

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İKİNCİ BASAMAKTAN SÜPER YARI-LİNEER DİNAMİK
DENKLEMLERDE SALINIM TEORİSİ**

Floride NIZIGIYIMANA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2013**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ BASAMAKTAN SÜPER YARI-LİNEER DİNAMİK DENKLEMLERDE SALINIM TEORİSİ

Floride NIZIGIYIMANA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. A. Feza GÜVENİLİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, zaman skalası için gerekli olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ikinci basamaktan dinamik denklemler için salınımlılık kriterlerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümde ise, bu konuda yapılan çalışmalar kullanılarak gecikmeli terim içeren yarı-lineer ve süper yarı-lineer dinamik denklemler için temel sonuçlar verilmiştir.

Nisan 2013, 64 sayfa

Anahtar Kelimeler : Zaman skalası, ikinci basamaktan süper yarı-lineer dinamik denklem, gecikmeli terim içeren dinamik denklem, salınımlılık.

ABSTRACT

Master Thesis

OSCILLATION THEORY FOR SECOND ORDER SUPER HALF-LINEAR DYNAMIC EQUATIONS

Floride NIZIGIYIMANA

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. A. Feza GÜVENİLİR

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, some definitions and theorems necessary on time scales for our results are given.

In the third chapter, oscillation criteria of second order dynamic equations is mentioned.

In the fourth and fifth chapters, we give basic results for half-linear and super half-linear dynamic equations with delay argument in view of the prior related works.

April 2013, 64 pages

Key Words: Time scale, second order super half-linear dynamic equations, dynamic equations with delay argument, oscillation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın planlanması, yürütülmesi ve gerçekleşmesinde, değerli bilgilerinden yararlandığım, yazılmasında bana her zaman her türlü konuda yol gösteren ve yardımcı olan çok değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. A. Feza GÜVENİLİR'e (Ankara Üniversitesi Matematik ABD) katkılarından dolayı sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Bu süre zarfında sabır gösteren oğullarım Micky IGIRANEZA ve Médic DUSHIME'ye, onlara bakmayı kabul eden Anicet HAKIZIMANA ailesine, bana her türlü destek ve imkân sağlayan eşime ve herkese sonsuz teşekkür ederim.

Floride NIZIGIYIMANA

Ankara, Nisan 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
3. İKİNCİ BASAMAKTAN DİNAMİK DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ	8
3.1 (A) Denkleminde $\alpha = \beta$ Durumu	8
3.2 (A) Denkleminde $\alpha \neq \beta$ Durumu	27
4. GECİKMELİ TERİM İÇEREN YARI-LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ	39
5. GECİKMELİ TERİM İÇEREN SÜPER YARI-LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ	49
KAYNAKLAR	62
ÖZGEÇMİŞ	64

1. GİRİŞ

Son yıllarda doğal olayların matematiksel modelleri ya sürekli ya da ayrık analiz kullanılarak yapılmaktadır. Sürekli durum için nüfus artışı ve biyolojik olayı, ayrık durum için de Newton metodunun uygulamalarını ve kısmi diferensiyel denklemlerin ayrıştırılmasını örnek olarak verebiliriz. Bununla birlikte, olaylar zaman zaman sürekli ve zaman zaman da ayrık olduğunda bu modeller yetersiz kalmaktadır. Dolayısıyla hem sürekli hem de ayrık olaylara ilişkin denklemlerin incelenmesi için yeni bir teoriye ihtiyaç duyulmuştur. İşte bu teori zaman skalasında dinamik denklemler olarak adlandırılır. Zaman skalası teorisi ile, süreksizlik içeren modellerin de matematiksel olarak ifade edilmesi sağlanmıştır. Böceklerin nüfus artışına bakılacak olursa, belli bir sezonda örneğin kışın böceklerin nesilleri tükenirken, diğer sezonda böceklerin yumurtaları kuluçkaya yatırılıp çatlar ve sonuçta böcek nüfusu hızla artış gösterir. Zaman skalasında dinamik denklemlere ilişkin çalışma, Stefan Hilger (1988)'in yapmış olduğu doktora tezidir.

Bu çalışmada, zaman skalasında ikinci basamaktan süper yarı-lineer dinamik denklemlere ilişkin salınımlılık kriterleri verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 2.1 $\mathbb{R}$ nin boş olmayan kapalı herhangi bir alt kümesi olan $\mathbb{T}$ ye zaman skalası denir. Özel durumda $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olabilir.

Tanım 2.2 $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. İleri sıçrama $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ operatörünün bir $t \in \mathbb{T}, t < \sup \mathbb{T}$, noktasındaki değeri

$$\sigma(t) = \inf \{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

ve geri sıçrama $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ operatörünün bir $t \in \mathbb{T}, t < \sup \mathbb{T}$, noktasındaki değeri

$$\rho(t) = \sup \{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{T}$ kapalı olduğundan, $\forall t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t), \rho(t) \in \mathbb{T}$ dir. Eğer $\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$ boş küme ise, $\inf \emptyset := \sup \mathbb{T}$, yani $\mathbb{T}$ nin maksimumu t ise $\sigma(t) = t$, benzer şekilde eğer $\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$ boş küme ise $\sup \emptyset := \inf \mathbb{T}$, yani $\mathbb{T}$ nin minimumu t ise $\rho(t) = t$ dir. Eğer $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) > t$ ise t ye *sağ-yayılmış* denir. $\rho(t) < t$ iken t ye *sol-yayılmış* denir. Eğer $t < \sup \mathbb{T}$ ve $\sigma(t) = t$ ise t ye *sağ-yoğun*; $t > \inf \mathbb{T}$ ve $\rho(t) = t$ ise t ye *sol-yoğun* denir. Eğer t aynı zamanda sağ ve sol yayılmış ise t ye *ayrık nokta*, t sağ ve sol yoğun ise t ye *yoğun nokta* denir.

Tanım 2.3 *İleri Graininess fonksiyonu*, $\mu : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, t \in \mathbb{T}$ için

$$\mu(t) = \sigma(t) - t$$

olarak tanımlanır. *Geri Graininess fonksiyonu* ise $\nu : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}, t \in \mathbb{T}$ için

$$\nu(t) = t - \rho(t)$$

dir.

Zaman Skalasında Türev

Tanım 2.4 Eğer $\mathbb{T}$ nin maksimumu m sol yayılmış ise $\mathbb{T}^k = \mathbb{T} \setminus \{m\}$ dir. Aksi takdirde $\mathbb{T}^k = \mathbb{T}$ dir.

Tanım 2.5 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Herhangi bir $\epsilon > 0$ ve $\forall s \in U$ için

$$|f(\sigma(t)) - f(s) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \epsilon |\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu varsa, bu özelliği sağlayan sonlu $f^\Delta(t)$ reel sayısına f fonksiyonunun t noktasındaki delta (veya Hilger) türevi denir. Eğer $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $f^\Delta(t)$ sayısı mevcut ise f fonksiyonuna $\mathbb{T}^k$ üzerinde delta (veya Hilger) türevlenebilir fonksiyon denir.

Teorem 2.6 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu fonksiyonun $t \in \mathbb{T}^k$ noktasındaki Δ -türevi,

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \neq \sigma(s), s \rightarrow t} \frac{f^\sigma(t) - f(s)}{\sigma(t) - t}$$

limiti (eğer bu limit varsa ve sonlu ise) olarak tanımlanır, burada $f^\sigma(t) = f(\sigma(t))$ dir.

Aşağıdaki teoremden Δ -türevle ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Teorem 2.7 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. O halde

- (i) Eğer f fonksiyonu t noktasında Δ -türevlenebilir ise, t de sürekli dir.
- (ii) Eğer f, t de sürekli ve t de sağ yayılmış nokta ise f, t de Δ -türevlenebilirdir ve

$$f^\Delta(t) = \frac{f^\sigma(t) - f(t)}{\mu(t)}, \mu(t) = \sigma(t) - t$$

dir.

- (iii) Eğer t sağ yoğun nokta ise f nin t de Δ -türevlenebilir olması için gerek ve

yeter koşul

$$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin sonlu olmasıdır. Bu durumda

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

(iv) Eğer f, t de Δ -türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^\Delta(t)$$

dir.

Aşağıdaki teoremden yararlanarak Δ -türevlenebilir fonksiyonların toplamının, çarpımının ve oranının Δ -türevini bulabiliriz.

Teorem 2.8 $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının $t \in \mathbb{T}$ noktasında Δ -türevlenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda

(i) $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ toplamı da t de Δ -türevlenebilirdir ve

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t)$$

dir.

(ii) Her α sabiti için $\alpha f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t de Δ -türevlenebilirdir ve

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t)$$

dir.

(iii) $fg : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çarpımı t de Δ -türevlenebilirdir ve

$$\begin{aligned} (fg)^\Delta(t) &= f^\Delta(t) g(t) + f^\sigma(t) g^\Delta(t) \\ &= f(t) g^\Delta(t) + f^\Delta(t) g^\sigma(t) \end{aligned}$$

dir.

(iv) Eğer $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ oranı da t de Δ -türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(\sigma(t))g(t)}$$

dir.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f \circ g$ nin Δ -türevi ilk olarak Christian Pötzsche tarafından verilmiştir (Bohner ve Peterson 2001).

Teorem 2.9 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir ve $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ delta türevlenebilir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f \circ g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu da Δ -türevlenebilirdir ve $t \in \mathbb{T}^k$ için

$$(f \circ g)^\Delta = \left\{ \int_0^1 f'(g + h\mu g^\Delta) dh \right\} g^\Delta$$

dir.

Zaman Skalasında İntegral

İntegrallenebilen fonksiyonu tanımlayabilmek için aşağıdaki kavramları verelim.

Tanım 2.10 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sağ-yoğun noktalarında sürekli ve sol yoğun noktalarındaki soldan limiti varsa, f fonksiyonuna sağ-yoğun sürekli denir. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ şeklindeki sağ-yoğun sürekli fonksiyonların kümesi $C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ile gösterilir. $f \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ve $f^\Delta \in C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ ifadelerini sağlayan fonksiyonların oluşturdukları küme ise

$$C_{rd}^1 = C_{rd}^1(\mathbb{T}) = C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

dir.

Tanım 2.11 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer bir $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ üzerinde Δ -türevlenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $F^\Delta(t) = f(t)$ ise, F ye f nin T üzerinde

bir Δ -ilkeli (veya Δ -antitürevi) denir. $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Δ -integrali belirli koşullar altında verilmektedir.

Teorem 2.12 $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin, $F : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ de f nin bir Δ -ilkeli olsun. Bu durumda her $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ için f nin a dan b ye Δ -integrali

$$\int_a^b f(t) \Delta t = F(b) - F(a)$$

dir. Ayrıca,

$$a = b \text{ ise, } \int_a^a f(t) \Delta t = 0 \text{ ve } a > b \text{ ise, } \int_a^b f(t) \Delta t = - \int_b^a f(t) \Delta t$$

dir.

Teorem 2.13 (Δ -integralinin özellikleri). $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ de Δ -integrallenebilir fonksiyonlar olsun (Δ -ilkelleri mevcut olsun). Bu durumda

- (i) $\int_a^b [\alpha f(t) + \beta g(t)] \Delta t = \alpha \int_a^b f(t) \Delta t + \beta \int_a^b g(t) \Delta t$,
- (ii) $\int_a^b f(t) \Delta t = \int_a^c f(t) \Delta t + \int_c^b f(t) \Delta t$,
- (iii) f ve g , Δ -türevlenebilir ve f^Δ, g^Δ da Δ -integrallenebilir olmak üzere

$$\int_a^b f^\Delta(t) g(t) \Delta t = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f(\sigma(t)) g^\Delta(t) \Delta t$$

dir.

- (iv) Eğer $t \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ için $f(t) \geq 0$ ise, $\int_a^b f(t) \Delta t \geq 0$ dir.

- (v) Eğer f , Δ -integrallenebilir ise $|f(t)|$ de Δ -integrallenebilirdir ve $\left| \int_a^b f(t) \Delta t \right| \leq \int_a^b |f(t)| \Delta t$ dir.

Bir f türevlenebilir fonksiyonu ve $b, c \in \mathbb{T}$ için, f^Δ nin Cauchy integrali

$$\int_b^c f^\Delta \Delta t = f(c) - f(b)$$

şeklinde tanımlanır.

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ durumunda

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \rho(t) = t, \quad \mu(t) = 0, \\ f^\Delta(t) &= f'(t), \quad \int_b^c f(t) \Delta t = \int_b^c f(t) dt\end{aligned}$$

ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumunda

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= t + 1, \quad \rho(t) = t - 1, \quad \mu(t) = 1, \\ f^\Delta(t) &= \Delta f(t) = f(t + 1) - f(t)\end{aligned}$$

dir. Ayrıca ($b < c$) ise

$$\int_b^c f(t) \Delta t = \sum_{t=b}^{c-1} f(t)$$

olur. Daha geniş bilgi için Kaymakçalan vd. (1996), Bohner ve Peterson (2001, 2003), kitaplarına bakılabilir.

Lemma 2.14 X ve Y negatif olmayan reel sayılar ve $\lambda > 1$ olmak üzere

$$X^\lambda - \lambda XY^{\lambda-1} + (\lambda - 1)Y^\lambda \geq 0$$

dır. Eşitlik ancak ve ancak $X = Y$ durumunda geçerlidir (Hardy vd. 1959).

Lemma 2.15 $\forall X \geq Y > 0$ reel sayılar olmak üzere $\lambda \geq 1$ için,

$$X^\lambda - Y^\lambda \geq 2^{1-\lambda} (X - Y)^\lambda$$

gerçeklenir (Jianchu 2002).

Lemma 2.16 A ve B pozitif reel sabitler olsun. Eğer $p > 1$ ve $q > 1$ sayıları eşlenik ise (yani $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), $\frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \geq AB$ gerçekleşir (Hardy vd. 1959).

3. İKİNCİ BASAMAKTAN DİNAMİK DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Bu bölümde Agarwal vd. (2007), Grace vd. (2009), Han vd. (2010), makalelerinden yararlanarak

$$(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta + q(t)x^\beta(t) = 0 \quad (\text{A})$$

şeklinde ikinci basamaktan dinamik denklemi için

$$\int_{t_0}^{\infty} a^{-1/\alpha}(s) \Delta s = \infty \quad (\text{B})$$

veya

$$\int_{t_0}^{\infty} a^{-1/\alpha}(s) \Delta s < \infty \quad (\text{C})$$

durumlarında bazı salınımlılık kriterleri verildi. Burada $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ zaman skalası, $t_0 \geq 0$ ve $t_0 \in \mathbb{T}, t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için a ve q reel değerli, pozitif ve sağ yoğun sürekli fonksiyonlar, $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere α, β iki pozitif tek tam sayının oranıdır.

$\forall T \geq t_0$ için $x \in C_{rd}^1(T, \mathbb{R})_{\mathbb{T}}$ olmak üzere $x : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (A) nın aşikar olmayan bir çözümü olsun. x sonsuzda pozitif veya sonsuzda negatif değilse x e (A) nın *salınımlı çözümü* denir. Aksi takdirde, bu çözüme *salınımlı olmayan çözüm* denir. (A) nın her x çözümü salınımlı ise (A) ya *salınımlıdır*, aksi takdirde *salınımlı olmayan denklemdir* denir.

3.1 (A) Denklemde $\alpha = \beta$ Durumu

Bu durumda

$$(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta + q(t)x^\alpha(t) = 0 \quad (3.1)$$

yarı-linear dinamik denklemini elde ederiz.

i. $0 < \alpha \leq 1$ durumu

Teorem 3.1 (C) sağlansın. Ayrıca, yeterince büyük t_1 için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(s) \left((\xi^\Delta(s))_+ \right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\xi(s))^\alpha} \right] \Delta s = \infty \quad (3.2)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[q(s) (\theta^\alpha(s))^\sigma - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \frac{1}{\theta^\sigma(s) \varphi^{\alpha^2}(s) (a(s))^{\frac{1}{\alpha}}} \right] \Delta s = \infty \quad (3.3)$$

olacak şekilde bir $\xi \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ pozitif fonksiyonu varsa, (3.1) denklemleri salınımlıdır.

Burada $\varphi(t) > 0$ olmak üzere

$$\theta(t) = \int_t^\infty a^{-1/\alpha}(s) \Delta s \quad (3.4)$$

$$\varphi(t) : = \frac{\delta(t) - \mu(t)}{\delta(t)}, \quad \delta(t) := a^{1/\alpha}(t) \theta(t) \quad (3.5)$$

$$(\xi^\Delta(t))_+ : = \max \{0, \xi^\Delta(t)\} \quad (3.6)$$

dir.

İspat $x(t)$, (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümünü olsun. x in pozitif olmasını incelememiz yeterlidir. $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olsun. (3.1) denkleminde $(a(x^\Delta)^\alpha)^\Delta(t) < 0$ dır. O halde $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan bir fonksiyondur. a pozitif bir fonksiyon ve α tek sayı olduğundan $a(x^\Delta)^\alpha$ ve x^Δ aynı işaretlidir.

Şimdi $t > t_1$ için $x^\Delta(t) > 0$ ve $t > t_1$ için $x^\Delta < 0$ durumlarını inceleyelim.

(I) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) > 0$ durumu.

w , fonksiyonunu

$$w(t) = \frac{\xi(t) a(t) (x^\Delta(t))^\alpha}{x^\alpha(t)} \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlayıp delta türevini alırsak

$$\begin{aligned}
w^\Delta &= \left(\frac{\xi}{x^\alpha}\right)^\Delta (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma + \frac{\xi}{x^\alpha} (a(x^\Delta)^\alpha)^\Delta \\
&= \frac{\xi}{x^\alpha} [-qx^\alpha] + \left(\frac{\xi}{x^\alpha}\right)^\Delta (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \\
&= -q\xi + (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \left[\frac{\xi^\Delta x^\alpha - \xi (x^\alpha)^\Delta}{x^\alpha (x^\sigma)^\alpha} \right] \\
&= -q\xi + (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta}{(x^\sigma)^\alpha} - \xi (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \frac{(x^\alpha)^\Delta}{x^\alpha (x^\sigma)^\alpha} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - q\xi - \xi (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \frac{(x^\alpha)^\Delta}{x^\alpha (x^\sigma)^\alpha} \tag{3.9}$$

elde ederiz. Pötzsche zincir kuralını uygularsak

$$(x^\alpha(t))^\Delta \geq \alpha (x^\sigma(t))^{\alpha-1} x^\Delta(t) \tag{3.10}$$

dir. (3.10) u (3.9) da kullanırsak

$$w^\Delta(t) \leq \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} w^\sigma(t) - q(t) \xi(t) - \frac{\alpha \xi(t) (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x^\alpha(t) x^\sigma(t)} \tag{3.11}$$

elde ederiz. $a(t) (x^\Delta(t))^\alpha$ azalan fonksiyon olduğundan $x^\Delta(t) \geq \left(\frac{a^\sigma(t)}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^\Delta(\sigma(t))$ ve $x^\Delta(t) \geq 0$ dan $x(t) \leq x(\sigma(t))$ dir. Bunları (3.11) eşitsizliğinde kullanırsak

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} w^\sigma(t) - q(t) \xi(t) \\
&\quad - \alpha \frac{\xi(t)}{\xi^\sigma(t)} (a(t))^{-1/\alpha} (\xi^\sigma(t))^{-1/\alpha} (w^\sigma(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \tag{3.12}
\end{aligned}$$

buluruz. Lemma 2.14 de $\lambda = \frac{\alpha+1}{\alpha}$, $X = \left(\alpha \frac{\xi}{\xi^\sigma}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{w^\sigma}{(a\xi^\sigma)^{\frac{1}{\alpha+1}}}$ ve

$$Y = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha \left(\frac{a\xi^\sigma}{(\alpha\xi^\sigma)^\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \left(\frac{(\xi^\Delta)_+}{\xi^\sigma}\right)^\alpha \text{ alırsak,}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\xi^\Delta(t))_+ w^\sigma(t) - \alpha \frac{\xi(t)}{\xi^\sigma(t)} (a(t))^{-1/\alpha} (\xi^\sigma(t))^{-1/\alpha} (w^\sigma(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{\xi^\sigma(t)} \\ & \leq \frac{a(t) \left((\xi^\Delta(t))_+\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\xi(t))^\alpha} \end{aligned} \quad (3.13)$$

elde ederiz.

(3.13) ü (3.12) de kullanırsak

$$w^\Delta(t) \leq -q(t) \xi(t) + \frac{a(t) \left((\xi^\Delta(t))_+\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\xi(t))^\alpha} \quad (3.14)$$

buluruz. (3.14) eşitsizliğini t_1 den t ye kadar integre edersek

$$w(t) \leq w(t_1) - \int_{t_1}^t \left[q(s) \xi(s) - \frac{a(s) \left((\xi^\Delta(s))_+\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\xi(s))^\alpha} \right] \Delta s \quad (3.15)$$

elde ederiz. $t \rightarrow \infty$ olduğunda (3.2) den $w(t) \rightarrow -\infty$ buluruz. Bu durum $w(t)$ nin pozitif olması ile çelişir.

(II) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) < 0$ durumu.

w , fonksiyonunu

$$w(t) = \frac{a(t) (x^\Delta(t))^\alpha}{(x(t))^\alpha} \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlayalım. (3.16) dan $t \geq t_1$ için $w(t) < 0$ dır. $a(t) (x^\Delta(t))^\alpha$ azalan olduğundan $\forall s \geq t$ için $x^\Delta(s) \leq \left(\frac{a(t)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^\Delta(t)$ dir. Bu eşitsizliği $t \geq t_1$ den $u \geq t$ ye kadar integre edersek

$$\begin{aligned} x(u) & \leq x(t) + \int_t^u \left[\left(\frac{a(t)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^\Delta(t) \right] \Delta s \\ & \leq x(t) + (a(t))^{\frac{1}{\alpha}} x^\Delta(t) \int_t^u (a(s))^{-1/\alpha} \Delta s \end{aligned} \quad (3.17)$$

buluruz. $u \rightarrow \infty$ olduğunda

$$\begin{aligned} 0 &\leq x(t) + (a(t))^{\frac{1}{\alpha}} x^{\Delta}(t) \int_t^{\infty} (a(s))^{-1/\alpha} \Delta s \\ &= x(t) + (a(t))^{\frac{1}{\alpha}} x^{\Delta}(t) \theta(t) \end{aligned}$$

elde ederiz. O halde

$$(a(t))^{\frac{1}{\alpha}} \frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)} \theta(t) \geq -1$$

veya

$$a(t) \left(\frac{x^{\Delta}(t)}{x(t)} \right)^{\alpha} \theta^{\alpha}(t) \geq -1 \quad (3.18)$$

dir. (3.18) eşitsizliğini (3.16) da kullanırsak

$$-1 \leq \theta^{\alpha}(t) w(t) \leq 0 \quad (3.19)$$

buluruz.

(3.16) eşitliğinin taraf tarafa delta türevini alırsak

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &= \left(\frac{1}{x^{\alpha}(t)} \right)^{\Delta} (a(t) (x^{\Delta}(t))^{\alpha})^{\sigma} + \frac{1}{x^{\alpha}(t)} (a(t) (x^{\Delta}(t))^{\alpha})^{\Delta} \\ &= \frac{1}{x^{\alpha}(t)} (-q(t) x^{\alpha}(t)) + \frac{(a(t) (x^{\Delta}(t))^{\alpha})^{\sigma} [-(x^{\alpha}(t))^{\Delta}]}{x^{\alpha}(t) (x^{\sigma}(t))^{\alpha}} \\ &= -q(t) - \frac{(a(t) (x^{\Delta}(t))^{\alpha})^{\sigma} (x^{\alpha}(t))^{\Delta}}{x^{\alpha}(t) (x^{\sigma}(t))^{\alpha}} \end{aligned}$$

elde ederiz. Pötzsche zincir kuralından

$$(x^{\alpha}(t))^{\Delta} \leq \alpha (x(t))^{\alpha-1} x^{\Delta}(t)$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &\leq -q(t) - \frac{\alpha (x(t))^{\alpha-1} x^{\Delta}(t) (a(t) (x^{\Delta}(t))^{\alpha})^{\sigma}}{x^{\alpha}(t) (x^{\sigma}(t))^{\alpha}} \\ &\leq -q(t) - \frac{\alpha (a(t) (x^{\Delta}(t))^{\alpha})^{\sigma} x^{\Delta}(t)}{x(t) (x^{\sigma}(t))^{\alpha}} \end{aligned}$$

elde ederiz. $x^\Delta(t) < 0$ olduğundan, $x(t) \geq x^\sigma(t)$ ve

$$\begin{aligned}
-\frac{\alpha (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x(t) (x^\sigma(t))^\alpha} &\leq -\frac{\alpha (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x^{\alpha+1}(t)} \\
&= -\alpha \left(\frac{w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{x^\alpha(t)} \\
&= \alpha \left(-\frac{w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\alpha w^\sigma(t) \quad (3.20)
\end{aligned}$$

den

$$w^\Delta(t) \leq -q(t) + \alpha \left(-\frac{w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\alpha w^\sigma(t) < 0$$

dır. Böylece $w^\sigma(t) \leq w(t)$ dir. O halde

$$\begin{aligned}
-\alpha \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x(t) x^\alpha(\sigma(t))} &\leq \alpha \left(-\frac{w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\alpha w^\sigma(t) \\
&\leq -\alpha \left(\frac{1}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\alpha
\end{aligned}$$

buluruz.

$$\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} = \frac{x(t) + \mu(t) x^\Delta(t)}{x(t)} = 1 + \mu(t) \frac{x^\Delta(t)}{x(t)}$$

olup (3.18) den

$$\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} > 1 - \frac{\mu(t)}{(a(t))^{\frac{1}{\alpha}} \theta(t)} = \frac{\delta(t) - \mu(t)}{\delta(t)}$$

dir. Bu eşitsizlik ve (3.20) den $t \geq t_1$ için

$$w^\Delta(t) + q(t) + \alpha (a(t))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\alpha(t) (w(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq 0 \quad (3.21)$$

dir. (3.21) i $\theta^{\alpha^\sigma}(t)$ ile çarparsak

$$\theta^{\alpha^\sigma}(t) w^\Delta(t) + q(t) \theta^{\alpha^\sigma}(t) + \alpha \theta^{\alpha^\sigma}(t) (a(t))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\alpha(t) (w(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq 0$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği t_1 den t ye kadar integre edersek

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^t \theta^{\alpha^\sigma}(s) w^\Delta(s) \Delta s + \int_{t_1}^t q(s) \theta^{\alpha^\sigma}(s) \Delta s \\ & + \alpha \int_{t_1}^t \theta^{\alpha^\sigma}(s) (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\alpha(s) (w(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Delta s \\ & \leq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Birinci terime kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{t_1}^t \theta^{\alpha^\sigma}(s) w^\Delta(s) \Delta s = \theta^\alpha(t) w(t) - \theta^\alpha(t_1) w(t_1) - \int_{t_1}^t [\theta^\alpha(s)]^\Delta w(s) \Delta s \quad (3.23)$$

buluruz. Pötzsche zincir kuralından

$$[\theta^\alpha(t)]^\Delta = \alpha \theta^\Delta(t) \int_0^1 [h \theta^\sigma(t) + (1-h) \theta(t)]^{\alpha-1} dh$$

dir.

$\theta^\Delta(t) = -(1/a(t))^{\frac{1}{\alpha}} < 0$ dan

$$- \int_{t_1}^t [\theta^\alpha(s)]^\Delta w(s) \Delta s \geq \alpha \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (\theta^\sigma(s))^{\alpha-1} w(s) \Delta s \quad (3.24)$$

buluruz. (3.22), (3.23) ve (3.24) den

$$\begin{aligned} & \theta^\alpha(t) w(t) - \theta^\alpha(t_1) w(t_1) + \int_{t_1}^t q(s) \theta^{\alpha^\sigma}(s) \Delta s \\ & + \alpha \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (\theta^\sigma(s))^{\alpha-1} w(s) \Delta s \\ & + \alpha \int_{t_1}^t \theta^{\alpha^\sigma}(s) (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\alpha(s) (w(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Delta s \\ & \leq 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

buluruz.

Şimdi, $p = \frac{\alpha+1}{\alpha}$, $q = \alpha + 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A &= -(\alpha + 1)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \varphi^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}(t) \left(\frac{\theta^{\alpha^\sigma}(t)}{(a(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} w(t), \\ B &= \frac{\alpha}{\alpha+1} (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{(a(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{1}{(\theta^\sigma(t))^{\frac{1}{\alpha+1}} \varphi^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}(t)} \end{aligned}$$

alalım. Lemma 2.16 dan

$$\begin{aligned} & \alpha \theta^{\alpha^\sigma}(t) (a(t))^{-\frac{1}{\alpha}} \varphi^\alpha(t) (w(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\ & + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \frac{1}{\varphi^{\alpha^2}(t) \theta^\sigma(t) (a(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \\ & \geq -\alpha (a(t))^{\frac{-1}{\alpha}} (\theta^\sigma(t))^{\alpha-1} w(t) \end{aligned} \quad (3.26)$$

sağlanır. (3.25) ve (3.26) dan

$$\begin{aligned} & \theta^\alpha(t) w(t) - \theta^\alpha(t_1) w(t_1) \\ & + \int_{t_1}^t \left[q(s) \theta^{\alpha^\sigma}(s) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \frac{1}{\theta^\sigma(s) \varphi^{\alpha^2}(s) (a(s))^{\frac{1}{\alpha}}} \right] \Delta s \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (3.3) den $t \rightarrow \infty$ olduğunda $\limsup$ alırsak $\theta^\alpha(t) w(t) \rightarrow -\infty$ olup, bu da (3.19) ile çelişir.

ii. $\alpha \geq 1$ durumu

Teorem 3.2 (C) sağlansın.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t [\xi(s) q(s) - \eta^\alpha(s) \xi^\Delta(s)] \Delta s = \infty \quad (3.27)$$

ve

$$\int_{t_1}^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_1}^s \theta^\alpha(u) q(u) \Delta u \right)^{1/\alpha} \Delta s = \infty \quad (3.28)$$

olacak şekilde $\forall t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için pozitif azalmayan delta diferensiyellenebilir bir ξ

fonksiyonu varsa, (3.1) denklemini salınımlıdır. Burada

$$\eta(t) = \left(\int_{t_1}^t a^{-1/\alpha}(s) \Delta s \right)^{-1} \quad (3.29)$$

dir.

İspat Aksini kabul edelim. Yani $x(t)$, $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü ve $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olsun.

(I) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) > 0$ durumu.

Pötzsche zincir kuralından $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında

$$(x^\alpha)^\Delta = \alpha x^\Delta \int_0^1 (x + h\mu x^\Delta)^{\alpha-1} dh > 0$$

dır. Dolayısıyla x^α , $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ da artan bir fonksiyondur. w fonksiyonunu (3.7) şeklinde tanımlayalım. Bu durumda (3.8) den

$$\begin{aligned} w^\Delta &\leq -q\xi + (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta}{(x^\sigma)^\alpha} \\ &\leq -q\xi + a\xi^\Delta \left(\frac{x^\Delta}{x} \right)^\alpha \end{aligned} \quad (3.30)$$

dir.

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1) + \int_{t_1}^t x^\Delta(s) \Delta s \\ &= x(t_1) + \int_{t_1}^t a^{-1/\alpha}(s) [a(s) (x^\Delta(s))^\alpha]^{1/\alpha} \Delta s \\ &\geq \int_{t_1}^t a^{-1/\alpha}(s) [a(s) (x^\Delta(s))^\alpha]^{1/\alpha} \Delta s \\ &\geq [a(t) (x^\Delta(t))^\alpha]^{1/\alpha} \int_{t_1}^t a^{-1/\alpha}(s) \Delta s \end{aligned}$$

olduğundan $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left(\frac{x^\Delta(t)}{x(t)} \right)^\alpha \leq \frac{1}{a(t)} \left(\int_{t_1}^t a^{-1/\alpha}(s) \Delta s \right)^{-\alpha} = \frac{\eta^\alpha(t)}{a(t)} \quad (3.31)$$

elde ederiz. (3.31) i (3.30) da kullanırsak

$$w^\Delta \leq -q\xi + \eta^\alpha \xi^\Delta \quad (3.32)$$

buluruz. Bu eşitsizliği t_1 den t ye kadar integre edersek

$$0 < w(t) \leq w(t_1) - \int_{t_1}^t [q(s)\xi(s) - \eta^\alpha(s)\xi^\Delta(s)] \Delta s$$

elde ederiz. (3.27) den $t \rightarrow \infty$ olduğunda, $\limsup$ alırsak $w(t) \rightarrow -\infty$ dur. Bu durum $w(t)$ nin pozitif olması ile çelişir.

(II) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) < 0$ durumu.

Bu durumda $s \geq t \geq t_1$ için $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan olduğundan

$$a(s)(-x^\Delta(s))^\alpha \geq a(t)(-x^\Delta(t))^\alpha$$

dir. O halde

$$-x^\Delta(s) \geq a^{-1/\alpha}(s) a^{1/\alpha}(t) (-x^\Delta(t)) \quad (3.33)$$

eşitsizliğini $t \geq t_1$ den $u \geq t$ ye kadar integre edip $u \rightarrow \infty$ alırsak $t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}$ için

$$x(t) \geq \left(\int_t^\infty a^{-1/\alpha}(s) \Delta s \right) (-a^{1/\alpha}(t) (x^\Delta(t))) = -\theta(t) a^{1/\alpha}(t) x^\Delta(t)$$

ve

$$\begin{aligned} (x(t))^\alpha &\geq -(\theta(t))^\alpha a(t) (x^\Delta(t))^\alpha \\ &\geq -(\theta(t))^\alpha a(t_1) (x^\Delta(t_1))^\alpha \\ &= b(\theta(t))^\alpha \end{aligned} \quad (3.34)$$

elde ederiz. Burada $b = -a(t_1) (x^\Delta(t_1))^\alpha > 0$ dir.

(3.1) denkleminde (3.34) ü kullanırsak $t \in [t_1, \infty)_\mathbb{T}$ için

$$-(a(x^\Delta)^\alpha)^\Delta(t) > b\theta^\alpha(t) q(t) \quad (3.35)$$

buluruz. (3.35) eşitsizliğini t_1 den t ye kadar integre edersek

$$\begin{aligned} -a(t) (x^\Delta(t))^\alpha &\geq -a(t_1) (x^\Delta(t_1))^\alpha + b \int_{t_1}^t \theta^\alpha(s) q(s) \Delta s \\ &\geq b \int_{t_1}^t \theta^\alpha(s) q(s) \Delta s \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan

$$-x^\Delta(t) \geq \left(\frac{b}{a(t)} \int_{t_1}^t \theta^\alpha(s) q(s) \Delta s \right)^{1/\alpha} \quad (3.36)$$

dir. (3.36) yı t_1 den t ye kadar integre edersek $t \rightarrow \infty$ olduğunda

$$\infty > x(t_1) \geq -x(t) + x(t_1) \geq \int_{t_1}^t \left(\frac{b}{a(s)} \int_{t_1}^s \theta^\alpha(u) q(u) \Delta u \right)^{1/\alpha} \Delta s \rightarrow \infty$$

şeklinde çelişki elde ederiz. Böylece ispat tamamlanır.

Not: Teorem 3.2 nin ispatında, (C) koşulu yerine (B) koşulunu kullanırsak, II. durum dikkate alınmaz. Sadece I. durum geçerlidir. Yani, eğer $\forall t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ (3.1) denkleminin çözümü ise $x^\Delta(t) > 0$ dir. Aksi takdirde bazı $t_2 \geq t_1$ için $x^\Delta(t_2) < 0$ elde ederiz. O halde $a(t) (x^\Delta)^\alpha(t) \leq a(t_2) (x^\Delta)^\alpha(t_2)$ dan $(a(t))^{1/\alpha} x^\Delta(t) \leq (a(t_2))^{1/\alpha} x^\Delta(t_2) =: c < 0$ gerçekleşir. Buradan

$$0 < x(t) \leq x(t_2) + c \int_{t_2}^t (a(s))^{-1/\alpha} \Delta s \rightarrow -\infty, \quad t \rightarrow \infty$$

dir. Bu da $x(t)$ nin pozitif olması ile çelişir. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.3 (B) sağlansın. $\forall t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.27) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan delta diferensiyellenebilir bir ξ fonksiyonu varsa, (3.1) denklemini salınım-
lıdır.

Teorem 3.4 (C) ve (3.28) sağlansın. $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \left(\frac{(\xi^\Delta(s))^{\alpha+1}}{\xi^\alpha(s)} \right) \right] \Delta s = \infty \quad (3.37)$$

olacak şekilde pozitif azalmayan delta diferensiyellenebilir bir ξ fonksiyonu varsa, (3.1) denklemi salınımlıdır.

İspat $x(t)$, (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü ve $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olsun. Teorem 3.1 in ispatındaki gibi, I. durum ve II. durumu elde ederiz. II. durumun ispatı Teorem 3.2 nin ispatındaki II. duruma benzerdir. I. durumu ele alıp w fonksiyonunu (3.7) şeklinde tanımlarsak (3.8) eşitsizliğini elde ederiz. Pötzsche zincir kuralından

$$(x^\alpha)^\Delta = \alpha x^\Delta \int_0^1 (x + h\mu x^\Delta)^{\alpha-1} dh \geq \alpha x^\Delta \int_0^1 x^{\alpha-1} dh = \alpha x^{\alpha-1} x^\Delta \quad (3.38)$$

dır.

(3.38) i (3.8) de kullanırsak $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ da

$$\begin{aligned} w^\Delta &\leq -\xi q + \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - \alpha \xi \left(\frac{x^\Delta}{x} \right) \frac{(a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma}{(x^\sigma)^\alpha} \\ &= -\xi q + \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - \alpha \frac{\xi}{\xi^\sigma} \left(\frac{x^\Delta}{x} \right) w^\sigma \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde ederiz. $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan ve x^α artan olduğundan

$$\frac{w^\sigma}{\xi^\sigma} = \frac{(a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma}{(x^\alpha)^\sigma} \leq \frac{a(x^\Delta)^\alpha}{x^\alpha} = \frac{w}{\xi}$$

elde ederiz. Burada $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\frac{x^\Delta}{x} = a^{-1/\alpha} \left(\frac{w}{\xi} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \geq a^{-1/\alpha} \left(\frac{w^\sigma}{\xi^\sigma} \right)^{1/\alpha} \quad (3.40)$$

dir. (3.40) ı (3.39) da kullanırsak $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$w^\Delta \leq -\xi q + \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - \alpha a^{-1/\alpha} \frac{\xi}{(\xi^\sigma)^{1+\frac{1}{\alpha}}} (w^\sigma)^{1+\frac{1}{\alpha}} \quad (3.41)$$

dir.

$$\begin{aligned} X &= (\alpha \xi)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{a^{\frac{-1}{\alpha+1}}}{\xi^\sigma} w^\sigma, \\ Y &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^\alpha \left(\frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} \right)^\alpha \left[\alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \xi^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \xi^\sigma a^{\frac{1}{\alpha+1}} \right]^\alpha \end{aligned}$$

ve $\lambda = \frac{\alpha+1}{\alpha}$ ise, Lemma 2.14 den

$$\alpha a^{\frac{-1}{\alpha}} \frac{\xi}{(\xi^\sigma)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} (w^\sigma)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma + \frac{a}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\xi^\Delta)^{\alpha+1}}{\xi^\alpha} \geq 0$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği (3.41) de kullanırsak $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında

$$w^\Delta \leq -\xi q + \frac{a}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\xi^\Delta)^{\alpha+1}}{\xi^\alpha} \quad (3.42)$$

dir. (3.42) eşitsizliğini t_1 den t ye kadar integre edersek

$$w(t) \leq w(t_1) - \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\xi^\Delta(s))^{\alpha+1}}{\xi^\alpha(s)} \right] \Delta s \quad (3.43)$$

elde ederiz. $t \rightarrow \infty$ olduğunda, (3.43) de lim sup alıp (3.37) yi kullanırsak $t \geq t_1$ için $w(t)$ nin pozitif olması ile çelişki elde ederiz. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.4 ün ispatında (C) koşulu yerine (B) koşulunu kullanırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.5 (B) sağlansın. Eğer herhangi $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.37) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan delta diferensiyellenebilir bir ξ fonksiyonu varsa (3.1) denkleminin salınımlıdır.

Teorem 3.6 (C) ve (3.28) sağlansın. Eğer $\forall t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \left(\frac{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}{4\alpha} \right) \left(\frac{(\xi^\Delta(s))^2}{\xi(s)} \right) (\eta^\sigma(s))^{\alpha-1} \right] \Delta s = \infty \quad (3.44)$$

olacak şekilde pozitif delta diferensiyellenebilir bir ξ fonksiyonu varsa (3.1) denklemi salınımlıdır.

İspat $x(t)$, (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olmak üzere $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olsun. Teorem 3.3 deki gibi benzer işlemlerle (3.41) eşitsizliğini $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında

$$w^\Delta \leq -\xi q + \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - \alpha a^{-1/\alpha} \frac{\xi}{(\xi^\sigma)^{1+\frac{1}{\alpha}}} (w^\sigma)^{\frac{1}{\alpha}-1} (w^\sigma)^2 \quad (3.45)$$

şeklinde yazabiliriz. (3.31) i (3.7) de kullanırsak $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ da

$$w^{1/\alpha-1} = \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} a^{\frac{1}{\alpha}-1} \left(\frac{x}{x^\Delta} \right)^{\alpha-1} \geq \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} a^{\frac{1}{\alpha}-1} \frac{a^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{\eta^{\alpha-1}} = \xi^{\frac{1}{\alpha}-1} \eta^{1-\alpha} \quad (3.46)$$

buluruz. (3.46) y1, (3.45) de kullanırsak $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında

$$\begin{aligned} w^\Delta &\leq -\xi q + \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - \alpha a^{-1/\alpha} \frac{\xi}{(\xi^\sigma)^2} (\eta^\sigma)^{1-\alpha} (w^\sigma)^2 \\ &= -\xi q + \frac{(\xi^\Delta)^2 a^{1/\alpha}}{4\alpha \xi (\eta^\sigma)^{1-\alpha}} - \left(\frac{\sqrt{\alpha a^{-1/\alpha} \xi (\eta^\sigma)^{1-\alpha}}}{\xi^\sigma} w^\sigma - \frac{\xi^\Delta}{2\sqrt{\alpha a^{-1/\alpha} \xi (\eta^\sigma)^{1-\alpha}}} \right)^2 \\ &\leq -\xi q + \frac{a^{1/\alpha} (\xi^\Delta)^2}{4\alpha \xi} (\eta^\sigma)^{\alpha-1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği t_1 den t ye kadar integre edip $t \rightarrow \infty$ olduğunda lim sup alırsak ve (3.44) ü uygularsak $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $w(t)$ nin pozitif olması ile çelişkiye ulaşırız. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.6 nın ispatında (C) koşulu yerine (B) koşulunu kullanırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.7 (B) sağlansın. Eğer herhangi $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (3.44) sağlanacak şekilde

pozitif delta diferensiyellenebilir bir ξ fonksiyonu varsa, (3.1) denklemi salınımlıdır.

Örnek 3.8 Burada (B) sağlanmak üzere (3.1) denkleminin salınımlı olması için bütün yeter koşulları tekrar formüle edelim.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise, sırasıyla (3.27), (3.37) ve (3.44) koşulları

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \xi'(s) \left(\int_{t_1}^s a^{-1/\alpha}(u) du \right)^{-\alpha} \right] ds = \infty, \quad (3.47)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\xi'(s))^{\alpha+1}}{\xi^\alpha(s)} \right] ds = \infty \quad (3.48)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a^{1/\alpha}(s) (\xi'(s))^2}{4\alpha \xi(s)} \left(\int_{t_1}^s a^{-1/\alpha}(u) du \right)^{1-\alpha} \right] ds = \infty \quad (3.49)$$

olur.

Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise sırasıyla (3.27), (3.37) ve (3.44) koşulları

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - (\Delta \xi(s)) \left(\sum_{u=t_1}^{s-1} a^{-1/\alpha}(u) \right)^{-\alpha} \right] = \infty, \quad (3.50)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(s)}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(\Delta \xi(s))^{\alpha+1}}{\xi^\alpha(s)} \right] = \infty \quad (3.51)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_{s=t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a^{1/\alpha}(s) (\Delta \xi(s))^2}{4\alpha \xi(s)} \left(\sum_{u=t_1}^s a^{-1/\alpha}(u) \right)^{1-\alpha} \right] = \infty \quad (3.52)$$

dir (Agarwal vd. 2002, 2003).

Teorem 3.9 (C) sağlansın. $\varphi > 0$ olsun. Ayrıca eğer yeterince büyük $t_1 \geq t_0$ için

(3.27) ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[q(s) (\theta^\alpha(s))^\sigma - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \frac{\theta^{\alpha^2-1}(s)}{(\theta^\sigma(s))^{\alpha^2} \varphi^{\alpha^2}(s) (a(s))^{\frac{1}{\alpha}}} \right] \Delta s = \infty \quad (3.53)$$

olacak şekilde bir $\xi \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ pozitif azalmayan fonksiyonu varsa, (3.1) denklemi salımlıdır.

İspat $x(t)$, (3.1) denkleminin salımlı olmayan bir çözümü ve $t \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olsun. (3.1) den $a(t) (x^\Delta(t))^\alpha$ azalan fonksiyondur. Önceki gibi iki durumu ele alalım. $x^\Delta(t) > 0$ olması durumu Teorem 3.2 de ispatlandı.

Şimdi II. duruma bakalım. Bu durumda $t > t_1$ için $x^\Delta(t) < 0$ dır. w fonksiyonunu (3.16) ile tanımlayalım. O halde (3.18) ve (3.19) sağlanır. (3.16) nın delta türevini alırsak

$$w^\Delta(t) = -q(t) - \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma [(x(t))^\alpha]^\Delta}{(x(t))^\alpha (x(\sigma(t)))^\alpha}$$

elde ederiz. Pötzsche zincir kuralından

$$((x(t))^\alpha)^\Delta \leq \alpha (x^\sigma(t))^{\alpha-1} x^\Delta(t)$$

dir. Dolayısıyla

$$w^\Delta(t) \leq -q(t) - \alpha \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{(x(t))^\alpha x(\sigma(t))} \quad (3.54)$$

dir. Diğer taraftan $x^\Delta(t) < 0$ olup $x(t) \geq x^\sigma(t)$ dir. O halde

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{(x(t))^\alpha x(\sigma(t))} &\leq -\alpha \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{(x(t))^{\alpha+1}} \\ &= -\alpha \left(\frac{w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(x(t))^\alpha} \\ &= \alpha \left(\frac{-w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\alpha w^\sigma(t) \end{aligned}$$

buluruz. (3.54) den $w^\Delta(t) \leq 0$ dir. Böylece $w^\sigma(t) \leq w(t)$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} -\alpha \frac{(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{(x(t))^\alpha x(\sigma(t))} &\leq \alpha \left(\frac{-w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\alpha w^\sigma(t) \\ &\leq -\alpha \left(\frac{1}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\alpha \end{aligned} \quad (3.55)$$

buluruz. Ayrıca $\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} = \frac{x(t)+\mu(t)x^\Delta(t)}{x(t)} = 1 + \mu(t) \frac{x^\Delta(t)}{x(t)}$ olup (3.18) i kullanırsak

$$\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \geq 1 - \frac{\mu(t)}{(a(t))^{\frac{1}{\alpha}} \theta(t)} = \frac{\delta(t) - \mu(t)}{\delta(t)} \quad (3.56)$$

buluruz. Bu durumda (3.55) ve (3.56) yı (3.54) te kullanırsak (3.21) i buluruz. Dolayısıyla (3.22) ve (3.23) sağlanır.

Pöztzsche zincir kuralından

$$(\theta^\alpha(t))^\Delta = \alpha \theta^\Delta(t) \int_0^1 [h\theta^\sigma(t) + (1-h)\theta(t)]^{\alpha-1} dh$$

dir. $\theta^\Delta(t) = -\left(\frac{1}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < 0$ olduğundan

$$-\int_{t_1}^t (\theta^\alpha(s))^\Delta w(s) \Delta s \geq \alpha \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (\theta(s))^{\alpha-1} w(s) \Delta s \quad (3.57)$$

elde ederiz. (3.22), (3.23) ve (3.57) den

$$\begin{aligned} &\theta^\alpha(t) w(t) - \theta^\alpha(t_1) w(t_1) + \int_{t_1}^t q(s) \theta^{\alpha^\sigma}(s) \Delta s \\ &+ \alpha \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (\theta(s))^{\alpha-1} w(s) \Delta s \\ &+ \alpha \int_{t_1}^t \theta^{\alpha^\sigma}(s) (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\alpha(s) (w(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Delta s \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (3.58)$$

elde ederiz.

Lemma 3.16 dan $p = \frac{\alpha+1}{\alpha}$, $q = \alpha + 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A &= -(\alpha + 1)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \varphi^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}(t) \left(\frac{\theta^{\alpha^\sigma}(t)}{(a(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} w(t), \\ B &= \frac{\alpha}{\alpha+1} (\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{(a(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{\theta^{\alpha-1}(t)}{(\theta^\sigma(t))^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}} \varphi^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}(t)} \end{aligned}$$

alırsak

$$\begin{aligned} & \alpha \theta^{\alpha^\sigma}(t) (a(t))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\alpha(t) (w(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\ & + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \frac{\theta^{\alpha^2-1}(t)}{\varphi^{\alpha^2}(t) (\theta^\sigma(t))^{\alpha^2} (a(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \\ & \geq -\alpha (a(t))^{-\frac{1}{\alpha}} (\theta(t))^{\alpha-1} w(t) \end{aligned} \quad (3.59)$$

buluruz. (3.59) eşitsizliğini (3.58) de kullanırsak

$$\begin{aligned} & \theta^\alpha(t) w(t) - \theta^\alpha(t_1) w(t_1) + \int_{t_1}^t \left[q(s) \theta^{\alpha^\sigma}(s) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \times \right. \\ & \left. \left(\frac{\theta^{\alpha^2-1}(s)}{\varphi^{\alpha^2}(s) (\theta^\sigma(s))^{\alpha^2} (a(s))^{\frac{1}{\alpha}}} \right) \right] \Delta s \leq 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. (3.53) den, $t \rightarrow \infty$ olduğunda $\limsup$ alırsak $\theta^\alpha(t) w(t) \rightarrow -\infty$ buluruz.

Bu da (3.21) ile çelişir.

Teorem 3.10 (C) sağlansın. $\alpha > 0$ ve $\varphi(t) > 0$ olsun. Ayrıca yeterince büyük $t_1 \geq t_0$ için (3.2) sağlanacak ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t q(s) \theta^{\alpha+1}(\sigma(s)) \Delta s = \infty \quad (3.60)$$

olacak şekilde bir $\xi \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ pozitif fonksiyonu varsa, (3.1) denklemi salınımlıdır.

İspat $x(t)$, (3.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü ve $t \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olsun. Önceki gibi iki durumu inceleyelim:

(I) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) > 0$ olmak üzere $\alpha \leq 1$ ve $\alpha \geq 1$ durumunda sırasıyla Teorem 3.1 ve Teorem 3.4 te (3.2) geçerlidir.

(II) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) < 0$ olmak üzere $\alpha \leq 1$ ise, Teorem 3.1 deki II. durumun benzer işlemleri ile (3.21) sağlanır. (3.21) i $\theta^{\alpha+1}(\sigma(t))$ ile çarpıp t_1 den t ye kadar integre edersek

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^t \theta^{\alpha+1}(\sigma(s)) w^\Delta(s) \Delta s + \int_{t_1}^t q(s) \theta^{\alpha+1}(\sigma(s)) \Delta s \\ & + \alpha \int_{t_1}^t \theta^{\alpha+1}(\sigma(s)) (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\alpha(s) (w(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Delta s \\ & \leq 0 \end{aligned} \quad (3.61)$$

buluruz. Birinci terime kısmi integrasyon uygularsak

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t \theta^{\alpha+1}(\sigma(s)) w^\Delta(s) \Delta s &= \theta^{\alpha+1}(t) w(t) - \theta^{\alpha+1}(t_1) w(t_1) \\ &\quad - \int_{t_1}^t [\theta^{\alpha+1}(s)]^\Delta w(s) \Delta s \end{aligned}$$

elde ederiz. Pötzsche zincir kuralından

$$(\theta^{\alpha+1}(t))^\Delta = (\alpha+1)\theta^\Delta(t) \int_0^1 [h\theta^\sigma(t) + (1-h)\theta(t)]^\alpha dh$$

dır. $\theta^\Delta(t) = -\left(\frac{1}{a(t)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} < 0$ olduğundan

$$- \int_{t_1}^t [\theta^{\alpha+1}(s)]^\Delta w(s) \Delta s \geq (\alpha+1) \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} (\theta(s))^\alpha w(s) \Delta s$$

elde ederiz. O halde (3.61) den

$$\begin{aligned} & \theta^{\alpha+1}(t) w(t) - \theta^{\alpha+1}(t_1) w(t_1) + \int_{t_1}^t q(s) \theta^{\alpha+1}(\sigma(s)) \Delta s \\ & + (\alpha+1) \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} (\theta(s))^\alpha w(s) \Delta s \\ & + \alpha \int_{t_1}^t \theta^{\alpha+1}(\sigma(s)) (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\alpha(s) (w(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Delta s \\ & \leq 0 \end{aligned} \quad (3.62)$$

buluruz. (3.21) den $-\theta^\alpha(t) w(t) \leq 1$ olduğundan $-\theta^{\alpha+1}(t) w(t) \leq \theta(t) < \infty$,

$t \rightarrow \infty$ ve

$$- \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (\theta(s))^{\alpha} w(s) \Delta s \leq \int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s < \infty$$

dur.

$\varphi(t) \leq 1$ ve $\frac{\theta^{\sigma}(t)}{\theta(t)} \leq 1$ ise

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{\infty} \theta^{\alpha+1}(\sigma(s)) (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^{\alpha}(s) (w(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Delta s \\ & < \int_{t_1}^{\infty} (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^{\alpha}(s) (\theta^{\alpha}(s) w(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Delta s \\ & \leq \int_{t_1}^{\infty} (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \Delta s < \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (3.62) den

$$\int_{t_1}^t q(s) \theta^{\alpha+1}(\sigma(s)) \Delta s < \infty$$

buluruz. Bu durum (3.60) ile çelişir. $\alpha \geq 1$ durumu da benzer şekilde ispatlanır. Böylece ispat tamamlanır.

3.2 (A) Denkleminde $\alpha \neq \beta$ Durumu

Teorem 3.11 (3.5) deki $\varphi(t) > 0$ olmak üzere $\beta < \alpha, \alpha \geq 1$ ve (C) sağlansın. Ayrıca eğer yeterince büyük t_1 için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\alpha} a(s) (\xi^{\Delta}(s))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\delta_1(s) \xi(s))^{\alpha}} \right] \Delta s = \infty \quad (3.63)$$

ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[q(s) \theta^{\alpha^{\sigma}}(s) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\alpha} \theta^{\alpha^2-1}(s)}{c_2^{\alpha} \varphi^{\alpha\beta}(s) (\theta^{\sigma}(s))^{\alpha^2} (a(s))^{\frac{1}{\alpha}}} \right] \Delta s = \infty \quad (3.64)$$

sağlanacak şekilde bir $\xi \in C_{rd}^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ pozitif azalmayan fonksiyonu varsa (A) denk-

lemi salınımlıdır. Burada $\beta < \alpha$ için

$$\delta_1(t) = c_1 (\eta^\sigma(t))^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}, \quad c_1 \text{ pozitif keyfi reel sabit}$$

ve

$$c_2 \text{ pozitif keyfi reel sabit}$$

dir.

İspat $x(t)$, (A) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü ve $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$ olsun. O halde (A) dan $(a(x^\Delta)^\alpha)^\Delta(t) \leq 0$ dır. Yani $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan bir fonksiyondur.

(I) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) > 0$ durumu.

$w(t)$ fonksiyonunu

$$w(t) = \xi(t) \frac{a(t) (x^\Delta(t))^\alpha}{x^\beta(t)} \quad (3.65)$$

şeklinde tanımlayalım. Türevini alırsak

$$\begin{aligned} w^\Delta &= \left(\frac{\xi}{x^\beta} \right)^\Delta (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma + \frac{\xi}{x^\beta} (a(x^\Delta)^\alpha)^\Delta \\ &= \frac{\xi}{x^\beta} [-qx^\beta] + \left(\frac{\xi}{x^\beta} \right)^\Delta (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \\ &= -q\xi + (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \left[\frac{\xi^\Delta x^\beta - \xi (x^\beta)^\Delta}{x^\beta (x^\sigma)^\beta} \right] \\ &= -q\xi + \xi^\Delta \frac{(a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma}{(x^\sigma)^\beta} - \xi (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \frac{(x^\beta)^\Delta}{x^\beta (x^\sigma)^\beta} \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\leq \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - q\xi - \xi (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \frac{(x^\beta)^\Delta}{x^\beta (x^\sigma)^\beta} \quad (3.67)$$

buluruz. Pötzsche zincir kuralından

$$(x^\beta(t))^\Delta \geq \begin{cases} \beta (x^\sigma(t))^{\beta-1} x^\Delta(t) & , \quad 0 < \beta \leq 1 \\ \beta (x(t))^{\beta-1} x^\Delta(t) & \beta > 1 \end{cases} \quad (3.68)$$

elde ederiz. $0 < \beta \leq 1$ ise

$$\begin{aligned}
w^\Delta &\leq \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - q\xi - \beta \frac{\xi \left(a \left(x^\Delta\right)^\alpha\right)^\sigma}{x^\beta (x^\sigma)} x^\Delta \\
&\leq \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - q\xi - \beta \frac{\xi \left(a \left(x^\Delta\right)^\alpha\right)^\sigma}{(x^\beta)^\sigma} \frac{x^\Delta}{x^\sigma} \\
&= \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - q\xi - \beta \frac{\xi}{\xi^\sigma} w^\sigma \frac{x^\Delta}{x^\sigma}
\end{aligned}$$

dir. $\beta > 1$ ise

$$\begin{aligned}
w^\Delta &\leq \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - q\xi - \beta \frac{\xi \left(a \left(x^\Delta\right)^\alpha\right)^\sigma}{x (x^\beta)^\sigma} x^\Delta \\
&= \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - q\xi - \beta \frac{\xi \left(a \left(x^\Delta\right)^\alpha\right)^\sigma}{(x^\beta)^\sigma} \frac{x^\Delta}{x} \\
&\leq \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - q\xi - \beta \frac{\xi}{\xi^\sigma} w^\sigma \frac{x^\Delta}{x^\sigma}
\end{aligned}$$

dir. O halde $\forall \beta > 0$ için

$$w^\Delta \leq \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - q\xi - \beta \frac{\xi}{\xi^\sigma} w^\sigma \frac{x^\Delta}{x^\sigma}$$

dir. $a \left(x^\Delta\right)^\alpha$ azalan olduğundan $x^\Delta(t) \geq a^{\frac{-1}{\alpha}}(t) \left(a^{\frac{1}{\alpha}}(t) x^\Delta(t)\right)^\sigma$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq \frac{\xi^\Delta(t) w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - q(t) \xi(t) - \beta a^{\frac{-1}{\alpha}}(t) \frac{\xi(t) w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \frac{\left(a^{\frac{1}{\alpha}}(t) x^\Delta(t)\right)^\sigma}{\left(x^{\frac{\beta}{\alpha}}(t)\right)^\sigma} (x^\sigma(t))^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \\
&= \frac{\xi^\Delta(t) w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - q(t) \xi(t) - \beta a^{\frac{-1}{\alpha}}(t) \frac{\xi(t) (w^\sigma(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}}{(\xi^\sigma(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} (x^\sigma(t))^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}
\end{aligned} \tag{3.69}$$

buluruz.

$\beta < \alpha$ için bir b pozitif sabiti vardır, öyle ki $t \geq t_1$ için

$$a(t) \left(x^\Delta(t)\right)^\alpha \leq b$$

ve

$$x^\Delta(t) \leq b^{\frac{1}{\alpha}} a^{\frac{-1}{\alpha}}(t)$$

sağlanır. Bu eşitsizliği t_1 den t ye kadar integre edersek $x(t) \leq x(t_1) + b^{\frac{1}{\alpha}} \int_{t_1}^t a^{\frac{-1}{\alpha}}(s) \Delta s$ buluruz. $\forall t_2 \geq t_1$ için bir b_1 pozitif reel sabiti vardır öyle ki

$$x(t) \leq b_1 \int_{t_1}^t a^{\frac{-1}{\alpha}}(s) \Delta s = b_1 \eta^{-1}(t)$$

sağlanır. O halde $x^\sigma(t) \leq b_1 (\eta^\sigma(t))^{-1}$ den

$x^{\sigma \frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) \geq b_1^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} (\eta^\sigma(t))^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} = c_1 (\eta^\sigma)^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}(t) = \delta_1(t)$ dir. Bu ifadeyi (3.69) da kullanırsak

$$w^\Delta(t) \leq \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} w^\sigma(t) - q(t) \xi(t) - \beta \delta_1(t) a^{\frac{-1}{\alpha}}(t) \frac{\xi(t)}{(\xi^\sigma(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} (w^\sigma(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \quad (3.70)$$

elde ederiz. Şimdi,

$$X = (\beta \delta_1 \xi)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{a^{\frac{-1}{\alpha+1}}}{\xi^\sigma} w^\sigma, \quad Y = \left(\frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} \right)^\alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^\alpha \left[(\beta \delta_1 \xi)^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \xi^\sigma a^{\frac{1}{\alpha+1}} \right]^\alpha$$

alalım. $\lambda = \frac{\alpha+1}{\alpha} > 1$ olmak üzere Lemma 2.14 den

$$\beta \delta_1(t) a^{\frac{-1}{\alpha}}(t) \frac{\xi(t)}{(\xi^\sigma(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} (w^\sigma(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} w^\sigma(t) \geq - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha a(t) (\xi^\Delta(t))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\delta_1(t) \xi(t))^\alpha}$$

buluruz. Bunu (3.70) de kullanırsak $t \in [t_2, \infty)$, $t_2 \geq t_1$ için

$$w^\Delta(t) \leq -\xi(t) q(t) + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha a(t) (\xi^\Delta(t))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\delta_1(t) \xi(t))^\alpha} \quad (3.71)$$

elde ederiz. (3.71) eşitsizliğini t_2 den t ye kadar integre edersek

$$w(t) \leq w(t_2) - \int_{t_2}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha a(s) (\xi^\Delta(s))^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\delta_1(s) \xi(s))^\alpha} \right] \Delta s \quad (3.72)$$

buluruz. $t \rightarrow \infty$ olduğunda lim sup alıp (3.63) ü kullanırsak $t \geq t_1$ için $w(t)$ nin

pozitif olması ile çelişkiye ulaşırız.

(II) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) < 0$ durumu.

w fonksiyonunu

$$w(t) = \frac{a(t) (x^\Delta(t))^\alpha}{(x(t))^\beta} \quad (3.73)$$

şeklinde tanımlayalım. (3.73) den $t \geq t_1$ için, $w(t) < 0$ dir. $a(t) (x^\Delta(t))^\alpha$ azalan olduğundan $\forall s \geq t$ için $x^\Delta(s) \leq \left(\frac{a(t)}{a(s)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} x^\Delta(t)$ dir. Bu eşitsizliği $t \geq t_1$ den $u \geq t$ ye kadar integre edersek

$$\begin{aligned} x(u) &\leq x(t) + \int_t^u \left[\left(\frac{a(t)}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} x^\Delta(t) \right] \Delta s \\ &\leq x(t) + (a(t))^{\frac{1}{\alpha}} x^\Delta(t) \int_t^u (a(s))^{-1/\alpha} \Delta s \end{aligned} \quad (3.74)$$

elde ederiz. $u \rightarrow \infty$ olduğunda

$$\begin{aligned} 0 &\leq x(t) + (a(t))^{\frac{1}{\alpha}} x^\Delta(t) \int_t^\infty (a(s))^{-1/\alpha} \Delta s \\ &= x(t) + (a(t))^{\frac{1}{\alpha}} x^\Delta(t) \theta(t) \end{aligned}$$

dir. O halde

$$(a(t))^{\frac{1}{\alpha}} \frac{x^\Delta(t)}{x(t)} \theta(t) \geq -1$$

veya

$$a(t) \left(\frac{x^\Delta(t)}{x(t)} \right)^\alpha \theta^\alpha(t) \geq -1 \quad (3.75)$$

dir. (3.75) eşitsizliğini (3.73) de kullanırsak

$$-1 \leq \theta^\alpha(t) w(t) x^{\beta-\alpha}(t) \leq 0 \quad (3.76)$$

elde ederiz. (3.73) ün taraf tarafa delta türevini alırsak

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &= \left(\frac{1}{x^\beta(t)} \right)^\Delta (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma + \frac{1}{x^\beta(t)} (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta \\
&= \frac{1}{x^\beta(t)} (-q(t) x^\beta(t)) + \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma [- (x^\beta(t))^\Delta]}{x^\beta(t) (x^\sigma(t))^\beta} \\
&= -q(t) - \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma (x^\beta(t))^\Delta}{x^\beta(t) (x^\sigma(t))^\beta}
\end{aligned}$$

buluruz. Pötzsche zincir kuralından

$$(x^\beta(t))^\Delta \leq \begin{cases} \beta (x(t))^{\beta-1} x^\Delta(t) & , \quad 0 < \beta \leq 1 \\ \beta (x^\sigma(t))^{\beta-1} x^\Delta(t) & , \quad \beta > 1 \end{cases}$$

dir. O halde, $0 < \beta \leq 1$ ise

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -q(t) - \frac{\beta (x(t))^{\beta-1} x^\Delta(t) (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{x^\beta(t) (x^\sigma(t))^\beta} \\
&= -q(t) - \frac{\beta (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x(t) (x^\sigma(t))^\beta}
\end{aligned}$$

ve $\beta > 1$ ise

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -q(t) - \frac{\beta (x^\sigma(t))^{\beta-1} x^\Delta(t) (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{x^\beta(t) (x^\sigma(t))^\beta} \\
&= -q(t) - \frac{\beta x^\Delta(t) (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{x^\beta(t) (x^\sigma(t))}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $x^\Delta(t) < 0$ olduğundan $\forall \beta > 0$ için

$$\begin{aligned}
-\frac{\beta (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x(t) (x^\sigma(t))^\beta} &\leq -\frac{\beta (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x^{\beta+1}(t)} \\
&= -\beta \left(\frac{w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{x^\beta(t)} \\
&= \beta \left(-\frac{w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\beta x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) w^\sigma(t)
\end{aligned} \tag{3.77}$$

olup

$$w^\Delta(t) \leq -q(t) + \beta \left(-\frac{w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\beta x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) w^\sigma(t) < 0$$

dir. $w^\sigma(t) \leq w(t)$ olduğundan

$$\begin{aligned} -\frac{\beta (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x(t) (x^\sigma(t))^\beta} &\leq \beta \left(-\frac{w(t)}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\beta x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) w^\sigma(t) \\ &\leq -\beta \left(\frac{1}{a(t)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} w^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}(t) \left(\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} \right)^\beta x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) \end{aligned}$$

buluruz. Ayrıca

$$\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} = \frac{x(t) + \mu(t) x^\Delta(t)}{x(t)} = 1 + \mu(t) \frac{x^\Delta(t)}{x(t)}$$

dir. (3.75) den

$$\frac{x^\sigma(t)}{x(t)} > 1 - \frac{\mu(t)}{(a(t))^{\frac{1}{\alpha}} \theta(t)} = \frac{\delta(t) - \mu(t)}{\delta(t)}$$

olup $t \geq t_1$ için

$$w^\Delta(t) + q(t) + \beta (a(t))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\beta(t) (w(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) \leq 0 \quad (3.78)$$

dir. $x^\Delta(t) < 0$ olduğundan $x^\sigma(t) \leq x(t)$ dir ve $\beta < \alpha$ için bir c pozitif sabiti ve $t_2 \geq t_1$ vardır, öyle ki $x^\sigma(t) \leq x(t) \leq c$ dir. Dolayısıyla $t \geq t_2$ için

$$x^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) \geq c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} = c_2$$

dir. O halde (3.78) den $t \geq t_2$ için

$$w^\Delta(t) + q(t) + \beta c_2 (a(t))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\beta(t) (w(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq 0 \quad (3.79)$$

elde ederiz. (3.79) u $\theta^{\alpha^\sigma}(t)$ ile çarparsak

$$\theta^{\alpha^\sigma}(t) w^\Delta(t) + q(t) \theta^{\alpha^\sigma}(t) + \beta c_2 \theta^{\alpha^\sigma}(t) (a(t))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\beta(t) (w(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \leq 0$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği t_1 den t ye kadar integre edersek

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^t \theta^{\alpha^\sigma}(s) w^\Delta(s) \Delta s + \int_{t_1}^t q(s) \theta^{\alpha^\sigma}(s) \Delta s \\ & \leq -\beta c_2 \int_{t_1}^t \theta^{\alpha^\sigma}(s) (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\beta(s) (w(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Delta s \end{aligned} \quad (3.80)$$

buluruz. Birinci terime kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{t_1}^t \theta^{\alpha^\sigma}(s) w^\Delta(s) \Delta s = \theta^\alpha(t) w(t) - \theta^\alpha(t_1) w(t_1) - \int_{t_1}^t [\theta^\alpha(s)]^\Delta w(s) \Delta s \quad (3.81)$$

elde ederiz. Pötzsche zincir kuralından

$$[\theta^\alpha(t)]^\Delta = \alpha \theta^\Delta(t) \int_0^1 [h \theta^\sigma(t) + (1-h) \theta(t)]^{\alpha-1} dh$$

dir.

$\theta^\Delta(t) = -(1/a(t))^{\frac{1}{\alpha}} < 0$ olduğundan

$$-\int_{t_1}^t [\theta^\alpha(s)]^\Delta w(s) \Delta s \geq \alpha \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (\theta(s))^{\alpha-1} w(s) \Delta s \quad (3.82)$$

buluruz. (3.80), (3.81) ve (3.82) den

$$\begin{aligned} & \theta^\alpha(t) w(t) - \theta^\alpha(t_1) w(t_1) + \int_{t_1}^t q(s) \theta^{\alpha^\sigma}(s) \Delta s \\ & + \alpha \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} (\theta(s))^{\alpha-1} w(s) \Delta s \\ & + \beta c_2 \int_{t_1}^t \theta^{\alpha^\sigma}(s) (a(s))^{\frac{-1}{\alpha}} \varphi^\beta(s) (w(s))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \Delta s \\ & \leq 0 \end{aligned} \quad (3.83)$$

elde ederiz.

$p = \frac{\alpha+1}{\alpha}$, $q = \alpha + 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} A &= -(\alpha+1)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \varphi^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+1}}(t) \left(\frac{\beta c_2 \theta^{\alpha\sigma}(t)}{\alpha(a(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} w(t), \\ B &= \frac{\alpha^2}{\alpha+1} (\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha+1}} \left(\frac{1}{\alpha(a(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \frac{\theta^{\alpha-1}(t)}{(\beta^\alpha c_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha+1}} (\theta^\sigma(t))^{\frac{\alpha^2}{\alpha+1}}} \frac{1}{\varphi^{\frac{\alpha\beta}{\alpha+1}}(t)} \end{aligned}$$

alalım. Lemma 2.16 dan

$$\begin{aligned} & \beta c_2 \theta^{\alpha\sigma}(t) (a(t))^{-\frac{1}{\alpha}} \varphi^\beta(t) (w(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \\ & + \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha \frac{\theta^{\alpha^2-1}(t)}{c_2^\alpha \varphi^{\alpha\beta}(t) (\theta^\sigma(t))^{\alpha^2} (a(t))^{\frac{1}{\alpha}}} \\ & \geq -\alpha(a(t))^{\frac{-1}{\alpha}} (\theta(t))^{\alpha-1} w(t) \end{aligned} \quad (3.84)$$

buluruz. (3.83) ve (3.84) den

$$\begin{aligned} & \theta^\alpha(t) w(t) - \theta^\alpha(t_1) w(t_1) \\ & + \int_{t_1}^t \left[q(s) \theta^{\alpha\sigma}(s) - \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^{\alpha+1} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha \frac{\theta^{\alpha^2-1}(s)}{c_2^\alpha \varphi^{\alpha\beta}(s) (\theta^\sigma(s))^{\alpha^2} (a(s))^{\frac{1}{\alpha}}} \right] \Delta s \\ & \leq 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece (3.64) den $t \rightarrow \infty$ olduğunda $\limsup$ alırsak $\theta^\alpha(t) w(t) \rightarrow -\infty$ buluruz. Bu da (3.76) ile çelişir.

Teorem 3.11 in ispatında (C) koşulu yerine (B) koşulunu kullanırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.12 (B) sağlansın. Eğer (3.63) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan delta diferensiyellenebilir bir ξ fonksiyonu varsa, (A) denklemi salınımlıdır.

Teorem 3.13 $\beta > \alpha$ olmak üzere (C) sağlansın. $\forall t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t [\xi(s) q(s) - c_1 \eta^\alpha(s) \xi^\Delta(s)] \Delta s = \infty \quad (3.85)$$

ve

$$\int_{t_1}^{\infty} \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_2}^s \theta^\beta(u) q(u) \Delta u \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s = \infty \quad (3.86)$$

sağlanacak şekilde pozitif azalmayan delta diferensiyellenebilir bir ξ fonksiyonu varsa (A) denklemi salınımlıdır. Burada c_1 keyfi bir pozitif sabittir.

İspat Aksini kabul edelim. Yani, $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ olmak üzere $[t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ da $x(t)$, (A) nın salınımlı olmayan bir çözümü olsun. $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan olduğundan önceki gibi iki durumu gözününe alalım.

(I) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) > 0$ durumu.

$$(x^\alpha(t))^\Delta = \alpha x^\Delta \int_0^1 (x + h\mu x^\Delta)^{\alpha-1} dh > 0$$

olduğundan $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ da $x^\alpha(t)$ artandır. $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ da

$$w := \xi \frac{a(x^\Delta)^\alpha}{x^\beta} \quad (3.87)$$

olsun. O halde

$$\begin{aligned} w^\Delta &= \left(\frac{\xi}{x^\beta} \right)^\Delta (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma + \frac{\xi}{x^\beta} (a(x^\Delta)^\alpha)^\Delta \\ &= \frac{\xi}{x^\beta} [-qx^\beta] + (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta x^\beta - \xi (x^\beta)^\Delta}{x^\beta (x^\beta)^\sigma} \\ &= -\xi q + (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta}{(x^\beta)^\sigma} - \frac{\xi (a(x^\Delta)^\alpha)^\sigma (x^\beta)^\Delta}{x^\beta (x^\beta)^\sigma} \\ &= -\xi q + \frac{\xi^\Delta}{\xi^\sigma} w^\sigma - \frac{\xi w^\sigma (x^\beta)^\Delta}{\xi^\sigma x^\beta} \end{aligned} \quad (3.88)$$

$$\leq -\xi q + a\xi^\Delta \left(\frac{x^\Delta}{x} \right)^\alpha x^{\alpha-\beta} \quad (3.89)$$

ve

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(t_1) + \int_{t_1}^t x^\Delta(s) \Delta s \\
&= x(t_1) + \int_{t_1}^t a^{-1/\alpha}(s) (a(s) (x^\Delta(s))^\alpha)^{1/\alpha} \Delta s \\
&\geq \int_{t_1}^t a^{-1/\alpha}(s) \Delta s (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^{1/\alpha}
\end{aligned}$$

dan

$$\left(\frac{x^\Delta(t)}{x(t)} \right)^\alpha \leq \frac{1}{a(t)} \left(\int_{t_1}^t a^{-1/\alpha}(s) \Delta s \right)^{-\alpha} = \frac{\eta^\alpha(t)}{a(t)} \quad (3.90)$$

dir. (3.90) ı (3.89) da kullanırsak $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$w^\Delta \leq -\xi q + \eta^\alpha \xi^\Delta x^{\alpha-\beta}$$

elde ederiz. $\beta > \alpha$ olduğundan $t \geq t_2$ için $x^\sigma(t) \geq x(t) \geq c$ olacak şekilde bir c sabiti vardır. O halde $x^{\alpha-\beta} \leq c^{\alpha-\beta} = c_1$ dir. Dolayısıyla

$$w^\Delta \leq -\xi q + c_1 \eta^\alpha \xi^\Delta$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği t_2 den t ye kadar integre edersek çelişkiye ulaşırız.

(II) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) < 0$ durumu.

$s \geq t \geq t_1$ için, $a(s) (-x^\Delta(s))^\alpha \geq a(t) (-x^\Delta(t))^\alpha$ olduğundan

$$-x^\Delta(s) \geq a^{-1/\alpha}(s) a^{1/\alpha}(t) (-x^\Delta(t)) \quad (3.91)$$

dir. (3.91) eşitsizliğini $t \geq t_1$ den $u \geq t$ ye kadar integre edip $u \rightarrow \infty$ alırsak $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$x(t) \geq \int_t^\infty a^{-1/\alpha}(s) \Delta s (-a^{1/\alpha}(t) x^\Delta(t)) = -\theta(t) a^{1/\alpha}(t) x^\Delta(t)$$

buluruz. $c = -a^{1/\alpha}(t_1) x^\Delta(t_1)$ olmak üzere

$$x(t) \geq \theta(t) (-a^{1/\alpha}(t_1) x^\Delta(t_1)) = c\theta(t) \quad (3.92)$$

elde ederiz. (3.92) eşitsizliğini (A) da kullanırsak

$$- \left(a(t) \left(x^\Delta(t) \right)^\alpha \right)^\Delta \geq c^\beta \theta^\beta(t) q(t) \quad (3.93)$$

olup t_1 den t ye kadar integral alırsak

$$\begin{aligned} -a(t) \left(x^\Delta(t) \right)^\alpha &\geq -a(t_1) \left(x^\Delta(t_1) \right)^\alpha + c^\beta \int_{t_1}^t \theta^\beta(s) q(s) \Delta s \\ &\geq c^\beta \int_{t_1}^t \theta^\beta(s) q(s) \Delta s \end{aligned}$$

ve $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$-x^\Delta(t) \geq \left(\frac{c^\beta}{a(t)} \int_{t_1}^t \theta^\beta(s) q(s) \Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.94)$$

elde ederiz. (3.94) eşitsizliğini t_1 den t ye kadar integre edersek

$$-x(t) + x(t_1) \geq c^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_1}^s \theta^\beta(u) q(u) \Delta u \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s$$

ve

$$\infty > x(t_1) \geq -x(t) + x(t_1) \geq c^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_1}^s \theta^\beta(u) q(u) \Delta u \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s$$

buluruz. $t \rightarrow \infty$ için, (3.86) ile çelişki elde ederiz. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3.13 ün ispatında (C) koşulu yerine (B) koşulunu kullanırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.14 (B) ve (3.85) sağlanacak şekilde pozitif azalmayan delta diferensiyelenebilir bir ξ fonksiyonu varsa, (A) denklemlidir.

4. GECİKMELİ TERİM İÇEREN YARI-LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Bu bölümde gecikmeli terim içeren

$$(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta + q(t) x^\alpha(\tau(t)) = 0 \quad (4.1)$$

şeklindeki dinamik denklemini ele alalım. Burada $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için a ve q reel değerli, pozitif ve sağ yoğun sürekli fonksiyonlar, $\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$, $\alpha > 0$ olmak üzere iki pozitif tek tam sayının oranıdır.

(4.1) denklemi için $0 < \alpha \leq 1$ ve $\alpha \geq 1$ durumları sırasıyla Erbe vd. (2008, 2009) tarafından çalışılmıştır. $a(t) = 1$ ve $\alpha = 1$ durumunda (4.1) denkleminin salınımlılığı için bazı yeter koşullar Agarwal vd. (2005) tarafından verilmiştir.

Biz bunlardan yararlanarak aşağıdaki teoremleri ispatladık.

Teorem 4.1 (B) sağlansın. Eğer verilen herhangi reel değerli delta diferensiyellenebilir bir ξ pozitif fonksiyonu ve her yeterince büyük T için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(\tau(s)) \left((\xi^\Delta(s))_+ \right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\xi(s) \tau^\Delta(s))^\alpha} \right] \Delta s = \infty \quad (4.2)$$

sağlanırsa, (4.1) denklemi salınımlıdır.

İspat Aksini kabul edelim. Yani, $t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ ve $x(\tau(t)) > 0$ olmak üzere $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında $x(t)$, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü olsun. (4.1) den $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta = -q(t) x^\alpha(\tau(t)) < 0 \quad (4.3)$$

dır. O halde $a(t) (x^\Delta(t))^\alpha$ azalan bir fonksiyondur. Böylece $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$x^\Delta(t) > 0$ dır. $x(t) > 0$ ve $a(t)(x^\Delta(t))^\alpha$ azalan olduğundan $x^\Delta(t) < 0$ olması mümkün değildir (Erbe vd. 2009).

w fonksiyonunu

$$w(t) = \xi(t) \frac{a(t)(x^\Delta(t))^\alpha}{x^\alpha(\tau(t))} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlayalım. Taraf tarafa delta türevini alıp (4.1) i kullandırsak

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &= \left(\frac{\xi(t)}{x^\alpha(\tau(t))} \right)^\Delta (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma + \frac{\xi(t)}{x^\alpha(\tau(t))} [a(t)(x^\Delta(t))^\alpha]^\Delta \\ &= \frac{\xi(t)}{x^\alpha(\tau(t))} [-q(t)x^\alpha(\tau(t))] + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \\ &\quad \times \left[\frac{\xi^\Delta(t)x^\alpha(\tau(t)) - \xi(t)(x^\alpha(\tau(t)))^\Delta}{x^\alpha(\tau(t))x^{\alpha\sigma}(\tau(t))} \right] \\ &= -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(x\sigma\tau)^{\alpha\sigma}(t)} \\ &\quad - \frac{\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma (x^\alpha(\tau(t)))^\Delta}{(x\sigma\tau)^\alpha(t)(x\sigma\tau)^{\alpha\sigma}(t)} \end{aligned} \quad (4.5)$$

elde ederiz. Pötzsche zincir kuralından

$$\begin{aligned} (x^\alpha(\tau(t)))^\Delta &= \alpha \int_0^1 [x(\tau(t)) + h\mu(t)(x(\tau(t)))^\Delta]^{\alpha-1} dh (x(\tau(t)))^\Delta \\ &= \alpha \int_0^1 [(1-h)x(\tau(t)) + h(x\sigma\tau)^\sigma(t)]^{\alpha-1} dh (x(\tau(t)))^\Delta \\ &= \alpha \int_0^1 [(1-h)x(\tau(t)) + h(x\sigma\tau)^\sigma(t)]^{\alpha-1} dh x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t) \\ &\geq \begin{cases} \alpha(x\sigma\tau)^{\sigma(\alpha-1)}(t)x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t) & , \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \alpha x^{\alpha-1}(\tau(t))x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t) & , \quad \alpha \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.6)$$

buluruz.

$0 < \alpha \leq 1$ ise, (4.6) dan

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)} \\
&\quad - \frac{\alpha\xi(t)(xo\tau)^{\sigma(\alpha-1)}(t)x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(xo\tau)^\alpha(t)(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)} \\
&= -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)} \\
&\quad - \frac{\alpha\xi(t)x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(xo\tau)^\alpha(t)(xo\tau)^\sigma(t)}
\end{aligned}$$

dir. $(x^\alpha(\tau(t)))^\Delta > 0$ olduğundan, $(xo\tau)^\alpha(t) \leq (xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)$ dir. O halde $\frac{-1}{(xo\tau)^\alpha(t)} \leq \frac{-1}{(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)}$ dan

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)} \\
&\quad - \frac{\alpha\xi(t)x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(xo\tau)^{\sigma(\alpha+1)}(t)}
\end{aligned}$$

elde ederiz.

$\alpha \geq 1$ ise

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)} \\
&\quad - \frac{\alpha\xi(t)(xo\tau)^{(\alpha-1)}(t)x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(xo\tau)^\alpha(t)(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)} \\
&= -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)} \\
&\quad - \frac{\alpha\xi(t)x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(xo\tau)(t)(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)} \\
&\leq -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(xo\tau)^{\alpha^\sigma}(t)} \\
&\quad - \frac{\alpha\xi(t)x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(xo\tau)^{\sigma(\alpha+1)}(t)}
\end{aligned}$$

dır. Böylece $\forall \alpha > 0$ için

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &\leq -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(xo\tau)^{\alpha\sigma}(t)} \\ &\quad - \frac{\alpha\xi(t)x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(xo\tau)^{\sigma(\alpha+1)}(t)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde ederiz. $a(t)(x^\Delta(t))^\alpha$, $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ aralığında azalan ve $\tau(t) \leq t \leq \sigma(t)$ olduğundan $t \geq t_1$ için

$$\begin{aligned} a(\tau(t))(x^\Delta(\tau(t)))^\alpha &\geq a(t)(x^\Delta(t))^\alpha \geq (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \\ x^\Delta(\tau(t)) &\geq \left[\frac{a(t)(x^\Delta(t))^\alpha}{a(\tau(t))} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ &\geq \left[\frac{(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{a(\tau(t))} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

buluruz. (4.8) i (4.7) de kullanırsak

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &\leq -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(xo\tau)^{\alpha\sigma}(t)} \\ &\quad - \frac{\alpha\xi(t)[(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma]^{\frac{1}{\alpha}}\tau^\Delta(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{a^{1/\alpha}(\tau(t))((xo\tau)^\sigma(t))^{\alpha+1}} \\ &= -\xi(t)q(t) + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)}{(xo\tau)^{\alpha\sigma}(t)} \\ &\quad - \frac{\alpha\xi(t)\tau^\Delta(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{(\alpha+1)}{\alpha}}{a^{1/\alpha}(\tau(t))((xo\tau)^{\alpha\sigma}(t))^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}} \\ &= -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)}w^\sigma(t) - \frac{\alpha\xi(t)\tau^\Delta(t)}{a^{1/\alpha}(\tau(t))} \left(\frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

buluruz. $\lambda = 1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha+1}{\alpha}$ olmak üzere $X = (\alpha\xi(t)\tau^\Delta(t))^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{w^\sigma(t)}{a^{\frac{1}{\alpha+1}}(\tau(t))\xi^\sigma(t)}$ ve

$Y = \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha \left(\frac{(\xi^\Delta(t))_+}{\xi^\sigma(t)}\right)^\alpha \left[\alpha^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}(\tau^\Delta(t))^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}\xi^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}}(t)\xi^\sigma(t)a^{\frac{1}{\alpha+1}}(\tau(t))\right]^\alpha$ alırsak Lemma 2.14 den

$$\frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{\left((\xi^\Delta(t))_+\right)^{\alpha+1} a(\tau(t))}{(\xi(t)\tau^\Delta(t))^\alpha} \geq \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)}w^\sigma(t) - \frac{\alpha\xi(t)\tau^\Delta(t)}{a^{1/\alpha}(\tau(t))} \left(\frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)}\right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

dir. Bu eşitsizliği (4.9) da kullanarak

$$w^\Delta(t) \leq -\xi(t)q(t) + \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{\left((\xi^\Delta(t))_+\right)^{\alpha+1} a(\tau(t))}{(\xi(s)\tau^\Delta(s))^\alpha}$$

buluruz. T den t ye kadar integre edip $t \rightarrow \infty$ olduğunda lim sup alırsak

$$w(t) \leq w(T) - \int_T^t \left[\xi(s)q(s) - \frac{1}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{\left((\xi^\Delta(s))_+\right)^{\alpha+1} a(\tau(s))}{(\xi(s)\tau^\Delta(s))^\alpha} \right] \Delta s \rightarrow -\infty$$

elde ederiz. Bu da $w(t)$ nin pozitif olması ile çelişir.

Uyarı 4.2 $\tau(t) = t$ ise (4.2) den

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\xi(s)q(s) - \frac{a(s) \left((\xi^\Delta(s))_+\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} (\xi(s))^\alpha} \right] \Delta s = \infty \quad (4.10)$$

dir. Bu durum, Saker (2005), Hassan (2008), Grace vd. (2009), Han vd. (2010) tarafından incelenmiştir.

Teorem 4.3 $\alpha \geq 1$ ve $\forall t \in \mathbb{T}$ için $a^\Delta(t) \geq 0$ olmak üzere, (B) sağlansın. Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\xi(s)q(s) - \frac{a(\tau(s)) \left((\xi^\Delta(s))_+\right)^2}{2^{3-\alpha} \alpha \tau^{\alpha-1}(s) \xi(s) \tau^\Delta(s)} \right] \Delta s = \infty \quad (4.11)$$

olacak şekilde $[t_0, \infty)$ aralığında pozitif delta diferensiyellenebilir bir $\xi(t)$ fonksiyonu varsa (4.1) denklemlidir.

İspat Aksini kabul edelim. Yani $x(t)$, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü ve $\forall t \geq t_1 > t_0$ için, $x(t) > 0$ ve $x(\tau(t)) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 > t_0$ var olsun. Böylece $\forall t \geq t_1$ için, (4.3) ü elde ederiz. $x(t) > 0$ ve $(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta < 0$ olduğundan $x^\Delta(t) > 0$ dır. w fonksiyonu (4.4) deki gibi tanımlansın. Bu durumda

(4.5) i elde ederiz. (4.6) yı uygularsak

$$w^\Delta(t) \leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)}w^\sigma(t) - \frac{\alpha x^{\alpha-1}(\tau(t))x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(x\sigma)^\alpha(t)(x\sigma)^\sigma(t)} \quad (4.12)$$

buluruz. $x^\Delta \geq 0$ ve $(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta < 0$ olduklarından

$$x^{\Delta\Delta}(t) \leq 0 \quad (4.13)$$

dır. Aksi takdirde $t \geq t_1$ için $x^{\Delta\Delta}(t) > 0$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 &\geq (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta \\ &= a^\Delta(t)(x^\Delta(t))^\alpha + a^\sigma(t)[(x^\Delta(t))^\alpha]^\Delta \\ &\geq a^\sigma(t)[(x^\Delta(t))^\alpha]^\Delta \\ &= a^\sigma(t)\frac{((x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma - (x^\Delta(t))^\alpha}{\mu(t)} \\ &> a^\sigma(t)\alpha(x^\Delta(t))^{\alpha-1}\frac{(x^\Delta(t))^\sigma - x^\Delta(t)}{\mu(t)} \\ &= \alpha a^\sigma(t)(x^\Delta(t))^{\alpha-1}x^{\Delta\Delta}(t) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise mümkün değildir. O halde (4.13) gerçekleşir. x^Δ pozitif ve azalan olduğundan, $\tau(t) \geq 2t_0$ için

$$\begin{aligned} x(\tau(t)) &= x(t_0) + \int_{t_0}^{\tau(t)} x^\Delta(s)\Delta s \geq \int_{t_0}^{\tau(t)} x^\Delta(s)\Delta s \\ &= (\tau(t) - t_0)x^\Delta(\tau(t)) \geq \frac{\tau(t)}{2}x^\Delta(\tau(t)) \end{aligned}$$

dir. Buradan $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$\alpha x^{\alpha-1}(\tau(t)) \geq \frac{\alpha \tau^{\alpha-1}(t)}{2^{\alpha-1}}(x^\Delta(\tau(t)))^{\alpha-1} = h(x^\Delta(\tau(t)))^{\alpha-1} \quad (4.14)$$

dir. $a(t) (x^\Delta(t))^\alpha$ azalan ve $\tau(t) \leq t$ olduğundan

$$x^\Delta(\tau(t)) \geq \frac{a^{1/\alpha}(t) x^\Delta(t)}{a^{1/\alpha}(\tau(t))} \quad (4.15)$$

dir. (4.14) ü $x^\Delta(\tau(t))$ ile taraf tarafa çarpıp (4.15) de kullanırsak

$$\alpha x^{\alpha-1}(\tau(t)) x^\Delta(\tau(t)) \geq h(x^\Delta(\tau(t)))^\alpha \geq h \frac{a(t) (x^\Delta(t))^\alpha}{a(\tau(t))} \quad (4.16)$$

buluruz. (4.16) yı (4.12) de kullanırsak

$$\begin{aligned} & w^\Delta(t) \\ \leq & -\xi(t) q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} w^\sigma(t) - \frac{h(t) \tau^\Delta(t) \xi(t) a(t) (x^\Delta(t))^\alpha (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{a(\tau(t)) (x\sigma\tau)^\alpha(t) (x\sigma\tau)^{\sigma\alpha}(t)} \\ \leq & -\xi(t) q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} w^\sigma(t) - \frac{h(t) \tau^\Delta(t) \xi(t) a(t) (x^\Delta(t))^\alpha (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{a(\tau(t)) (x\sigma\tau)^{\sigma\alpha}(t) (x\sigma\tau)^{\sigma\alpha}(t)} \\ \leq & -\xi(t) q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} w^\sigma(t) - \frac{h(t) \tau^\Delta(t) \xi(t) [(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma]^2}{a(\tau(t)) [(x\sigma\tau)^{\sigma\alpha}(t)]^2} \\ = & -\xi(t) q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} w^\sigma(t) - \frac{h(t) \tau^\Delta(t) \xi(t) (w^\sigma(t))^2}{a(\tau(t)) (\xi^\sigma(t))^2} \\ = & -\xi(t) q(t) - \left(\frac{[h(t) \tau^\Delta(t) \xi(t)]^{\frac{1}{2}} w^\sigma(t)}{a^{\frac{1}{2}}(\tau(t)) \xi^\sigma(t)} - \frac{a^{\frac{1}{2}}(\tau(t)) \xi^\Delta(t)}{2 [h(t) \tau^\Delta(t) \xi(t)]^{\frac{1}{2}}} \right)^2 \\ & + \frac{a(\tau(t)) (\xi^\Delta(t))^2}{4h(t) \xi(t) \tau^\Delta(t)} \\ \leq & -\xi(t) q(t) + \frac{a(\tau(t)) (\xi^\Delta(t))^2}{4h(t) \xi(t) \tau^\Delta(t)} \leq -\xi(t) q(t) + \frac{a(\tau(t)) ((\xi^\Delta(t))_+)^2}{4h(t) \xi(t) \tau^\Delta(t)} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği t_0 dan t ye kadar integre edip $t \rightarrow \infty$ olduğunda lim sup alırsak (4.11) den,

$$\begin{aligned} w(t) & \leq w(t_0) - \int_{t_0}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(\tau(s)) ((\xi(s))_+)^2}{4h(s) \xi(s) \tau^\Delta(s)} \right] \Delta s \\ & = w(t_0) - \int_{t_0}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(\tau(s)) ((\xi^\Delta(s))_+)^2}{2^{3-\alpha} \alpha \xi(s) \tau^{\alpha-1}(s) \tau^\Delta(s)} \right] \Delta s \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

buluruz. Bu durum $w(t)$ nin pozitif olması ile çelişir.

Teorem 4.4 (B) sağlansın . Eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(\tau(s)) \left((\xi^\Delta(s))_+ \right)^2}{2^{3-\alpha} \mu^{\alpha-1}(s) \xi(s) (\tau^\Delta(s))^\alpha} \right] \Delta s = \infty \quad (4.17)$$

olacak şekilde $[t_0, \infty)$ aralığında pozitif delta diferensiyellenebilir bir $\xi(t)$ fonksiyonu varsa, (4.1) denklemi salınımlıdır.

İspat Önceki gibi aksini kabul edelim. Yani $x(t)$, (4.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümü ve $\forall t \geq t_1 > t_0$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ olsun. Teorem 4.1 ve Teorem 4.3 de gördük ki $x(t) > 0$ ve $(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta \leq 0$ olduğundan $x^\Delta(t) > 0$ dır. w fonksiyonunu (4.4) deki gibi tanımlayıp türevini alırsak (4.5) i buluruz. Teorem 2.7 den

$$\begin{aligned} (x^\alpha(\tau(t)))^\Delta &= [((x\sigma)(t))^\alpha]^\Delta = \frac{[(x\sigma)^\alpha]^\sigma(t) - (x\sigma)^\alpha(t)}{\mu(t)} \\ &= \frac{[(x\sigma)^\sigma]^\alpha(t) - (x\sigma)^\alpha(t)}{\mu(t)} \end{aligned}$$

elde ederiz. (4.6) dan $[(x\sigma)(t))^\alpha]^\Delta \geq 0$ olduğundan $[(x\sigma)^\sigma]^\alpha(t) \geq (x\sigma)^\alpha(t)$ dir. Lemma 2.15 i uygularsak

$$\begin{aligned} (x^\alpha(\tau(t)))^\Delta &\geq 2^{1-\alpha} \frac{[(x\sigma)^\sigma(t) - (x\sigma)(t)]^\alpha}{\mu(t)} \\ &= \frac{2^{1-\alpha}}{\mu(t)} \left[\mu(t) (x\sigma)^\Delta(t) \right]^\alpha \\ &= 2^{1-\alpha} \mu^{\alpha-1}(t) \left[(x\sigma)^\Delta(t) \right]^\alpha \end{aligned} \quad (4.18)$$

buluruz. (4.18) i (4.5) de kullanırsak

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)}w^\sigma(t) \\
&\quad - \frac{2^{1-\alpha}\mu^{\alpha-1}(t)\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma[(xo\tau)^\Delta(t)]^\alpha}{(xo\tau)^\alpha(t)(xo\tau)^{\sigma^\alpha}(t)} \\
&\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)}w^\sigma(t) \\
&\quad - \frac{2^{1-\alpha}\mu^{\alpha-1}(t)\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma(x^\Delta(\tau(t)))^\alpha(\tau^\Delta(t))^\alpha}{[(xo\tau)^{\sigma^\alpha}(t)]^2} \\
&\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)}w^\sigma(t) \\
&\quad - \frac{2^{1-\alpha}\mu^{\alpha-1}(t)\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma a(t)(x^\Delta(t))^\alpha(\tau^\Delta(t))^\alpha}{[(xo\tau)^{\sigma^\alpha}(t)]^2 a(\tau(t))} \\
&\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)}w^\sigma(t) \\
&\quad - \frac{2^{1-\alpha}\mu^{\alpha-1}(t)\xi(t)[(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma]^2(\tau^\Delta(t))^\alpha}{[(xo\tau)^{\sigma^\alpha}(t)]^2 a(\tau(t))} \\
&= -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)}w^\sigma(t) - \frac{2^{1-\alpha}\mu^{\alpha-1}(t)\xi(t)(\tau^\Delta(t))^\alpha}{a(\tau(t))} \left(\frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)}\right)^2 \\
&= -\xi(t)q(t) \\
&\quad - \left\{ \left[\frac{2^{1-\alpha}\mu^{\alpha-1}(t)\xi(t)(\tau^\Delta(t))^\alpha}{a(\tau(t))} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a^{\frac{1}{2}}(\tau(t))\xi^\Delta(t)}{2[2^{1-\alpha}\mu^{\alpha-1}(t)\xi(t)(\tau^\Delta(t))^\alpha]^{\frac{1}{2}}} \right\}^2 + \frac{a(\tau(t))(\xi^\Delta(t))^2}{2^{3-\alpha}\mu^{\alpha-1}(t)\xi(t)(\tau^\Delta(t))^\alpha} \\
&\leq -\xi(t)q(t) + \frac{a(\tau(t))(\xi^\Delta(t))^2}{2^{3-\alpha}\mu^{\alpha-1}(t)\xi(t)(\tau^\Delta(t))^\alpha} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

elde ederiz. (4.19) eşitsizliğini t_0 dan t ye kadar integre edip $t \rightarrow \infty$ olduğunda lim sup alırsak (4.17) den,

$$w(t) \leq w(t_0) - \int_{t_0}^t \left[\xi(s)q(s) - \frac{a(\tau(s))\left((\xi^\Delta(s))_+\right)^2}{2^{3-\alpha}\mu^{\alpha-1}(s)\xi(s)(\tau^\Delta(s))^\alpha} \right] \Delta s \rightarrow -\infty$$

buluruz. Bu durum $w(t)$ nin pozitif olması ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 4.5 (4.1) denkleminde $\tau(t) = t$ alınırsa, Bohner ve Saker (2006)'ın sonucu elde edilir.

Örnek 4.6 $\lambda > 0$ bir sabit olmak üzere $t \in [1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$(t^2 (x^\Delta(t)^3))^\Delta + \frac{\lambda}{t^2} x^3(\tau(t)) = 0 \quad (4.20)$$

gecikmeli dinamik denklemini ele alalım. (4.1) den $a(t) = t^2, q(t) = \frac{\lambda}{t^2}, \tau(t) = t - \delta$ ve $\delta \geq 0$ dır. $a^\Delta(t) = t + \sigma(t) > 0$ ve $\int_1^\infty \frac{\Delta t}{a^{1/\alpha}(t)} = \int_1^\infty \frac{\Delta t}{t^{2/3}} = \infty$ dır. Dolayısıyla (B) sağlanır. $\xi(t) = t$ ele alalım. Böylece Teorem 4.3 ü kullanırsak $\lambda > \frac{1}{3}$ için

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{a(\tau(s)) \left((\xi^\Delta(s))_+ \right)^2}{2^{3-\alpha} \alpha \tau^{\alpha-1}(s) \xi(s) \tau^\Delta(s)} \right] \Delta s \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \left[s \frac{\lambda}{s^2} - \frac{(s-\delta)^2}{2^{3-3} 3 (s-\delta)^2 s} \right] \Delta s \\ &= \left(\lambda - \frac{1}{3} \right) \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{\Delta s}{s} = \infty \end{aligned}$$

buluruz. O halde (4.20) denklemi $\lambda > \frac{1}{3}$ için salınımlıdır.

5. GECİKMELİ TERİM İÇEREN SÜPER YARI-LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER İÇİN SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Bu bölümde gecikmeli terim içeren

$$(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta + q(t) x^\beta(\tau(t)) = 0 \quad (5.1)$$

şeklinde süper yarı lineer dinamik denklemini ele alalım. Burada $t \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $a(t)$ ve $q(t)$ pozitif azalmayan sağ-yoğun sürekli fonksiyon, $\beta > \alpha > 0$ olmak üzere α, β iki pozitif tek tam sayının oranı, $\tau(t) \leq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ dır.

Öncelikle Han vd. (2007) yaptıkları çalışmada $\beta \geq 1$ olmak üzere

$$x^{\Delta\Delta}(t) + q(t) x^\beta(\tau(t)) = 0 \quad (5.2)$$

gecikmeli ikinci basamaktan Emden-Fowler dinamik denkleminin salınımlılığı için bazı yeter koşullar vermişlerdir. Sun vd. (2010) tarafından (5.2) den daha genel olan

$$(a(t) x^\Delta(t))^\Delta + q(t) x^\beta(\tau(t)) = 0 \quad (5.3)$$

denklemi için bazı salınımlılık kriterleri verilmiştir.

Biz burada $0 < \alpha < \beta$ için (5.1) in salınımlılığını verdik.

Teorem 5.1 (C) sağlansın. Eğer $\forall t_1 \in [t_0, \infty)$ için

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha a(\tau(s)) \left((\xi^\Delta(s))_+\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} c^{\beta-\alpha} \xi^\alpha(s) (\tau^\Delta(s))^\alpha} \right] \Delta s = \infty \quad (5.4)$$

ve

$$\int_{t_1}^\infty \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_1}^s \theta^\beta(u) q(u) \Delta u \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s = \infty \quad (5.5)$$

olacak şekilde pozitif delta diferensiyellenebilir bir ξ fonksiyonu varsa, (5.1) denklemi salınımlıdır.

Burada c pozitif keyfi reel sabitdir.

İspat Aksini kabul edelim. Yani, $\forall t \geq t_1 \geq t_0$ için $x(t) > 0$ ve $x(\tau(t)) > 0$ olmak üzere $x(t), [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ da, (5.1) in salınımlı olmayan bir çözümü olsun. (5.1) den

$$(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta = -q(t) x^\beta(\tau(t)) \leq 0 \quad (5.6)$$

elde ederiz. Önceki bölümdeki gibi iki durum için inceleyelim.

(I) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) > 0$ durumu.

Bir pozitif w fonksiyonunu

$$w(t) = \frac{\xi(t) a(t) (x^\Delta(t))^\alpha}{x^\beta(\tau(t))} \quad (5.7)$$

şeklinde tanımlayalım. Türevini alırsak

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &= \left(\frac{\xi(t)}{x^\beta(\tau(t))} \right)^\Delta (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma + (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta \left(\frac{\xi(t)}{x^\beta(\tau(t))} \right)^\sigma \\ &= \frac{\xi(t)}{x^\beta(\tau(t))} (-q(t) x^\beta(\tau(t))) + (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \times \\ &\quad \left[\frac{\xi^\Delta(t) x^\beta(\tau(t)) - \xi(t) (x^\beta(\tau(t)))^\Delta}{x^\beta(\tau(t)) (x^\beta(\tau(t)))^\sigma} \right] \\ &= -q(t) \xi(t) + \frac{\xi^\Delta(t) (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(x^\beta(\tau(t)))^\sigma} - \frac{\xi(t) (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma (x^\beta(\tau(t)))^\Delta}{x^\beta(\tau(t)) (x^\beta(\tau(t)))^\sigma} \\ &= -q(t) \xi(t) + \frac{\xi^\Delta(t) w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \frac{\xi(t) (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma (x^\beta(\tau(t)))^\Delta}{x^\beta(\tau(t)) (x^\beta(\tau(t)))^\sigma} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
(x^\beta(\tau(t)))^\Delta &= \beta \left\{ \int_0^1 [x(\tau(t)) + h\mu(t)(x(\tau(t)))^\Delta]^{\beta-1} dh \right\} (x(\tau(t)))^\Delta \\
&= \beta \left\{ \int_0^1 [(1-h)x(\tau(t)) + h(x(\tau(t)))^\sigma]^{\beta-1} dh \right\} x^\Delta(\tau(t)) \tau^\Delta(t) \\
&\geq \begin{cases} \beta [(x\sigma)^\sigma(t)]^{\beta-1} x^\Delta(\tau(t)) \tau^\Delta(t) & , \quad 0 < \beta \leq 1 \\ \beta (x\sigma)^{\beta-1}(t) x^\Delta(\tau(t)) \tau^\Delta(t) & , \quad \beta > 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

olup $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan ve $x\sigma$ artan olduklarından $0 < \beta \leq 1$ için

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \frac{\beta\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)}{(x\sigma)^\beta(t)(x\sigma)^\sigma(t)} \\
&\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \\
&\quad - \frac{\beta\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)}{((x\sigma)^\sigma(t))^{\beta+1}}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

dir. $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan ve x artan olduğundan $\beta > 1$ için

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \frac{\beta\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)}{(x\sigma)(t)((x\sigma)^\sigma(t))^\beta} \\
&\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \\
&\quad - \frac{\beta\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)}{((x\sigma)^\sigma(t))^{\beta+1}}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

dir. (5.8) ve (5.9) dan $\forall \beta > 0$ için

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \frac{\beta\xi(t)(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(\tau(t))\tau^\Delta(t)}{((x\sigma\tau)^\sigma(t))^{\beta+1}} \\
&= -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \frac{\beta\xi(t)w^\sigma\tau^\Delta(t)x^\Delta(\tau(t))}{\xi^\sigma(t)(x\sigma\tau)^\sigma(t)} \\
&\leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \frac{\beta\xi(t)w^\sigma\tau^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} \\
&\quad \times \left[\frac{(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{a(\tau(t))} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{(x\sigma\tau)^\sigma(t)} \\
&= -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \frac{\beta\xi(t)w^\sigma\tau^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t)} \\
&\quad \times \left[\frac{(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(x^\beta(\tau(t)))^\sigma} \right]^{\frac{1}{\alpha}} \frac{(x\sigma\tau)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(\sigma(t))}{a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} \\
&= -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \frac{\beta\xi(t)\tau^\Delta(t)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} \\
&\quad \times \left(\frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (x\sigma\tau)^{\sigma\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

buluruz. $x^\Delta(\tau(t)) > 0$ olduğundan $x^\sigma(\tau(t)) \geq x(\tau(t))$ dir.

O halde $\beta > \alpha$ olduğundan $(x\sigma\tau)^{\sigma\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) \geq (x\sigma\tau)^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) \geq c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}$ olacak şekilde bir $c > 0$ reel sabiti vardır.

Bu ifadeyi (5.10) da kullanırsak

$$w^\Delta(t) \leq -\xi(t)q(t) + \frac{\xi^\Delta(t)w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \frac{\beta c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}\xi(t)\tau^\Delta(t)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t))} \left(\frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}$$

elde ederiz.

$\lambda = \frac{\alpha+1}{\alpha} > 1$ olmak üzere $X = \left(\beta c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}\xi\tau^\Delta \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{(a\sigma\tau)^{\frac{-1}{\alpha+1}}}{\xi^\sigma} w^\sigma$ ve

$Y = \left(\frac{(\xi^\Delta)_+}{\xi^\sigma} \right)^\alpha \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^\alpha \left[\left(\beta c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}\xi\tau^\Delta \right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \xi^\sigma (a\sigma\tau)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right]^\alpha$ alırsak Lemma 2.14 den

$$\frac{\beta c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}\xi\tau^\Delta}{(a\sigma\tau)^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{w^\sigma}{\xi^\sigma} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - \frac{(\xi^\Delta)_+ w^\sigma}{\xi^\sigma} \geq - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha (a\sigma\tau) \left((\xi^\Delta)_+ \right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \left(c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}\xi\tau^\Delta \right)^\alpha}$$

buluruz. Buradan

$$w^\Delta(t) \leq -\xi(t)q(t) + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha a(\tau(t)) \left((\xi^\Delta(t))_+\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \left(c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \xi(t) \tau^\Delta(t)\right)^\alpha} \quad (5.11)$$

dir. (5.11) eşitsizliğini t_2 den t ye kadar integre edip $t \rightarrow \infty$ olduğunda $\limsup$ alırsak (5.4) den

$$w(t) < w(t_2) - \int_{t_2}^t \left[\xi(s)q(s) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha a(\tau(s)) \left((\xi^\Delta(s))_+\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \left(c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \xi(s) \tau^\Delta(s)\right)^\alpha} \right] \rightarrow -\infty$$

elde ederiz. Bu durum $w(t)$ nin pozitif olması ile çelişir.

(II) $t > t_1$ için $x^\Delta(t) < 0$ durumu.

(5.6) dan $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan olduğundan $\forall s \geq t \geq t_1$ için

$$a(s)(-x^\Delta(s))^\alpha \geq a(t)(-x^\Delta(t))^\alpha$$

veya

$$-x^\Delta(s) \geq a^{-1/\alpha}(s) a^{1/\alpha}(t) (-x^\Delta(t))$$

buluruz. Bu eşitsizliği $t \geq t_1$ den $u \geq t$ ye kadar integre edip $u \rightarrow \infty$ için

$$\begin{aligned} x(t) &\geq \left(\int_t^\infty a^{-1/\alpha}(s) \Delta s \right) (-a^{1/\alpha}(t) x^\Delta(t)) \\ &= -\theta(t) a^{1/\alpha}(t) x^\Delta(t) \end{aligned}$$

elde ederiz. x ve $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan olduğundan

$$\begin{aligned} x(\tau(t)) &\geq x(t) \geq \theta(t) (-a^{1/\alpha}(t_1) x^\Delta(t_1)) \\ &\geq b\theta(t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

dır. Burada $b = -a^{1/\alpha}(t_1) x^\Delta(t_1)$ dir. (5.1) den $t \in [t_1, \infty)$ için

$$-(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta = q(t)x^\beta(\tau(t)) \geq b^\beta q(t)\theta^\beta(t)$$

buluruz. Bu eşitsizliği t_1 den t ye kadar integre edersek

$$\begin{aligned} -a(t) (x^\Delta(t))^\alpha &\geq -a(t_1) (x^\Delta(t_1))^\alpha + b^\beta \int_{t_1}^t q(s) \theta^\beta(s) \Delta s \\ &\geq b^\beta \int_{t_1}^t q(s) \theta^\beta(s) \Delta s \end{aligned}$$

veya

$$-x^\Delta(t) \geq \left(\frac{b^\beta}{a(t)} \int_{t_1}^t q(s) \theta^\beta(s) \Delta s \right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (5.13)$$

elde ederiz. (5.13) eşitsizliğini t_1 den t ye kadar integre edersek

$$-x(t) + x(t_1) \geq b^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_1}^s q(u) \theta^\beta(u) \Delta u \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s$$

olup, (5.5) den

$$\infty > x(t_1) \geq -x(t) + x(t_1) \geq b^{\frac{\beta}{\alpha}} \int_{t_1}^t \left(\frac{1}{a(s)} \int_{t_1}^s q(u) \theta^\beta(u) \Delta u \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Delta s \rightarrow \infty$$

şeklinde çelişki elde ederiz.

Teorem 5.1 in ispatında (C) koşulu yerine (B) koşulunu kullanırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 5.2 (B) sağlansın. $\forall t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ için (5.4) olacak şekilde pozitif azalmayan delta diferensiyellenebilir bir ξ fonksiyonu varsa (5.1) denklemini salınımlıdır.

Teorem 5.3 Kabul edelim ki (B) sağlansın. Ayrıca yeterince büyük T için $\tau(T) > h(T)$ olmak üzere

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\theta^\beta(s, h(T)) \xi(s) q(s) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha a(s) \left((\xi^\Delta(s))_+\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \left(\xi(s) c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}\right)^\alpha} \right] \Delta s = \infty \quad (5.14)$$

olacak şekilde pozitif bir ξ fonksiyonu varsa, (5.1) denklemi salınımlıdır. Burada

$$\theta(t, h(T)) = \frac{\int_{h(T)}^{\tau(t)} \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}}{\int_{h(T)}^t \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}} \quad (5.15)$$

ve c herhangi bir pozitif sabittir.

İspat Aksini kabul edelim. Bu durumda, yeterince büyük bir $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır öyle ki $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $x(h(t)) > 0$ olmak üzere $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t)$, (5.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümüdür. (5.6) dan $a(x^\Delta)^\alpha$, $[t_1, \infty)$ da azalan fonksiyon olup (B) den $a(t)(x^\Delta(t))^\alpha > 0$ dır. w fonksiyonunu

$$w(t) = \xi(t) \frac{a(t)(x^\Delta(t))^\alpha}{x^\beta(t)} \quad (5.16)$$

şeklinde tanımlayalım. Türevini alırsak

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &= \left(\frac{\xi(t)}{x^\beta(t)} \right) (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\Delta + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \left(\frac{\xi(t)}{x^\beta(t)} \right)^\Delta \\ &= \left(\frac{\xi(t)}{x^\beta(t)} \right) [-q(t)x^\beta(\tau(t))] \\ &\quad + (a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma \frac{\xi^\Delta(t)x^\beta(t) - \xi(t)(x^\beta(t))^\Delta}{x^\beta(t)x^\beta(\sigma(t))} \\ &= -q(t)\xi(t) \left(\frac{x(\tau(t))}{x(t)} \right)^\beta + \xi^\Delta(t) \frac{(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{x^\beta(\sigma(t))} \\ &\quad - \xi(t) \frac{(a(t)(x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma (x^\beta(t))^\Delta}{x^\beta(t)x^\beta(\sigma(t))} \end{aligned} \quad (5.17)$$

elde ederiz. Bir $T \geq t_1$ var öyle ki $\forall t \in [T, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $\tau(t) > h(T)$. $[t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ da $a(x^\Delta)^\alpha$ azalan olduğundan

$$\begin{aligned} x(t) - x(\tau(t)) &= \int_{\tau(t)}^t \frac{(a(s)(x^\Delta(s))^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \Delta s \leq \int_{\tau(t)}^t \frac{(a(\tau(t))(x^\Delta(\tau(t)))^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \Delta s \\ &= a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t)) x^\Delta(\tau(t)) \int_{\tau(t)}^t \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \end{aligned}$$

olup

$$\frac{x(t)}{x(\tau(t))} \leq 1 + \frac{a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t)) x^{\Delta}(\tau(t))}{x(\tau(t))} \int_{\tau(t)}^t \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \quad (5.18)$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} x(\tau(t)) &> x(\tau(t)) - x(h(T)) = \int_{h(T)}^{\tau(t)} \frac{(a(s) (x^{\Delta}(s))^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \Delta s \\ &\geq a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t)) x^{\Delta}(\tau(t)) \int_{h(T)}^{\tau(t)} \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}, \\ \frac{a^{\frac{1}{\alpha}}(\tau(t)) x^{\Delta}(\tau(t))}{x(\tau(t))} &\leq \left(\int_{h(T)}^{\tau(t)} \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (5.19)$$

dir. (5.19) u (5.18) de kullanırsak

$$\frac{x(t)}{x(\tau(t))} \leq 1 + \frac{\int_{\tau(t)}^t \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}}{\int_{h(T)}^{\tau(t)} \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}} = \frac{\int_{h(T)}^t \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}}{\int_{h(T)}^{\tau(t)} \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}}$$

olup

$$\frac{x(\tau(t))}{x(t)} \geq \frac{\int_{h(T)}^{\tau(t)} \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}}{\int_{h(T)}^t \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)}} = \theta(t, h(T)) \quad (5.20)$$

dir. (5.20) yi (5.17) de kullanırsak

$$\begin{aligned} w^{\Delta}(t) &\leq -q(t) \xi(t) \theta^{\beta}(t, h(T)) + \xi^{\Delta}(t) \frac{(a(t) (x^{\Delta}(t))^{\alpha})^{\sigma}}{x^{\beta}(\sigma(t))} \\ &\quad - \xi(t) \frac{(a(t) (x^{\Delta}(t))^{\alpha})^{\sigma} (x^{\beta}(t))^{\Delta}}{x^{\beta}(t) x^{\beta}(\sigma(t))} \end{aligned} \quad (5.21)$$

elde ederiz. Pötzsche zincir kuralından

$$\begin{aligned} (x^{\beta}(t))^{\Delta} &= \beta x^{\Delta}(t) \int_0^1 [(x(t) + h\mu(t) x^{\Delta}(t))]^{\beta-1} dh \\ &= \beta x^{\Delta}(t) \int_0^1 ((1-h)x(t) + x^{\sigma}(t))^{\beta-1} dh \\ &\geq \begin{cases} \beta (x^{\sigma}(t))^{\beta-1} x^{\Delta}(t) & , \quad 0 < \beta \leq 1 \\ \beta (x(t))^{\beta-1} x^{\Delta}(t) & , \quad \beta > 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.22)$$

dir.

$x^\sigma(t) \geq x(t)$ olduğundan $0 < \beta \leq 1$ için, (5.22) yi (5.21) de kullanırsak

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \beta \xi(t) \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x^\beta(t) x^\sigma(t)} \\
&\leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \beta \xi(t) \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(x^\sigma(t))^{\beta+1}} x^\Delta(t) \\
&= -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \beta \xi(t) \frac{w^\sigma(t) x^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t) x^\sigma(t)}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\beta > 1$ ise

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \beta \xi(t) \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma x^\Delta(t)}{x(t) (x^\sigma(t))^\beta} \\
&\leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \beta \xi(t) \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{(x^\sigma(t))^{\beta+1}} x^\Delta(t) \\
&= -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \beta \xi(t) \frac{w^\sigma(t) x^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t) x^\sigma(t)}
\end{aligned}$$

buluruz. Böylece, $\forall \beta > 0$ için

$$\begin{aligned}
w^\Delta(t) &\leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \beta \xi(t) \frac{w^\sigma(t) x^\Delta(t)}{\xi^\sigma(t) x^\sigma(t)} \\
&= -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \\
&\quad - \beta \xi(t) \frac{w^\sigma(t) (a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{\xi^\sigma(t) a^{\frac{1}{\alpha}}(t) (x^\sigma(t))^{\frac{\beta}{\alpha}}} (x^\sigma(t))^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \\
&\leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \\
&\quad - \beta \xi(t) \frac{w^\sigma(t) ((a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma)^{\frac{1}{\alpha}}}{\xi^\sigma(t) a^{\frac{1}{\alpha}}(t) (x^\sigma(t))^{\frac{\beta}{\alpha}}} (x^\sigma(t))^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \\
&= -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \\
&\quad - \frac{\beta \xi(t)}{a^{\frac{1}{\alpha}}(t)} \left(\frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} (x^\sigma(t))^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \tag{5.23}
\end{aligned}$$

dir.

$\beta > \alpha$ ve $x^\Delta(t) > 0$ olduğundan $(x^\sigma(t))^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \geq (x(t))^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}(t) \geq c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}}$ olacak şekilde bir $c > 0$ reel sabiti vardır.

Bu ifadeyi (5.23) de kullanırsak

$$w^\Delta(t) \leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} - \beta a^{-\frac{1}{\alpha}}(t) \xi(t) \left(\frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \quad (5.24)$$

elde ederiz.

Lemma 2.14 den $\lambda = \frac{\alpha+1}{\alpha}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} X &= \left(\beta c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \xi(t) \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} a^{\frac{-1}{\alpha+1}}(t) \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)}, \\ Y &= \left(\frac{\alpha}{\alpha+1} \right)^\alpha \left(\frac{(\xi^\Delta(t))_+}{\xi^\sigma(t)} \right)^\alpha \left[\left(\beta c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \xi(t) \right)^{\frac{-\alpha}{\alpha+1}} \xi^\sigma(t) a^{\frac{1}{\alpha+1}}(t) \right]^\alpha \end{aligned}$$

alırsak

$$\beta c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \xi(t) a^{\frac{-1}{\alpha}}(t) \left(\frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} - (\xi^\Delta(t))_+ \frac{w^\sigma(t)}{\xi^\sigma(t)} \geq - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha a(t) \left((\xi^\Delta(t))_+ \right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \left(c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \xi(t) \right)^\alpha} \quad (5.25)$$

buluruz. (5.25) i (5.24) de kullanırsak

$$w^\Delta(t) \leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha a(t) \left((\xi^\Delta(t))_+ \right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \left(c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \xi(t) \right)^\alpha}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği T den t ye kadar integre edersek

$$\begin{aligned} -w(T) &\leq w(t) - w(T) \\ &\leq - \int_T^t \left[q(s) \xi(s) \theta^\beta(s, h(T)) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha a(s) \left((\xi^\Delta(s))_+ \right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \left(c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \xi(s) \right)^\alpha} \right] \Delta s \end{aligned}$$

ve

$$w(T) \geq \int_T^t \left[q(s) \xi(s) \theta^\beta(s, h(T)) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^\alpha a(s) \left((\xi^\Delta(s))_+ \right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \left(c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \xi(s) \right)^\alpha} \right] \Delta s$$

buluruz. $t \rightarrow \infty$ olduğunda $\limsup$ alırsak (5.14) ile çelişir.

Teorem 5.4 (B) sağlansın. Ayrıca yeterince büyük T için $\tau(T) > h(T)$ ve

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t [q(s) \xi(s) \theta^\beta(s, h(T)) - \xi^\Delta(s) \eta^\alpha(s) c^{\alpha-\beta}] \Delta s = \infty \quad (5.26)$$

sağlanacak şekilde pozitif azalmayan bir ξ fonksiyonu varsa, (5.1) denklemini salınımlıdır. Burada c herhangi bir pozitif sabit, $\eta(t)$ ve $\theta(t, h(T))$ sırasıyla (3.29) ve (5.15) ile tanımlanmıştır.

İspat Aksini kabul edelim. Bu durumda yeterince büyük bir $t_1 \in [t_0, \infty)_{\mathbb{T}}$ vardır öyle ki $t \geq t_1$ için $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$ ve $x(h(t)) > 0$ olmak üzere $t \in [t_1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için $x(t)$, (5.1) denkleminin salınımlı olmayan bir çözümüdür. $w(t)$ fonksiyonunu (5.16) ile tanımlayıp Teorem 5.3 deki gibi benzer işlemleri yaparsak (5.23) elde ederiz. (5.23) den

$$\begin{aligned} w^\Delta(t) &\leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^\sigma}{x^\beta(\sigma(t))} \\ &\leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) \frac{a(t) (x^\Delta(t))^\alpha}{x^\beta(t)} \\ &\leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) a(t) \left(\frac{x^\Delta(t)}{x(t)} \right)^\alpha x^{\alpha-\beta}(t) \end{aligned} \quad (5.27)$$

dir.

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_1) + \int_{t_1}^t \frac{(a(s) (x^\Delta(s))^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \Delta s \\ &\geq x(t_1) + \int_{t_1}^t \frac{(a(t) (x^\Delta(t))^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \Delta s \\ &\geq a^{\frac{1}{\alpha}}(t) x^\Delta(t) \int_{t_1}^t \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \end{aligned}$$

olup

$$\left(\frac{x^\Delta(t)}{x(t)} \right)^\alpha \leq a^{-1}(t) \left(\int_{t_1}^t \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\alpha}}(s)} \right)^{-\alpha} = \frac{\eta^\alpha(t)}{a(t)} \quad (5.28)$$

elde ederiz. (5.28) i (5.27) de kullanırsak

$$w^\Delta(t) \leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) (\eta(t))^\alpha x^{\alpha-\beta}(t) \quad (5.29)$$

buluruz. $\beta > \alpha$ olduğundan $t \geq t_1$ için $x^\sigma(t) \geq x(t) \geq c$ olacak şekilde bir c sabiti vardır. O halde $x^{\alpha-\beta} \leq c^{\alpha-\beta}$ dir.

Bunu (5.29) da kullanırsak

$$w^\Delta(t) \leq -q(t) \xi(t) \theta^\beta(t, h(T)) + \xi^\Delta(t) (\eta(t))^\alpha c^{\alpha-\beta}$$

elde ederiz. Bunu T ten t ye kadar integre edersek

$$w(t) \leq w(T) - \int_T^t [q(s) \xi(s) \theta^\beta(s, h(T)) - \xi^\Delta(s) \eta^\alpha(s) c^{\alpha-\beta}] \Delta s$$

buluruz. Burada $t \rightarrow \infty$ için lim sup alırsak $w(t)$ nin pozitif olması ile çelişki elde ederiz.

Örnek 5.5 $\delta \geq 0$ bir sabit olmak üzere

$$(t^{1/3} x^\Delta(t))^\Delta + \frac{1}{t^{5/3}} x^{5/3}(t - \delta) = 0, \quad t \in [1, \infty)_{\mathbb{T}} \quad (5.30)$$

dinamik denklemini ele alalım. (5.1) den $a(t) = t^{1/3}, q(t) = \frac{1}{t^{5/3}}, \tau(t) = t - \delta, \alpha = 1$ ve $\beta = \frac{5}{3}$ dir. Bu durumda (B) sağlanır. $\xi(t) = t$ alalım. Teorem 5.2 yi kullanırsak $1 - \frac{3}{20c^{2/3}} > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{t_1}^t \left[\xi(s) q(s) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha a(\tau(s)) \left((\xi^\Delta(s))_+\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} \left(\xi(s) c^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha}} \tau^\Delta(s)\right)^\alpha} \right] \Delta s \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \left[s \frac{1}{s^{5/3}} - \frac{\frac{3}{5}(s-\delta)^{1/3}}{4sc^{2/3}} \right] \Delta s \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \left[\frac{1}{s^{2/3}} - \frac{3s^{1/3}}{20c^{2/3}s} \right] \Delta s \\ &= \left(1 - \frac{3}{20c^{2/3}}\right) \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_1^t \frac{1}{s^{2/3}} \Delta s = \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $c > \left(\frac{3}{20}\right)^{3/2}$ olacak şekilde bir $c > 0$ vardır, öyle ki Teorem 5.2 gerçekleşir. O halde (5.30) denklemi salınımlıdır.

Örnek 5.6 T yeterince büyük olmak üzere $t \in [1, \infty)_{\mathbb{T}}$ için

$$\left(\frac{1}{(t+\sigma(t))^3} (x^\Delta(t))^3\right)^\Delta + \frac{(T^2t^2-1)^5}{t^2(T^2t-1)^5} x^5(\sqrt{t}) = 0 \quad (5.31)$$

şeklindeki gecikmeli terim içeren süper yarı-lineer dinamik denklemi ele alalım. (5.1)

den $a(t) = \frac{1}{(t+\sigma(t))^3}$, $q(t) = \frac{(T^2t^2-1)^3}{t^2(T^2t-1)^3}$, $\alpha = 3$, $\beta = 5$ ve $\tau(t) = t^{1/2}$ dir.

Eğer $h(T) = \frac{1}{T}$ ise

$$\theta\left(t, \frac{1}{T}\right) = \frac{\int_{\frac{1}{T}}^{t^{1/2}} \frac{\Delta s}{a^{1/\alpha}(s)}}{\int_{\frac{1}{T}}^t \frac{\Delta s}{a^{1/\alpha}(s)}} = \frac{t - \frac{1}{T^2}}{t^2 - \frac{1}{T^2}} = \frac{T^2t - 1}{T^2t^2 - 1}$$

buluruz. $\xi(t) = t$ alırsak Teorem 5.3 den

$$\begin{aligned} & \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\theta^\beta(s, h(T)) q(s) \xi(s) - \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\alpha a(s) (\xi^\Delta(s)_+)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^{\alpha+1} c^{\beta-\alpha} \xi^\alpha(s)} \right] \Delta s \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\left(\frac{T^2s-1}{T^2s^2-1}\right)^5 \frac{(T^2s^2-1)^5}{s^2(T^2s-1)^5} s - \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{4^4 s^3 c^2 (s+\sigma(s))^3} \right] \Delta s \\ &\geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_T^t \left[\frac{1}{s} - \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^3}{4^4 c^2 s^3 (2s)^3} \right] \Delta s = \infty \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla (5.31) denklemi salınımlıdır.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R. P., Bohner, M. and Saker, S. H. 2005. Oscillation of second order delay dynamic equations. *Can. Appl. Math. Q.*, 13(1);1–17.
- Agarwal, R. P., Grace, S. R. and O'Regan, D. 2002. Oscillation theory for second order linear, half-linear, superlinear and sublinear dynamic equations. Kluwer Academic publishers, Dordrecht.
- Agarwal, R. P., Grace, S. R. and O'Regan, D. 2003. On the oscillation of certain second order difference equations. *J. Difference Equ. Appl.* 9(1); 109-119.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Saker, S. H. 2007. Philos-type oscillation criteria for second-order half linear dynamic equations. *Rocky Mountain J. Math.*, 37; 1085-1104.
- Bohner, M. and Peterson, A. 2001. Dynamic equations on time scales, an introduction with applications. Birkhäuser, Boston.
- Bohner, M. and Peterson, A. 2003. Advances in dynamic equations on time scales. Birkhäuser, Boston.
- Bohner, M. and Saker, S. H. 2006. Oscillation of second order half-linear dynamic equations on discrete time scales. *Int. J. Difference Equ.* 1; 1–14.
- Erbe, L., Hassan, T. S. and Peterson, A. 2008. Oscillation criteria for sublinear half-linear delay dynamic equations. *Int. J. Difference Equ.*, Vol 3 (2); 227–245.
- Erbe, L., Hassan, T. S., Peterson, A. and Saker, S. H. 2009. Oscillation criteria for half-linear delay dynamic equations on time scales. *Nonlinear Dynam. Sys. Th.* 9; 51–68.
- Grace, S. R., Agarwal, R. P., Kaymakçalan, B. and Sae-jie, W. 2009. On the oscillation of certain second order nonlinear dynamic equations. *Math. Comput. Modelling*, 50; 273-286.
- Grace, S. R., Bohner, M. and Agarwal, R. P. 2009. On the oscillation of second order half-linear dynamic equations. *J. Difference Equ. Appl.*, 15; 451-460.
- Han, Z., Shi, B. and Sun, S. 2007. Oscillation criteria for second-order delay dy-

- dynamic equations on time scales. *Adv. Differential Equations*; 1–18.
- Han, Z., Sun, S. and Shi, B. 2007. Oscillation criteria for a class of second order Emden-Fowler delay dynamic equations on time scales. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 33 (2); 847–858.
- Han, Z., Li, T., Sun, S. and Chen, W. 2010. Oscillation criteria of second order half-linear dynamic equations on time scales. *Global Journal of Science Frontier Research* 10; 46-51.
- Hardy, G. H., Littlewood, J. E. and Pólya, G. 1959. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Hassan, T. S. 2008. Oscillation criteria for half-linear dynamic equations on time scales. *J. Math. Anal. Appl.* 345; 176-185.
- Hilger, S. 1990. Analysis on measure chains — a unified approach to continuous and discrete calculus. *Results Math.* 18; 18–56.
- Jianchu, J. 2002. Oscillatory criteria for second-order quasilinear neutral delay difference equations. *Appl. Math. Comput.* 125; 287–293.
- Kaymakçalan, B., Lakshmikantham, V. and Sivasundaram, S. 1996. *Dynamic systems on measure chains*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- Saker, S. H. 2005. Oscillation criteria of second order half-linear dynamic equations on time scales. *J. Comput. Appl. Math.* 177; 375-387.
- Sun, S., Han, Z., Zhao, P. and Zhang, C. 2010. Oscillation for a class of second order Emden-Fowler delay dynamic equations on time scales. Hindawi Publishing corporation, *Advances in Difference Equation*; 1-15.

ÖZGEÇMİŞ

Adı soyadı : Floride NIZIGIYIMANA
Doğum Yeri : Mugutu-Gitega
Doğum Tarihi : 22.12.1975
Medeni Hali : Evli ve iki çocuklu
Yabancı Dili : Fransızca, İngilizce, Türkçe

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Nyabiharage Lisesi (1998)
Lisans : Burundi Üniversitesi
Uygulamalı Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Matematik Bölümü (2006)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2010-Nisan 2013)

Çalıştığı Kurum /Kurumlar ve Yıl

Notre Dame Rohero Lisesi (2005-2008)
Burundi Üniversitesi (2008-2009)