

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**METRİK UZAYDA İNTEGRAL TİP BÜZÜLMELER İÇİN
BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ**

Tuğçe KAVUZLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

08/07/2014

Tuğçe KAVUZLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

METRİK UZAYDA İNTEGRAL TİP BÜZÜLMELER İÇİN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Tuğçe KAVUZLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Murat OLGUN

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, fonksiyonel analizin temel tanımları ve önemli teoremleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, integral tipli genel büzülme koşulunu sağlayan bazı sabit nokta teoremleri incelenmiş ve bu teoremlere ait sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise integral tipli genel büzülme koşulunu sağlayan dönüşüm çiftleri için sabit nokta teoremi verilmiştir.

Son bölümde ise bu tezde yapılan çalışmalar ve bu çalışmaların sonuçları ifade edilmiştir.

Temmuz 2014, 40 sayfa

Anahtar Kelimeler : Tam metrik uzay, sabit nokta, integral tip büzülmeler.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME FIXED POINT THEOREMS FOR INTEGRAL TYPE CONTRACTIONS ON METRIC SPACES

Tuğçe KAVUZLU

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Murat OLGUN

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic definitions and main theorems of functional analysis have been given.

In the third chapter, some fixed point theorems for satisfying a general contractive condition of integral type are investigated and corollaries of these theorems are obtained.

In the fourth chapter, a fixed point theorem for a pair of maps satisfying a general contractive condition of integral type is given.

In the last chapter, the studies performed in this thesis and the result of these studies are expressed.

July 2014, 40 pages

Key Words: Complete metric space, fixed point, integral type contractions.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren ve karşılaştığım güçlüklerde değerli yardımlarını esirgemeyen, akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetiştirme ve gelişmeye yardımcı olan, beni yönlendiren saygı değer hocam, Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat OLGUN (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a, araştırma sürecinde yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. İshak ALTUN (Kırıkkale Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)'a, özgüvenimi artıran her konuda bana yardımcı olan değerli hocam Araş. Gör. Tuğba YURDAKADİM'e ve bana her zaman destek olan aileme, dostlarıma en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tuğçe KAVUZLU

Ankara, Temmuz 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Temel Tanımlar.....	3
2.2 Temel Teoremler.....	5
3. İNTEGRAL TIPLI GENEL BÜZÜLME KOŞULUNU SAĞLAYAN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	9
4. İNTEGRAL TIPLI GENEL BÜZÜLME KOŞULUNU SAĞLAYAN ÇİFT DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA TEOREMİ.....	27
5. SONUÇ.....	38
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ.....	40

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi
(X, d)	Metrik uzay
$d(x, y)$	x ile y arasındaki uzaklık
$\sup A$	A nın en küçük üst sınırı (Supremum)
$\max A$	A nın en büyük elemanı (Maksimum)
$\delta(A)$	$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ (A nın çapı)
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
(x_n)	Dizi
$x_n \rightarrow x$	(x_n) dizisi x e yakınsar
$\sum$	Toplam sembolü

1. GİRİŞ

Sabit nokta teori, diferensiyel denklemlerin, integral denklemlerin, kısmi diferensiyel denklemlerin ve diğer ilgili alanların varlık teorisinde kullanılmaktadır. Yine sabit nokta teori, sınır değer problemleri ve yaklaşım problemlerinde olduğu kadar özdeğer problemlerinde de çok verimli uygulamalara sahiptir.

Genel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki yönde gelişmiştir. Birincisi normlu lineer uzaylarda sürekli dönüşümler için sabit nokta teorisi, diğeri ise tam metrik uzaylarda büzülme ve büzülme tipli dönüşümler için sabit nokta teorisidir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları Brouwer tarafından 20. yüzyılın başlarında başlamıştır. 1912 yılında Brouwer; $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarlarından kendisine tanımlı her sürekli dönüşümün sabit noktasının var olduğunu göstermiştir. Brouwer'in teoremi 1930 yılında Schauder tarafından sonsuz boyutlu uzaylara genişletilmiştir.

Tam metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teori çalışmaları ise Banach ile başlamıştır. Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini aşağıdaki teoremden ifade ve ispat etmiştir.

" (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ dönüşümü $k \in [0, 1)$ olacak şekilde

$$d(fx, fy) \leq kd(x, y)$$

büzülme şartını sağlasın. Bu durumda f dönüşümünün X de bir tek sabit noktası vardır."

Daha sonra bu teorem 1968 yılında Kannan, 1971 yılında Reich, 1974 yılında Ćirić, 1976 yılında Ćaristi gibi bir çok yazar tarafından genişletilmiştir.

2002 yılında Brianciari, büzülme d n    m n  gen  leterek integral tipli büzülme kavramını ortaya çıkarmıştır. Bu tez çalışmasında integral tipli b z lmeler ve elde edilen sabit nokta teoremleri detaylı bir şekilde incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde temel tanım ve teoremlerden bahsedilecektir.

2.1 Temel Tanımlar

Tanım 2.1.1 X boş olmayan bir küme olmak üzere $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Simetri Özelliği)

M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Üçgen Eşitsizliği)

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Örnek 2.1.1 Her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan bir $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin mutlak değer (alışılmış, doğal) metriği denir.

Örnek 2.1.2 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda d fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir metriktir.

Örnek 2.1.3 $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu, her $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d(x, y) = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{1/2}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda d fonksiyonu $\mathbb{R}^2$ nin alışılmış (doğal) metriği veya $\mathbb{R}^2$ deki Euclid metriği denir.

Tanım 2.1.2 (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere (x_{n_k}) dizisine (x_n) dizisinin bir alt dizisi denir.

Tanım 2.1.3 (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) , X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n \geq n_0$ olduğunda $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.4 Bir (X, d) metrik uzayında (x_n) bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq N(\varepsilon)$ için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsar denir ve kısaca $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5 X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise, yani $x_n \rightarrow x \in X$ ise (X, d) metrik uzayına tam denir.

Tanım 2.1.6 X bir metrik uzay olsun. Eğer X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise, X uzayına kompakttır denir.

Tanım 2.1.7 $X \neq \emptyset$ bir küme ve $f : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. $f(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına f nin bir sabit noktası denir. Başka bir ifadeyle $f(x) = x$ ($x \in X$) denkleminin çözümü f nin bir sabit noktasıdır.

Örnek 2.1.4 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ dönüşümü için $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları sabit noktalardır.

Örnek 2.1.5 $X = [0, \infty)$ ve $c > 0$ olmak üzere $f : X \rightarrow X$, $f(x) = x + c$ olsun. Bu durumda f dönüşümünün hiçbir sabit noktası yoktur.

Örnek 2.1.6 $X = [0, \infty)$ ve $f : X \rightarrow X$, $f(x) = \frac{x}{4}$ olsun. Bu durumda $x = 0$ noktası f dönüşümünün tek sabit noktasıdır.

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi, bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, dönüşümün niteliğine bağlı olduğu gibi, aynı zamanda tanımlı olduğu kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teorisinde, bir dönüşümün hangi koşullar altında sabit noktasının var ve tek olduğu sorusuna cevap aranır.

Tanım 2.1.8 (X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun.

Her $x, y \in X$ için

$$d(fx, fy) \leq Ld(x, y)$$

koşulunu sağlayan bir $L > 0$ reel sayısı varsa f dönüşümü Lipschitz koşulunu sağlıyor denir. Burada $L < 1$ ise f ye büzülme dönüşümü veya daralma dönüşümü, $L \leq 1$ ise f ye genişlemeyen dönüşüm denir.

$\forall x, y \in X$ için $(x \neq y)$

$$d(fx, fy) < d(x, y)$$

ise f ye büzülebilir dönüşüm denir.

2.2 Temel Teoremler

Teorem 2.2.1 Bir X metrik uzayında, bir (x_n) dizisi yakınsak olsun. (x_n) dizisinin her (x_{n_k}) alt dizisi de yakınsaktır ve aynı limit değerine sahiptir.

Teorem 2.2.2 Bir X tam metrik uzayının bir M alt uzayının da tam olması için gerek ve yeter koşul M nin X de kapalı bir küme olmasıdır.

Teorem 2.2.3 (X, d) bir metrik uzay, (x_n) X de bir dizi ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \infty$$

olsun. Bu durumda (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir.

İspat. Her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}) \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

olur. $\sum_{i=n}^{\infty} d(x_i, x_{i+1})$ ifadesi verilen serinin kalan terimi olduğundan $n \rightarrow \infty$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

elde edilir. Bu ise (x_n) dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir.

Teorem 2.2.4 Bir (X, d) metrik uzayından, bir (Y, d_1) metrik uzayının içine olan $f : X \rightarrow Y$ dönüşümünün bir $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul

$$x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f x_n \rightarrow f x_0$$

olmasıdır.

Teorem 2.2.5 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir sınırlı fonksiyon olsun. f , Riemann anlamında integrallenebiliyorsa Lebesgue anlamında integrallenebilirdir ve her iki integral birbirine eşittir.

Teorem 2.2.6 (*Banach Sabit Nokta Teoremi*)

(X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$, L Lipschitz sabitine sahip bir bütümlenme dönüşümü olsun. Bu durumda f bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir.

Üstelik herhangi bir $x_0 \in X$ için $(f^n x_0)$ dizisi f nin bu sabit noktasına yakınsar ve

$$d(f^n x_0, z) \leq \frac{L^n}{1 - L} d(x_0, f x_0)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $x_0 \in X$ keyfi bir nokta olsun.

$$x_1 = fx_0, x_2 = fx_1 = f^2x_0, \dots, x_n = fx_{n-1} = f^n x_0, \dots$$

olacak şekilde bir (x_n) dizisi oluşturulsun.

İlk olarak (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(fx_{n-1}, fx_n) \leq Ld(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq L^n d(x_0, x_1)$$

olduğundan her $m > n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq L^n d(x_0, x_1) + L^{n+1} d(x_0, x_1) + \dots + L^{m-1} d(x_0, x_1) \\ &= (L^n + L^{n+1} + \dots + L^{m-1}) d(x_0, x_1) \\ &\leq L^n (1 + L + \dots + L^{m-n-1} + \dots) d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam metrik uzay olduğu için (x_n) dizisi yakınsaktır.

O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.

f sürekli olduğundan

$$fz = f \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} fx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = z$$

olur. Bu durumda $z \in X$, f dönüşümünün bir sabit noktasıdır.

Ayrıca

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

ifadesinden $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(x_n, z) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x_0, x_1)$$

bulunur.

Son olarak sabit noktanın tek olduğu gösterilecektir.

z ve w , f nin farklı iki sabit noktası olsun. Buna göre, $fz = z$ ve $fw = w$ dir.

O halde

$$0 < d(z, w) = d(fz, fw) \leq Ld(z, w) < d(z, w)$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Yani f dönüşümünün sabit noktası tektir.

3. İNTEGRAL TIPLİ GENEL BÜZÜLME KOŞULUNU SAĞLAYAN BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Bu bölümde integral tipli büzülme koşulu verilerek, tam metrik uzaydaki dönüşümler için sabit noktaların varlığı analiz edilecektir.

Teorem 3.1 (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Negatif olmayan $\varphi : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty]$ dönüşümü, $[0, +\infty)$ aralığının her bir kompakt alt aralığında sonlu integrale sahip Lebesgue integrallenebilir ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0$$

koşulunu sağlasın.

Bu durumda her $x, y \in X$ ve en az bir $c \in (0, 1)$ için

$$\int_0^{d(fx, fy)} \varphi(t)dt \leq c \int_0^{d(x, y)} \varphi(t)dt \quad (3.1)$$

koşulunu gerçekleyen f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahip olup her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n x = z$ dir.

İspat. Bu teorem beş adımda ispatlanacaktır.

Adım 1. İlk olarak

$$\int_0^{d(f^n x, f^{n+1} x)} \varphi(t)dt \leq c^n \int_0^{d(x, fx)} \varphi(t)dt$$

eşitsizliği elde edilecektir.

(3.1) eşitsizliği n defa uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(f^n x, f^{n+1} x)} \varphi(t) dt &\leq c \int_0^{d(f^{n-1} x, f^n x)} \varphi(t) dt \\
&\leq c^2 \int_0^{d(f^{n-2} x, f^{n-1} x)} \varphi(t) dt \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\leq c^n \int_0^{d(x, f x)} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Buradan $n \rightarrow +\infty$ için limit alınırsa $c \in (0, 1)$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{d(f^n x, f^{n+1} x)} \varphi(t) dt = 0$$

bulunur.

Adım 2. Bu adımda $n \rightarrow +\infty$ iken $d(f^n x, f^{n+1} x) \rightarrow 0$ olduğu gösterilecektir.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup d(f^n x, f^{n+1} x) = \varepsilon > 0$$

olduğu kabul edilsin.

Bu durumda $d(f^{n_\nu} x, f^{n_\nu+1} x) \rightarrow \varepsilon > 0$, $(\nu \rightarrow +\infty)$ koşulunu sağlayan $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı ve $(f^{n_\nu} x)_{\nu \geq \nu_\varepsilon}$ dizisi vardır. Ayrıca her bir $\nu \geq \nu_\varepsilon$ için $d(f^{n_\nu} x, f^{n_\nu+1} x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ gerçekleşir.

Buradan

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_0^{d(f^{n_\nu} x, f^{n_\nu+1} x)} \varphi(t) dt \geq \int_0^{\frac{\varepsilon}{2}} \varphi(t) dt > 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

O halde, $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n x, f^{n+1} x) = 0$ dır.

Adım 3. Bu adımda her $x \in X$ için $(f^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi, yani

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } m > n > v_\varepsilon, d(f^m x, f^n x) < \varepsilon$$

olduğu gösterilecektir.

Kabul edelim ki $(f^n x)$ dizisi Cauchy dizisi olmasın. O halde her $v \in \mathbb{N}$ için

$m_v, n_v \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki $m_v > n_v > v$ olduğunda $d(f^{m_v} x, f^{n_v} x) \geq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ bulunabilir.

$(m_v)_{v \in \mathbb{N}}$ ve $(n_v)_{v \in \mathbb{N}}$ dizileri yukarıdaki koşulu sağlayan en küçük doğal sayı her bir $v \in \mathbb{N}$ için m_v olacak şekilde seçilsin. Bu durumda her bir $h \in \{n_v + 1, \dots, m_v - 1\}$ için $d(f^h x, f^{n_v} x) < \varepsilon$ olup diğer durumlarda $d(f^{m_v} x, f^{n_v} x) \geq \varepsilon$ dir.

Şimdi $d(f^{m_v} x, f^{n_v} x)$ ve $d(f^{m_v+1} x, f^{n_v+1} x)$ ifadelerinin özellikleri analiz edilecektir.

İlk olarak $v \rightarrow +\infty$ için $d(f^{m_v} x, f^{n_v} x) \rightarrow \varepsilon +$ olduğu gösterilecektir. Gerçekten, adım 2 ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq d(f^{m_v} x, f^{n_v} x) \\ &\leq d(f^{m_v} x, f^{m_v-1} x) + d(f^{m_v-1} x, f^{n_v} x) \\ &< d(f^{m_v} x, f^{m_v-1} x) + \varepsilon \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} \varepsilon + \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca her bir $v > \mu$ doğal sayısı için $d(f^{m_v+1} x, f^{n_v+1} x) < \varepsilon$ olacak şekilde $\mu \in \mathbb{N}$ vardır.

Kabul edelim ki $d(f^{m_{v_k}+1} x, f^{n_{v_k}+1} x) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ alt dizisi olsun. $d(f^{m_{v_k}+1} x, f^{n_{v_k}+1} x) \geq \varepsilon$ eşitsizliğini gerçekleyen $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ alt dizisi varsa, üçgen eşitsizliği kullanarak

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq d(f^{m_{v_k}+1}x, f^{n_{v_k}+1}x) \\
&\leq d(f^{m_{v_k}+1}x, f^{m_{v_k}}x) + d(f^{m_{v_k}}x, f^{n_{v_k}+1}x) \\
&\leq d(f^{m_{v_k}+1}x, f^{m_{v_k}}x) + d(f^{m_{v_k}}x, f^{n_{v_k}}x) + d(f^{n_{v_k}}x, f^{n_{v_k}+1}x) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \varepsilon
\end{aligned}$$

ve (3.1) den

$$\int_0^{d(f^{m_{v_k}+1}x, f^{n_{v_k}+1}x)} \varphi(t)dt \leq c \int_0^{d(f^{m_{v_k}}x, f^{n_{v_k}}x)} \varphi(t)dt \quad (3.2)$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki tarafından $k \rightarrow +\infty$ için limit alınırsa

$$\int_0^\varepsilon \varphi(t)dt \leq c \int_0^\varepsilon \varphi(t)dt$$

bulunur ki $c \in (0, 1)$ ve integral pozitif olduğundan bu bir çelişkidir. Her $v > \mu$ için $d(f^{m_v+1}x, f^{n_v+1}x) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\mu \in \mathbb{N}$ vardır.

Son olarak her $v > v_\varepsilon$ ($v \in \mathbb{N}$) için $d(f^{m_v+1}x, f^{n_v+1}x) < \varepsilon - \sigma_\varepsilon$ olacak şekilde en az bir $v_\varepsilon \in \mathbb{N}$ ve $\sigma_\varepsilon \in (0, \varepsilon)$ olduğu gösterilecektir.

Kabul edelim ki $k \rightarrow +\infty$ iken $d(f^{m_{v_k}+1}x, f^{n_{v_k}+1}x) \rightarrow \varepsilon -$ olacak şekilde $(v_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ dizisi var olsun. (3.2) den $k \rightarrow +\infty$ için limit alınırsa benzer şekilde çelişki elde edilir.

Sonuç olarak her bir $v > v_\varepsilon$ doğal sayısı için

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq d(f^{m_v}x, f^{n_v}x) \\
&\leq d(f^{m_v}x, f^{m_v+1}x) + d(f^{m_v+1}x, f^{n_v+1}x) + d(f^{n_v+1}x, f^{n_v}x) \\
&< d(f^{m_v}x, f^{m_v+1}x) + (\varepsilon - \sigma_\varepsilon) + d(f^{n_v+1}x, f^{n_v}x) \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} \varepsilon - \sigma_\varepsilon
\end{aligned}$$

ve burada $\varepsilon \leq \varepsilon - \sigma_\varepsilon$ olup çelişki elde edilir. Dolayısıyla $(f^n x)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi Cauchy dizisidir.

Adım 4. Bu adımda sabit bir noktanın var olduğu gösterilecektir.

(X, d) bir tam metrik uzay olduğundan $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n x$ olacak şekilde $z \in X$ vardır.

O halde z bir sabit noktadır.

$d(z, fz) > 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda

$$0 < d(z, fz) \leq d(z, f^{n+1}x) + d(f^{n+1}x, fz) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

ifadesinin doğru olduğu gösterilecektir. Gerçekten,

$z = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n x$ olduğundan $z = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{n+1}x$ ve dolayısıyla $d(z, f^{n+1}x) \rightarrow 0$ bulunur.

İkinci ifade için (3.1) den

$$\int_0^{d(f^{n+1}x, fz)} \varphi(t) dt \leq c \int_0^{d(f^n x, z)} \varphi(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

elde edilir.

$n \rightarrow +\infty$ iken $d(f^{n+1}x, fz) \not\rightarrow 0$ olduğu kabul edilsin. O halde bazı $\varepsilon > 0$ için $d(f^{n_v+1}x, fz) \geq \varepsilon$ olacak şekilde $(f^{n_v+1}x)_{v \in \mathbb{N}} \subseteq (f^{n+1}x)_{n \in \mathbb{N}}$ alt dizisi vardır.

Buradan

$$0 < \int_0^\varepsilon \varphi(t) dt \leq \int_0^{d(f^{n_v+1}x, fz)} \varphi(t) dt \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} 0$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir.

O halde $d(f^{n+1}x, fz) \rightarrow 0$ bulunur. Dolayısıyla $d(z, fz) = 0$ olup $z = fz$ yani f in bir sabit noktası vardır.

Adım 5. Bu adımda sabit noktanın tek olduğu gösterilecektir.

Kabul edelim ki $z, w \in X$ noktaları f nin farklı iki sabit noktası olsun. O halde $fw = z$ ve $fz = w$ dir. $z \neq w$ olmak üzere (3.1) den

$$0 < \int_0^{d(z,w)} \varphi(t)dt = \int_0^{d(fz,fw)} \varphi(t)dt \leq c \int_0^{d(z,w)} \varphi(t)dt < \int_0^{d(z,w)} \varphi(t)dt$$

ifadesi elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani $z = w$ dir.

Bu son adımla birlikte her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^n x = z = fz$ olduğu elde edilerek ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 3.1 Teorem (3.1) Banach büzülme ilkesinin genelleştirilmiş halidir.

Gerçekten (3.1) de her $t \geq 0$ için $\varphi(t) = 1$ alınırsa

$$\int_0^{d(fx,fy)} \varphi(t)dt = d(fx, fy) \leq cd(x, y) = c \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt$$

bulunur.

Dolayısıyla Banach büzülme ilkesi (3.1) i sağlar. Fakat bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani, (3.1) koşulunun sağlanması Banach büzülmesini gerektirmez. Aşağıda buna ilişkin örnek verilmiştir.

Örnek 3.1 $X := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ uzayı $\mathbb{R}$ de $d(x, y) := |x - y|$ metriği ile ele alınsın. $X \subset \mathbb{R}$ olmak üzere X bir tam metrik uzaydır. $f : X \rightarrow X$ dönüşümü

$$fx = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

ile tanımlansın. Burada $c = \frac{1}{2}$ ve her $t > 0$ için $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi(t) = t^{\frac{1}{2}-2} [1 - \log t]$ ile (3.1) sağlanır.

$x = 0, y = 0$ alınırsa (3.1) eşitsizliği aşıkarak sağlanır.

$\int_0^\tau \varphi(t)dt = \tau^{\frac{1}{\tau}}$ ve her $x \neq y$ için (3.1) den

$$d(fx, fy)^{\frac{1}{d(fx, fy)}} \leq cd(x, y)^{\frac{1}{d(x, y)}} \quad (3.4)$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin gerçeklendiğini göstermek için $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m > n$ olacak şekilde $x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{m}$ alınırsa

$$\begin{aligned} d(fx, fy)^{\frac{1}{d(fx, fy)}} &= \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|^{\left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|} \\ &= \left[\frac{m-n}{(n+1)(m+1)} \right]^{\frac{(n+1)(m+1)}{(m-n)}} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(x, y)^{\frac{1}{d(x, y)}} &= \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|^{\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|} \\ &= \left[\frac{(m-n)}{nm} \right]^{\frac{nm}{(m-n)}} \end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu son iki eşitlik (3.4) de yerine yazılırsa

$$\left[\frac{m-n}{(n+1)(m+1)} \right]^{\frac{(n+1)(m+1)}{(m-n)}} \leq \frac{1}{2} \left[\frac{(m-n)}{nm} \right]^{\frac{nm}{(m-n)}}$$

ya da bu ifadeye eşit olarak

$$\left[\frac{m-n}{(n+1)(m+1)} \right]^{\frac{(nm+n+m+1)}{(m-n)}} \left[\frac{nm}{(m-n)} \right]^{\frac{nm}{(m-n)}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{m-n}{(n+1)(m+1)} \right]^{\frac{(n+m+1)}{(m-n)}} \left\{ \left[\frac{m-n}{(n+1)(m+1)} \right]^{\frac{nm}{(m-n)}} \left[\frac{nm}{(m-n)} \right]^{\frac{nm}{(m-n)}} \right\} \leq \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{m-n}{(n+1)(m+1)} \right]^{\frac{(n+m+1)}{(m-n)}} \left[\frac{nm}{(n+1)(m+1)} \right]^{\frac{nm}{(m-n)}} \leq \frac{1}{2}$$

bulunur.

$nm < (n+1)(m+1)$ ve $\frac{nm}{m-n} > 0$ olduğundan

$$\left[\frac{nm}{(n+1)(m+1)} \right]^{\frac{nm}{(m-n)}} \leq 1$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} m &\leq n \cdot m \\ m &\leq nm + 3n + 1 \\ 2m &\leq m + nm + 3n + 1 \\ 2(m-n) &\leq (m+1)(n+1) \end{aligned}$$

ve

$$(m+n+1) > (m-n)$$

olduğundan

$$\left[\frac{m-n}{(n+1)(m+1)} \right]^{\frac{(n+m+1)}{(m-n)}} \leq \frac{1}{2}$$

elde edilir. Böylece (3.4) eşitsizliği $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m}$ için sağlanır.

Diğer taraftan, $x = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) ve $y = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} d(fx, fy)^{\frac{1}{d(fx, fy)}} &= \left[\frac{1}{n+1} \right]^{n+1} \\ &= \left[\frac{1}{n+1} \right]^n \frac{1}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} \right]^n \\ &= \frac{1}{2} d(x, y)^{\frac{1}{d(x, y)}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $x \neq y$ olmak üzere (3.4) eşitsizliği $c = \frac{1}{2}$ için sağlanır. Fakat

$$\sup_{\{x, y \in X: x \neq y\}} \frac{d(fx, fy)}{d(x, y)} = 1$$

olup, bu son eşitlik Banach büzülme değildir.

Sonuç 3.2 Teorem (3.1) deki φ nin pozitiflik şartı kaldırılamaz.

Örnek 3.2 $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü $fx := x + 1$ ile tanımlansın. Her $t \geq 0$ için $\varphi(t) = -1$, $\mathbb{R}$ de d Euclid metriği olmak üzere keyfi $c \in (0, 1)$ için

$$\int_0^{d(fx, fy)} \varphi(t) dt = -d(fx, fy) = -d(x, y) \leq c \int_0^{d(x, y)} \varphi(t) dt$$

elde edilir. Böylece $\varphi(t) = -1$ ve her $c \in (0, 1)$ için (3.1) sağlanır. Fakat $\mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlanan f dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Şimdi

$$m(x, y) = \max \left\{ d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), \left[\frac{d(x, fy) + d(y, fx)}{2} \right] \right\} \quad (3.5)$$

ile tanımlanarak Teorem (3.1) in bir genelleştirilmesi verilecektir.

Teorem 3.2 (X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Negatif olmayan $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü sonlu integrale sahip Lebesgue integrallenebilir ve

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \int_0^\varepsilon \varphi(t) dt > 0 \quad (3.6)$$

koşulunu sağlasın.

Bu durumda her $x, y \in X$ ve en az bir $k \in [0, 1)$ için

$$\int_0^{d(fx, fy)} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{m(x, y)} \varphi(t) dt \quad (3.7)$$

koşulunu gerçekleyen f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahip olup her $x \in X$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n x = z$ dir.

İspat. $x \in X$ keyfi bir nokta olmak üzere

$$x_n = f^n x = f x_{n-1}$$

şeklinde tanımlı (x_n) dizisi ele alınsın. Her bir $n \geq 1$ tamsayısı için (3.7) den

$$\int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{m(x_{n-1}, x_n)} \varphi(t) dt \quad (3.8)$$

elde edilir. (3.5) kullanılarak

$$\begin{aligned} m(x_{n-1}, x_n) &= \max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), d(x_{n-1}, f x_{n-1}), d(x_n, f x_n), \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{d(x_{n-1}, f x_n) + d(x_n, f x_{n-1})}{2} \right] \right\} \\ &= \max \left\{ d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1}), \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \frac{d(x_{n-1}, x_{n+1})}{2} &\leq \frac{d(x_{n-1}, x_n) + d(x_n, x_{n+1})}{2} \\ &\leq \max \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$m(x_{n-1}, x_n) = \max \{d(x_{n-1}, x_n), d(x_n, x_{n+1})\}$$

dir. Bu son ifade (3.8) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt &\leq k \int_0^{\max \{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, x_{n-1})\}} \varphi(t) dt \\ &= k \max \left\{ \int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt, \int_0^{d(x_n, x_{n-1})} \varphi(t) dt \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir.

Eğer

$$\int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt \geq \int_0^{d(x_{n-1}, x_n)} \varphi(t) dt$$

ise

$$\int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt < \int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt$$

olur ki bu bir çelişkidir.

O halde

$$\int_0^{d(x_{n-1}, x_n)} \varphi(t) dt > \int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt$$

dir. (3.9) dan

$$\begin{aligned} \int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt &\leq k \int_0^{d(x_{n-1}, x_n)} \varphi(t) dt \\ &\leq k^2 \int_0^{d(x_{n-2}, x_{n-1})} \varphi(t) dt \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\leq k^n \int_0^{d(x_0, x_1)} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt = 0$$

ve (3.6) dan açık olarak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0 \quad (3.10)$$

bulunur.

Şimdi (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir.

Kabul edelim ki (x_n) dizisi Cauchy dizisi olmasın. O halde $(m(p))$ ve $(n(p))$ alt dizileri vardır, öyle ki $m(p) < n(p) < m(p+1)$ iken

$$d(x_{m(p)}, x_{n(p)}) \geq \varepsilon \quad \text{ve} \quad d(x_{m(p)}, x_{n(p)-1}) < \varepsilon \quad (3.11)$$

olacak şekilde $\varepsilon > 0$ vardır. (3.5) den

$$m(x_{m(p)-1}, x_{n(p)-1}) = \max \left\{ \begin{array}{l} d(x_{m(p)-1}, x_{n(p)-1}), d(x_{m(p)-1}, x_{m(p)}), \\ d(x_{n(p)-1}, x_{n(p)}), \frac{d(x_{m(p)-1}, x_{n(p)}) + d(x_{n(p)-1}, x_{m(p)})}{2} \end{array} \right\} \quad (3.12)$$

elde edilir. (3.10) ve (3.12) ifadeleri kullanılarak

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{d(x_{m(p)-1}, x_{m(p)})} \varphi(t) dt = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{d(x_{n(p)-1}, x_{n(p)})} \varphi(t) dt = 0 \quad (3.13)$$

bulunur. Üçgen eşitsizliği ve (3.11) den

$$\begin{aligned} d(x_{m(p)-1}, x_{n(p)-1}) &\leq d(x_{m(p)-1}, x_{m(p)}) + d(x_{m(p)}, x_{n(p)-1}) \\ &< d(x_{m(p)-1}, x_{m(p)}) + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{d(x_{m(p)-1}, x_{n(p)-1})} \varphi(t) dt \leq \int_0^\varepsilon \varphi(t) dt \quad (3.14)$$

dir. Tekrar üçgen eşitsizliği ve (3.11) kullanılarak

$$\begin{aligned} v(m, n) &: = \frac{d(x_{m(p)-1}, x_{n(p)}) + d(x_{n(p)-1}, x_{m(p)})}{2} \\ &\leq \frac{d(x_{m(p)-1}, x_{m(p)}) + d(x_{m(p)}, x_{n(p)}) + d(x_{n(p)-1}, x_{m(p)})}{2} \\ &\leq \frac{d(x_{m(p)-1}, x_{m(p)}) + 2d(x_{m(p)}, x_{n(p)-1}) + d(x_{n(p)-1}, x_{n(p)})}{2} \\ &< \frac{d(x_{m(p)-1}, x_{m(p)}) + d(x_{n(p)-1}, x_{n(p)})}{2} + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.10) dan

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^{v(m,n)} \varphi(t) dt \leq \int_0^\varepsilon \varphi(t) dt \quad (3.15)$$

bulunur. (3.7), (3.11), (3.12), (3.13), (3.14) ve (3.15) kullanılarak

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \varphi(t) dt &\leq \int_0^{d(x_{m(p)}, x_{n(p)})} \varphi(t) dt \\ &\leq k \int_0^{m(x_{m(p)}-1, x_{n(p)}-1)} \varphi(t) dt \\ &\leq k \int_0^\varepsilon \varphi(t) dt \end{aligned}$$

olur ki bu bir çeliskidir.

O halde (x_n) dizisi bir Cauchy dizisidir. X tam uzay olduğundan (x_n) dizisi yakınsaktır. Dolayısıyla $\lim_n x_n = z$ alınabilir.

(3.5) den

$$\begin{aligned} \int_0^{d(fz, fx_n)} \varphi(t) dt &\leq k \int_0^{m(z, x_n)} \varphi(t) dt \\ &= k \max \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{d(z, x_n)} \varphi(t) dt, \int_0^{d(z, fz)} \varphi(t) dt, \int_0^{d(x_n, fx_n)} \varphi(t) dt, \\ \int_0^{d(z, fx_n)} \varphi(t) dt, \int_0^{d(x_n, fz)} \varphi(t) dt \end{array} \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadeden $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\int_0^{d(z, fz)} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{d(z, fz)} \varphi(t) dt$$

olup $k \in (0, 1)$ için

$$\int_0^{d(z, fz)} \varphi(t) dt = 0$$

bulunur. (3.6) dan $d(z, fz) = 0$ olup $z = fz$ elde edilir.

Şimdi sabit noktanın tek olduğu gösterilecektir.

Kabul edelim ki z ve w , f nin farklı iki sabit noktası olsun. O halde (3.5) den

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(z,w)} \varphi(t) dt &= \int_0^{d(fz,fw)} \varphi(t) dt \\
&\leq k \int_0^{m(z,w)} \varphi(t) dt \\
&= k \max \left\{ \int_0^{d(z,w)} \varphi(t) dt, 0 \right\} \\
&= k \int_0^{d(z,w)} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\int_0^{d(z,w)} \varphi(t) dt = 0$$

elde edilir. (3.7) den $d(z, w) = 0$ olup $z = w$ bulunur. Dolayısıyla f dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır.

Tanım 3.1 $O(x, n) := \{x, fx, f^2x, \dots, f^nx\}$ ile tanımlanan kümeye X in n -inci orbiti denir.

(3.5) koşulu yerine Ciric tarafından verilen

$$M(x, y) := \max \{d(x, y), d(x, fx), d(y, fy), d(x, fy), d(y, fx)\} \quad (3.16)$$

ifadesi ele alınırsa

$$\int_0^{d(fx,fy)} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{M(x,y)} \varphi(t) dt \quad (3.17)$$

eşitsizliği sağlanır mı?

Aşağıdaki örnekte bu eşitsizliğin gerçekleştiği fakat dönüşümün bir tek sabit noktasının olması için orbitlerin sınırlı olması gerektiği gösterilecektir.

Örnek 3.4 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ olmak üzere $f(n) = n + 1$ ve $\phi, \varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olsun.
 $\phi(t) := (t + 1)^{t+1} - 1$ iken $\varphi(t) = \phi'(t)$ tanımlansın.

Buradan $n > m$ için $t := n - m$ iken (3.16) dan

$$\begin{aligned} M(n, m) &= \max \{d(n, m), d(n, Tn), d(m, Tm), d(n, Tm), d(m, Tn)\} \\ &= \max \{n - m, 1, n - m - 1, n - m + 1\} \\ &= n - m + 1 = t + 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

$\forall t \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} (t + 2)^{t+2} &= (t + 1 + 1)^{t+2} - 1 \\ &\geq (t + 1)^{t+2} + 1^{t+2} - 1 \\ &= (t + 1)^{t+1}(t + 1) \\ &\geq 2(t + 1)^{t+1} \\ &\geq 2(t + 1)^{t+1} - 2 \\ &= 2[(t + 1)^{t+1} - 1] \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi(t) = \phi'(t)$ olduğundan ve bu son eşitsizlikten

$$\int_0^t \varphi(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{t+1} \varphi(t) dt$$

ve ya

$$\int_0^{d(fn, fm)} \varphi(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{M(n, m)} \varphi(t) dt$$

yazılabilir ve (3.17) sağlanır.

Fakat orbitler sınırlı değildir ve f dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Lemma 3.1 $0 < k \leq n$ olacak şekilde bazı k tamsayıları için $\delta(O(x, n)) = d(x, f^k x)$ dır.

İspat. Her n için $\delta(O(x, n)) > 0$ olsun. Eğer $\delta(O(x, n)) = 0$ olacak şekilde bir n varsa f bir sabit noktaya sahiptir.

Kabul edelim ki $0 < i < j \leq n$ olmak üzere $\delta(O(x, n)) = d(x_i, x_j)$ olsun. (3.17) den

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta(O(x, n))} \varphi(t) dt &= \int_0^{d(x_i, x_j)} \varphi(t) dt \\ &\leq k \int_0^{M(x_{i-1}, x_{j-1})} \varphi(t) dt \\ &\leq k \int_0^{\delta(O(x, n))} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir.

$\delta(O(x, n)) > 0$ olduğundan, kabul yanlış olup $i = 0$ dır. O halde $0 < k \leq n$ olacak şekilde $\delta(O(x, n)) = d(x, f^k x)$ yazılabilir.

Teorem 3.3 (X, d) bir tam metrik uzay olsun. $k \in [0, 1)$, $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olmak üzere her $x, y \in X$ için (3.17) eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşümü sonlu integrale sahip Lebesgue integrallenebilir olsun ve (3.7) koşulunu sağlasın.

Eğer sınırlı orbit ile bir $x \in X$ noktası var ise f bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir.

İspat. $O(x, n)$ nin tanımından $\delta(O(x, n)) = d(f^i x, f^j x)$ olacak şekilde $0 \leq i < j \leq n$ koşulunu sağlayan i, j tam sayıları vardır.

Sınırlı orbit ile $x \in X$ seçilip, $m > n$ olacak şekilde m, n tamsayıları için (3.17) den

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(x_n, x_m)} \varphi(t) dt &\leq k \int_0^{M(x_{n-1}, x_{m-1})} \varphi(t) dt \\
&\leq k \int_0^{\delta(O(x_{n-1}, m-n+1))} \varphi(t) dt \\
&= k \int_0^{d(x_{n-1}, x_{k_1+n-1})} \varphi(t) dt, \text{ bazı } 0 < k_1 \leq m-n+1 \text{ için} \\
&\leq k^2 \int_0^{M(x_{n-2}, x_{k_1+n-2})} \varphi(t) dt \\
&\leq k^2 \int_0^{\delta(O(x_{n-2}, x_{k_1+n-1}))} \varphi(t) dt \\
&= k^2 \int_0^{d(x_{n-2}, x_{k_2+n-2})} \varphi(t) dt, \text{ bazı } 0 < k_2 \leq m-n+2 \text{ için} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\leq k^n \int_0^{\delta(O(x, m))} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

bulunur. $m, n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa x in orbiti sınırlı olduğundan

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_0^{d(x_n, x_m)} \varphi(t) dt = 0$$

ve (3.7) den açık olarak

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} d(x_n, x_m) = 0$$

dır.

Böylece (x_n) dizisi Cauchy dizisidir. X tam olduğundan (x_n) dizisi yakınsak ve

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$ yazılabilir. (3.17) den

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(fx_n, fz)} \varphi(t) dt &\leq k \int_0^{M(x_n, z)} \varphi(t) dt \\
&= k \int_0^{\max\{d(x_n, z), d(z, fz), d(x_n, fx_n), d(x_n, fz), d(z, fx_n)\}} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

bulunur. Her iki tarafın $n \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\int_0^{d(z,fz)} \varphi(t)dt \leq k \int_0^{d(z,fz)} \varphi(t)dt$$

$k \in [0, 1)$ olduğundan ve (3.7) den açık olarak $d(z, fz) = 0$ yani $z = fz$ dir.

Kabul edelim ki z ve w , f nin farklı iki sabit noktası olsun. (3.17) den

$$\begin{aligned} \int_0^{d(fz,fw)} \varphi(t)dt &\leq k \int_0^{M(z,w)} \varphi(t)dt \\ &= k \int_0^{d(z,w)} \varphi(t)dt \end{aligned}$$

elde edilir. $k \in [0, 1)$ olup bu bir çelişkidir.

O halde $d(z, w) = 0$ olup $z = w$ dir. Dolayısıyla f dönüşümünün sabit noktası tektir.

4. İNTEGRAL TIPLİ GENEL BÜZÜLME KOŞULUNU SAĞLAYAN DÖNÜŞÜM ÇİFTLERİ İÇİN SABİT NOKTA TEOREMİ

Bu bölümde integral tipli büzülme eşitsizliğini sağlayan dönüşüm çifti için sabit nokta teorisinden bahsedilecektir.

φ negatif olmayan, azalmayan, Lebesgue integrallenebilir ve

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \int_0^\varepsilon \varphi(t)dt > 0 \quad (4.1)$$

şartını sağlayan bir dönüşüm olmak üzere $\Phi = \{\varphi : \varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+\}$ şeklinde tanımlansın.

$\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ dönüşüm olmak üzere

i) ψ negatif olmayan ve $\mathbb{R}^+$ da azalmayan

ii) $\forall t > 0$ için $\psi(t) < t$

iii) Her sabit $t > 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$$

özelliklerini sağlayan ψ dönüşümlerinin sınıfı Ψ ile gösterilsin.

Yani $\Psi = \{\psi : \psi, (i) - (iii) \text{ sağlar} \}$ olsun.

Lemma 4.1 $S : X \rightarrow X, T : X \rightarrow X, (X, d)$ metrik uzayında iki dönüşüm olsun.

$x_0 \in X, x_{2n+1} := Sx_{2n}, x_{2n+2} := Tx_{2n+1}$ şeklinde tanımlanan $(x_n) \subset X$ dizisi için $\overline{(x_n)}$ tam olduğunu kabul edilsin.

Ayrıca $\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi$ olmak üzere $x = Ty$ ve ya $y = Sx$ özelliğini sağlayan her ayrık $x, y \in \overline{(x_n)}$ için

$$\int_0^{d(Sx, Ty)} \varphi(t)dt \leq \psi \left(\int_0^{d(x, y)} \varphi(t)dt \right) \quad (4.2)$$

eşitsizliği sağlansın.

Bu durumda aşığıdaki iki durumdan biri gerçeklenir.

a) S ve ya T nin (x_n) içinde sabit noktası vardır

ya da

b)

$$d := \int_0^{d(x_0, x_1)} \varphi(t) dt \quad (4.3)$$

olmak üzere (x_n) dizisi bazı $p \in X$ noktasına yakınsar ve her $n > 0$ için

$$\int_0^{d(x_n, p)} \varphi(t) dt \leq \sum_{i=n}^{\infty} \psi^i(d) \quad (4.4)$$

gerçeklenir.

İspat.

a) Bazı n ler için $x_{2n+1} = x_{2n}$ olduğu kabul edilsin. $x_{2n} = x_{2n+1} = Sx_{2n}$ olup x_{2n} , S için bir sabit noktadır.

Benzer şekilde, eğer bazı n ler için $x_{2n+2} = x_{2n+1}$ ise $x_{2n+1} = x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$ olup x_{2n+1} , T için bir sabit noktadır.

b) Her n için $x_n \neq x_{n+1}$ olduğu kabul edilsin.

$x = x_{2n}$ ve $y = x_{2n+1}$ alınırsa (4.2) den

$$\int_0^{d(Sx, Ty)} \varphi(t) dt = \int_0^{d(x_{2n+1}, x_{2n+2})} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{d(x_{2n}, x_{2n+1})} \varphi(t) dt \right)$$

elde edilir.

$x = x_{2n}$ ve $y = x_{2n-1}$ alınırsa (4.2) den

$$\int_0^{d(x_{2n+1}, x_{2n})} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{d(x_{2n}, x_{2n-1})} \varphi(t) dt \right)$$

bulunur.

Buradan her $n \geq 0$ için

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(x_n, x_{n+1})} \varphi(t) dt &\leq \psi \left(\int_0^{d(x_{n-1}, x_n)} \varphi(t) dt \right) \\
&\leq \psi^2 \left(\int_0^{d(x_{n-2}, x_{n-1})} \varphi(t) dt \right) \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\leq \psi^n \left(\int_0^{d(x_0, x_1)} \varphi(t) dt \right) \\
&= \psi^n(d)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir.

$m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $m > n$ alınsın. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&= \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i, x_{i+1})
\end{aligned}$$

bulunur. Tümevarım ile

$$\int_0^{d(x_n, x_m)} \varphi(t) dt \leq \sum_{i=n}^{m-1} \int_0^{d(x_i, x_{i+1})} \varphi(t) dt \tag{4.6}$$

elde edilir. (4.5) ve (4.6) kullanılarak

$$\int_0^{d(x_n, x_m)} \varphi(t) dt \leq \sum_{i=n}^{m-1} \psi^i(d) \leq \sum_{i=n}^{\infty} \psi^i(d) \tag{4.7}$$

bulunur. (4.7) den $m, n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa ψ nin (iii) koşulundan (x_n) dizisinin Cauchy dizisi olduğu gösterilir. $\overline{(x_n)}$ tam olduğundan (x_n) dizisi yakınsaktır ve dolayısıyla $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ elde edilir.

(4.7) den $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\int_0^{d(x_n, p)} \varphi(t) dt \leq \sum_{i=n}^{\infty} \psi^i(d)$$

elde edilir.

Teorem 4.1 (X, d) bir tam metrik uzay ve $S : X \rightarrow X$, $T : X \rightarrow X$ iki dönüşüm olsun. $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ ve

$$M(x, y) := \max \left\{ d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), \frac{[d(x, Ty) + d(y, Sx)]}{2} \right\} \quad (4.8)$$

olmak üzere her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için

$$\int_0^{d(Sx, Ty)} \varphi(t) dt \leq \psi \left(\int_0^{M(x, y)} \varphi(t) dt \right) \quad (4.9)$$

sağlansın.

Bu durumda S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. İlk olarak, S nin herhangi bir sabit noktasının T nin de bir sabit noktası olduğu ve benzer şekilde T nin herhangi bir sabit noktasının S nin de bir sabit noktası olduğu gösterilecektir.

$p = Sp$ olsun. (4.8) den

$$\begin{aligned} M(p, p) &= \max \left\{ d(p, p), d(p, Sp), d(p, Tp), \frac{d(p, Tp) + d(p, Sp)}{2} \right\} \\ &= d(p, Tp) \end{aligned}$$

ve (4.9) dan

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(Sp, Tp)} \varphi(t) dt &= \int_0^{d(p, Tp)} \varphi(t) dt \\
&\leq \psi \left(\int_0^{d(p, Tp)} \varphi(t) dt \right) \\
&< \int_0^{d(p, Tp)} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.1) den açık olarak $p = Tp$ bulunur.

Benzer şekilde $p = Tp$ alınrsa $p = Sp$ elde edilir.

Şimdi, S ve T nin (4.2) eşitsizliğini sağladığı gösterilecektir.

$y = Sx$ alınarak

$$M(x, Sx) = \max \left\{ d(x, Sx), d(x, Sx), d(Sx, TSx), \frac{d(x, TSx) + d(Sx, Sx)}{2} \right\}$$

ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\frac{d(x, TSx)}{2} &\leq \frac{d(x, Sx) + d(Sx, TSx)}{2} \\
&\leq \max\{d(x, Sx), d(Sx, TSx)\}
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $d(x, Sx) < d(Sx, TSx)$ ise (4.9) dan

$$\begin{aligned}
\int_0^{d(Sx, TSx)} \varphi(t) dt &\leq \psi \left(\int_0^{M(x, Sx)} \varphi(t) dt \right) \\
&\leq \psi \left(\int_0^{d(Sx, TSx)} \varphi(t) dt \right) \\
&< \int_0^{d(Sx, TSx)} \varphi(t) dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (4.1) den çelişkidir.

Bu nedenle her $x \in X$ için $M(x, Sx) = d(x, Sx)$ dir. Dolayısıyla (4.2) sağlanır.

Eğer Lemma (4.1) in (a) durumu doğru ise S ve ya T bir sabit noktaya sahiptir. Önceki adımlarda S nin herhangi bir sabit noktasının T nin de bir sabit noktası olduğu ve benzer şekilde bu durumun tersi gösterildi. O halde S ve T ortak bir sabit noktaya sahiptir.

Lemma (4.1) de (b) durumunun doğru olduğu kabul edilsin. Bu durumda (4.4) den $x = x_{2n}$, $y = p$ alınarak

$$\begin{aligned} \int_0^{d(Sx_{2n}, Tp)} \varphi(t) dt &\leq \psi \left(\int_0^{d(x_{2n}, p)} \varphi(t) dt \right) \\ &< \int_0^{d(x_{2n}, p)} \varphi(t) dt \\ &\leq \sum_{i=2n}^{\infty} \psi^i(d) \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Sx_{2n}, Tp) = 0$ olduğu açıktır.

Ayrıca Lemma (4.1) in (b) durumundan (x_n) dizisi p ye yakınsak olup (x_{2n}) alt dizisi de aynı p ye yakınsar.

Yine Lemma (4.1) den $Sx_{2n} = x_{2n+1}$ olup $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$d(p, Tp) \leq d(p, Sx_{2n}) + d(Sx_{2n}, Tp) \rightarrow 0$$

elde edilir. Böylece p , T nin bir sabit noktasıdır. O halde S nin de bir sabit noktasıdır.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğu gösterilecektir.

Kabul edelim ki p ve w farklı iki sabit nokta olsun. (4.8) den

$$\begin{aligned} \int_0^{d(Sp, Tw)} \varphi(t) dt &\leq \psi \left(\int_0^{M(p, w)} \varphi(t) dt \right) \\ &= \psi \left(\int_0^{d(p, w)} \varphi(t) dt \right) \\ &< \int_0^{d(p, w)} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişki olup sabit nokta tektir.

Sonuç 4.1 (X, d) bir tam metrik uzay ve $S : X \rightarrow X$, $T : X \rightarrow X$ dönüşümleri verilsin.

$\varphi \in \Phi$, $k \in [0, 1)$ ve

$$n(x, y) := \max \left\{ \frac{d(y, Ty)[1 + d(x, Sx)]}{1 + d(x, y)}, d(x, y) \right\} \quad (4.10)$$

olmak üzere her $x, y \in X$ ($x \neq y$) için

$$\int_0^{d(Sx, Ty)} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{n(x, y)} \varphi(t) dt \quad (4.11)$$

sağlansın. Bu durumda S ve T bir tek ortak sabit noktaya sahiptir.

İspat. İlk olarak S ve T nin sabit noktalarının ortak olduğu gösterilecektir.

$p = Sp$ olsun.

$$\begin{aligned} n(p, p) &= \max \left\{ \frac{d(p, Tp)[1 + d(p, Sp)]}{1 + d(p, p)}, d(p, p) \right\} \\ &= d(p, Tp) \end{aligned}$$

ve (4.11) den

$$\begin{aligned}\int_0^{d(Sp, Tp)} \varphi(t) dt &= \int_0^{d(p, Tp)} \varphi(t) dt \\ &\leq k \int_0^{d(p, Tp)} \varphi(t) dt\end{aligned}$$

bulunur ki, $k \in [0, 1)$ olduğundan $d(p, Tp) = 0$ yani $p = Tp$ elde edilir.

Benzer şekilde $p = Tp$ alınarak $p = Sp$ bulunur.

Şimdi Lemma (4.1) i kullanabilmek için S ve T nin (4.2) yi gerçeklediği gösterilecektir.

$$\begin{aligned}n(x, Sx) &= \max \left\{ \frac{d(Sx, TSx)[1 + d(x, Sx)]}{1 + d(x, Sx)}, d(x, Sx) \right\} \\ &= \max \{d(Sx, TSx), d(x, Sx)\}\end{aligned}$$

Eğer $d(Sx, TSx) > d(x, Sx)$ ise (4.11) den

$$\int_0^{d(Sx, TSx)} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{d(Sx, TSx)} \varphi(t) dt$$

elde edilir. $k \in [0, 1)$ olup bu bir çelişkidir. O halde $n(x, Sx) = d(x, Sx)$ olmalıdır.

O halde (4.11) den

$$\int_0^{d(Sx, TSx)} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{d(x, Sx)} \varphi(t) dt$$

sağlanır.

Lemma (4.1) in (b) durumundan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ olup

$$\int_0^{d(Sx_n, Tp)} \varphi(t) dt \leq k \int_0^{d(x_n, p)} \varphi(t) dt$$

ve buradan $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} d(Sx_n, Tp) = 0$ ve

$$d(p, Tp) \leq d(p, Sx_n) + d(Sx_n, Tp) \rightarrow 0$$

dır. Dolayısıyla p, T nin bir sabit noktası ve böylece S nin de bir sabit noktasıdır.

Sabit noktanın tekliğini göstermek için p ve w , T nin ve S nin sabit noktaları olsun.

$$\begin{aligned} n(p, w) &= \max \left\{ \frac{d(w, Tw)[1 + d(p, Sp)]}{1 + d(p, w)}, d(p, w) \right\} \\ &= d(p, w) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \int_0^{d(Sp, Tw)} \varphi(t) dt &= \int_0^{d(p, w)} \varphi(t) dt \\ &\leq k \int_0^{d(p, w)} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

elde edilir. $k \in [0, 1)$ olduğundan $d(p, w) = 0$ yani $p = w$ dir. Bu ise sabit noktanın tekliğini ispatlar.

Örnek 4.1 $X := \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ uzayı Euclid metriği ile verilsin.

$S : X \rightarrow X, T : X \rightarrow X$ dönüşümleri

$$S\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad n \text{ tek} \\ \frac{1}{n+2} & , \quad n \text{ çift} \\ 0 & , \quad n = \infty \end{cases}$$

$$T\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad n \text{ çift} \\ \frac{1}{n+2} & , \quad n \text{ tek} \\ 0 & , \quad n = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Her n için, $x_{2n+1} = Sx_{2n}, x_{2n+2} = Tx_{2n+1}$ alınsın.

İlk olarak $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x = Ty$ ve ya $y = Sx$ şartını sağlayan $x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{m}$ noktalarının

$$d(Sx, Ty) \leq \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|$$

eşitsizliğini gerçeklediği gösterilecektir.

Bunun için 4 durum incelenecektir.

Durum 1. m çift olmak üzere $y = \frac{1}{m}, x = \frac{1}{n} = Ty = \frac{1}{m+1}$ ve $Sx = \frac{1}{m+2}$ olsun.

Buradan

$$d(Sx, Ty) = \left| \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+1} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|$$

bulunur.

Durum 2. m tek olmak üzere $y = \frac{1}{m}, x = \frac{1}{n} = Ty = \frac{1}{m+2}$ ve $Sx = \frac{1}{m+3}$ olsun.

Buradan

$$\begin{aligned} d(Sx, Ty) &= \left| \frac{1}{m+3} - \frac{1}{m+2} \right| = \frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \\ &\leq \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3} = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| \end{aligned}$$

bulunur.

Durum 3. n çift olmak üzere $x = \frac{1}{n}, y = \frac{1}{m} = Sx = \frac{1}{n+2}$ ve $Ty = \frac{1}{n+3}$ olsun.

Buradan

$$\begin{aligned} d(Sx, Ty) &= \left| \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right| = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \\ &\leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right| \end{aligned}$$

bulunur.

Durum 4. n tek olmak üzere $x = \frac{1}{n}$, $y = \frac{1}{m} = Sx = \frac{1}{n+1}$ ve $Ty = \frac{1}{n+2}$ olsun.

Buradan

$$d(Sx, Ty) = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right| = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|$$

bulunur.

Tüm bu durumlardan (4.11) sağlanır.

$\forall t > 0$ için $\varphi(0) = 0$ olmak üzere

$$\varphi(t) = t^{\frac{1}{t}-2}[1 - \log t]$$

ile φ tanımlansın. Buradan herhangi bir $\tau > 0$ için

$$\int_0^\tau \varphi(t) dt = \tau^{\frac{1}{\tau}}$$

ve $\varphi \in \Phi$ dir.

Örnek (3.1) i kullanarak Lemma (4.1) de her x, y için

$$\begin{aligned} \int_0^{d(Sx, Ty)} \varphi(t) dt &\leq d(Sx, Ty)^{\frac{1}{d(Sx, Ty)}} \\ &\leq \left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|^{\frac{1}{\left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|}} \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|^{\frac{1}{\left| \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right|}} \\ &= d(x, y)^{\frac{1}{d(x, y)}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ile (4.2) koşulu sağlanır.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında temel sabit nokta teoremlerinden Banach sabit nokta teoremi verilip, integral tipli genel büzülme koşulunu sağlayan dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Bu teoremlere ait büzülme koşulları genişletilerek sabit noktanın varlığı ve tekliği incelenmiş, elde edilen sonuçlar ve örnekler verilmiştir. Diğer taraftan, integral tipli genel büzülme koşulunu sağlayan dönüşüm çiftleri için sabit nokta teoreminden bahsedilip bu teoreme ilişkin sonuç ve örnek incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Banach, S. 1922. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales. Fund. Math. 3, 133-181. French.
- Branciari, A. 2002. A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type. Int. J. Math. Sci. 29, No. 9, 531-536.
- Boyd, D. W. and Wong, J. S. W. 1969. On nonlinear contractions. Proc. Amer. Math. Soc. 20, 458-464.
- Caccioppoli, R. 1930. Un teorema generale sull' esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale. Rend. Accad. dei Lincei. 11, 794-799. Italian.
- Ciric, Lj. B. 1974. A generalization of Banach's contraction principle. Proc. Amer. Math. Soc. 45, 267-273.
- Kannan, R. 1968. Some results on fixed points. Bull. Calcutta Math. Soc. 60, 71-76.
- Rhodes, B. E. 2003. Two fixed point theorems for mappings satisfying a general contractive condition of integral type. Int. J. Math. Math. Sci. No. 63, 4007-4013.
- Vijayaraju, P., Rhodes, B. E. and Mohanraj, R. 2005. A fixed point theorem for a pair of maps satisfying a general contractive condition of integral type. Int. J. Math. Math. Sci. No. 15, 2359-2364.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Tuğçe KAVUZLU

Doğum Yeri : Adana

Doğum Tarihi : 16/03/1989

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ahmet Kurttepelı Yabancı Dil Ağırlıklı Lise (2007)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2011)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2012 - Temmuz 2014)