

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

RASGELE VEKTÖR DİZİLERİNİN ZAYIF A - DÜZGÜN
İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

Havva ULUÇAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2023

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

RASGELE VEKTÖR DİZİLERİNİN ZAYIF A - DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİĞİ

Havva ULUÇAY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mehmet ÜNVER

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde fonksiyonel analiz ve reel analize ilişkin bazı temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde normlu uzaylardaki diziler için zayıf A -istatistiksel yakınsaklık ve zayıf A -kuvvetli toplanabilme kavramları tanımlanmış ve bu kavramların sınırlı diziler uzayı üzerinde denkliği gösterilmiştir. Zayıf topolojideki A -istatistiksel yakınsaklık kavramının zayıf A -istatistiksel yakınsaklık kavramı ile çakışık olduğu gösterilmiştir. Daha sonra zayıf A -düzgün integrallenebilme kavramı verilir, normlu uzayda değer alan bir x dizisinin zayıf A -kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter şartın x dizisinin zayıf A -istatistiksel yakınsak ve zayıf A -düzgün integrallenebilir olduğuna yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde topolojik vektör uzaylarında değer alan rasgele vektör dizileri için Pettis integrali yardımıyla A -istatistiksel yakınsaklık ile A -kuvvetli toplanabilirlik kavramlarının yeni bir versiyonu tanımlanmış ve bu kavramların üçüncü bölümde verdiğimiz kavramlar ile aralarındaki özel ilişkiye dair sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca rasgele vektör dizilerinin Pettis A -sınırlı düzgün integrallenebilme tanımı verilmiş ve bu kavramın Pettis düzgün integrallenebilme ile Bochner A -kompakt düzgün integrallenebilme kavramının genelleştirilmesi olduğu gösterilmiştir. Son kısımda ise, Pettis A -sınırlı düzgün integrallenebilme kavramına ilişkin bazı teoremler ve sonuçlara yer verilmiştir.

Son bölümde ise tezin genel bir değerlendirilmesi yapılmıştır.

Eylül 2023, 40 sayfa

Anahtar Kelimeler: Zayıf istatistiksel yakınsaklık, Zayıf A -düzgün integrallenebilme, A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilme, Pettis integrali

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

WEAK A -UNIFORM INTEGRABILITY OF SEQUENCES OF RANDOM ELEMENTS

Havva ULUÇAY

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Mehmet ÜNVER

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, some basic concepts of functional analysis and real analysis are recalled.

In the third chapter, the concepts of weak A -statistical convergence and weak A -strong summability are introduced in normed spaces and the equivalence of these concepts for bounded sequences is given. It is showed that weak A -statistical convergence coincide with A -statistical convergence in weak topology. After the concept of weak A -uniform integrability is defined, it is shown that a sequence is weakly A -strongly summable if and only if it is weakly A -statistically convergent and weakly A -uniformly integrable in normed spaces.

In the fourth chapter, the concepts of A -statistical convergence and A -strong summability are generalized for sequences of random elements in topological vector spaces by using the Pettis integral. A relationship between these more general concepts and the concepts is given in the third chapter is obtained. Also we introduce a new versiyon of uniform integrability that is called A -bounded uniformly Pettis integrable for the sequences of random elements. It is showed that this new concept is generalization of Pettis uniform integrability and A -compact uniform Bochner integrability. Some theorems and results related to the concept of Pettis A -bounded uniform integrability are given.

Finally, in the last chapter, the analysis of the obtained results is given.

September 2023, 40 pages

Key Words: Weak statistical convergence, Weak A -uniform integrability, A -bounded uniform Pettis integrability, Pettis integral

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında ve tamamlanmasında bilgi, öneri ve eleştirilerini benimle paylaşan değerli danışman hocam Doç. Dr. Mehmet ÜNVER (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) 'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Bu zorlu süreçte göstermiş olduğu anlayış ve destek içinde ayrıyeten teşekkür ederim.

Araştırma boyunca benden desteğini esirgemeyen tez izleme jürimdeki saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Cihan ORHAN (TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Prof. Dr. Filiz YILDIZ (Hacettepe Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) 'a teşekkür ederim.

Bu tez "TÜBİTAK 2211-A Yurt İçi Doktora Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. Akademik çalışmalarına sağladığı destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında yanımda olup maddi manevi desteklerini esirgemeyen babam Şevket ULUÇAY ve annem Narin ULUÇAY başta olmak üzere kardeşlerime, arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Havva ULUÇAY
Ankara, Eylül 2023

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Fonksiyonel Analiz ile ilgili Temel Kavramlar.....	4
2.2 Reel Analiz ile ilgili Temel Kavramlar	8
3. NORMLU UZAYLARDA ZAYIF İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK.....	11
3.1 Zayıf A -istatistiksel Yakınsaklık.....	11
3.2 Zayıf A -kuvvetli Toplanabilirlik.....	17
3.3 Zayıf A -düzgün İntegrallenebilirlik.....	18
4. TOPOLOJİK VEKTÖR UZAYLARDA A -DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİK.....	22
4.1 Pettis A -istatistiksel Yakınsaklık	22
4.2 Pettis A -sınırlı Düzgün İntegrallenebilirlik	25
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	36
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ.....	40

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$ K $	K kümesinin eleman sayısı
K^c	K kümesinin tümleyeni
χ_K	K kümesinin karakteristik fonksiyonu
c_A	A matrisinin toplanabilirlik alanı
st_A	A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı
st_A^w	Zayıf A -istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$\delta(K)$	K kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_A(K)$	K kümesinin A -yoğunluğu
C_1	Cesàro matrisi
$\mathbb{M}^+$	Negatif olmayan ve her bir satır toplamı 1 olan matrislerin sınıfı
λ	Lebesgue ölçüsü
P	Olasılık ölçüsü
l_∞	Sınırlı diziler uzayı
$\ \cdot\ _\infty$	l_∞ uzayının alışılmış supremum normu
l^p	$\sum_k x_k ^p < \infty$ olmak üzere $\{x_n\}$ diziler uzayı
X'	X uzayının sürekli duali

1. GİRİŞ

Dizilerin ve serilerin yakınsaklık özelliklerini inceleyen, fonksiyonel analiz ve topolojinin bir alt dalı olan toplanabilme teorisinin temel amacı ıraksak bir diziye bir limit karşılık getirmektir. Toplanabilme teorisinin yaklaşım teorisi, diferansiyel denklemler başta olmak üzere birçok uygulama alanı bulunmaktadır. En geniş araştırma alanlarından biri, klasik anlamda yakınsaklığın genelleştirilmesi olan istatistiksel yakınsaklık metodudur. 1951 yılında Fast ve Steinhaus tarafından birbirinden bağımsız olarak tanımlanan istatistiksel yakınsaklık kavramı pozitif tam sayıların altkümelerinin doğal yoğunluğu kavramı ile ilişkilidir.

Geçmişten günümüze istatistiksel yakınsaklık metodu aktif olarak birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Šalát 1980 yılında reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramını genelleştirmiştir. Kolk (1991) Banach uzaylarda, Maddox (1988) lokal konveks uzaylarda istatistiksel yakınsaklık metodunu çalışmışlardır. Freedman ve Sember (1981) yoğunluk kavramı ile negatif olmayan matrisler arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Connor (1988) istatistiksel yakınsaklık kavramında Cesàro matrisi yerine regüler ve negatif olmayan A matrisi alarak A -istatistiksel yakınsaklık kavramı ile toplanabilme teorisinin bir diğer kavramı olan A -kuvvetli toplanabilmeyi tanıtmış ve sınırlı diziler üzerinde A -kuvvetli toplanabilme ile A -istatistiksel yakınsaklığın denk olduğunu göstermiştir. Connor (2000) bir normlu uzay üzerinde zayıf istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamış, Bhardwaj ve Bala (2007) normlu uzaylarda zayıf istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. Khan ve Orhan (2010) reel terimli diziler için A -düzgün integrallenebilme kavramını tanımlayarak, A -kuvvetli toplanabilmeyi karakterize etmişler ve reel terimli bir dizinin A -kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter koşulun dizinin A -istatistiksel yakınsak ve A -düzgün integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

Yukarıda sunulan literatür özeti çerçevesinde bu tezin amaçlarından biri normlu

uzaylarda değer alan diziler için yeni yakınsaklık çeşitleri vermektir. Bu doğrultuda öncelikle, normlu uzaylardaki bir dizinin zayıf istatistiksel yakınsaklık kavramının yeni bir versiyonu verilecektir. Tanımlanan bu zayıf A -istatistiksel yakınsaklık kavramının zayıf topolojide A -istatistiksel yakınsaklık ile çakışık olduğu gösterilecektir. Daha sonra zayıf A -kuvvetli toplanabilme ve zayıf A -düzgün integrallenebilme kavramları tanımlanarak hem literatürdeki kavramlar hem de bu yeni versiyonlar arasındaki ilişkiler ele alınacaktır.

Doęadaki olaylar modellenirken rasgelelik her zaman göz önüne alınır. Rasgele değişkenlerin ya da vektörlerin tanımlanması gerçek hayatta şans olarak algılanan kavramın matematiksel olarak ifade edilmesidir. Bu nedenle bu matematiksel yapının incelenmesi olasılık teorisinde, reel analizde ve toplanabilme teorisinde geniş yer tutmaktadır. Bir olasılık uzayı üzerinde tanımlı rasgele vektör dizilerinin ağırlıklı ortalamalarının limitleri aslında matris toplanabilme ile benzerlik göstermektedir. Bu nedenle rasgele vektörlerin toplanabilme özellikleri uygulamada büyük önem taşır.

Özellikle Lebesgue integrali kullanılarak, rasgele değişken ya da vektörlerin dizileri için düzgün integrallenebilme kavramları tanımlanmıştır. Düzgün integrallenebilme kavramı ilk olarak 1968 yılında Chung tarafından rasgele değişken ya da rasgele vektör aileleri için verilmiştir. T keyfi bir indis kümesi ve $\{f_t\}_{t \in T}$, bir olasılık uzayı üzerinde tanımlı rasgele değişkenlerin bir sınıfı olmak üzere eğer

$$\limsup_{c \rightarrow \infty} \int_{|f_t| > c} |f_t| dP = 0$$

gerçekleniyorsa $\{f_t\}$ sınıfı düzgün integrallenebilirdir denir. Bu kavram olasılık teorisinde özellikle rasgele değişken dizilerinin yakınsaklıkları ve büyük sayılar yasası (Ordóñez Cabrera ve Volodin 2005) ve merkezi limit teoremi (Hoffmann-Jorgensen ve Pisier 1976) ile yakın ilişkilidir. Ordóñez Cabrera (1994) matris toplanabilme yöntemini göz önüne alarak düzgün integrallenebilme tanımını rasgele değişkenlerin dizileri için genelleştirmiştir. Wang ve Rao (1987) rasgele vektör dizileri için kompakt düzgün integrallenebilme kavramını tanımlamış ve çalışmalar yapmıştır.

Ordóñez Cabrera (1997) ayrılabilir Banach uzaylarında toplanabilme matrisi yardımıyla kompakt düzgün integrallenebilme kavramının tanımını vermiş ve rasgele vektörlerin ağırlıklı toplamlar dizisinin ortalamadaki yakınsaklığını araştırmıştır.

Literatürde düzgün integrallenebilme kavramının versiyonları tanımlanırken, rasgele vektörlerin dizileri göz önüne alınsa bile norm fonksiyonu yardımıyla reel fonksiyonlar elde edilmiş ve beklenen değer hesaplamalarında Lebesgue integrali kullanılmıştır. Tüm bu kavramlar rasgele vektör dizilerin topolojik özelliklerinde kayıplara neden olmaktadır. Bu nedenle, yakınsaklık metotları tanımlanırken zayıf ve vektör değerli integralleri göz önüne almak değer uzayının topolojik yapısının hesaba katılmasına olanak tanımaktadır ve böylece yakınsaklık özellikleri daha anlaşılır olmaktadır.

Godet-Thobie ve Satco (2006) ayrılabilir Banach uzaylarında değer alan rasgele vektörlerin dizileri için Pettis (zayıf) integral yardımıyla düzgün integrallenebilme kavramının yeni bir versiyonunu tanımlamıştır. Ünver ve Uluçay (2017) ise yine rasgele vektör dizileri için regüler toplanabilme matrisi ve Bochner (kuvvetli) integral yardımıyla istatistiksel yakınsaklık, kuvvetli toplanabilme ve kompakt düzgün integrallenebilme kavramlarının daha genel versiyonlarını tanımlayıp, verilen bu kavramların birbirleriyle olan ilişkilerini incelemişlerdir.

Tezin amaçlarından bir diğeri, literatüre topolojik vektör uzaylarında değer alan rasgele vektör dizileri için yeni yakınsaklık çeşitleri kazandırmaktır. Bu amaçla Pettis integrali kullanarak topolojik vektör uzaylarında değer alan rasgele vektörlerin dizileri için, regüler matris metotları yardımıyla düzgün integrallenebilme, istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli toplanabilme kavramlarının yeni versiyonları tanımlanacak ve aralarındaki ilişkiler incelenecektir. Bu düzgün integrallenebilme kavramının yeni versiyonunun, literatürde rasgele vektör dizileri için verilen Pettis düzgün integrallenebilme ile Bochner A -kompakt düzgün integrallenebilme kavramlarının genelleştirilmesi olduğu ispat edilecektir. Daha sonrasında bu kavram için bazı gerek ve yeter koşullar elde edilecektir. Böylece önceden bilinen sonuçlar da genelleştirilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Fonksiyonel Analiz ile ilgili Temel Kavramlar

Bu kısımda, fonksiyonel analize ilişkin tanımlara ve bir alt dalı olan toplanabilme teorisinin bazı temel tanım ve teoremlerine yer verilecektir.

Tanım 2.1.1 X , bir K cismi üzerinde bir lineer vektör uzayı ve τ da X kümesi üzerinde bir topoloji olsun. Eğer, her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için

$$i) (\alpha, x) \rightarrow \alpha x \quad ii) (x, y) \rightarrow x + y$$

şeklinde tanımlanan skalerle çarpma ve vektörel toplama işlemleri sürekli ise (X, τ) uzayına bir topolojik vektör uzayı denir (Köthe 1969).

Tanım 2.1.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. X uzayı üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X uzayının dual uzayı (sürekli duali) denir ve X' ile gösterilir (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.3 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi olsun. Eğer her $g \in X'$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g(x_k) = g(x)$$

olacak biçimde $x \in X$ varsa $\{x_k\}$ dizisi x noktasına zayıf yakınsaktır denir. (Kreyszig 1978).

Tanım 2.1.4 w , reel ya da kompleks terimli tüm dizilerin uzayı ve $E \subseteq w$ alt vektör uzayı olmak üzere E uzayına bir dizi uzayı denir. Bir E dizi uzayından $\mathbb{K}$ reel veya kompleks cismine tanımlı lineer bir f fonksiyoneline bir toplanabilme metodu denir. Eğer E yakınsak diziler uzayını içeriyor ve yakınsak her x dizisi için $\lim x = L$ olduğunda $f(x) = L$ oluyorsa f fonksiyoneline regüler toplanabilme metodu denir (Wilansky 1985).

Tanım 2.1.5 $A = (a_{nk})$ reel ya da kompleks terimli sonsuz matris ve $x = (x_k)$ bir dizi olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} x_k$$

serisi yakınsak ise

$$(Ax)_n := \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} x_k$$

olmak üzere $Ax := \{(Ax)_n\}$ dizisine x dizisinin A dönüşüm dizisi denir. Şimdi,

$$w_A := \{x \in w : \{(Ax)_n\} \text{ dizisi mevcut}\}$$

ve

$$c_A := \{x \in w : \{(Ax)_n\} \text{ dizisi yakınsak}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Bir $f : c_A \rightarrow \mathbb{K}$ fonksiyoneli $f(x) = \lim_n (Ax)_n$ şeklinde tanımlarsak f bir toplanabilme metodudur. Eğer $\lim_n (Ax)_n = L$ ise x dizisi L sayısına A -toplanabilir denir ve bu durum $A\text{-}\lim x = L$ şeklinde ifade edilir (Wilansky 1985). Tez boyunca $A(x) := \lim_n (Ax)_n$ ile gösterilecektir.

Aşağıdaki teorem toplanabilme matrislerinin regülerliğini karakterize etmektedir.

Teorem 2.1.1 (Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul;

$$(i) \|A\| := \sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = 0 \text{ (her } k \text{ için)}$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} = 1$$

olmasıdır (Boss 2000).

Yukarıdaki teorem kullanılarak

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n} & , \quad 1 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile tanımlı $C_1 = (c_{nk})$ Cesàro matrisinin regüler olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.1.6 $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi ve $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta_A(K) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in K} a_{nk}$$

limiti mevcut ise K kümesinin A -yoğunluğu $\delta_A(K)$ sayısıdır denir (Freedman ve Sember 1981).

Tanım 2.1.7 $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |x_k - L| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa $\{x_k\}$ skaler dizisi L sayısına A -istatistiksel yakınsaktır denir (Connor 1988) ve $st_A - \lim x_k = L$ ile gösterilir.

Bir $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = |\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}|$ dersek, $st_A - \lim x = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\delta_A(K_\varepsilon) = 0$ olmasıdır.

Bu tanımda eğer A matrisi yerine C_1 Cesáro matrisi alınırsa A -istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

Tanım 2.1.8 $\{x_k\}$ skaler terimli bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim x = L$ ile gösterilir (Fast 1951, Fridy 1985, Connor 1988).

Bir $\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ dersek χ_{K_ε} bu kümenin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $st - \lim x_k = L$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $C_1 - \lim \chi_{K_\varepsilon}(k) = 0$ olmasıdır.

Klasik anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Ancak bazı ıraksak diziler de istatistiksel yakınsak olabilir. Diğer taraftan istatistiksel yakınsak bir dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Şimdi vereceğimiz istatistiksel yakınsak olan bir dizi örneği ile bu ilişkileri açıklayalım.

Örnek 2.1.1

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2 \\ 1 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

ile tanımlanan $\{x_k\}$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 1\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $st - \lim x = 1$ dir. Ancak $\{x_k\}$ dizisi yakınsak değildir. Ayrıca dizi sınırsızdır.

Aşağıdaki lemma istatistiksel yakınsaklığın iyi bilinen karakterizasyonlarından biridir.

Lemma 2.1.1 Skaler terimli bir $\{x_k\}$ dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(K) = 1$ olacak biçimde bir $K \subseteq \mathbb{N}$ için $\lim_{k \in K} x_k = L$ olmasıdır (Šalát 1980, Fridy 1985, Miller 1995).

Tanım 2.1.9 $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi ve $\{x_k\}$ skaler terimli bir dizi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| |x_k - L| = 0$$

olacak biçimde L sayısı varsa $\{x_k\}$ dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabilirdir denir (Connor 1988).

Connor 1988 yılında negatif olmayan regüler bir matris metodu yardımıyla A -istatistiksel yakınsaklık ile A -kuvvetli toplanabilme kavramlarının sınırlı diziler uzayı üzerinde denkliğini ispatlamıştır.

Teorem 2.1.2 $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir matris olsun. O halde

(i) Bir $\{x_k\}$ dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabilir ise $st_A - \lim x = L$ gerçekleşir.

(ii) $\{x_k\}$ sınırlı bir dizi ve $st_A - \lim x = L$ ise $\{x_k\}$ dizisi L sayısına A -kuvvetli toplanabilirdir (Connor 1988).

Skaler terimli diziler için verilen kuvvetli toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık kavramları normlu uzaylar için de verilebilir. Ancak verilecek olan tanımlar klasik versiyondaki tanımlardan pek de farklı olmayıp sadece mutlak değer yerine norm yazılmaktadır.

Tanım 2.1.10 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi olsun. $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: \|x_k - x\| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa $\{x_k\}$ skaler dizisi $x \in X$ vektörüne A -istatistiksel yakınsaktır denir ve eğer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \|x_k - x\| = 0$$

olacak biçimde $x \in X$ vektörü varsa $\{x_k\}$ dizisi x vektörüne A -kuvvetli toplanabilir denir (Connor 1988).

A -istatistiksel yakınsaklık kavramı keyfi topolojik Hausdorff uzaylarına da kolaylıkla genişletilebilmektedir.

Tanım 2.1.11 (X, τ) bir Hausdorff topolojik uzay, $A = (a_{nk})$ negatif olmayan ve regüler bir matris, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer x noktasını içeren her U açığı için

$$\lim_n \sum_{x_k \notin U} a_{nk} = 0$$

oluyorsa $\{x_k\}$ dizisi x noktasına A -istatistiksel yakınsaktır denir (Di Maio ve Kocinac 2008, Çakallı ve Khan 2011).

2.2 Reel Analiz ile ilgili Temel Kavramlar

Bu kısımda rasgele vektör tanımı verilerek, bir rasgele vektörün Bochner ve Pettis integralinden ve tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı önemli tanımlardan bahsedilecektir.

Tanım 2.2.1 X bir küme olmak üzere X kümesinin alt kümelerinin bir ρ sınıfı

(i) $X \in \rho$

(ii) her $E \in \rho$ için $E^c = X \setminus E \in \rho$

(iii) her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \rho$ iken $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \rho$

koşullarını sağlıyorsa bu ρ sınıfına X üzerinde bir σ -cebir ve (X, ρ) ikilisine bir ölçülebilir uzay denir (Royden 1968).

Tanım 2.2.2 (X, ρ) bir ölçülebilir uzay olsun. ρ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) her $E \in \rho$ için $\mu(E) \geq 0$

(iii) her $\{E_n\}$ ayrık dizisi için $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

özelliklerini sağlıyorsa bu μ fonksiyonuna bir ölçü fonksiyonu ve (X, ρ, μ) üçlüsüne bir ölçü uzayı denir (Royden 1968).

Tanım 2.2.3 (X, ρ) bir ölçülebilir uzay ve P fonksiyonu ρ üzerinde tanımlı bir ölçü olsun. Eğer $P(X) = 1$ ise P fonksiyonuna olasılık ölçüsü denir ve (X, ρ, P) üçlüsüne olasılık uzayı denir (Chung 2001).

Teorem 2.2.1 X bir topolojik uzay olsun. X uzayının tüm açık alt kümelerini içeren en küçük σ -cebir vardır ve bu σ -cebiire Borel σ -cebir denir. Bu Borel σ -cebirin elemanlarına X uzayının Borel kümeleri denir (Royden 1968).

Tanım 2.2.4 (X, ρ_1) ve (Y, ρ_2) iki ölçülebilir uzay olmak üzere her $E \in \rho_2$ için $f^{-1}(E) \in \rho_1$ oluyorsa $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonuna ölçülebilirdir (rasgele eleman) denir. Burada Y bir vektör uzayı olduğunda f fonksiyonu rasgele vektör, $Y = \mathbb{R}$ olduğunda ise f fonksiyonu rasgele değişken adını alır (Chung 2001).

Tanım 2.2.5 (X, ρ, μ) bir ölçü uzayı, $(Y, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı olsun. Eğer

(i) $\lim_{n,m} \int_X \|f_n - f_m\| d\mu = 0$

(ii) $\{f_n\}^X$ dizisi f rasgele vektörüne hemen her yerde yakınsak

koşullarını sağlayan sadece sonlu ölçüye sahip küme üzerinde sıfırdan farklı değer alan basit fonksiyonların bir $\{f_n\}$ dizisi varsa (f rasgele vektörü μ -integrallenebilir) f rasgele vektörüne Bochner integrallenebilirdir denir ve bu fonksiyonun Bochner integrali

$$\mathbb{B}f := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

ile tanımlanır (Pugachev ve Sinitsyn 1999).

Tanım 2.2.6 (X, ρ, μ) bir ölçü uzayı, (Y, τ) bir topolojik vektör uzayı olsun. Eğer her $g \in Y'$ için

(i) gf fonksiyoneli μ -integrallenebilir

(ii) $g(\mathbb{W}(f)) = \int gf d\mu$ olacak biçimde Y uzayının $\mathbb{W}(f)$ vektörü varsa f fonksiyonuna zayıf integrallenebilirdir denir ve

$$\int_H f d\mu := \mathbb{W}(f)$$

vektörüne f fonksiyonunun Pettis integrali denir (Pugachev ve Sinitsyn 1999).

Uyarı 2.2.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı ve $f \in X$ olsun. f fonksiyonunun Bochner integrallenebilir ise Pettis integrallenebilirdir ve bu iki integral çakışık (Pugachev ve Sinitsyn 1999).

3. NORMLU UZAYLARDA ZAYIF İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Toplanabilme teorisi sayesinde bir dizi ıraksak bile olsa bu diziye bir limit değeri karşılık getirilebilir. Literatürde en çok kullanılan toplanabilme metotlarından biri matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklıktır. Klasik versiyonları baz alarak istatistiksel yakınsaklığın birçok versiyonu elde edilmiş ve çalışmalar yapılmıştır (Fridy ve Orhan 1993, Kostyrko vd. 2000). Regüler ve negatif olmayan matris yardımıyla, skaler terimli diziler için A -istatistiksel yakınsaklık ve A -kuvvetli toplanabilme kavramları elde edilmiş ve aralarındaki bağlantılar incelenmiştir (Connor 1988, Demirci 1996).

Tezin bu bölümünde normlu uzaylarda değer alan diziler için istatistiksel yakınsaklığın yeni bir versiyonunu tanımlayacağız. Öyle ki; öncelikle bir normlu uzayda zayıf A -istatistiksel yakınsaklık kavramını vereceğiz ve bu kavramın lineer yapıya sahip olduğunu göstereceğiz. Daha sonra zayıf topolojide karşılığı olduğunu ispat edeceğiz. Yine normlu uzaylarda zayıf A -kuvvetli toplanabilme ve zayıf A -düzgün integrallenebilme kavramlarını tanımlayarak, bu kavramlar ve klasik versiyonlar arasındaki ilişkiyi ele alacağız.

3.1 Zayıf A -istatistiksel Yakınsaklık

Connor (2000) bir normlu uzay üzerinde zayıf istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlayarak, zayıf istatistiksel yakınsaklığın bazı versiyonlarının oluşturulmasına zemin hazırlamıştır. Bhardwaj ve Bala (2007) normlu uzaylarda zayıf istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiyi inceleyerek, normlu uzaylarda istatistiksel yakınsak olan her dizinin zayıf istatistiksel yakınsak olacağını ancak karşınının gerçekleşmediğini bir örnek ile açıklamışlardır.

Tanım 3.1.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |g(x_k - x)| \geq \varepsilon\}| = 0$$

oluyorsa $\{x_k\}$ dizisi x noktasına zayıf istatistiksel yakınsaktır denir ve $st^w - \lim x_k = x$ ile gösterilir (Connor 2000).

Aslında $\{x_k\}$ dizisinin x noktasına zayıf istatistiksel yakınsak olması, her $g \in X'$ için $(g(x_k - x))$ dizisinin sıfıra istatistiksel yakınsak olmasıdır.

$\varepsilon > 0$ için $K_\varepsilon = \{k : |g(x_k - x)| \geq \varepsilon\}$ dersek χ_{K_ε} bu kümenin karakteristik dizisi olmak üzere $st^w - \lim x_k = x$ olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $C_1 - \lim \chi_{K_\varepsilon}(k) = 0$ olmasıdır. ($\delta_{C_1}(K_\varepsilon) = 0$)

Normlu uzaylarda zayıf yakınsak her dizi zayıf istatistiksel yakınsak olup karşıtı her zaman doğru değildir. Bunun için Bhardwaj ve Bala (2007) tarafından verilen aşağıdaki örneği inceleyebiliriz.

Örnek 3.1.1 $\{x_k\} \in l_p$ ($1 < p < \infty$) dizisi

$$x_j^{(k)} = \begin{cases} m & , \quad j \leq k, k = m^2 \\ \frac{1}{k} & , \quad j \leq k, k \neq m^2 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

ile tanımlansın. $k \neq m^2$ ve $g \in l'_p$ için $|g(x_k)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{(k)} y_j \right|$ olacak biçimde bir tek $y \in l_q$ dizisi vardır. Hölder eşitsizliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} |g(x_k)| &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j^{(k)} y_j \right| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(k)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{k^p} \right)^{\frac{1}{p}} M^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\frac{M}{k} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

yazılarak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |g(x_k)| = 0$$

bulunur. Lemma 2.1.2 'den $st - \lim g(x_k) = 0$ gerçeklenir ve böylece $st^w - \lim x_k = 0$ elde edilir.

Şimdi $k = m^2$ için l^p uzayında $\{x_k\} \in l^p$, $g_1(x_k) = x_1^{(k)}$ ile tanımlı g_1 fonksiyoneli düşünelim. Açıktır ki

$$g_1(x_k) = x_1^{(k)} = \sqrt{k}$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_1(x_k) = \infty$$

olup, $\{x_k\}$ dizisi zayıf yakınsak değildir (Bhardwaj ve Bala 2007).

Bu bilgiler doğrultusunda, regüler ve negatif olmayan toplanabilme matrisi yardımıyla, normlu uzaylarda zayıf istatistiksel yakınsaklık kavramının genelleştirmesini sağlayacağız. Üstelik tanımlayacağımız bu yeni yakınsaklık, aynı zamanda A -istatistiksel yakınsaklığı da genelleştirir.

Tanım 3.1.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi, $x \in X$ ve $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |g(x_k - x)| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa $\{x_k\}$ dizisi x noktasına zayıf A -istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A^w - \lim x_k = x$ ile gösterilir.

Açıkça görülüyor ki zayıf A -istatistiksel yakınsaklık tanımında A matrisi yerine Cesàro matrisi alınırsa zayıf istatistiksel yakınsaklık elde edilir.

Şimdi A -istatistiksel yakınsaklığın zayıf A -istatistiksel yakınsaklık için yeterli olduğunu gösterelim.

Teorem 3.1.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi ve $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer $\{x_k\}$ dizisi x vektörüne A -istatistiksel yakınsak ise aynı noktaya zayıf A -istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\varepsilon > 0$ ve $g \neq \theta \in X'$ verilsin.

$$|g(x_k - x)| \leq \|g\| \|x_k - x\|$$

eşitsizliğinden

$$\{k : |g(x_k - x)| \geq \varepsilon\} \subset \left\{k : \|x_k - x\| \geq \frac{\varepsilon}{\|g\|}\right\} \quad (3.1)$$

elde edilir. A matrisi negatif olmayan toplanabilme matrisi olduğundan, (3.1) uyarınca

$$0 \leq \sum_{k: |g(x_k - x)| \geq \varepsilon} a_{nk} < \sum_{k: \|x_k - x\| \geq \frac{\varepsilon}{\|g\|}} a_{nk}$$

yazabiliriz.

$\{x_k\}$ dizisinin x noktasına A -istatistiksel yakınsaklığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |g(x_k - x)| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

bulunur. ■

Yukarıdaki teoremin karşıtı doğru değildir. Yani zayıf A -istatistiksel yakınsak olduğu halde, A -istatistiksel yakınsak olmayan diziler mevcuttur. Zayıf A -istatistiksel yakınsaklık tanımında A matrisi yerine Cesàro matrisi alınırsa zayıf istatistiksel yakınsaklığın elde edileceğini söylemiştik. Dolayısıyla teoremin karşıt örneği için, Bhardwaj ve Bala tarafından verilen aşağıdaki örneği bizler de kullanabiliriz.

Örnek 3.1.2 l_p ($1 < p < \infty$) uzayındaki $\{x_k\}$ dizisi

$$x_k = x_j^{(k)} = \begin{cases} m & , \quad j \leq k, k = m^2 \\ 0 & , \quad j > k, k = m^2 \\ 1 & , \quad j = k, k \neq m^2 \\ 0 & , \quad j \neq k, k \neq m^2 \end{cases}$$

ile tanımlansın. $\{x_k\}$ dizisi sıfıra istatistiksel yakınsak değildir ancak sıfıra zayıf istatistiksel yakınsaktır (Bhardwaj ve Bala 2007).

Teorem 3.1.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$, X uzayında birer dizi, $x, y \in X$ ve $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. O halde

- (i) $st_A^w - \lim x_k = x$ ve $st_A^w - \lim y_k = y$ ise $st_A^w - \lim (x_k + y_k) = x + y$
- (ii) α bir skaler olmak üzere $st_A^w - \lim x_k = x$ ise $st_A^w - \lim \alpha x_k = \alpha x$ gerçekleşir.

İspat. *i)* Kabul edelim ki $\{x_k\}$ ve $\{y_k\}$ dizileri sırasıyla x ve y vektörlerine zayıf A -istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda her $\varepsilon \geq 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\delta_A \left(\left\{ k : |g(x_k - x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) = 0 \text{ ve } \delta_A \left(\left\{ k : |g(y_k - y)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) = 0 \quad (3.2)$$

gerçeklenir. g fonksiyonelinin sürekliliğinden,

$$|g((x_k + y_k) - (x + y))| = |g(x_k + y_k) - g(x + y)| \leq |g(x_k - x)| + |g(y_k - y)|$$

yazabiliriz. Buradan

$$\begin{aligned} \delta_A(\{k : |g((x_k + y_k) - (x + y))| \geq \varepsilon\}) &\leq \delta_A \left(\left\{ k : |g(x_k - x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) \\ &+ \delta_A \left(\left\{ k : |g(y_k - y)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\} \right) \end{aligned}$$

bulunur ve (3.2) gereğince,

$$\delta_A(\{k : |g((x_k + y_k) - (x + y))| \geq \varepsilon\}) = 0$$

gerçeklenir.

ii) $\varepsilon > 0$ sayısı, α skaleri ve $g \in X'$ fonksiyoneli verilsin.

$\alpha = 0$ için ispat aşıkardır.

$\alpha \neq 0$ olsun. g fonksiyonelinin sürekliliğinden,

$$\{k : |g(\alpha x_k - \alpha x)| \geq \varepsilon\} = \{k : |g(x_k - x)| \geq \frac{\varepsilon}{|\alpha|}\}$$

elde edilir. Buradan ve $\{x_k\}$ dizisi x vektörüne zayıf A -istatistiksel yakınsak olduğundan $\{\alpha x_k\}$ dizisinin αx vektörüne zayıf A -istatistiksel yakınsak olduğu bulunur. ■

Topolojik uzay kavramının ortaya çıkmasından sonra pek çok matematiksel teori ortaya atılmıştır. Bunlardan bazıları topolojik vektör uzayları ve normlu uzaylar üzerinde tanımlı zayıf topolojilerdir. Şimdi zayıf A -istatistiksel yakınsaklığın, zayıf topolojideki A -istatistiksel yakınsaklık ile çakışık olduğunu gösterelim. Böylece zayıf istatistiksel yakınsaklık kavramı zayıf topolojinin özellikleriyle ilişkilendirileceğinden, topolojik vektör uzaylarında zayıf istatistiksel yakınsaklık çalışırken yararlı olacaktır.

Teorem 3.1.3 X bir topolojik vektör uzayı, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi $x \in X$ ve $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda $st_A^w - \lim x_k = x$ olması için gerek ve yeter koşul zayıf topolojide $st_A - \lim x_k = x$ olmasıdır.

İspat. $st_A^w - \lim x_k = x$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |g(x_k - x)| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0 \quad (3.3)$$

gerçeklenir. Şimdi $x \in U$ olacak biçimde keyfi bir U zayıf açık kümesi alalım. Bu durumda

$$U = U(x, g_1, g_2, \dots, g_r, \varepsilon)$$

olacak biçimde bazı $r \in \mathbb{N}$ ve $g_1, g_2, \dots, g_r \in X'$ ve $\varepsilon > 0$ vardır. Burada

$$U(x, g_1, g_2, \dots, g_r, \varepsilon) =: \{y \in X : |g_i(y) - g_i(x)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, r\} \text{ 'dir.}$$

Eğer $x_k \notin U$ ise $|g_{i_0}(x_k) - g_{i_0}(x)| \geq \varepsilon$ olacak biçimde $i_0 \in \{1, 2, 3, \dots, r\}$ vardır. Diğer yandan (3.3) gereğince,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |g_{i_0}(x_k) - g_{i_0}(x)| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0 \quad (3.4)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$0 \leq \sum_{k: x_k \notin U} a_{nk} \leq \sum_{k: |g_{i_0}(x_k) - g_{i_0}(x)| \geq \varepsilon} a_{nk}$$

olup (3.4) gereğince,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_k \notin U} a_{nk} = 0$$

gerçeklenir. Bu da bize zayıf topolojide $\{x_k\}$ dizisinin x vektörüne A -istatistiksel yakınsak olduğunu söylemektedir.

Karşıt olarak; $x \in U$ olacak biçimde U zayıf açık kümesi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: x_k \notin U} a_{nk} = 0 \quad (3.5)$$

olsun. $g \in X'$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in U_g$ olacak biçimde keyfi bir

$$U_g = \{y \in X : |g(y) - g(x)| < \varepsilon\}$$

açık kümesini dikkate alalım. Bu durumda

$$\sum_{k: x_k \notin U_g} a_{nk} = \sum_{k: |g(x_k) - g(x)| \geq \varepsilon} a_{nk}$$

olup (3.5) uyarınca

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |g(x_k) - g(x)| \geq \varepsilon} a_{nk} = 0$$

elde ederiz. Yani $\{x_k\}$ dizisi x vektörüne zayıf A -istatistiksel yakınsaktır. ■

3.2 Zayıf A -kuvvetli Toplanabilirlik

Bu bölümde öncelikle bir normlu uzayda zayıf A -kuvvetli toplanabilme kavramı tanımlanıp, sınırlı diziler uzayında zayıf A -istatistiksel yakınsaklık ile denkliği gösterilecektir.

Tanım 3.2.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi, $x \in X$ ve $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer her $g \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| |g(x_k - x)| = 0$$

oluyorsa $\{x_k\}$ dizisi x vektörüne zayıf A -kuvvetli toplanabilirdir denir.

Teorem 2.1.2' de bahsettiğimiz üzere Connor, A -kuvvetli toplanabilirliğin karakterizasyonlarından birini elde etmiştir. Öyle ki sınırlı diziler uzayı üzerinde A -kuvvetli toplanabilme, A -istatistiksel yakınsaklığa denktir. Burada, benzer karakterizasyonun zayıf A -kuvvetli toplanabilme için de geçerli olup olmadığı sorusu düşünülebilir. Aşağıdaki teorem ile bu duruma açıklık getirebiliriz.

Teorem 3.2.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi, $x \in X$ ve $A = (a_{nk})$ matrisi negatif olmayan regüler bir matris olsun. O halde

(i) Bir $\{x_k\}$ dizisi x vektörüne zayıf A -kuvvetli toplanabilir ise aynı değere zayıf A -istatistiksel yakınsaktır.

(ii) $\{x_k\}$ sınırlı bir dizi ve $st_A^w - \lim x_k = x$ ise $\{x_k\}$ dizisi x vektörüne zayıf A -kuvvetli toplanabilirdir.

İspat.

i) Kabul edelim ki, $\{x_k\}$ dizisi x vektörüne zayıf A -kuvvetli toplanabilir olsun. O halde her $g \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g(x_k - x)| = 0$$

gerçeklenir. Her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\begin{aligned}
\sum_k a_{nk} |g(x_k - x)| &= \sum_{k: |g(x_k - x)| < \varepsilon} a_{nk} |g(x_k - x)| + \sum_{k: |g(x_k - x)| \geq \varepsilon} a_{nk} |g(x_k - x)| \\
&\geq \sum_{k: |g(x_k - x)| \geq \varepsilon} a_{nk} |g(x_k - x)| \\
&\geq \varepsilon \sum_{k: |g(x_k - x)| \geq \varepsilon} a_{nk} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

olduğundan $st_A^w - \lim x_k = x$ gerçekleşir.

ii) Kabul edelim ki $\{x_k\}$ dizisi sınırlı ve $st_A^w - \lim x_k = x$ olsun. O halde $\sup_k |x_k| < \infty$ olur. Ayrıca her $g \in X'$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g(x_k - x)| &= \sum_{k: |g(x_k - x)| < \varepsilon} a_{nk} |g(x_k - x)| + \sum_{k: |g(x_k - x)| \geq \varepsilon} a_{nk} |g(x_k - x)| \\
&\leq \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} + \|g\| \sup_k \|x_k - x\| \sum_{k: |g(x_k - x)| \geq \varepsilon} a_{nk}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Kabulümüzden ve A matrisinin regülerliğinden $\{x_k\}$ dizisinin x vektörüne zayıf A -kuvvetli toplanabilir olduğu elde edilir. ■

Uyarı 3.2.1 $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olmak üzere her $g \in X'$ için

$$|g(x_k - x)| \leq \|g\| \|x_k - x\|$$

eşitsizliğinden $\{x_k\}$ dizisi x vektörüne A -kuvvetli toplanabilir ise zayıf A -kuvvetli toplanabildir.

3.3 Zayıf A -düzgün İntegrallenebilirlik

A -kuvvetli toplanabilirliğin literatürde birçok karakterizasyonu bulunmaktadır. Bunlardan birinin sınırlı diziler için verildiğini söylemiştik. Bir diğer karakterizasyon ise Khan ve Orhan (2010) tarafından verilmiştir ve sınırlılık şartı yerine A -düzgün integrallenebilme kavramının getirilebileceği gösterilmiştir. Böylece sınırlılık koşulu ile verilen Teorem 2.1.2'yi hafifleterek, A -kuvvetli toplanabilme kavramını karakterize etmişlerdir.

Bu bölümde ise normlu uzaylarda değer alan dizilerin zayıf A -düzgün integrallenebilmesini tanımlayıp, zayıf A -kuvvetli toplanabilirliğini karakterize edeceğiz. Öncelikle Khan ve Orhan tarafından reel terimli diziler için verilen A -düzgün integrallenebilme kavramını hatırlayalım.

Tanım 3.3.1 $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olmak üzere

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k: |x_k| \geq c} |a_{nk}| |x_k| = 0$$

oluyorsa $\{x_k\}$ dizisine A -düzgün integrallenebilirdir denir (Khan ve Orhan 2010).

Şimdi normlu uzaylarda değer alan diziler için toplanabilme matrisi yardımıyla zayıf A -düzgün integrallenebilme kavramını tanımlayalım. Ayrıca daha önce verdiğimiz zayıf A -kuvvetli toplanabilme kavramını karakterize edelim.

Tanım 3.3.2 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olmak üzere her $g \in X'$ için

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \sup_n \sum_{k: |g(x_k)| \geq c} |a_{nk}| |g(x_k)| = 0$$

oluyorsa $\{x_k\} \in X$ dizisine zayıf A -düzgün integrallenebilirdir denir.

Teorem 3.3.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $A = (a_{nk}) \in \mathbb{M}^+$ bir toplanabilme matrisi ve $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi olsun. Buna göre, aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) $\{x_k\}$ dizisi $x = \theta$ vektörüne zayıf A -kuvvetli toplanabilirdir.
- (ii) $\{x_k\}$ dizisi zayıf A -düzgün integrallenebilirdir ve $x = \theta$ vektörüne zayıf A -istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\{x_k\}$ dizisi $x = \theta$ noktasına zayıf A -kuvvetli toplanabilir olsun. Bu durumda her $g \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g(x_k)| = 0 \quad (3.6)$$

gerçeklenir. Her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$0 \leq \sum_{k:|g(x_k)|>\varepsilon} a_{nk} = \sum_{k:\left|\frac{g(x_k)}{\varepsilon}\right|>1} a_{nk} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g(x_k)|$$

olup, (3.6) uyarınca $st_A^w - \lim x_k = \theta$ gerçekleşir. Şimdi $\varepsilon > 0$ ve $g \in X'$ olsun. Her $n \geq N$ için

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g(x_k)| < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $N \in \mathbb{N}$ vardır. Diğer yandan her $n = 1, 2, \dots, N - 1$ için

$$\sum_{k>K} a_{nk} |g(x_k)| < \varepsilon$$

olacak şekilde yeterince büyük $K \in \mathbb{N}$ sayısı seçilebilir.

$C > \max \{|g(x_1)|, |g(x_2)|, \dots, |g(x_K)|\}$ olduğunda

$$\sup_n \sum_{k:|g(x_k)|>C} a_{nk} |g(x_k)| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Dolayısıyla $\{x_k\}$ dizisi zayıf A -düzgün integrallenebilirdir.

Şimdi $\{x_k\}$ dizisi zayıf A -düzgün integrallenebilir ve $st_A^w - \lim x_k = \theta$ olsun. Bu durumda her $g \in X'$, her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için

$$\begin{aligned} \limsup_n \sum_{k:|g(x_k)| \leq t} a_{nk} |g(x_k)| &\leq \limsup_n \sum_{k:\varepsilon < |g(x_k)| \leq t} a_{nk} |g(x_k)| \\ &\quad + \limsup_n \sum_{k:|g(x_k)| \leq \min(t, \varepsilon)} a_{nk} |g(x_k)| \\ &\leq t \limsup_n \sum_{k:|g(x_k)| > \varepsilon} a_{nk} + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned} \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) eşitsizliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \limsup_n \sum_k a_{nk} |g(x_k)| &\leq \limsup_n \sum_{k:|g(x_k)| \leq t} a_{nk} |g(x_k)| + \limsup_n \sum_{k:|g(x_k)| > t} a_{nk} |g(x_k)| \\ &\leq \varepsilon + \limsup_n \sum_{k:|g(x_k)| > t} a_{nk} |g(x_k)| \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca $\limsup x \leq \sup x$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve her $t > 0$ için

$$\limsup_n \sum_k a_{nk} |g(x_k)| \leq \varepsilon + \sup_n \sum_{k:|g(x_k)| > t} a_{nk} |g(x_k)|$$

elde edilir. Her iki tarafın $t \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\limsup_n \sum_k a_{nk} |g(x_k)| \leq \varepsilon + \limsup_{t \rightarrow \infty} \sum_n \sum_{k: |g(x_k)| > t} a_{nk} |g(x_k)|$$

bulunur. O halde $\{x_k\}$ dizisi zayıf A -düzgün integrallenebilir olduğundan

$$\limsup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g(x_k)| \leq \varepsilon$$

olup, ε keyfi olduğundan her $g \in X'$ için

$$\limsup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g(x_k)| = 0$$

gerçeklenir. Dolayısıyla her $g \in X'$ için

$$\lim_n \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g(x_k)| = 0$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Uyarı 3.3.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olmak üzere her $g \in X'$ için

$$|g(x_k - x)| \leq \|g\| \|x_k - x\|$$

eşitsizliğinden $\{x_k\}$ dizisi A -düzgün integrallenebilir ise zayıf A -düzgün integrallenebilir-dir.

4. TOPOLOJİK VEKTÖR UZAYLARDA A -DÜZGÜN İNTEGRALLENEBİLİRLİK

Bu bölümde (H, Ω, P) olasılık uzayı olmak üzere H uzayı üzerinde tanımlanan rasgele vektör dizileri için Pettis integrali yardımıyla Pettis A -istatistiksel yakınsaklık ve Pettis A -kuvvetli toplanabilme kavramları tanımlanacak ve aralarındaki ilişki araştırılacaktır. Ayrıca rasgele vektör dizileri için A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilme kavramı verilip, düzgün integrallenebilmenin literatürdeki versiyonları ve bu yeni kavramların birbirleriyle olan ilişkisi ele alınacaktır.

4.1 Pettis A -istatistiksel Yakınsaklık

İstatistiksel yakınsaklık kavramı matematiğin birçok alanında aktif olarak kullanılmaktadır. Skaler terimli diziler için verilen temel tanım zamanla fonksiyon dizileri (Bilalov ve Nazarova 2015) ile rasgele değişkenlerin dizilerine (Ghosal 2013) genelleştirilmiştir. Bu versiyonlarda da genel olarak reel fonksiyonlar göz önüne alınmıştır. Vektör değerli fonksiyonlar göz önüne alındığında ise norm fonksiyonu yardımıyla reel fonksiyonlar elde edilmiştir. Ünver ve Uluçay (2017) rasgele vektör dizileri için vektör integral olan Bochner integralini göz önüne alarak A -istatistiksel yakınsaklık kavramının yeni bir versiyonunu tanımlamışlardır.

Tanım 4.1.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı, $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi, f Bochner integrallenebilir bir rasgele vektör ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer $\{\mathbb{B}f_k\}$ vektörlerin dizisi $\mathbb{B}f$ vektörüne norm topolojisinde A -istatistiksel yakınsak ise; yani her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: \|\mathbb{B}(f_k - f)\| > \varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa $\{f_k\}$ dizisi f rasgele vektörüne Bochner A -istatistiksel yakınsaktır denir (Ünver ve Uluçay 2017).

Rasgele vektör dizileri için bir diğer vektör integrali olan Pettis integrali yardımıyla istatistiksel yakınsaklığın yeni bir versiyonu tanımlanabilir. Topolojik vektör uzayında değer alan rasgele vektörlerin dizileri için verilen bu kavram aynı zamanda Bochner A -istatistiksel yakınsaklığı gerektirir.

Tanım 4.1.2 X bir topolojik vektör uzayı, $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Pettis integrallenebilir bir dizisi, f Pettis integrallenebilir bir rasgele vektör ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer $\{\mathbb{W}f_k\}$ vektörlerin dizisi $\mathbb{W}f$ vektörüne zayıf topolojide A -istatistiksel yakınsak ise; yani her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |g(\mathbb{W}(f_k - f))| > \varepsilon} a_{nk} = 0$$

gerçekleniyorsa $\{f_k\}$ dizisi f rasgele vektörüne Pettis A -istatistiksel yakınsaktır denir.

Teorem 4.1.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı, $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi, f Bochner integrallenebilir bir rasgele vektör ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi olsun. $\{f_k\}$ dizisi Bochner A -istatistiksel yakınsak ise Pettis A -istatistiksel yakınsaktır.

İspat. $\{f_k\}$ dizisi f rasgele vektörüne Bochner A -istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: \|\mathbb{B}(f_k - f)\| > \varepsilon} a_{nk} = 0 \quad (4.1)$$

gerçeklenir. $g \neq \theta \in X'$ alalım. $\{f_k\}$ dizisi ve f vektörü Bochner integrallenebilir olduğunda Pettis integrallenebilir olup bu integraller çakışıktır. Ayrıca g fonksiyonelinin sürekliliğinden

$$|g\mathbb{W}(f_k - f)| \leq \|g\| \|\mathbb{W}(f_k - f)\| = \|g\| \|\mathbb{B}(f_k - f)\|$$

yazılır ve buradan $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\{k : |g\mathbb{W}(f_k - f)| > \varepsilon\} \subset \left\{k : \|\mathbb{B}(f_k - f)\| > \frac{\varepsilon}{\|g\|}\right\}$$

elde edilir. A toplanabilme matrisi negatif olmadığından,

$$\sum_{k: |g(\mathbb{W}(f_k - f))| > \varepsilon} a_{nk} \leq \sum_{k: \|\mathbb{B}(f_k - f)\| > \frac{\varepsilon}{\|g\|}} a_{nk}$$

yazılabilir. (4.1) gereğince $\{f_k\}$ dizisi Pettis A -istatistiksel yakınsaktır. ■

Tanım 4.1.3 X bir topolojik vektör uzayı, $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Pettis integrallenebilir bir dizisi, f Pettis integrallenebilir bir rasgele vektör ve $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer $\{\mathbb{W}f_k\}$ vektörlerin dizisi $\mathbb{W}f$ vektörüne zayıf A -kuvvetli toplanabilir ise ; yani her $g \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| |g(\mathbb{W}(f_k - f))| = 0$$

oluyorsa $\{f_k\}$ dizisi f rasgele vektörüne Pettis A -kuvvetli toplanabilirdir denir.

Tanım 4.1.4 X bir topolojik vektör uzayı, $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Pettis integrallenebilir bir dizisi, f rasgele vektörü Pettis integrallenebilir ve $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer her $g \in X'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \int_H |g(f_k - f)| dP = 0$$

oluyorsa $\{f_k\}$ dizisi f rasgele vektörüne Lebesgue-Pettis A -kuvvetli toplanabilirdir denir.

Bu tanımlardan hemen belirtebiliriz ki; her $g \in X'$ fonksiyoneli için

$$|g\mathbb{W}f| \leq \int |gf| dP$$

gerçeklendiğinden, f rasgele vektörü Lebesgue-Pettis A -kuvvetli toplanabilir ise Pettis A -kuvvetli toplanabilirdir.

Örnek 4.1.1 $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. $J = [0, 1]$, $B(J)$, J aralığının Borel σ -cebiri ve λ , Lebesgue ölçüsü olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için $\{f_k\}$ dizisi $f_k : (J, B(J), \lambda) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$,

$$f_k(s) = x_k$$

ile ve $f : (J, B(J), \lambda) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$ da

$$f(s) = x$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $g \in X'$ için

$$|g^{\mathbb{W}}(f_k - f)| = \int_J |g(f_k - f)| dP = |g(x_n - x)|$$

eşitliğinden rasgele vektörlerin bir dizisi için sırasıyla klasik versiyondaki zayıf A -istatistiksel yakınsaklık ve zayıf A -kuvvetli toplanabilme kavramlarının Pettis A -istatistiksel yakınsaklık ve Pettis A -kuvvetli toplanabilmeye denk olduğu görülür.

4.2 Pettis A -sınırlı Düzgün İntegrallenebilirlik

Düzgün integrallenebilme kavramı ilk olarak rasgele değişkenlerin sınıfı için verilmiş ve olasılık teorisi ile ölçü teorisinin temel kavramlarından biri haline gelmiştir. Özellikle rasgele değişkenlerin dizileri için düzgün integrallenebilme kavramı önemli teoremlerin oluşmasına zemin hazırlamıştır. Rasgele değişkenlerin bir $\{f_n\}$ dizisi düzgün integrallenebilir ise bazı ek koşullar altında $\{f_n\}$ dizisinin beklenen değerinin limiti, limitinin beklenen değerine eşittir. Bu özellik olasılık teorisinde Vitali Yakınsaklık Teoremi, Baskın Yakınsaklık Teoremi gibi limit teoremlerinin kurulmasında önemlidir. Ayrıca olasılık teorisinde rasgele değişkenler için olasılıkta yakınsaklık ve ortalamada yakınsaklık iki önemli yakınsaklık türüdür. Ortalamada yakınsama olasılıkta yakınsama için yeterli iken karşısı için yine düzgün integrallenebilirlik gereklidir. Özetle, düzgün integrallenebilme kavramı, olasılık teorisinde, limitlerin yer değiştirmesinde, rasgele değişkenlerin dizileri için yakınsama sonuçlarının oluşturulmasında, beklenen değer hesaplarında güvenilir sonuçlar sağlamak için önemli yere sahiptir.

Düzgün integrallenebilme teorisi üzerinde yapılan çalışmalar ilerledikçe rasgele değişkenler yerine rasgele vektörlerin dizileri kullanılmıştır. Rasgele vektör dizileri için düzgün integrallenebilmeden daha kuvvetli kavram olan kompakt düzgün integrallenebilme kavramı tanıtılmıştır. Ayrılabilir bir Banach uzayında rasgele vektör dizilerinin kompakt düzgün

integrallenebilme kavramı, düzgün integrallenebilme kavramının doğal bir genişlemesidir. Şimdi bu tanımı hatırlatalım:

Tanım 4.2.1 $(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_k \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan kompakt bir $K \subset X$ altkümesi varsa $\{f_k\}$ dizisine kompakt düzgün integrallenebilirdir denir (Hoffmann-Jørgensen ve Pisier 1976, Daffer ve Taylor 1982).

1997 yılında ise Ordóñez Cabrera ayrılabilir Banach uzaylarında toplanabilme matrisi yardımıyla A -kompakt düzgün integrallenebilme kavramını tanımlamış ve rasgele vektörlerin ağırlıklı toplamalarının ortalamadaki yakınsaklığını araştırmıştır.

Tanım 4.2.2 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı olmak üzere $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin bir dizisi olsun. $A = (a_{nk})$ matrisi $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$ olacak biçimde bir toplanabilme matrisi olmak üzere eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| \int_{f_k \notin K} \|f_k\| dP < \varepsilon$$

koşulunu sağlayan kompakt bir $K \subset X$ altkümesi varsa $\{f_k\}$ dizisine A -kompakt düzgün integrallenebilirdir denir (Ordóñez Cabrera 1997).

Ancak tüm bu tanımlarda norm fonksiyonu yardımıyla reel fonksiyonlar elde edilip Lebesgue integrali kullanılmıştır. Godet-Thobie ve Satco (2006) ayrılabilir Banach uzaylarında değer alan rasgele vektörlerin dizileri için Pettis integral yardımıyla Pettis düzgün integrallenebilme kavramını ve Ünver ve Uluçay (2017) ise Bochner integrali yardımıyla kurulan A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilme kavramını tanımlamışlardır. Şimdi sırasıyla bu kavramları hatırlayalım.

Tanım 4.2.3 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı, $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Pettis integrallenebilir bir dizisi olsun. $\varepsilon > 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $P(F) \leq \delta$ olduğunda

$$\|\mathbb{W}(f_k \chi_F)\| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta > 0$ varsa $\{f_k\}$ dizisine Pettis düzgün integrallenebilirdir denir. Bu tanım ayrıca şu şekilde de verilebilir. $\varepsilon > 0$ için $P(F) \leq \delta$ olduğunda

$$\sup_{k \in \mathbb{N}, h \in B'} \int_H |h f_k \chi_F| dP < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta > 0$ varsa $\{f_k\}$ dizisine Pettis düzgün integrallenebilirdir denir. Burada B' , X uzayının X' sürekli dual uzayının kapalı birim yuvarıdır (Godet-Thobie ve Satco 2006).

Tanım 4.2.4 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı, $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Bochner integrallenebilir bir dizisi ve $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \|\mathbb{B} f_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| < \varepsilon$$

olacak biçimde kompakt bir $K \subset X$ altkümesi varsa $\{f_k\}$ dizisine A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilirdir denir (Ünver ve Uluçay 2017).

Biz ise bu tezde topolojik vektör uzaylarında Pettis integrali yardımıyla A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilme kavramını tanımlayacağız. Daha sonra bu kavram ile Pettis düzgün integrallenebilme ve A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilme kavramları arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz. Ayrıca, A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilme kavramı için bazı yeter ve sonrasında gerek koşulları araştıracağız.

Tanım 4.2.5 X bir topolojik vektör uzayı, $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Pettis integrallenebilir bir dizisi ve $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \left| g \left(\mathbb{W} \left(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}} \right) \right) \right| < \varepsilon$$

ve $g(K_g) \subset \mathbb{R}$ sınırlı olacak biçimde bir $K_g \subset X$ altkümesi varsa $\{f_k\}$ dizisine A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilirdir denir.

Aşağıdaki iki önerme sırasıyla, A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilme kavramının, Pettis düzgün integrallenebilme ve A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilme kavramlarının her ikisinin de bir genelleştirmesi olduğunu söylemektedir.

Önerme 4.2.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı, $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Pettis integrallenebilir bir dizisi ve $A = (a_{nk})$ birim matris olsun. Eğer $\{f_k\}$ dizisi Pettis düzgün integrallenebilir ve $\sup_{k \in \mathbb{N}, h \in \mathcal{B}'} \int_H |hf_k| dP < \infty$ ise, $\{f_k\}$ dizisi A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilirdir.

İspat. $\varepsilon > 0$, $g \neq \theta \in X'$ ve $\sup_{k \in \mathbb{N}, h \in \mathcal{B}'} \int_H |hf_k| dP = M < \infty$ olsun. $l := \frac{g}{\|g\|}$ ile tanımlarsak, $l \in \mathcal{B}'$ olur. $C > 0$ keyfi bir sayı olmak üzere

$$D_k(C) := \{s \in H : |lf_k| > C\}$$

kümesini ele alalım. Chebyshev eşitsizliğinden,

$$P(|lf_k| > C) \leq \frac{\int_H |lf_k| dP}{C} \leq \frac{1}{C} \sup_{k \in \mathbb{N}, h \in \mathcal{B}'} \int_H |hf_k| dP = \frac{M}{C}$$

gerçeklenir. Eğer $C > \frac{M}{\delta}$ ise $P(D_k(C)) < \delta$ olup, $\{f_k\}$ dizisi Pettis düzgün integrallenebilir olduğundan,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}, h \in \mathcal{B}'} \int_H |hf_k| \chi_{D_k(C)} dP < \frac{\varepsilon}{\|g\|}$$

bulunur. $l \in \mathcal{B}'$ olduğundan

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_H |lf_k| \chi_{D_k(C)} dP < \frac{\varepsilon}{\|g\|}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_H |gf_k \chi_{D_k(C)}| dP < \varepsilon \quad (4.2)$$

elde edilir. Diğer yandan $K_g := g^{-1}[-C, C]$ kümesini tanımlarsak,

$$\left| g^{\mathbb{W}} \left(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}} \right) \right| = \left| \int_H \left(gf_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}} \right) dP \right| \leq \int_H |gf_k \chi_{D_k(C)}| dP \quad (4.3)$$

buluruz. (4.2) ve (4.3) uyarınca

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left| g \left(\mathbb{W}(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}}) \right) \right| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Üstelik $g(K_g) \subset [-C, C]$ sınırlı bir kümedir. O halde $\{f_k\}$ dizisi A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilirdir. ■

Aşağıdaki teorem rasgele vektör dizilerinin A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilmesi için gerekli koşulu vermektedir.

Teorem 4.2.1 $(X, \|\cdot\|)$ ayrılabilir bir Banach uzayı ve $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer $\{f_k\}$ dizisi H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilir bir dizisi ise A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilirdir.

İspat.

$g \neq \theta \in X'$ alalım. $\{f_k\}$ dizisi A -kompakt düzgün Bochner integrallenebilir olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \|\mathbb{B} f_k \chi_{\{f_k \notin K\}}\| < \frac{\varepsilon}{\|g\|}$$

olacak biçimde kompakt bir $K \subset X$ altkümesi vardır. g fonksiyonelinin sürekliliğinden ve $\{f_k\}$ Bochner integrallenebilir olduğunda Pettis integrallenebilir olup bu integraller çakışık olacağından

$$|g \mathbb{W}(f_k \chi_{\{f_k \notin K\}})| \leq \|g\| \|\mathbb{W}(f_k \chi_{\{f_k \notin K\}})\| = \|g\| \|\mathbb{B} f_k I_{\{f_k \notin K\}}\|$$

elde edilir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| |g(\mathbb{W}(f_k I_{\{f_k \notin K\}}))| \leq \|g\| \sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \|\mathbb{B} f_k I_{\{f_k \notin K\}}\| < \varepsilon$$

olacak biçimde $K \subset X$ kompakt kümesi vardır. K kümesi kompakt ve g sürekli olduğundan $g(K) \subset \mathbb{R}$ kompakttır. Dolayısıyla $g(K)$ kümesi sınırlıdır. Sonuç olarak $\{f_k\}$ dizisi A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilirdir. ■

Örnek 4.2.1 X normlu bir uzay $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi ve $x \in X$ olsun. $J = [0, 1]$, $B(J)$, J aralığının Borel σ -cebiri, λ , Lebesgue ölçüsü olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ için $\{f_k\}$ dizisi $f_k : (J, B(J), \lambda) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$, $f_k(s) = x_k$ ile tanımlansın. Ayrıca $A = (a_{nk})$ bir toplanabilme matrisi ve $\{x_k\}$ zayıf A -düzgün integrallenebilir bir dizi olsun. $g \in X'$ alalım. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $c \geq L$ olduğunda

$$\sup_n \sum_{k: |g(x_k)| > c} |g(x_k)| |a_{nk}| < \varepsilon$$

olacak biçimde $L(\varepsilon, g) = L > 0$ sayısı vardır. Şimdi $K_g = \{x \in X : |g(x)| \leq L_g\} \subset X$ kümesini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \left| g \mathbb{W} \left(f_k \chi_{f_k \notin K_g} \right) \right| &= \sup_n \sum_{k: |g(x_k)| > L} |a_{nk}| \int_J |g(x_k)| dP \\ &= \sup_n \sum_{k: |g(x_k)| > L} |a_{nk}| |g(x_k)| \lambda(J) \\ &= \sup_n \sum_{k: |g(x_k)| > L} |g(x_k)| |a_{nk}| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $g(K_g)$ sınırlı olduğundan rasgele vektörlerin $\{f_k\}$ dizisi için zayıf A -düzgün integrallenebilirlik ile A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilirlik denktir.

Şimdi topolojik vektör uzayında değer alan rasgele vektörlerin dizilerinin A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilmesi için gerekli koşullar ile yeterli koşulları vereceğiz.

Teorem 4.2.2 X bir topolojik vektör uzayı ve $\{f_k\}$, H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Pettis integrallenebilir bir dizisi olsun. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi ve her $s \in H$ için $f(s) = \theta$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçekleşir.

- (i) $\{f_k\}$ dizisi f rasgele vektörüne Pettis A -istatistiksel yakınsak ve A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilir ise yine f rasgele vektörüne Pettis A -kuvvetli toplanabilirdir.
- (ii) $\{f_k\}$ dizisi f rasgele vektörüne Pettis A -kuvvetli toplanabilir ise yine f rasgele vektörüne Pettis A -istatistiksel yakınsaktır.

İspat.

i) Kabul edelim ki $\{f_k\}$ dizisi $f = \theta$ rasgele vektörüne Pettis A -istatistiksel yakınsak ve A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilir olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\lim_n \sum_{k: |g\mathbb{W}f_k| > \frac{\varepsilon}{2}} a_{nk} = 0 \quad (4.4)$$

ve

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g\mathbb{W}(f_k \chi_{\{f_k \notin K\}})| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.5)$$

, $g(K_g) \subset \mathbb{R}$ sınırlı olacak biçimde bir $K_g \subset X$ altkümesi vardır. Diğer yandan her $\varepsilon > 0$ ve $g \in X'$ için g fonksiyonelinin lineerliğinden

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} |g\mathbb{W}(f_k)| a_{nk} &= \sum_{k: |g\mathbb{W}f_k| > \frac{\varepsilon}{2}} |g\mathbb{W}(f_k)| a_{nk} + \sum_{k: |g\mathbb{W}f_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}} |g\mathbb{W}(f_k)| a_{nk} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |g\mathbb{W}(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}})| a_{nk} \\ &\quad + \sum_{k: |g\mathbb{W}f_k| > \frac{\varepsilon}{2}} |g\mathbb{W}(f_k \chi_{\{f_k \in K_g\}})| a_{nk} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. $g(K_g)$ sınırlı küme olduğundan her $x \in K_g$ için $|g(x)| \leq M$ olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla her k için

$$\begin{aligned} |g\mathbb{W}(f_k \chi_{\{f_k \in K_g\}})| &= \left| \int g(f_k \chi_{\{f_k \in K_g\}}) dP(s) \right| \\ &\leq \int_{\{s: f_k(s) \in K_g\}} |g f_k| dP(s) \\ &\leq M \int_H dP(s) \\ &= M \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur. Şimdi (4.6), (4.7) eşitsizliklerinden her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} |g\mathbb{W}(f_k)| a_{nk} &\leq \sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g\mathbb{W}(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}})| \\ &\quad + M \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k: |g\mathbb{W}(f_k)| > \frac{\varepsilon}{2}} a_{nk} + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4.8)$$

yazılabilir. Diğer yandan (4.4), (4.5) eşitsizlikleri (4.8) eşitsizliğinde dikkate alınırsa her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} |g\mathbb{W}(f_k)| \leq \varepsilon$$

gerçeklenir. Bu da bize $\{f_k\}$ dizisinin $ff = \theta$ rasgele vektörüne Pettis A -kuvvetli toplanabilir olduğunu ispatlar.

ii) Kabul edelim ki $\{f_k\}$ dizisi $f = \theta$ rasgele vektörüne Pettis A -kuvvetli toplanabilir olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ ve her $g \in X'$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} |g^{\mathbb{W}}(f_k)| a_{nk} &\geq \sum_{k: |g^{\mathbb{W}}(f_k)| > \varepsilon} |g^{\mathbb{W}}(f_k)| a_{nk} + \sum_{k: |g^{\mathbb{W}}(f_k)| \leq \varepsilon} |g^{\mathbb{W}}(f_k)| a_{nk} \\ &\geq \sum_{k: |g^{\mathbb{W}}(f_k)| > \varepsilon} |g^{\mathbb{W}}(f_k)| a_{nk} \\ &> \varepsilon \sum_{k: |g^{\mathbb{W}}(f_k)| > \varepsilon} a_{nk} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$0 \leq \sum_{k: |g^{\mathbb{W}}(f_k)| > \varepsilon} a_{nk} \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k \in \mathbb{N}} |g^{\mathbb{W}}(f_k)| a_{nk}$$

gerçeklenir. Sonuç olarak $\{f_k\}$ dizisi f rasgele vektörüne Pettis A -istatistiksel yakınsaktır.

■

Teorem 4.2.3 X bir topolojik vektör uzayı ve $\{f_k\}$, H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Pettis integrallenebilir bir dizisi olsun. $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi ve her $s \in H$ için $f(s) = \theta$, ayrıca her k ve her $g \in X'$ için $g(f_k(H))$ kümesi sınırlı olsun. Eğer $\{f_k\}$ dizisi f rasgele vektörüne Lebesgue-Pettis A -kuvvetli toplanabilir ise yine f rasgele vektörüne Pettis A -istatistiksel yakınsaktır ve $\{f_k\}$ dizisi A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilirdir.

İspat.

Kabul edelim ki $\{f_k\}$ dizisi $f = \theta$ rasgele vektörüne Lebesgue-Pettis A -kuvvetli toplanabilir olsun. Bu durumda $\{f_k\}$ dizisi f rasgele fonksiyonuna Pettis A -kuvvetli toplanabilirdir ve Teorem 4.2.2' in *(ii)* gereğince $\{f_k\}$ dizisi Pettis A -istatistiksel yakınsaktır. $g \in X'$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. $\{f_k\}$ dizisi $f = \theta$ rasgele vektörüne Lebesgue-Pettis A -kuvvetli toplanabilir olduğundan her $n > N$ için

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} \int_H |g(f_k)| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.9)$$

olacak biçimde $N = N_g(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

$n = 1, 2, \dots, N$ için

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} \int_H |g(f_k)| dP < \infty$$

olduğundan $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$\sum_{k > M} a_{nk} \int_H |g(f_k)| dP < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.10)$$

olacak biçimde $M = M_g > 0$ sayısı vardır. Şimdi X uzayının $K_g = \bigcup_{k \leq M} f_k(H) \subset X$ altkümesini ele alalım.

$k = 1, 2, \dots, M$ için

$$\{s : f_k(s) \notin K_g\} = \emptyset$$

gerçeklenir. Böylece $n = 1, 2, \dots, N$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} \left| g \left(\mathbb{W} \left(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}} \right) \right) \right| &= \sum_{k > M} a_{nk} \left| g \left(\mathbb{W} \left(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}} \right) \right) \right| \\ &= \sum_{k > M} a_{nk} \left| \int_H \left(g \left(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}} \right) \right) dP \right| \\ &\leq \sum_{k > M} a_{nk} \int_H |g(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}})| dP \\ &= \sum_{k > M} a_{nk} \int_H |g(f_k)| \chi_{\{f_k \notin K_g\}} dP \\ &\leq \sum_{k > M} a_{nk} \int_H |g(f_k)| dP \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir.

Ayrıca (4.9) gereğince her $g \in X'$ için

$$\begin{aligned} \sup_{n > N} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} \left| g \left(\mathbb{W} \left(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}} \right) \right) \right| &\leq \sup_{n > N} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} \int_H |g(f_k)| \chi_{\{f_k \notin K_g\}} dP \\ &\leq \sup_{n > N} \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} \int_H |g(f_k)| dP \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

bulunur. (4.10), (4.11) ve (4.12) uyarınca her $g \in X'$ için

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} a_{nk} \left| g \left(\mathbb{W} \left(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}} \right) \right) \right| < \varepsilon$$

gerçeklenir.

Ayrıca her $k \in \mathbb{N}$ ve her $g \in X'$ için $g(f_k(H))$ kümesi sınırlı ve $K_g = \bigcup_{k \leq M} f_k(H) \subset X$ olduğundan

$$g(K_g) = g\left(\bigcup_{k \leq M} f_k(H)\right) = \bigcup_{k \leq M} g(f_k(H))$$

olup $g(K_g)$ kümesi sınırlıdır. Sonuç olarak $\{f_k\}$ dizisi A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilir. ■

Örnek 4.1.1, Örnek 4.2.1, Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.3' den aşağıdaki sonucu elde ederiz. Bu sonuç Teorem 3.2.1 ile çıkarılır.

Sonuç 4.2.1 X bir normlu uzay, $\{x_k\}$, X uzayında bir dizi, $x \in X$, $A = (a_{nk})$ negatif olmayan, regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Bu durumda $\{x_k\}$ dizisinin x vektörüne zayıf A -kuvvetli toplanabilir olması için gerek ve yeter koşul zayıf A -düzgün integrallenebilir ve yine x vektörüne zayıf A -istatistiksel yakınsak olmasıdır.

Aşağıdaki önerme sonlu boyutlu topolojik vektör uzaylarında değer alan rasgele vektör dizilerinin A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilmesi için yeter koşulu verir.

Önerme 4.2.2 X bir sonlu boyutlu topolojik vektör uzayı $\{f_k\}$, H uzayından X uzayına tanımlı rasgele vektörlerin Pettis integrallenebilir bir dizisi ve $A = (a_{nk})$ regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Eğer her $g \in X'$ için

$$(i) \sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \int_H |g(f_k)| < \infty$$

$$(ii) \text{ Her } \varepsilon > 0 \text{ için, } G_k \in \Sigma \text{ ve}$$

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| P(G_k) < \delta \quad (4.13)$$

olduğunda

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| |g(\mathbb{W}(f_k \chi_{G_k}))| < \varepsilon$$

olacak biçimde $\delta > 0$ mevcutsa $\{f_k\}$ dizisi A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilir.

İspat. (i) gereğince her $g \in X'$ için

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \int_H |g(f_k)| < T$$

olacak biçimde $T > 0$ sayısı vardır. $c > T/\delta$ sabitlersek Chebychev eşitsizliğinden,

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| P(|g(f_k)| > c) \leq \frac{\delta}{T} \sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \int_H |g(f_k)| dP < \delta \quad (4.14)$$

elde edilir. Şimdi $K_g = \{x \in X : |g(x)| \leq a\}$ kümesini göz önüne alalım. Bu durumda (4.14)' den her bir k için $G_k = f_k^{-1}(K_g^c)$ ölçülebilir altkümesi (4.13) koşulunu sağlar.

Böylece (ii) uyarınca

$$\sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \left| g \mathbb{W} \left(f_k \chi_{\{f_k \notin K_g\}} \right) \right| = \sup_n \sum_{k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| \left| g \left(\mathbb{W} (f_k \chi_{G_k}) \right) \right| < \varepsilon$$

gerçeklenir. Ayrıca $g(K_g)$ sınırlı kümedir. Dolayısıyla $\{f_k\}$ dizisi A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilirdir. ■

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Seriler ve dizilerin yakınsaklığının incelenmesi matematikte önemli bir yere sahiptir. Birçok matematikçi toplanabilme teorisinin gelişimine kadar olan sürede yakınsak serilerle ilgilenmişlerdir. Ancak toplanabilme teorisinin gelişmesiyle birlikte ıraksak serilere olan ilgi de artmıştır ve böylelikle toplanabilme teorisinin asıl amacı ıraksak bir seriye bir toplam karşılık getirmek olmuştur. Toplanabilme teorisinde başlangıçta alışılmış seriler ve diziler için çalışılmıştır ve bunlar için birçok yakınsaklık metodları tanımlanmıştır. Örnek verecek olursak, Connor (1988) regüler ve negatif olmayan matris yardımıyla A -istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Yine aynı yayınında A -kuvvetli toplanabilme kavramını da tanıtip, sınırlı diziler uzayı üzerinde bu iki kavramın denkleğine yer vermiştir. Böylelikle A -kuvvetli toplanabilmeyi karakterize etmiştir. Daha sonrasında A -kuvvetli yakınsaklığın bir diğer karakterizasyonunu A -düzgün integrallenebilen diziler uzayı üzerinde verilmiştir (Khan ve Orhan 2007). Tüm bu tanımlar normlu uzaylarda da geçerlidir. Ayrıca normlu uzaylarda zayıf istatistiksel yakınsaklık kavramı verilmiştir (Connor 2000). Bu birikimden yararlanarak bu tezde normlu uzaylarda zayıf A -istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmış ve bu kavramın hem topolojik hem de lineer yapıya sahip olduğu gösterilmiştir. Zayıf A -kuvvetli toplanabilme tanımı verilmiş ve sınırlı diziler uzayı üzerinde bu iki kavramın denk oldukları ispatlanmıştır. Daha sonrasında A -düzgün integrallenebilme kavramı verilerek, zayıf A -kuvvetli toplanabilme kavramının bir diğer karakterizasyonu elde edilmiştir.

Düzgün integrallenebilme kavramı olasılık uzayında geniş bir yere sahiptir. Öyleki ilk olarak rasgele değişkenlerin ailesi için verilen tanımın literatürde bir çok versiyonu bulunmaktadır. Ayrılabilir Banach uzaylarında değer alan rasgele vektör dizileri için kompakt düzgün integrallenebilme kavramı verilmiştir (Wang ve Rao 1987). Ordóñez Cabrera sonrasında bu kavramı toplanabilme matrisi yardımıyla genelleştirmiştir. Ancak rasgele vektör dizilerini norm fonksiyonu yardımıyla reel değerli hale getirip hesaplamalarda Lebesgue integrali kullanmışlardır (Ordóñez Cabrera 1997). Diğer yandan vektör integralleri de literatürde bulunmaktadır. Ayrılabilir Banach uzaylarında değer alan rasgele vektör dizileri için Pettis integrali yardımıyla düzgün integrallenebilme kavramının (Godet-Thobie ve

Satco 2006) ve Bochner integrali yardımıyla da kompakt düzgün integrallenebilme (Ünver ve Uluçay 2017) kavramının yeni versiyonları verilmiştir. Tezin ilerleyen kısımlarında literatürdeki rasgele vektör dizilerinin düzgün integrallenebilme kavramının genelleştirilmesi olan A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilme kavramı topolojik vektör uzaylarında tanımlanmıştır. Sonlu boyutlu topolojik vektör uzayında değer alan rasgele vektör dizileri için A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilme için yeterli koşul verilmiştir.

Bu tez çalışmasıyla ayrıca, topolojik vektör uzaylarında değer alan rasgele vektör dizileri için Pettis A -istatistiksel yakınsaklık ve Pettis A -kuvvetli toplanabilme tanımları verilerek literatüre iki yeni yakınsaklık metodu kazandırılmıştır. Bu yapıların yakınsaklık metotları üzerinde çalışan araştırmacılar için faydalı olacağı düşünülmektedir. Ayrıca bu iki kavramın normlu uzaylarda verilen zayıf versiyonları ile ilişkileri incelenmiştir. Diğer yandan, Pettis A -kuvvetli toplanabilen rasgele vektör dizisinin aynı değere Pettis A -istatistiksel yakınsak olduğu sonucu elde edilmiştir. Ayrıca karşıtının gerçekleşmesi için A -sınırlı düzgün Pettis integrallenebilirliğin gerekli olduğu belirtilmiştir.

KAYNAKLAR

- Athreya, K.B. and Lahiri S.N. 2006. Measure Theory and Probability Theory. Springer.
- Bhardwaj, V. K. and Bala, I. 2007. On Weak Statistical Convergence. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.
- Bilalov, B.T. and Nazarova, T.Y. 2015. Statistical convergence of functional sequences. Rocky Mountain J. Math., 45(5), 1413-1423.
- Boos, J. 2000. Classical and Modern Methods in Summability. Oxford Univ. Press, UK.
- Chung, K.L. 2001. A Course in Probability Theory. Academic Press, USA.
- Connor, J.S. 1988. The Statistical and Strong p -Cesàro Convergence of Sequences. Analysis, 8, 47-63.
- Connor, J.S., Ganichev, M. and Kadets, V. 2000. A characterization of Banach spaces with separable duals via weak statistical convergence. J. Math. Anal. Appl., 244 (1), 251-261.
- Çakalli, H. and Khan, M.K. 2011. Summability in Topological spaces. Appl. Math. Lett., 243, 348–352.
- Daffer, P.Z. and Taylor, R.L. 1982. Tightness and Strong Laws of Large Numbers in Banach spaces. Bull. Inst. Math. Acad., Simca 10, 251-263.
- Demirci, K. 1996. Strong A -summability and A -statistical Convergence. Indian. J. Pure and Appl. Math., 27, 589-593.
- Di Maio, G. and Kocinac, L.A.D. 2008. Statistical convergence in topology. Topology and its Applications, 156(1), 28-45.
- Fast, H. 1951. Sur La Convergence Statistique. Colloq. Math., 2, 241-244.
- Freedman, A.R. and Sember, J.J. 1981. Densities and Summability. Pacic J. Math., 95, 293-305.
- Fridy, J.A. 1985. On Statistical Convergence. Analysis 5, 301-313.
- Fridy, J.A. Orhan, C. 1993. Lacunary statistical convergence. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 160, 43-51.
- Ghosal, S.K. 2013. Statistical convergence of a sequence of random variables and limits theorems. Applications of Mathematics, 58 (4), 423-437.
- Godet-Thobie, C. and Satco, B. 2006. Decomposability and Uniform Integrability in Pettis Integration. Quaest. Math., 29 (1), 39-58.
- Hoffmann-Jorgensen, J. and Pisier, G. 1976. The Law of Large Numbers and the Central Limit Theorem in Banach Spaces. Ann. Probab., 4, 587-599.

- Khan, M.K. and Orhan, C. 2010. Characterizations of strong and statistical convergences. *Publicationes Mathematicae*, cilt.76, sa.1-2, ss.77-88.
- Kreyszig, E. 1978. *Functional Analysis with Applications*. John Walley and Sons, New York.
- Kolk, E. 1991. The Statistical convergence in Banach Spaces. *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis*, no.928, 41-52.
- Kostyrko, P., Šalát, T. and Wilczyński, W. 2000. I-convergence. *Real analysis exchange*, 669-685.
- Köthe, G. 1969. *Topological vector spaces I*. Springer-Verlag, 456sf, New York.
- Maddox, I.J. 1988. Statistical convergence in a locally convex space. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 104, no.1, 141-145.
- Miller, H.I. 1995. A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence. *Transactions of the American Mathematical Society*, 347(5), 1811-1819.
- Ordóñez Cabrera, M. 1994. Convergence of Weighted Sums of Random Variables and Uniform Integrability Concerning the Weights. *Collect. Math.*, 45 (2), 121-132.
- Ordóñez Cabrera, M. 1997. Convergence in mean of Weighted Sums of (a_{nk}) - compactly Uniformly Integrable Random Elements in Banach Spaces. *Internat. J. Math. and Math. Sci.*, 20 (3), 443-450.
- Ordóñez Cabrera M. and Volodin, A.I. 2005. Mean convergence theorems and weak laws of large numbers for weighted sums of random variables under a condition of weighted integrability. *J. Math. Anal. Appl.*, 305 (2), 644-658.
- Pugachev, V.S. and Sinitsyn, I.N. 1999. *Lectures on Functional Analysis and Applications*. World Scientific, Singapore.
- Royden, H.L. 1968. *Real Analysis*. The Macmillan Company, London.
- Šalát, T. 1980. On statistically convergent sequences of real numbers. *Mathematica Slovaca*, vol.30, no.2, 139-150.
- Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicum*, 2, 73-74.
- Ünver, M. Uluçay, H. 2017. Compactly uniform Bochner integrability of random elements. *Positivity*, 21 (4), 1261–1272.
- Wang, X.C. and Rao, M.B. 1987. Some Results on the Convergence of Weighted Sums of Random Elements in Separable Banach Spaces. *Studia Math.*, 86 (2) , 131-153.
- Wilansky, A. 1985. *Summability through Functional Analysis*. Elsevier Science Publishers B. V. North-Holland.