\Gamma(\mathbb{Z}_2[x, y]/(x^2, xy, y^2))$ grafi şekil 3.9'teki gibi elde edilir.



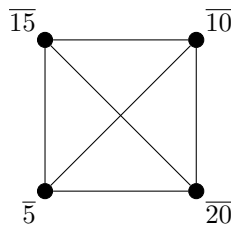
Şekil 3.9. $\Gamma(\mathbb{Z}_2[x, y]/(x^2, xy, y^2))$ Grafi

Örnek 3.9 Dört köşeli grafları inceleyelim. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ halkasını inceleyelim. Bu halkanın sıfır bölenleri $Z(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) = \{(\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2})\}$ elde edilir. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ grafi şekil 3.10'de verilmiştir.



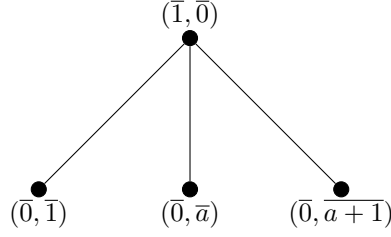
Şekil 3.10. $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ Grafi

Bunun dışında $\mathbb{Z}_{25}$ halkasının sıfır bölen grafi da dört köşelidir. $Z(\mathbb{Z}_{25}) = \{\bar{5}, \bar{10}, \bar{15}, \bar{20}\}$ 'dir. $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ grafi şekil 3.11'de verilmiştir.



Şekil 3.11. $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$ Grafi

Son olarak dört köşeli $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4$ halkasının sıfır bölen grafi vardır. Burada $\mathbb{F}_4$ 4 elemanlı cisim anlamına gelmektedir. Yani $\mathbb{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{a}, \overline{a+1}\}$. Bu graf şekil 3.12'de gösterilmiştir.

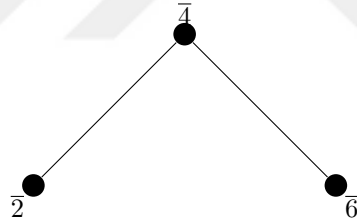


Şekil 3.12. $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4)$ Grafı

Tanım 3.9 $G = (V_G, E_G)$ ve $H = (V_H, E_H)$ birer graf olsunlar. Eğer birebir ve örten $f : V_G \mapsto V_H$ fonksiyonu varsa ve $\{a, b\} \in E_G$ için $\{f(a), f(b)\} \in E_H$ oluyorsa G ve H graflarına izomorf graflar denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir (Aldous ve Wilson 2000).

Örnek 3.10 Şekil 3.7’de verilen graf K^2 ’ye, şekil 3.9’da verilen graf K^3 ’e, şekil 3.11’de verilen graf K^4 ’e izomorftur.

$\Gamma(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$ grafını inceleyelim. $Z(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ ’dir. $\bar{4} \cdot \bar{2} = \bar{0}$ ve $\bar{4} \cdot \bar{6} = \bar{0}$ olduğundan $\bar{4}$ ile $\bar{2}$ ve $\bar{6}$ arasında kenar vardır. Bunun dışında da bir kenar yoktur. Bu graf şekil 3.13’de verilmiştir. Görüldüğü gibi şekil 3.8’de verilen graf ile 3.13’de verilen graf



Şekil 3.13. $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ Grafı

birbirine izomorftur. $\mathbb{Z}_6$ ve $\mathbb{Z}_8$ halkaları birbirine izomorf değildir. İki halka birbirine izomorf olmasa bile sıfır bölen grafları birbirine izomorf olabilir.

Tanım 3.10 u ve v , bir G grafında iki köşe olsun. Bu grafta u dan başlayıp v de biten bir köşe dizisi alalım. Bu dizide her köşe kendisinden önceki ve sonraki köşeyle komşu olsun. Bu diziye bir yürüyüş denir. Bir yürüyüşte bir köşeden birden fazla kez geçilebilir. Eğer bir yürüyüşte bütün köşeler birbirinden farklıysa bu yürüyüşe patika (path) denir. Bir yürüyüşteki kenarların sayısı bu yürüyüşün uzunluğunu verir. u ve v köşeleri arasında birden çok yürüyüş olabilir. Bu yürüyüşlerin en kısa olanının uzunluğuna u ve v arasındaki uzaklık denir ve $d(u, v)$ ile gösterilir. Eğer u ve v arasında bir patika yoksa $d(u, v) = \infty$

kabul edilir. G grafinın çapı bu graftaki tüm köşeler arasındaki uzaklığın en büyüğü olarak tanımlanır ve $diam(G)$ ile gösterilir (Aldous ve Wilson 2000).

Tanım 3.11 Bir G grafinde bulunan her iki köşe arasında bir path varsa bu grafa bağlantılı (connected) graf denir (Aldous ve Wilson 2000).

Teorem 3.1 R değişmeli bir halka olsun. Bu durumda $\Gamma(R)$ bağlantılı bir graftır ve herhangi iki köşe arasındaki uzaklık 3'e eşit yada küçüktür. (Anderson ve Livingston 1999)

İspat. $\Gamma(R)$ grafinde rastgele iki köşe alalım. $a, b \in Z(R)$ olsun. a ile b köşeleri arasında her zaman bir yol olduğunu ve aralarındaki uzaklığın her zaman 4'ten küçük olduğunu göstermeye çalışıyoruz.

- $a.b = 0$ ise $\Gamma(R)$ grafinde $a - b$ yolu vardır ve $d(a, b) = 1$ 'dir.
- $a.b \neq 0$ ise
 - $a^2 = 0$ ve $b^2 = 0$ ise $\Gamma(R)$ grafinde $a - ab - b$ yolu vardır ve $d(a, b) = 2$ 'dir.
 - $a^2 = 0$ ve $b^2 \neq 0$ ise $a \in Z(R)$ ve $b^2 \neq 0$ olduğundan $c.b = 0$ olacak şekilde bir $c \in Z(R)$ vardır ve $c \neq b$ 'dir.
 - $a.c = 0$ ise $\Gamma(R)$ grafinde $a - c - b$ yolu vardır ve $d(a, b) = 2$ 'dir.
 - $a.c \neq 0$ ise $\Gamma(R)$ grafinde $a - ac - b$ yolu vardır ve $d(a, b) = 2$ 'dir.
 - $a^2 \neq 0$ ve $b^2 = 0$ ise $a^2 = 0$ ve $b^2 \neq 0$ durumu gibi gösterilebilir.
 - $a^2 \neq 0$ ve $b^2 \neq 0$ ise $a.x = 0$ ve $b.y = 0$ olacak şekilde $x, y \in Z(R)$ vardır.
 - $x.y = 0$ ise $\Gamma(R)$ grafinde $a - x - y - b$ yolu vardır ve $d(a, b) = 3$ 'tür.
 - $x.y \neq 0$ ise $\Gamma(R)$ grafinde $a - xy - b$ yolu vardır ve $d(a, b) = 2$ 'dir.

$\Gamma(R)$ grafinde rastgele iki a ve b köşeleri alıp aralarındaki uzaklık 4 küçük olacak şekilde bir yol bulduk. Dolayısıyla $\Gamma(R)$ grafi bağlantılı bir graftır ve herhangi iki köşe arasındaki mesafe daima 4'ten küçüktür. ■

3.3 İdeal Tabanlı Graflar

Tanım 3.12 R bir halka ve I kümesi R 'nin boştan farklı altkümesi olsun. Eğer

1. $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$,
2. $\forall a \in R$ ve $\forall b \in I$ için $a.b \in I$

şartları sağlanıyorsa I 'ya R 'nin bir ideali denir (Fraleigh 2014).

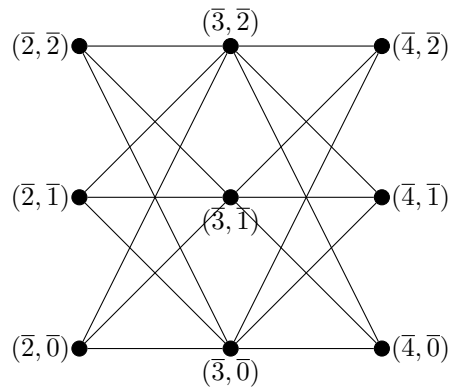
Tanım 3.13 R değişmeli bir halka ve I , R 'nin bir ideali olsun. İdeal tabanlı grafın köşeleri I 'da olmayan ama birbiriyle çarpıldığında sonucu I 'da olan elemanlardan oluşur. Yani köşe kümesi $\{x \in R - I | x.y \in I, \exists y \in I\}$ olur. Birbirinden farklı x ve y köşeleri için eğer $x.y \in I$ ise x ve y köşeleri arasında bir kenar vardır. Bu grafı $\Gamma_I(R)$ şeklinde göstereceğiz. (Redmond 2003)

Bu tanımla aslında sıfır bölen graflarını ideallere genişletmiş olduk. İdeal tabanlı grafların tanımında kullandığımız ideali $I = 0$ alırsak sıfır bölen grafı elde etmiş oluruz.

Örnek 3.11 Yukarıda verilen tanıma göre $R = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3$ halkasını ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_3$ idealini düşünelim. $\Gamma_I(R)$ grafının köşeleri

$$\{(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2}), (\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{2})\}$$

'dir. $\bar{2}.\bar{3} = \bar{0}$ ve $\bar{3}.\bar{4} = \bar{0}$ olduğundan dolayı $(\bar{2}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{2})$ ile $(\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2})$ elemanları arasında ve $(\bar{3}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{1}), (\bar{3}, \bar{2})$ ile $(\bar{4}, \bar{0}), (\bar{4}, \bar{1}), (\bar{4}, \bar{2})$ elemanları arasında kenarlar vardır. $\Gamma_I(R)$ grafı şekil 3.14'deki gibi elde edilir.



Şekil 3.14. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_3)$

Değişmeli bir R halkası ve R 'nin bir I idealini alarak ideal tabanlı $\Gamma_I(R)$ grafını tanımladık. Bir halka ve bu halkanın bir ideali varsa aklımıza bölüm halkası gelir.

R/I halkası üzerinde bir graf tanımlayabilir miyiz? Bu graf daha önce tanımladığımız sıfır bölen grafi olsun. $\Gamma(R/I)$ sıfır bölen grafi ile $\Gamma_I(R)$ grafi arasında nasıl bir ilişki vardır? Şimdi bu soruya cevap arayalım.

$x + I$ ve $y + I$, $\Gamma(R/I)$ 'nin iki köşesi olsun. Bu durumda $x \in R$ 'dir. $x + I$, R/I halkasının sıfır böleni olduğundan $x + I \neq 0$ 'dir. Dolayısıyla $x \notin I$ 'dir. $x + I$ ile $y + I$ arasında bir kenar varsa $(x + I)(y + I) = xy + I = 0$ olmalıdır. Bu $xy \in I$ anlamına gelir. O halde $\Gamma(R/I)$ grafında $x + I$ ile $y + I$ komşuysa $\Gamma_I(R)$ grafında x ile y komşudur. Bunun tersi doğru mudur? Yani $\Gamma_I(R)$ grafında x ve y köşeleri komşuysa $\Gamma(R/I)$ grafında $x + I$ ve $y + I$ köşeleri komşu mudur? x ile y , $\Gamma_I(R)$ grafında köşe oldukları için $x, y \in R - I$ 'dir. Dolayısıyla $x + I \neq 0$ ve $y + I \neq 0$ 'dir. x ile y köşeleri $\Gamma_I(R)$ grafında komşu oldukları için $x.y \in I$ 'dir. $x \neq y$ olsa bile $x + I = y + I$ olabilir. $x + I \neq y + I$ ise $(x + I)(y + I) = xy + I = 0$ 'dir. Bu durumda $x + I$ ile $y + I$ köşeleri $\Gamma(R/I)$ grafında komşudur. Eğer $x + I = y + I$ ise bu durumda $0 = xy + I = (x + I)(y + I) = (x + I)(x + I) = x^2 + I$ olduğundan $x^2 \in I$ 'dir.

$x + I$, R/I bölüm halkasının bir elemanıdır ancak R halkasında bir denklik sınıfı yani bir kümedir. Dolayısıyla $x + I$, $\Gamma(R/I)$ grafında tek bir köşe iken, $\Gamma_I(R)$ grafında birden fazla köşe barındırabilir. O halde $\Gamma_I(R)$ grafında aynı denklik sınıfında bulunan köşeler arasındaki ilişkiyi incelemeliyiz.

$x + a_1, x + a_2 \in x + I$ olsun. $(x + a_1).(x + a_2) = x^2 + x.a_2 + a_1.x + a_1.a_2$ olduğundan eğer $x^2 \in I$ ise $(x + a_1).(x + a_2) \in I$ elde edilir. Bu $x^2 \in I$ olduğunda $x + a_1$ ile $x + a_2$ köşelerinin komşu olduğu anlamına gelir. Yani $x^2 \in I$ ise $x + I$ kümesinin elemanları $\Gamma_I(R)$ grafında birbiriyle komşudur.

$x + a \in x + I$ ve $y + b \in y + I$ olsun. $(x + a)(y + b) = xy + xb + ay + ab$ olduğundan $xy \in I$ ise $(x + a)(y + b) \in I$ olur. Bu da $xy \in I$ olduğundan $x + a$ ile $y + b$ 'nin komşu olduğu anlamına gelir. Yani $\Gamma_I(R)$ grafında x ile y köşeleri komşuysa $x + I$ kümesindeki köşelerle $y + I$ kümesindeki köşeler birbiriyle komşudur.

$\Gamma(R/I)$ grafının köşeleri $a_1 + I, a_2 + I, \dots, a_n + I$ olsun. Her $i \in I$ için bir G_i grafi tanımlayalım. Bu grafın köşe kümesi $a_1 + i, a_2 + i, \dots, a_n + i$ olsun. $1 \leq k \leq n$ için $a_k + I$ ile $a_l + I$ arasında $\Gamma(R/I)$ grafında bir kenar varsa G_i grafında da $a_k + i$ ile $a_l + i$ köşeleri arasında da bir kenar olsun. Şimdi tüm G_i graflarının köşelerini birleştirerek bir G grafi elde edelim. Bu graftaki kenarları ise üç şekilde tanımlayalım.

1. Her $i \in I$ için G_i 'de bulunan tüm kenarlar G grafında da bulunsun.
2. $1 \leq k \leq n$, ve her $i, j \in I$ için eğer $a_k \cdot a_l \in I$ ise $a_k + i$ ve $a_l + j$ arasında bir kenar olsun.
3. Her $i, j \in I$ için eğer $a_k^2 \in I$ ise $a_k + i$ ve $a_k + j$ köşeleri arasında bir kenar bulunsun.

Yukarıdaki açıklamalardan yararlanarak ileride kullanacağımız bağlantılı kolon tanımını verelim.

Tanım 3.14 $\Gamma(R/I)$ grafının köşelerinin $\Gamma_I(R)$ grafındaki karşılıklarına bir kolon denir. Yani $\Gamma(R/I)$ grafının köşeleri $a_1 + I, a_2 + I, \dots, a_n + I$ olsun. $1 \leq k \leq n$ için $a_k + I$ kümesine $\Gamma_I(R)$ 'nin bir kolon denir. Eğer $a_k^2 \in I$ ise $a_k + I$ kümesine $\Gamma_I(R)$ 'nin bir bağlantılı kolonu (connected column) denir. (Redmond 2003)

3.4 İdeal Tabanlı Modül Graflar

(Nikmehr ve Khojasteh 2015) makalesinde modülleri kullanarak yeni bir graf tanımı vermiştir. Bu bölümde önce modül tanımı verilecek, sonra (Nikmehr ve Khojasteh 2015) makalesinde tanımlanan graf tanımı ve bunun örneği verilecektir.

Tanım 3.15 R bir halka ve $(M, \oplus)$ ikilisi bir değişmeli grup olsun. R kümesinin elemanları ile M kümesinin elemanları arasında tanımlanan $\odot : R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa M 'ye sol R modül denir (Atiyah ve Macdonald 1969).

1. $\forall r \in R$ ve $\forall m_1, m_2 \in M$ için $r \odot (m_1 \oplus m_2) = (r \odot m_1) \oplus (r \odot m_2)$
2. $\forall r_1, r_2 \in R$ ve $\forall m \in M$ için $(r_1 + r_2) \odot m = (r_1 \odot m) \oplus (r_2 \odot m)$
3. $\forall r_1, r_2 \in R$ ve $\forall m \in M$ için $(r_1 \cdot r_2) \odot m = r_1 \odot (r_2 \odot m)$

R birimli bir halka ve $\forall m \in M$ için $1 \odot m = m$ oluyorsa M 'ye birimli (uniter) sol R modül denir. Eğer $\odot : M \times R \rightarrow M$ fonksiyonu da yukarıda verilen özellikleri sağlıyor ise M 'ye sağ R modül denir. Eğer M hem sol R modül hem sağ R modülse M 'ye R modül denir (Atiyah ve Macdonald 1969).

Tanım 3.16 R değişmeli bir halka, I , R halkasının bir ideali ve M bir R -modül olsun. İdeal tabanlı modül grafları $\Upsilon_I(M)$ ile göstereceğiz.. $\Upsilon_I(M)$ grafının köşe kümesi M modülünün sıfırdan farklı elemanlarından oluşur.

$$V(\Upsilon_I(M)) = M^* = M - \{0\}$$

Birbirinden farklı $x, y \in M^*$ için $[x : M].[y : M] \subseteq I$ oluyorsa x ve y köşeleri arasında kenar vardır.

$$E(\Upsilon_I(M)) = \{(x, y) \mid [x : M].[y : M] \subseteq I, x, y \in V(M)\}$$

Burada $[x : M]$ ifadesi

$$[x :_R M] := \{r \in R \mid r \odot M \subseteq R \odot x\}$$

şeklinde tanımlanır. Hangi halka üzerinde çalıştığımız belliyse kolaylık olması açısından $[x : M]$ şeklinde gösterilir (Nikmehr ve Khojasteh 2015).

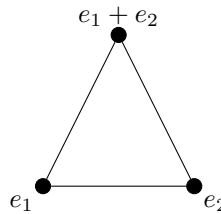
Örnek 3.12 Yukarıda verilen tanıma göre $R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ seçersek $e_1 = (\bar{1}, \bar{0})$ ve $e_2 = (\bar{0}, \bar{1})$ için

$$[e_1 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2] = \{r \in \mathbb{Z} \mid r.(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \subseteq \mathbb{Z}.e_1\} = \{r \in \mathbb{Z} \mid r.(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \subseteq \mathbb{Z}_2 \times 0\} = 2\mathbb{Z}$$

$$[e_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2] = \{r \in \mathbb{Z} \mid r.(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \subseteq \mathbb{Z}.e_2\} = \{r \in \mathbb{Z} \mid r.(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \subseteq 0 \times \mathbb{Z}_2\} = 2\mathbb{Z}$$

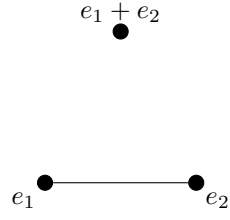
$$[e_1 + e_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2] = \{r \in \mathbb{Z} \mid r.(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \subseteq \mathbb{Z}(e_1 + e_2)\} = \{r \in \mathbb{Z} \mid r.(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \subseteq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\} = \mathbb{Z}$$

olduğundan dolayı eğer $I = 2\mathbb{Z}$ seçersek e_1 , e_2 ve $e_1 + e_2$ hepsi birbiriyle komşu olur. Bu graf şekil 3.15'de gösterilmiştir.



Şekil 3.15. $\Upsilon_{2\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı

Ancak $I = 4\mathbb{Z}$ seçersek e_1 ile e_2 komşu olur, $e_1 + e_2$ köşesinin herhangi bir komşusu olmaz. Bu graf şekil 3.16'de gösterilmiştir.

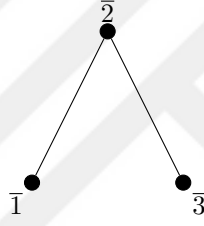


Şekil 3.16. $\Upsilon_{4\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafi

Halkayı ve modülü $R = M = \mathbb{Z}_4$ seçersek

$$[\bar{1} : \mathbb{Z}_4] = \{r \in \mathbb{Z}_4 \mid r.\mathbb{Z}_4 \subseteq \mathbb{Z}_4\} = \mathbb{Z}_4$$

elde edilir. Benzer şekilde $[\bar{2} : \mathbb{Z}_4] = 2\mathbb{Z}_4$ ve $[\bar{3} : \mathbb{Z}_4] = \mathbb{Z}_4$ elde edilir. Eğer ideali $I = 2\mathbb{Z}_4$ seçersek $\bar{1}$ ile $\bar{2}$ ve $\bar{2}$ ile $\bar{3}$ komşu düğümler olur. $[\bar{1} : \mathbb{Z}_4][\bar{3} : \mathbb{Z}_4] = \mathbb{Z}_4 \subseteq 2\mathbb{Z}_4$ olduğundan $\bar{1}$ ile $\bar{3}$ komşu değildir. Bu grafin gösterimi şekil 3.17’da verilmiştir.



Şekil 3.17. $\Upsilon_{2\mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_4)$ Grafi

4. GRAFA UYGUN CEBİRSEL YAPIYI BULMA

Önceki bölümde bize bir halka verildiğinde bu halkaya göre sıfır bölen grafi oluşturduk, bir halka ve ideali verildiğinde ideal tabanlı graf oluşturduk. Bu bölümde bu problemin tersini düşüneceğiz. n köşeli bir graf verildiğinde, R bir halka ve I bu halkanın bir ideali olmak üzere, bu graf $\Gamma_I(R)$ grafi olarak görülebilir mi? Bu soru üzerine düşüneceğiz. Bir miktar cevap bulacağız. Yukarıda verilen soruya cevap ararken konuyu kesintiye uğratmamak adına kullanacağımız teoremleri toplu şekilde verelim.

Teorem 4.1 R değişmeli bir halka ve I bu halkanın bir ideali olsun. $\Gamma_I(R)$ grafinin köşe sayısı $\Gamma(R/I)$ grafinin köşe sayısı ile I idealinin eleman sayısının çarpımına eşittir (Redmond 2003).

İspat. $\Gamma(R/I)$ grafinin köşeleri $a_1 + I, a_2 + I, \dots, a_n + I$ olsun. I idealinin k tane elemanı olduğunu varsayalım. Bu durumda $a_1 + I, a_2 + I, \dots, a_n + I$ kümelerinin her birinde k tane eleman vardır. Bu kümelerin elemanları $\Gamma_I(R)$ grafında köşe oldukları için $\Gamma_I(R)$ grafinin $n.k$ kadar köşesi vardır. ■

Teorem 4.2 R değişmeli bir halka ve I bu halkanın ideali olsun. $\Gamma_I(R)$ grafi bağlantılı bir graftır (Redmond 2003).

İspat. Teorem 3.1'dekine benzer şekilde yapılabilir. ■

Teorem 4.3 R değişmeli bir halka ve I bu halkanın bir ideali olsun. $\Gamma(R/I)$ grafi tek bir köşeden oluşuyorsa $\Gamma_I(R)$ grafi tam (complete) graftır.

İspat. $\Gamma(R/I)$ grafinin köşesi $a+I$ olsun. $a+I$, R/I halkasının bir sıfır böleni olacağı ve R/I halkasının $a+I$ elemanından başka sıfır böleni olmadığı için $(a+I)(a+I) = a^2 + I = 0 + I$ olur. Dolayısıyla $a^2 \in I$ elde edilir. Bu durumda $\Gamma_I(R)$ grafında yalnız bir bağlantılı kolon vardır. Her $i, j \in I$ için $a+i, a+j \in a+I$ ve $(a+i)(a+j) \in I$ olduğundan dolayı $a+i$ ve $a+j$, $\Gamma_I(R)$ grafında komşudur. $\Gamma_I(R)$ grafinin köşeleri $a+I$ kümesinin elemanlarından oluştuğu için $\Gamma_I(R)$ tam graftır. ■

Teorem 4.4 $n \geq 2$ bir tamsayı olsun. $K^n \cong \Gamma_I(R)$ olacak şekilde bir R halkası ve bu halkanın bir I ideali vardır. (Redmond 2003)

İspat. $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_n$ halkası ve bu halkanın $I = 0 \times \mathbb{Z}_n$ ideali seçilirse $R/I \cong \mathbb{Z}_4$ olur. $\Gamma(R/I)$ halkası tek bir köşeden oluşacağı için teorem 4.3'den dolayı $\Gamma_I(R)$ grafi n köşeli bağlantılı bir graftır. ■

Lemma 4.1 R bir halka ve I bu halkanın bir ideali olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır: (Redmond 2003)

1. Eğer $\Gamma(R/I)$ grafi iki köşeden oluşuyorsa, $\Gamma_I(R)$ grafında ya iki bağlantılı kolonu vardır ya da hiç bağlantılı kolonu yoktur.
2. Eğer $\Gamma(R/I) \cong K^3$ ise $\Gamma_I(R)$ grafında üç bağlantılı kolon vardır.
3. Eğer $\Gamma(R/I) \cong K^{1,2}$ ise $\Gamma_I(R)$ grafında ya bağlantılı kolon yoktur ya da $\Gamma(R/I)$ grafında iki köşeye komşu olan köşe, $\Gamma_I(R)$ grafının tek bağlantılı kolonudur.
4. Eğer $\Gamma(R/I) \cong K^{1,3}$ ise $\Gamma_I(R)$ grafında bağlantılı kolon yoktur.
5. Eğer $\Gamma(R/I) \cong K^4$ ise $\Gamma_I(R)$ grafında dört bağlantılı kolon vardır.
6. Eğer $\Gamma(R/I) \cong K^{2,2}$ ise $\Gamma_I(R)$ grafında bağlantılı kolon yoktur.

Şimdi asıl konuya girmek için hazırız. Bu kısmı köşe sayılarına göre ayırıp inceleyelim.

4.1 Bir Köşeli Graflar

Bir köşeli ideal tabanlı graf sadece sıfır bölen grafi olabilir. $R = \mathbb{Z}_4$ halkası ve $I = 0$ ideali alınırse istenilen graf elde edilmiş olur. Bu graf örnek 3.6'da verilmiştir.

4.2 İki Köşeli Graflar

$\Gamma_I(R)$ grafının köşe sayısı 2 olacağıın teorem 4.1'den dolayı $n = 2$ ve $|I| = 1$ veya $n = 1$ ve $|I| = 2$ 'dir. Eğer $n = 2$ ve $|I| = 1$ ise sıfır bölen grafi elde ederiz. Bu durum için $R = \mathbb{Z}_9$ halkası ve $I = 0$ ideali seçilebilir. Bu durum 3.7'de incelenmiştir.

Şimdi $n = 1$ ve $|I| = 2$ durumunu inceleyelim. Bir köşeli sıfır bölen grafi için $\mathbb{Z}_4$ halkasının sıfır bölen grafını örnek olarak vermiştik. Burada ideal de $|I| = 0$ idealiydi. Biz $|I| = 2$ olan idealleri arıyoruz. O halde $\mathbb{Z}_4$ halkasını ve $I = 0$ idealini $\mathbb{Z}_2$ ile

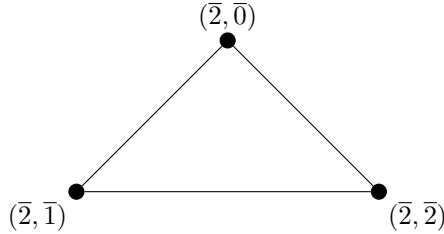
arparak $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali elde ederiz. Bylece $I \neq 0$ için $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali ile iki köşeli sıfır blen grafindan farklı bir ideal tabanlı graf oluşturabiliriz. Bu graf şekil 4.1’de gsterilmiştir.



şekil 4.1. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ Grafı

4.3 Üç Köşeli Graflar

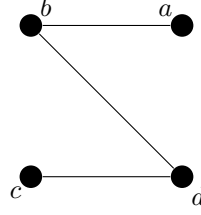
$\Gamma_I(R)$ ’nin köşe sayısı 3 olacağından teorem 4.1’den dolayı $n = 3$ ve $|I| = 1$ veya $n = 1$ ve $|I| = 3$ olmak üzere iki durum vardır. $n = 3$ ve $|I| = 1$ durumu bize üç köşeli sıfır bölen graflarını verir. Örnek 3.8’de incelediğimize $\mathbb{Z}_6$ halkasının sıfır bölen grafi ve $\mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle$ halkasının sıfır bölen grafları bu duruma örnektir. $n = 1$ ve $|I| = 3$ durumunu inceleyelim. $\mathbb{Z}_4$ halkasının sıfır bölen grafi bir köşeli sıfır bölen grafına örnektir. Ancak burada ideal $I = 0$ idealidir. Biz üç elemanlı ideali arıyoruz. O halde $\mathbb{Z}_4$ halkasını ve $I = 0$ idealini $\mathbb{Z}_3$ ile çarparak $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_3$ ideali elde ederiz ki bu da bize istediğimize sonucu verir. Bu graf şekil 4.2’de gösterilmiştir.



şekil 4.2. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3)$ Grafı

4.4 Dört Köşeli Graflar

$\Gamma_I(R)$ dört köşeli olacağı için teorem 4.1’den dolayı $n = 4$ ve $|I| = 1$, $n = 2$ ve $|I| = 2$, $n = 1$ ve $|I| = 4$ şeklinde 3 durum vardır. $n = 4$ ve $|I| = 1$ durumu için sıfır bölen grafları elde edilir. Örnek 3.9’da bu sıfır bölen grafları incelenmiştir. Bunlar $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{25}$ ve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4$ halkalarının sıfır bölen graflarıdır. Bunların dışında 4 köşeli sıfır bölen grafi yoktur.



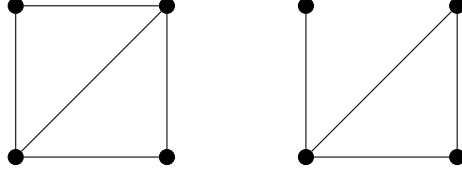
Şekil 4.3. Dört Köşeli Sıfır Bölen Olmayan Graf

Örneğin şekil 4.3’de verilen graf, bir halkanın sıfır bölen grafi olabilir mi? Verilen grafın değişmeli bir R halkasının sıfır bölen grafi olduğunu varsayalım. Bu durumda R halkasının sıfır bölenleri kümesi $Z(R) = \{a, b, c, d\}$ ’dir ve bu sıfır bölenler arasında $a.b = 0$, $b.d = 0$, $c.d = 0$ ilişkileri vardır. $a.b = 0$ ve $b.d = 0$ olduğundan $b.(a+d) = 0$ elde edilir. Bu durumda ya $a+d = 0$ ’dır yada $a+d$, R halkasının bir sıfır bölenidir. Eğer $a+d = 0$ ise $d = -a$ ’dır. $d.c = 0$ olduğundan $-a.c = 0 \Rightarrow a.c = 0$ ’dır. Ancak verilen grafta a köşesi ile c köşesi arasında bir kenar yoktur. Dolayısıyla $a+d = 0$ olamaz. Demek ki $a+d$, R halkasının sıfır bölenlerinden birisidir. R halkasının bütün sıfır bölenleri a, b, c ve d olduğundan $a+d$ bunlardan birine eşit olması gerekir. Bunları tek tek inceleyelim.

- $a+d = a$ ise $d = 0$ olur, bu da d ’nin sıfır bölen olmasıyla çelişir.
- $a+d = d$ ise $a = 0$ olur, bu da a ’nın sıfır bölen olmasıyla çelişir.
- $a+d = c$ ise $b.c = 0$ elde edilir. (Yukarıda $b.(a+d) = 0$ bulmuştuk.) b ile c arasında bir kenar olmadığı için bu seçenek de mümkün değildir.
- Elimizde sadece $a+d = b$ seçeneği kaldı.

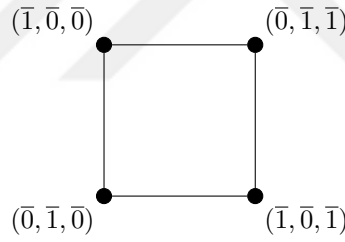
Şimdi aynı işlemi $b.d = 0$ ve $c.d = 0$ denklemleri için yapalım. $d.(b+c) = 0$ elde edilir. Yukarıdaki aynı işlemleri yaptığımızda $b+c = d$ buluruz. $b+c = d$ ve yukarıda bulduğumuz $a+d = b$ denklemlerinden $a+c = 0 \Rightarrow a = -c$ elde edilir. $a.b = 0$ olduğundan $-c.b = 0 \Rightarrow c.b = 0$ ’dur. c ile b arasında bir kenar olmadığından $b+c = d$ ve $a+d = b$ denklemleri yanlıştır. Bu durumda şekil 4.3’de verilen graf, bir halkanın sıfır bölen grafi olamaz.

Şekil 4.3’de verilen graf dışında şekil 4.4’de verilen graflar da sıfır bölen grafi olamazlar. Bunlar da yukarıdakine benzer şekilde gösterilebilir.



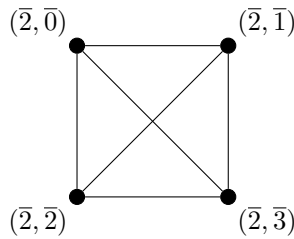
Şekil 4.4. Dört Köşeli Sıfır Bölen Olmayan Graflar

$n = 2$ ve $|I| = 2$ durumunu inceleyelim. $\mathbb{Z}_9$ halkası ve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkasının sıfır bölen grafları iki köşeli sıfır bölen graflarına örnektir. Biz iki elemanlı idealleri aradığımızdan dolayı bu halkaları $\mathbb{Z}_2$ ile çarparak istediğimiz sonucu elde edebiliriz. Lemma 4.1'ya göre $\Gamma(R/I)$ grafi iki köşeye sahipse $\Gamma_I(R)$ grafi ya iki bağlantılı kolona sahiptir yada hiç bağlantılı kolona sahip değildir. Bu elde ettiğimiz sonuçlardan $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali $\Gamma_I(R)$ grafinin hiç bağlantılı kolona sahip olmadığı durumu ifade eder. Bu graf şekil 4.5'de gösterilmiştir. $R = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali $\Gamma_I(R)$ grafinin iki bağlantılı kolona sahip olduğu durumu ifade eder.



Şekil 4.5. $\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafi

$n = 1$ ve $|I| = 4$ durumu için daha önce yaptığımız gibi $\mathbb{Z}_4$ halkasını ve $|I| = 0$ idealini $\mathbb{Z}_4$ ile çarparak $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_4$ idealini elde ederiz. Bu graf şekil 4.6'da gösterilmiştir.



Şekil 4.6. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4)$ Grafi

4.5 Beş Köşeli Graflar

Teorem 4.4'den dolayı $5 = n \cdot |I|$ olmalıdır. Buradan da $n = 5$ ve $|I| = 1$, $n = 1$ ve $|I| = 5$ şeklinde iki sonuç çıkar. $n = 5$ ve $|I| = 1$ için sıfır bölen grafi elde edilir. Bu grafların neler olduğunu incelemek için önce bir kaç tanım, ardından bir teorem verelim.

Tanım 4.1 R bir halka ve I bu halkanın bir ideali olsun. Eğer $I \subseteq M \subseteq R$ şartını sağlayan M ideali için $M = I$ veya $M = R$ oluyorsa I idealine maksimal ideal denir (Fraleigh 2014).

Tanım 4.2 Bir grafin kapsadığı tam grafların köşe sayısının en büyüğüne klik sayısı denir ve ω ile gösterilir (Aldous ve Wilson 2000).

Teorem 4.5 R değişmeli bir halka ve $\Gamma(R)$ sıfır bölen grafi 5 köşeli bir graf olsun. Bu durumda R aşağıdakilerden birine izomorftur (Redmond 2003).

- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$
- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$
- $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_4$ (Burada $\mathbb{F}_n$ ifadesi n elemanlı cisimi göstermektedir.)

İspat. $\Gamma(R)$ 5 köşeli bir graf olsun. Bu durumda $\omega(\Gamma(R)) \in \{2, 3, 4, 5\}$ olabilir.

- $\omega(\Gamma(R)) = 5$ ise;

$\Gamma(R) \cong K^5$ 'tir. Eğer $\Gamma(R)$ tam grafsa $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ veya p bir asal ve $n \geq 1$ tam-sayı olmak üzere $\Gamma(R)$ grafi $p^n - 1$ köşeli olmalıdır (Anderson ve Livingston 1999). $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkası 5 elemanlı olmadığından ve $p^n - 1 = 5$ denklemi için bir p asal bulunmadığından dolayı $\omega(\Gamma(R)) = 5$ olması mümkün değildir.

- $\omega(\Gamma(R)) = 4$ ise;

Teorem 3.1'den dolayı $\Gamma(R)$ grafi bağlantılı bir graf olduğundan $\Gamma(R)$ grafında bulunan bir köşe diğer bütün köşelerle komşu olmalıdır. Bu durumda $\mathbb{F}_n$ ifadesi

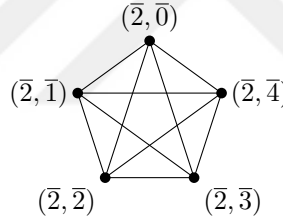
n elemanlı sonlu cismi göstermek üzere $R \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_n$ olacak şekilde $\mathbb{F}_n$ vardır veya R yalnızca bir maksimal ideale sahiptir ve p bir asal ve $n \geq 1$ tamsayı olmak üzere $\Gamma(R)$ grafi $p^n - 1$ köşeli olmalıdır (Anderson ve Livingston 1999). $p^n - 1 = 5$ denklemi için bir p asalı bulunmadığından dolayı verilen ifadenin ikinci kısmı sağlanmaz. $\mathbb{Z}_5$ halkası ifadenin birinci şartını sağlayan tek cisimdir.

- $\omega(\Gamma(R)) = 2$ veya $\omega(\Gamma(R)) = 3$ ise;

(Anderson ve Naseer 1993), (Beck 1988) ve (Anderson ve Frazier 2001) makalelerinde bu durumu sağlayan tüm graflar verilmiştir. Bunlardan 5 köşeli olanlar $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2[x]/(x^2)$, $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_4$ 'tür. Bunların tamamında $\omega(\Gamma(R)) = 2$ 'dir.

■

$n = 1$ ve $|I| = 5$ durumu için daha önce yaptığımız gibi $\mathbb{Z}_4$ halkası ve $|I| = 0$ idealini $\mathbb{Z}_5$ ile çarparak $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_5$ ideali elde ederiz. Bu graf şekil 4.7'de verilmiştir.



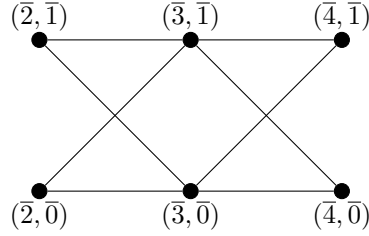
Şekil 4.7. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_5}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5)$ Grafi

4.6 Altı Köşeli Graflar

$\Gamma_I(R)$ grafi altı köşeli olacağı için teorem 4.1'den dolayı $n = 6$ ve $|I| = 1$, $n = 3$ ve $|I| = 2$, $n = 2$ ve $|I| = 3$, $n = 1$ ve $|I| = 6$ durumları vardır. $n = 6$ ve $|I| = 1$ durumu için altı köşeli sıfır bölen grafi elde edilir.

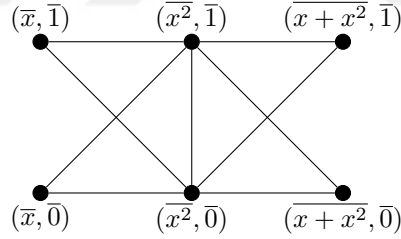
$n = 3$ ve $|I| = 2$ durumunu inceleyelim. Bunun için üç köşeli sıfır bölen grafları olan $\mathbb{Z}_6$ ve $\mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle$ halkalarını $\mathbb{Z}_2$ ile çarparak genişletebiliriz. $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ halkası ile $I = 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali ve $\mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle \times \mathbb{Z}_2$ halkası ile $I = 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali elde edilir. Lemma 4.1'e göre $\Gamma(R/I) \cong K^3$ ise $\Gamma_I(R)$ grafi üç bağlantılı kolona sahiptir. Bu durum $\mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_2$ idealinde elde edilir. Eğer $\Gamma(R/I) \cong K^{1,2}$ ise $\Gamma_I(R)$ grafında bağlantılı kolon yoktur yada $\Gamma(R/I)$

grafında iki köşeye komşu olan köşe $\Gamma_I(R)$ grafının tek bağlantılı kolonudur. Elde ettiğimiz $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali bağlantılı kolon olmaması durumuna örnektir. Bu graf şekil 4.8’de gösterilmiştir.



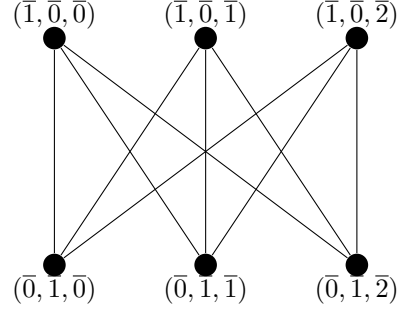
Şekil 4.8. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı

Eğer $\Gamma_I(R)$ grafının bir bağlantılı kolonu varsa $R = \mathbb{Z}_2[x]/\langle x^3 \rangle \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali seçilebilir. Bu graf şekil 4.9’da gösterilmiştir.



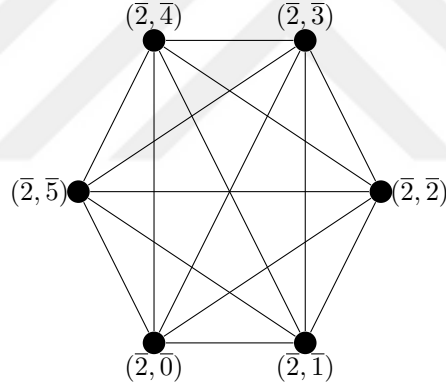
Şekil 4.9. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^3 \rangle \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı

$n = 3$ ve $|I| = 2$ durumunu inceleyelim. Lemma 4.1’den dolayı $\Gamma_I(R)$ grafı ya bağlantılı kolona sahip değildir yada iki tane bağlantılı kolon vardır. $\mathbb{Z}_9$ ve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkalarının sıfır bölen grafları iki köşelidir. $\mathbb{Z}_9$ halkasını $\mathbb{Z}_3$ ile çarparak genişletirsek $\mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_3$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_3$ ideali elde ederiz. Bu graf $\Gamma_I(R)$ ’nin iki bağlantılı kolona sahip olduğu grafa örnektir. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkasını $\mathbb{Z}_2$ ile çarparak genişletirsek $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali elde ederiz ki bu $\Gamma_I(R)$ grafının hiç bağlantılı kolona sahip olmadığı duruma örnektir. Bu graf şekil 4.10’da gösterilmiştir.



Şekil 4.10. $\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_3}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$ Grafi

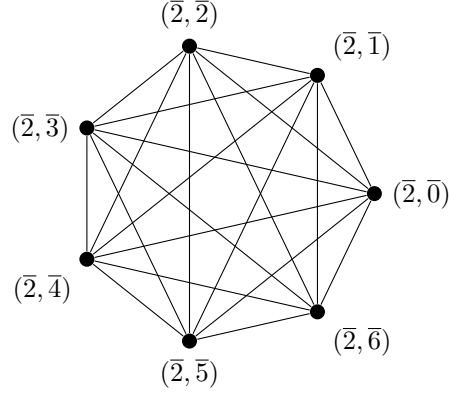
$n = 1$ ve $|I| = 6$ durumunu inceleyelim. $\mathbb{Z}_4$ halkasının sıfır bölen grafi bir köşeli sıfır bölen grafidir. Bu halkayı ve $I = 0$ idealini $\mathbb{Z}_6$ ile çarparak genişletirsek $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_6$ ideali elde ederiz. Bu halka ve ideal ile oluşturulan ideal tabanlı graf şekil 4.11’de gösterilmiştir.



Şekil 4.11. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_6}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6)$ Grafi

4.7 Yedi Köşeli Graflar

$\Gamma_I(R)$ grafi yedi köşeli olacağı için teorem 4.1’den dolayı $n = 7$ ve $|I| = 1$, $n = 1$ ve $|I| = 7$ olmak üzere iki durum vardır. $n = 7$ ve $|I| = 1$ için yedi köşeli sıfır bölen grafi elde edilir. $n = 1$ ve $|I| = 7$ durumu için sıfır bölen grafi bir köşeli olduğu için $\mathbb{Z}_4$ halkasını ve $I = 0$ idealini $\mathbb{Z}_7$ ile çarparak yedi köşeli ideal tabanlı grafa genişletebiliriz. Elde ettiğimiz $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_7$ ideali ile oluşturulan ideal tabanlı graf şekil 4.12’de gösterilmiştir.

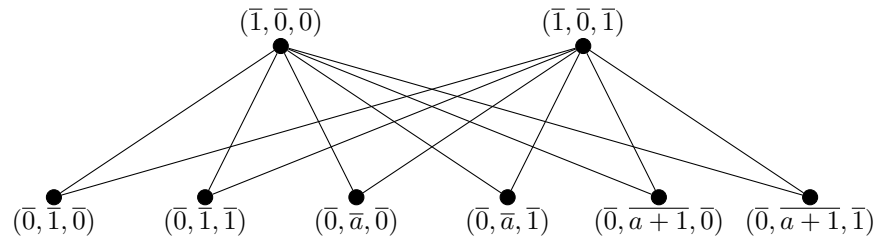


Şekil 4.12. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_7)$ Grafı

4.8 Sekiz Köşeli Graflar

$\Gamma_I(R)$ grafı sekiz köşeli olacağından dolayı $n = 8$ ve $|I| = 1$, $n = 4$ ve $|I| = 2$, $n = 2$ ve $|I| = 4$, $n = 1$ ve $|I| = 8$ durumları vardır. $n = 8$ ve $|I| = 1$ durumu için sekiz köşeli sıfır bölen grafı elde edilir.

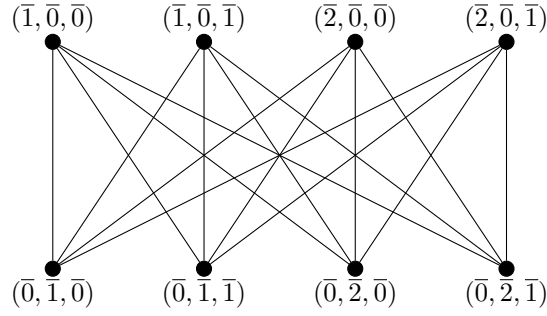
$n = 4$ ve $|I| = 2$ durumunu inceleyecek olursak 4 köşeli üç farklı sıfır bölen grafımız vardır. Bunlar $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_{25}$ ve $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4$ 'tür. Bu halkaları $\mathbb{Z}_2$ ile çarparak genişletelim. $\Gamma(R/I)$ grafı 4 köşeli olacağından $K^{1,3}$, $K^{2,2}$ ve K^4 'e izomorf olabilir. Eğer $\Gamma(R/I)$ grafı $K^{1,3}$ 'e izomorfsa lemma 4.1'den dolayı $\Gamma_I(R)$ grafında hiç bağlantılı kolon yoktur. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4$ halkasının sıfır bölen grafı $K^{1,3}$ 'e izomorf olduğundan dolayı bu halkayı $\mathbb{Z}_2$ ile çarparak genişletirsek istediğimiz durumu elde ederiz. $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4 \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali ile oluşturulan graf şekil 4.13'de gösterilmiştir.



Şekil 4.13. $\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı

Eğer $\Gamma(R/I)$ grafı $K^{2,2}$ 'ye izomorfsa lemma 4.1'den dolayı $\Gamma_I(R)$ grafında bağlantılı kolon yoktur. $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ halkasının sıfır bölen grafı $K^{2,2}$ 'ye izomorf olduğundan dolayı bu halkayı $\mathbb{Z}_2$ ile çarparak genişletirsek $n = 4$ ve $|I| = 2$ olan sekiz köşeli ideal

tabanlı grafi elde etmiş oluruz. $R = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2$ halkası ve $I = 0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali ile oluşturulan ideal tabanlı graf şekil 4.14'de gösterilmiştir.

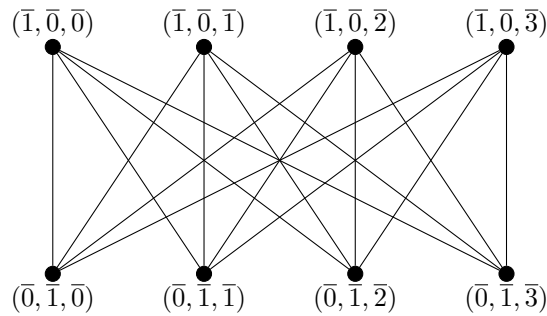


Şekil 4.14. $\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2)$ Grafı

Eğer $\Gamma(R/I)$ grafi K^4 'e izomorfsa $\mathbb{Z}_{25}$ halkasını ve $I = 0$ idealini $\mathbb{Z}_2$ ile çarparak $R = \mathbb{Z}_{25} \times \mathbb{Z}_2$ ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_2$ ideali elde edilir.

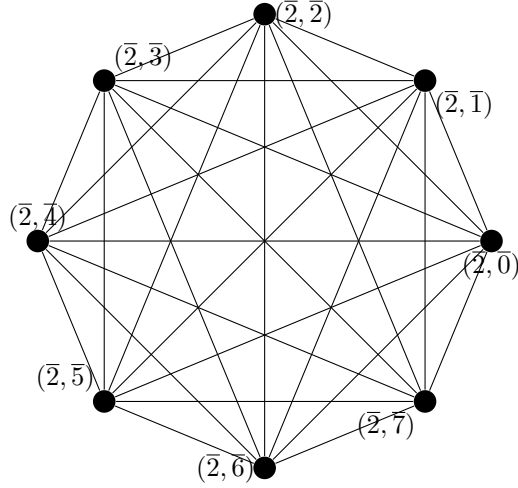
$n = 2$ ve $|I| = 4$ durumunu inceleyelim. Lemma 4.1'den dolayı $\Gamma_I(R)$ grafında ya bağlantılı kolon yoktur yada iki bağlantılı kolon vardır. $\mathbb{Z}_9$ halkasının sıfır bölen grafi iki köşeli olduğundan $\mathbb{Z}_9$ halkasını ve $I = 0$ idealini $\mathbb{Z}_4$ ile çarparak genişlettiğimizde elde ettiğimiz $R = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_4$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_4$ idealini kullanarak oluşturduğumuz ideal tabanlı graf iki bağlantılı kolona sahiptir. Bu graf K^8 'e izomorftur.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkasını ve $I = 0 \times 0$ idealini $\mathbb{Z}_4$ ile çarparak elde ettiğimiz $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ halkası ve $I = 0 \times 0 \times \mathbb{Z}_4$ ideali ile oluşturulan ideal tabanlı graf bağlantılı kolonun olmaması duruman örnektir. Bu graf şekil 4.15'de gösterilmiştir.



Şekil 4.15. $\Gamma_{0 \times 0 \times \mathbb{Z}_4}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4)$ Grafı

$n = 1$ ve $|I| = 8$ durumunu elde etmek için $\mathbb{Z}_4$ halkasının sıfır bölen grafi bir köşeli olduğundan $\mathbb{Z}_8$ ile çarpabiliriz. $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_8$ ideali ile elde edilen ideal tabanlı graf 4.16'da gösterilmiştir.



Şekil 4.16. $\Gamma_{0 \times \mathbb{Z}_8}(\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_8)$ Grafı

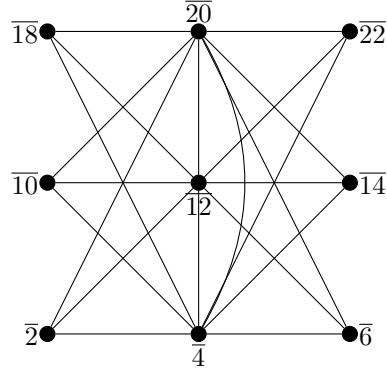
4.9 Dokuz Köşeli Graflar

$\Gamma_I(R)$ dokuz köşeli olacağından teorem 4.1'den dolayı $n = 9$ ve $|I| = 1$, $n = 3$ ve $|I| = 3$, $n = 1$ ve $|I| = 9$ durumları vardır. $n = 9$ ve $|I| = 1$ durumu için dokuz köşeli sıfır bölen grafı elde edilir.

$n = 3$ ve $|I| = 3$ durumunu inceleyelim. Bu durumda $\Gamma(R/I)$ grafı 3 köşeli olacağından K^3 'e veya $K^{1,2}$ 'ye izomorftur. Eğer $\Gamma(R/I) \cong K^3$ ise lemma 4.1'dan dolayı $\Gamma_I(R)$ grafı 3 bağlantılı kolona sahiptir. Bu durum $\mathbb{Z}_2[x, y]/\langle x^2, xy, y^2 \rangle$ halkasının sıfır bölen grafı K^3 'e izomorf olduğundan bu halkayı $\mathbb{Z}_3$ ile çarparak elde edebiliriz.

Eğer $\Gamma(R/I) \cong K^{1,2}$ ise lemma 4.1'den dolayı $\Gamma_I(R)$ grafı ya bağlantılı kolona sahip değildir yada $\Gamma(R/I)$ grafında iki köşeye komşu olan köşenin belirttiği köşeler $\Gamma_I(R)$ grafının tek bağlantılı kolonudur. $\mathbb{Z}_6$ halkasının sıfır bölen grafı $K^{1,2}$ 'ye izomorf olduğundan bu halkayı $\mathbb{Z}_3$ ile çarparak $\Gamma_I(R)$ grafında bağlantılı kolon olmadığı durumu elde ederiz. Bu graf 3.11'de incelenmiş ve şekil 3.14'de gösterilmiştir.

Eğer $\Gamma_I(R)$ grafında tek bir bağlantılı kolon varsa bu durum için $R = \mathbb{Z}_{24}$ halkasını ve $I = \langle 8 \rangle$ idealini seçebiliriz. Bu graf şekil 4.17'de verilmiştir.



Şekil 4.17. $\Gamma_{\langle 8 \rangle}(\mathbb{Z}_{24})$ Grafı

$n = 1$ ve $|I| = 9$ durumunu inceleyecek olursak $\mathbb{Z}_4$ halkasını $\mathbb{Z}_9$ ile çarparak genişletebiliriz. $R = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ halkası ve $I = 0 \times \mathbb{Z}_9$ ideali ile elde edilen ideal tabanlı graf K^9 'a izomorftur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde sıfır bölen grafları ve ideal tabanlı sıfır bölen grafları üzerinde durulmuştur. İkinci bölümde grafin tanımı ve graf teorisinin üzerinde çalıştığı problemler verilmiştir. Üçüncü bölümde sıfır bölen grafları ve ideal tabanlı sıfır bölen grafları incelenmiştir. Bu grafların modüllere genelleştirilmesi ise Nikmehr ve Khojasteh (Nikmehr ve Khojasteh 2015) tarafından yapılmıştır. Dördüncü bölümde ise n köşeli bir grafin hangi durumlarda ideal tabanlı sıfır bölen grafi olduğu incelenmiştir. İdeal tabanlı graflar için bir halka ve ideali bulunmuştur.

Sıfır bölen grafları ve ideal tabanlı grafların ikinci bölümde verilen graf teorisinin uğraştığı problemlerin çözümünde bir fayda sağlayıp sağlamadığı üzerinde çalışılabilecek konulardan biridir. Yine bir graf verildiğinde bu grafin bir gruba ve üreticine ait bir Cayley Grafi olup olmadığı üzerinde daha sonra çalışılacaktır.

Bu tez çalışmasında 5 köşeye kadar tüm sıfır bölen grafları incelenmiştir. Ancak 5'ten daha fazla köşeye sahip sıfır bölen graflarının neler olduğu üzerinde durulmamıştır. 5'ten fazla köşeye sahip sıfır bölen grafları ve bunların ideal tabanlı graflara genelleştirilmesi konusu daha sonra çalışılacaktır.

KAYNAKLAR

- Akbari, S. ve Mohammadian, A., 2004. *On the zero divisor graph of a commutative Ring*, J. Algebra, 274, 847–855.
- Akbari, S. ve Mohammadian, A., 2006. *Zero-divisor graphs of non-commutative rings*, J. Algebra, 296, 462-479.
- Aldous, J. M. ve Wilson, R.J., 2000. *Graphs and Applications An Introductory Approach*, The Open University, 457.
- Anderson, D. F., Frazier, A., Lauve, A. ve Livingston, P.S., 2001. *The zero-divisor graph of a commutative ring II*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 220, 61-72.
- Anderson, D. F. ve Naseer, M., 1993. *Beck's Coloring of commutative ring*, J. Algebra, 159, 500–514.
- Anderson, D. F. ve Livingston, P.S., 1999. *The zero-divisor graph of a commutative ring*, Journal of Algebra, Vol. 217, 434–447.
- Atiyah, M. F. ve Macdonald, I. G., 1969. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley Publishing Company, 140.
- Beck, I., 1988. *Coloring of commutative rings*, J. Algebra, 116, 208–226.
- Chartrand, G., Lesniak, L. ve Zhang, P., 2016. *Graphs and Digraphs (Sixth Edition)*, Crc Press, 340.
- Fraleigh, J.B., 2014. *A first course in Abstract Algebra (Seventh Edition)*, Pearson, 461.
- Nikmehr, M. J. ve Khojasteh, S., 2015. *A Generalized Ideal-Based Zero-Divisor Graph*, Journal of Algebra and Its Applications, Vol. 14 No:6.
- Redmond, S. P., 2002. *The zero-divisor graph of a non-commutative ring*, Inter. J. Comumutative Rings, 1, 203–211.
- Redmond, S. P., 2003. *An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring*, Comm. Algebra, 31, 4425–4443.
- Redmond, S. P., 2004. *Structure in the zero-divisor graph of a non-commutative ring*, Houst. J. Math, 30, 345-355.
- Wu, T., 2005. *On directed zero-divisor graphs of finite rings*, Discrete Math., 296, 73-86.