

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**İKİ BOYUTLU EĞRİ YÜZEYLERDE DIRAC-WEYL DENKLEMİ VE
SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ UYGULAMALARI**

Duygu Demir KIZILIRMAK

FİZİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2021**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

İKİ BOYUTLU EĞRİ YÜZEYLERDE DIRAC-WEYL DENKLEMİ VE SÜPERSİMETRİK KUANTUM MEKANİĞİ UYGULAMALARI

Duygu DEMİR KIZILIRMAK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Şengül KURU

Bu tez çalışmasında, ilk olarak kütleli ve kütsüz parçacıklar için Dirac denklemi, grafenin özellikleri ve süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri gözden geçirilmiştir. Hiperbol yüzeyinde Dirac ve Dirac-Weyl denklemleri, yüzeye dik farklı manyetik alanlar için süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri kullanılarak analitik olarak çözülmüştür. Daha sonra, skaler şekil değişmez Schrödinger Hamiltoniyenleri için kullanılan çarpanlara ayırma yöntemi, bir boyutta Dirac benzeri matris Hamiltoniyenlere genişletilmiştir. Matris bağlaştırm ve anti bağlaştırm işlemcileri, skaler Hamiltoniyeninkiler cinsinden ifade edilmiştir. Ayrıca, Dirac benzeri Hamiltoniyenlere karşılık gelen simetrler, enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları elde edilmiştir. Bu Hamiltoniyenlerin, yüksek boyutlu spin sistemlerinin indirgenmesinden elde edildiği gösterilmiştir. Son olarak, küre ve hiperbol yüzeyleri ile ilişkili olan trigonometrik ve hiperbolik Pöschl-Teller potansiyelleri örnek olarak ele alınmıştır.

Haziran 2021, 77 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dirac denklemi, Dirac-Weyl denklemi, matris Hamiltoniyen, Dirac parçacıkları, grafen, süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri, çarpanlara ayırma yöntemi, bağlaştırm yöntemi, simetri.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

DIRAC-WEYL EQUATION ON TWO DIMENSIONAL CURVED SURFACES AND APPLICATIONS OF SUPERSYMMETRIC QUANTUM MECHANICS METHODS

Duygu DEMİR KIZILIRMAK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Şengül KURU

In this thesis, firstly Dirac equation for massive and massless particles, properties of graphene and supersymmetric quantum mechanics methods were reviewed. Dirac and Dirac-Weyl equations on the hyperboloid surface for different magnetic fields perpendicular to the surface, were solved analytically using supersymmetric quantum mechanics methods. Then, the factorization method used for the scalar shape invariant Schrödinger Hamiltonians has been extended to Dirac like matrix Hamiltonians in one dimension. Matrix intertwining and anti intertwining operators are expressed in terms of those of the scalar Hamiltonians. In addition, symmetries, energy eigenvalues and eigenfunctions corresponding to Dirac like Hamiltonians were obtained. It has been shown that these Hamiltonians are obtained from the reduction of higher dimensional spin systems. Finally, trigonometric and hyperbolic Pöschl-Teller potentials associated with sphere and hyperboloid surfaces were taken as an example.

June 2021, 77 pages

Key Words: Dirac equation, Dirac-Weyl equation, matrix Hamiltonian, Dirac particles, graphene, supersymmetric quantum mechanics methods, factorization method, intertwining method, symmetry.

TEŞEKKÜR

2008’de başladığım lisans ve sonrasında devam eden yüksek lisans, doktora eğitimim süresi boyunca beni her konuda destekleyen, bilgilerini ve hayat tecrübelerini benimle paylaşan ve bana her konuda kılavuz olan danışmanım, saygıdeğer hocam Prof. Dr. Şengül KURU’ya (Ankara Üniversitesi Fizik Anabilim Dalı) doktora süreci boyunca da destekleri, anlayışı ve sabrı için çok teşekkür ederim.

Üniversite eğitimim süresince Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri, Fizik Anabilim dalında engin bilgi birikiminden ve tecrübelerinden faydalandığım tüm saygıdeğer hocalarıma, akademik hayatta başarılı olmama katkı sağladıkları için teşekkür ederim.

Beni yetiştiren ve bugünlere gelebilmem için çaba sarf eden, her zorluğun üstesinden gelmemi sağlayan ve bana hep örnek olan, beni her zaman destekleyen annem Aysun DEMİR ve babam Hasan DEMİR’e teşekkür ederim. Hep yanımda olan, desteklerini hiç esirgemeyen kardeşim Fatih DEMİR’e teşekkür ederim.

Hayatımızın her alanında olduğu gibi eğitim hayatımız boyunca da birbirimize verdiğimiz destek ve güç için sevgili eşim Haydar KIZILIRMAK’a teşekkür ederim. Bu çalışmamı, aramıza kısa zaman sonra katılacak olan canım kızımız Arya’ya, çalışmam süresince en sakin halinde kaldığı ve tekmeleriyle bana destek verdiği için, ithaf ediyorum.

Duygu Demir Kızılırmak
Ankara, Temmuz 2021

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KÜTLELİ ve KÜTLESİZ PARÇACIKLAR İÇİN DIRAC DENKLEMİ.	3
2.1 Kütleli Parçacıklar İçin Dirac Denklemi	3
2.1.1 Kütleli parçacıklar için Dirac denkleminin düzlem dalga çözümleri.	6
2.2 Kütsüz Parçacıklar İçin Dirac-Weyl Denklemi.	8
3. GRAFEN	12
3.1 Grafenin Özellikleri	12
3.2 Periyodik Yapısı	13
3.3 Ters Örgü.....	14
3.4 Grafende Sıkı Bağ Yaklaşımı	15
3.5 Sürekli Limit.....	18
4. SÜPERSİMETİK KUANTUM MEKANİĞİ YÖNTEMLERİ.....	22
4.1 Çarpanlara Ayırma Yöntemi	22
4.2 Bağlaştırm Yöntemi	24
4.3 Şekil Değişmezlik.....	24
4.4 Bir Boyutlu Schrödinger Hamiltoniyenlerinin Hiyerarşisi	25
5. HİPERBOL ÜZERİNDE DIRAC VE DIRAC WEYL DENKLEMLERİ	28
5.1 Hiperbol Üzerinde Dirac-Weyl Denklemi.....	28
5.1.1 Dönme simetrisi.....	32
5.1.2 Hermitsel form.	33
5.2 SUSY Eş Hamiltoniyenler ve Taban Durumu	34
5.2.1 SUSY formülasyonu.....	34
5.2.2 Sıfır enerjili taban durumu ve manyetik alan akısı	36

5.3 Çözülebilir Durumlar	37
5.3.1 Birinci durum (sabit manyetik alan)	37
5.3.2 İkinci durum	40
5.4 Hiperbol üzerinde Dirac denklemi	42
5.4.1 Sabit manyetik alan	45
6. DIRAC BENZERİ HAMILTONİYENLERİN ÇARPANLARA AYIRMA	
YÖNTEMİ İLE İLİŞKİLENDİRİLMESİ	48
6.1 İndirgenmiş Dirac Hamiltoniyenlerinin Artan Hiyerarşisi.....	48
6.1.1 Dirac hiyerarşisinin spektrumu	49
6.1.2 Kütlesiz Dirac-Weyl denkleminin spektrumu	50
6.1.3 Bağlaştırm işlemcileri tarafından yok edilen özfonksiyonlar	51
6.1.4 Simetri işlemcileri.....	51
6.1.5 4×4 Dirac benzeri Hamiltoniyenler için bağlaştırm işlemcileri.....	52
6.2 Trigonometric Pöschl-Teller Potansiyeli.....	54
6.2.1 Küre üzerinde Dirac benzeri denklemler	54
6.3 İndirgenmiş Dirac Hamiltoniyenlerinin Azalan Hiyerarşisi.....	61
6.3.1 Azalan Dirac hiyerarşisinin spektrumu	62
6.3.2 Bağlaştırm işlemcileri tarafından yok edilen özfonksiyonlar	63
6.4 Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli.....	63
6.4.1 Hiperbol üzerinde Dirac benzeri denklemler	64
7. SONUÇ.....	71
KAYNAKLAR.	73
ÖZGEÇMİŞ.....	77

SİMGELER DİZİNİ

H	Hamilton işlemcisi (Hamiltoniyen)
p	Momentum işlemcisi
σ_i	Pauli spin matrisi
a	Karbon atomları arasındaki uzaklık (1,42 Å)
K, K'	Brillouin bölgesinin eşdeğer olmayan köşeleri
M	Brillouin bölgesinin eşdeğer olmayan köşelerine ait kenarın orta noktası
Γ	Hücre merkezi
$W(x)$	Süperpotansiyel
$a^\pm$	Yok edici ve yaratıcı işlemciler
$V_n(x)$	Potansiyel
L	Çizgisel diferansiyel bağlaştırım işlemcisi
μ_n^2	Çarpanlara ayırma enerjisi
$\vec{A}$	Vektör potansiyeli
$\emptyset_0$	Akı kuantumu
c	Işık hızı
h_n	İndirgenmiş Dirac Hamiltoniyeni
$R_n^\pm$	Bağlaştırım işlemcileri
$T_n^\pm$	Anti bağlaştırım işlemcileri
ε_n^k	Dirac Hamiltoniyeninin enerji özdeğerleri
Ψ_n^k	Spinör özfonksiyonunu
$L_\pm$	Alçaltıcı ve yükseltici açısal momentumlar
C	Casimir işlemcisi
$S_\pm$	Alçaltıcı ve yükseltici spin işlemcileri

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Spinin $\vec{p}$ ile paralel olduğu durum (Greiner 1987)	9
Şekil 2.2 Spinin $\vec{p}$ ile antiparalel olduğu durum (Greiner 1987)	10
Şekil 3.1 Karbon atomunun allotropları: fulleren, nanotüp, grafit (Wong ve Akinwande 2011).....	12
Şekil 3.2 (a) Karbon atomunda (b) grafende elektronların yörüngelere yerleşmesi (Wong ve Akinwande).....	13
Şekil 3.3 Grafende A ve B olarak adlandırılan karbon atomlarının $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ baz vektörleri.....	14
Şekil 3.4 Brillouin bölgesinin ters örgü için gösterimi	14
Şekil 3.5 Merkezde olan A atomunun birinci en yakın komşuluğundaki B atomları için yer vektörleri $\vec{R}'_1, \vec{R}'_2, \vec{R}'_3$	16
Şekil 3.6 Grafenin en yakın atom komşuluğunda sıkı bağ enerji band yapısı. Burada, $\beta = 36$, $E_{AA} = 0$ alınmıştır.....	18
Şekil 3.7 (a) Grafenin Dirac noktası (K) civarında enerji band yapısı (b) Dirac noktasından bir kesit (Wilson 2006),	19
Şekil 4.1 Artan H_n Hamiltoniyeni hiyerarşisi	26
Şekil 4.2 Azalan H_n Hamiltoniyeni hiyerarşisi.....	27
Şekil 5.1 Hiperbolik koordinatların gösterimi	29
Şekil 5.2 Soldaki grafik p_x momentum işlemcisini, sağdaki p_x 'in hiperbol yüzeyi üzerindeki iz düşümü olan $\tilde{p}_x$ momentum işlemcisini göstermektedir	30
Şekil 5.3 Soldaki grafik p_z momentum işlemcisini, sağdaki p_z 'nin hiperbol yüzeyi üzerindeki iz düşümü olan $\tilde{p}_z$ momentum işlemcisini göstermektedir	31
Şekil 5.4 Sabit manyetik alan durumu için eş potansiyeller	39
Şekil 5.5 $V_1(u)$ (kesikli çizgi), $V_2(u)$ (noktalı çizgi) eş potansiyelleri ve karşılık gelen ε^k enerji özdeğerleri.....	40
Şekil 5.6 Manyetik alan ve eş potansiyeller	41
Şekil 5.7 Eş potansiyeller ve karşılık gelen enerji özdeğerleri	42
Şekil 5.8 $k = 0$ (mavi), $k = 1$ (kırmızı), $k = 2$ (yeşil), $k = 3$ (açık mavi), $k = 4$	47

1. GİRİŞ

Karbonun bir allotropu (Neto vd. 2009) olan grafen, 2004 yılında A. Geim, K. Novoselov ve çalışma arkadaşları tarafından sentezlenmiştir (Novoselov vd. 2004). A. Geim ve K. Novoselov bu çalışmaları ile 2010 yılında Nobel Fizik Ödülü'ne layık görülmüşlerdir. Grafen, önemli elektronik ve optik özellikleri nedeniyle (Fuchs ve Goerbig 2008, Neto vd. 2009, Goerbig 2011, Katsnelson 2012) fizikte çok ilgi çekmiştir ve hala bu konuda çok önemli çalışmalar yapılmaktadır. Grafende düşük enerjili elektronlar kütsüz Dirac parçacığı karakteri gösterir ve Fermi hızına sahip bu kütsüz elektronların dinamiği (2+1) boyutlu Dirac-Weyl denklemi ile tanımlanır (Neto vd. 2009). Bu denklemin farklı yüzeyler ve farklı dış manyetik alanların varlığında analitik olarak çözülmesi ve sonuçlarının yorumlanması, son yıllarda ilgi çeken grafen ve karbonun diğer allotroplarının (fullerene, nanotüp, nanoribbon, nanocone, ...) elektronik özelliklerinin daha iyi kavranması açısından önemlidir.

Yapay atom olarak bilinen kuantum noktaları üzerine yapılan çalışmalar, temel fiziğin anlaşılmasına ve elektronik, optik vs. uygulamalarına katkı sağlarlar. Grafen kuantum noktalarının spin kübiti olarak kullanım potansiyelinin olması, grafen kuantum noktalarının önemini artırır (Downing vd. 2011). Bu yüzden, grafende Dirac elektronlarının hapsedilme mekanizmasının anlaşılması önemlidir. Klein tünellemesi nedeniyle, grafende Dirac elektronlarını (fermiyonlarını) yalnızca elektriksel potansiyel kullanarak istenilen noktaya hapsetmek zordur (Hewageegana ve Apalkov 2008, Beenakker 2008, Katsnelson vd. 2006). Ancak, Dirac elektronlarını kuantum noktası içine hapsetmek için manyetik alan kullanılabilir. Dirac-Weyl denklemi bazı manyetik alanlar için süpersimetrik (SUSY) kuantum mekaniği yöntemleri kullanılarak analitik olarak kolayca çözülebilir (Kuru vd. 2009, Pozdeeva ve Halberg 2010, Contreras-Astorga vd. 2012, Jakubsky vd. 2013, Contreras-Astorga vd. 2016, Kuru vd. 2018, Castillo-Celeita vd. 2020, Phan vd. 2020).

SUSY kuantum mekaniğinde süperyük işlemcileri bir matris Hamiltoniyenin (Hamilton işlemcisinin) aynı enerjili dik iki özfonksiyonu arasında dönüşüm üretirler ve Hamiltoniyenle birlikte bir süpercebiri oluştururlar (Cooper vd. 1988, Cooper vd. 1995,

Junker 1996, Fernandez 2010). SUSY yöntemleri, hemen hemen eş spektrumlu tam olarak çözülebilen Hamiltoniyenlerin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını elde etmek ve yeni çözülebilir Hamiltoniyenleri bulmak için kullanılırlar. Bu sayede fizikte pek çok problem için çözümler, karşılık gelen diferansiyel denklemler doğrudan çözülmeyen bulunabilir ve yeni çözülebilir problemler elde edilebilir (Cooper vd. 1995, Junker 1996, Dong 2007, Fernandez 2010). Darboux dönüşümü, çarpanlara ayırma, bağlaştırm yöntemleri ve şekil değişmezlik SUSY yöntemlerindendir. L. M. Nieto ve çalışma arkadaşları Schrödinger diferansiyel işlemcileri için olan Darboux dönüşümlerini (Matveev 1991) bir boyutlu Dirac matris Hamiltoniyenlerine genişletmişlerdir (Nieto vd 2003). Ancak, bu tez çalışmasında daha önce yapılanlara ek olarak şekil değişmez skaler Hamiltoniyenlerin Dirac Hamiltoniyenleri ile ilişkisi verilmiştir (Demir Kızılırmak vd 2021).

Bir boyutlu Schrödinger denklemi çarpanlara ayırma yöntemi ile cebirsel olarak çözülebilir (Infeld ve Hull 1951). Şekil değişmez Schrödinger Hamiltoniyenlerinin hiyerarşisi ise bağlaştırm işlemcileri ile kurulur (Cooper vd. 2001, Fernandez 2010). Bağlaştırm işlemcilerinin ve onların yok ettiği fonksiyonların bilinmesi ile, hiyerarşideki Hamiltoniyenlerin özdeğerleri ve özfonksiyonları bulunabilir. Skaler ikinci mertebeden enerji özdeğer problemlerinin hiyerarşisi, birinci mertebeden Dirac benzeri matris Hamiltoniyenlerin hiyerarşisi ile ilişkilendirilebilir. Skaler Hamiltoniyenler, Dirac benzeri Hamiltoniyenlerin karesinin köşegeni üzerinde bulunur. Dirac benzeri matris Hamiltoniyenlerin hiyerarşisi ve bu matris Hamiltoniyenlerinin karesi için bağlaştırm işlemcileri aynıdır.

Farklı geometrilere sahip yüzeylerde; düzlem, küre, silindir, hiperbol vs., yüzeye dik manyetik alan etkisi altında kütleli ve kütsüz Dirac parçacıklarının hareketinin incelenmesi son zamanlarda ilgi odağı olmuştur (Fuchs ve Gorbis 2008, Kuru vd. 2009, Pozdeeva ve Halberg 2010, Milpas vd. 2011, Contreras-Astorga vd. 2012, Jakubsky vd. 2013, Contreras-Astorga vd. 2016, Liu vd. 2017, Kuru vd. 2018, Phan vd. 2020, Castillo-Celeita vd. 2020, Demir Kızılırmak ve Kuru 2021).

Bu tez kapsamında, hiperbol şeklindeki grafen yüzeyinde, yüzeye dik manyetik alan altındaki kütsüz elektronların davranışını incelemek için karşılık gelen Dirac-Weyl

denklemleri SUSY yöntemleri kullanılarak çözülmüştür (Demir Kızılırmak vd. 2020). Hiperbol üzerinde Dirac denkleminin bağılı durum çözümleri ise Dirac-Weyl denkleminin bağılı durum çözümlerinden yola çıkılarak elde edilmiştir (Demir Kızılırmak ve Kuru 2021). Böylece, hiperbol şeklindeki grafen yüzeyinde Landau enerji düzeyleri ve onların dejenereliği bulunmuştur. Burada ele alınan hiperbol yüzeyine manyetik alan uygulanarak, Dirac elektronlarının hareketlerinin incelenmesi grafen kuantum kapsüllerinin uygulamalarında büyük bir öneme sahiptir. Grafen kuantum kapsülleri, iki tabakalı grafende bazı bölgelerde tabakaların birbirinden ayrılarak deforme olmasıyla oluşur (Liu vd. 2017, Abdullah vd. 2018).

Bu tez çalışmasında, ilk olarak Dirac ve Dirac-Weyl denklemleri gözden geçirilmiştir. Üçüncü bölümde grafen hakkında bilgi verilmiş, sıkı bağ yaklaşımı kullanılarak Dirac elektronlarının enerjileri ve karşılık gelen dalga fonksiyonları bulunmuştur. Ayrıca, süreklilik yaklaşımı ile Dirac-Weyl denklemi elde edilmiştir. Dördüncü bölümde, öncelikle süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri hakkında bilgi verilmiş ve hiyerarşi çeşitleri gözden geçirilmiştir. Beşinci bölümde, kütesiz parçacıklar için hiperbol yüzeyinde Dirac-Weyl denklemi çözülerek, farklı manyetik alanların varlığında süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri yardımıyla Dirac elektronlarının elektronik özellikleri belirlenmiştir. Buna ek olarak, hiperbol yüzeyinde kütesiz Dirac parçacıklarına karşılık gelen bağılı durum çözümleri cinsinden, kütleli Dirac parçacıklarının çözümleri bulunmuştur. Altıncı bölümde, Dirac benzeri Hamiltoniyenlerin daha yüksek boyutlu spin sistemlerinin indirgenmesinden elde edilebileceği gösterilmiştir. Bu durumda, bağlaştırım işlemcileri başlangıçtaki sistemin simetrileri ile ilişkilidir. Artan ve azalan hiyerarşi için Schrödinger Hamiltoniyeni ve bağlaştırım işlemcileri bulunarak, bu sistemlerin spektrumu elde edilmiştir. Daha sonra karşılık gelen Dirac benzeri matris Hamiltoniyenler tanıtılmıştır. Matris bağlaştırım işlemcileri ve simetrileri hem 2×2 hem de 4×4 Dirac benzeri Hamiltoniyenler için skaler Hamiltoniyenlere karşılık gelen bağlaştırım işlemcileri cinsinden bulunmuştur. Ayrıca, bu sistemlere karşılık gelen enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları da elde edilmiştir. Burada, artan hiyerarşiye örnek olarak trigonometrik Pöschl-Teller (PT) potansiyeli ve azalan hiyerarşiye örnek hiperbolik PT potansiyeli olarak ele alınmıştır. Bu çalışma, yedinci bölümde sonuç ve tartışma ile sonlandırılmıştır.

2. KÜTLELİ ve KÜTLESİZ PARÇACIKLAR İÇİN DIRAC DENKLEMİ

Görelî (relativistik) olmayan kuantum mekaniğinde parçacıklar Schrödinger denklemi ile tanımlanır. Görelî kuantum mekaniğinde spin-0 parçacıklar Klein-Gordon denklemi, kütleli spin- $\frac{1}{2}$ parçacıklar Dirac denklemi ve kütleli spin- $\frac{1}{2}$ parçacıklar Dirac-Weyl denklemi ile tanımlanır (Griffiths 2008). Dirac-Weyl denklemi, özel olarak karbonun allotroplarındaki kütleli Dirac elektronlarının hareketini tanımlar. Bu bölümde, bu teze konu olan Dirac ve Dirac-Weyl denklemleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

2.1 Kütleli Parçacıklar İçin Dirac Denklemi

Schrödinger denklemi

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\Psi(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

şeklindedir. Serbest parçacık için klasik görelî Hamiltoniyen

$$H = T + V = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (2.2)$$

olarak yazılır. Burada, $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ olarak alınarak, (2.1) denklemi düzenlenirse

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = (-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4)^{1/2} \Psi(\vec{r}, t) \quad (2.3)$$

ifadesi elde edilir. (2.3) denkleminde uzay-zaman türevlerinin mertebesinin aynı olmadığı ve denklemin Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalmadığı görülür. Bu sorunları giderecek çizgisel Hamiltoniyen (H) Dirac tarafından 1927’de aşağıdaki gibi önerilmiştir (Schiff 1949):

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2. \quad (2.4)$$

Bu Hamiltoniyen, E Enerji öz durumları için özfonksiyonlar (Shankar 2013)

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad (2.5)$$

olarak alınarak, (2.1) denkleminde yerine yazılırsa, Dirac denklemi elde edilir:

$$(E - c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta mc^2)\Psi(\vec{r}) = 0. \quad (2.6)$$

Denklem (2.6)’da bulunan $\vec{\alpha}$ ve β uzay ve zaman koordinatlarından bağımsız olmalıdır. Ayrıca, $\vec{\alpha}$ ve β kendi aralarında sıra değiştirmezler, ancak $\{\vec{r}, t, \vec{p}, E\}$ ile sıra değiştirirler.

$\vec{\alpha}$ ve β 'nın belirlenebilmesi için denklem (2.6) ile $(E + c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2)$ ifadesi çarpılır (Schiff 1949):

$$(E + c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2)(E - c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} - \beta mc^2)\Psi(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.7)$$

$$[E^2 - Ec(\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) - E\beta mc^2 + c(\vec{\alpha} \cdot \vec{p})E - (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p})(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) - (c\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\beta mc^2 + \beta mc^2 E - \beta mc^2(c\vec{\alpha} \cdot \vec{p}) - \beta^2 m^2 c^4]\Psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (2.8)$$

Bu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned} E^2 - c^2[\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2 + p_x p_y(\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x) + (\alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y)p_y p_z \\ + (\alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z)p_x p_z] - \beta^2 m^2 c^4 \\ - mc^3[(\alpha_x \beta + \beta \alpha_x)p_x + (\alpha_y \beta + \beta \alpha_y)p_y + (\alpha_z \beta + \beta \alpha_z)p_z]\Psi(\vec{r}, t) \\ = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

halini alır. (2.9) ve (2.3) denklemleri uyumlu olmalıdır. Böylece, aşağıdaki eşitlikler sağlanmalıdır:

$$\alpha_x \alpha_y + \alpha_y \alpha_x = \alpha_y \alpha_z + \alpha_z \alpha_y = \alpha_z \alpha_x + \alpha_x \alpha_z = 0, \quad (2.10)$$

$$\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = \alpha_y \beta + \beta \alpha_y = \alpha_z \beta + \beta \alpha_z = 0, \quad (2.11)$$

$$\alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = 1, \quad \beta^2 = 1. \quad (2.12)$$

(2.11) denkleminde görüldüğü gibi $\vec{\alpha}$ ve β birbiri ile sıra değiştirmezler ve sayı ile ifade edilemezler, ancak matrisle temsil edilirler. Dirac tarafından önerilen (2.4) Hamiltoniyeni Hermitseldir. Bu durumda $\vec{\alpha}$ ve β matrisleri de Hermitsel olmak zorundadır. (2.12) eşitliklerine göre $\vec{\alpha}$ ve β matrislerinden bir tanesi köşegen olabilir (Greiner 1987). β matrisinin köşegen olduğu kabul edilirse, β 'nın alacağı özdeğerler ± 1 olur. Böylece, β matrisleri;

$$\beta = \begin{pmatrix} 1_{n \times n} & 0 \\ 0 & -1_{m \times m} \end{pmatrix}, \quad n > 0, \quad m > 0 \quad (2.13)$$

olarak yazılabilir. (2.11)'de yer alan $\alpha_x \beta + \beta \alpha_x = 0$ ifadesi, jl elemanları için

$$(\alpha_x)_{jl}(\beta_j + \beta_l) = 0 \quad (2.14)$$

şeklindedir. β_j ve β_l , (2.13) ve (2.14)'e göre ayarlanmış β 'nın özdeğerleridir. (2.14) ifadesinde $\beta_j = \beta_l$ ise $(\alpha_x)_{jl} = 0$ olur. $\beta_j \neq \beta_l$ durumunda $(\alpha_x)_{jl}$ ifadesinin sıfır olması gerekmez. Böylece, α_x matrisi

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{x1} \\ \alpha_{x2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

olarak yazılır. Burada, α_{x1} n satır, m sütundan ve α_{x2} m satır, n sütundan oluşur. Denklem (2.12)'de yer alan $\alpha_x^2 = 1$ koşulundan

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_{x1} \\ \alpha_{x2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{x1} \\ \alpha_{x2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{x1}\alpha_{x2} & 0 \\ 0 & \alpha_{x2}\alpha_{x1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

bulunur. Bu durumda $\alpha_{x1}\alpha_{x2} = 1$ ve $\alpha_{x2}\alpha_{x1} = 1$ ifadeleri yazılır. $n \neq m$ durumu için tek değerli çözümlere ulaşamaz. O halde çözümler $n = m$ şeklinde seçilmelidir. $n = m = 1$ durumu için matrisler 2×2 Pauli spin matrisleri olarak yazılır (Schiff 1949):

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

$n = m = 2$ durumu için 4×4 şeklinde matrisler aşağıdaki gibi yazılır:

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Böylece, $\vec{\alpha}$ matrisi

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

olarak gösterilebilir (Greiner 1987). $\vec{\alpha}$ ve β matrisleri 4×4 'lük matrislerdir. O halde (2.6) ifadesinin çözümü dört bileşenden oluşan sütun matrisi olmalıdır.

2.1.1 Kütleli parçacıklar için Dirac denkleminin düzlem dalga çözümleri

Kütleli parçacıklar için Dirac denkleminin düzlem dalga çözümlerini elde etmek için denklem (2.6)'da verilen $\vec{\alpha}$ ve β matrisleri için düzlem dalga çözümleri 4 satır ve 1 sütundan oluşacak şekilde seçilmelidir (Schiff 1949):

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \\ \psi_3(\vec{r}, t) \\ \psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Düzlem dalga çözümleri,

$$\psi_j(\vec{r}, t) = u_j e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (2.21)$$

olarak seçilebilir (Schiff 1949). (2.20) ve (2.21) ile verilen düzlem dalga çözümleri ve $\vec{\alpha}, \beta$ matrisleri, (2.6) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}(E + mc^2)u_1 + cp_z u_3 + c(p_x - ip_y)u_4 &= 0, \\(E + mc^2)u_2 + c(p_x + ip_y)u_3 - cp_z u_4 &= 0, \\(E - mc^2)u_3 + cp_z u_1 + c(p_x - ip_y)u_2 &= 0, \\(E - mc^2)u_4 + c(p_x + ip_y)u_1 - cp_z u_2 &= 0.\end{aligned}\tag{2.22}$$

Bu denklemler için çözüm, yalnızca katsayılar determinantının sıfır olduğu durumda vardır:

$$(E^2 - ((mc^2)^2 + c^2 p^2))^2 = 0.\tag{2.23}$$

Herhangi bir p momentumu için, enerjinin pozitif ve negatif olduğu iki tane enerji çözümü elde edilir:

$$E_{\pm} = \pm \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}.\tag{2.24}$$

Elektronun spin yukarı ve spin aşağı durumları göz önüne alınarak enerjinin pozitif ve negatif değerleri için çözümler aşağıdaki gibidir (Schiff 1949):

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E_+ + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix},\tag{2.25}$$

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E_+ + mc^2} \\ -\frac{cp_z}{E_+ + mc^2} \end{pmatrix},\tag{2.26}$$

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E_- - mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E_- - mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\tag{2.27}$$

$$\Psi_4 = \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E_- - mc^2} \\ \frac{cp_z}{E_- - mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

Denklem (2.25) ve (2.26) enerjinin pozitif olduğu durumlara (parçacıklara yani elektronlara), denklem (2.27) ve (2.28) ise enerjinin negatif olduğu durumlara (anti parçacıklara yani deşiklere) karşılık gelir.

2.2 Kütesiz Parçacıklar İçin Dirac-Weyl Denklemi

1930 yılında W. Pauli durgun kütlesi sahip olduğu momentuma göre çok küçük olan, ışık hızına yakın hıza sahip, yüksüz ve spini $\frac{1}{2}$ olan parçacığın varlığını öne sürdü. Daha sonra, 1934 yılında E. Fermi bu parçacığı “nötrino” olarak adlandırdı. Bu parçacıkların hareketini tasvir etmek için Dirac-Weyl denklemi olarak adlandırılan,

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \Psi(x), \quad (2.29)$$

denklemi önerdi (Greiner 1987). (2.29) denklemi, Dirac denkleminden farklı olarak β matrisini içermez. α_x, α_y ve α_z matrisleri için anti sıra değışme bağıntısı,

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \quad (2.30)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $i, j = x, y, z$ olarak tanımlıdır. Kütleli durumda, β matrisi 4×4 matrisleri gerektirir ve spin- $\frac{1}{2}$ parçacıkları kütleleri ile ilişkili iki spinörle tanımlamak gerekir. Ancak, kütlenin sıfır olduğu durum için bu koşul ortadan kalkar ve dalga denklemi bir spinör ile ifade edilebilir.

Nötrinoyu tanımlayan dalga denklemi (Greiner 1987),

$$i\hbar \frac{\partial \phi^{(+)}}{\partial t} = c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi^{(+)}(x) \quad (2.31)$$

$i\hbar$ 'a bölündükten sonra

$$\frac{\partial \phi^{(+)}}{\partial t} = -c\vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \phi^{(+)}(x) \quad (2.32)$$

denklemini elde edilir. Burada, σ_z 'ler Pauli spin matrisleridir. Dirac-Weyl denklemi için düzlem dalga çözümleri

$$\phi^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ip \cdot x / \hbar} u^{(+)}(p) \quad (2.33)$$

şeklinde verilir. Burada, $p = \{p_0, \vec{p}\} = \left\{\frac{E}{c}, \vec{p}\right\}$, $x = \{x_0, \vec{x}\}$, $p \cdot x = p_0 x_0 - \vec{p} \cdot \vec{x}$ 'dir.

Ayrıca, $u^{(+)}(p)$ iki bileşenli spinördür ve aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$p_0 u^{(+)} = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u^{(+)}. \quad (2.34)$$

$p_0 = \frac{E}{c}$ 'nin verilen işareti için, hareketin doğrultusu $\vec{p}$ 'ye göre $\vec{\sigma}$ spininin belli bir yönelimine karşılık gelir. Helisite, spinin momentum doğrultusundaki izdüşümünü verir ve helisite işlemcisi, $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ olarak tanımlıdır. Helisite işlemcisi, (2.34) denkleminin her iki tarafına uygulanırsa ve aşağıdaki eşitlik kullanılırsa,

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (2.35)$$

aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(p_0^2 - p^2)u^{(+)} = 0. \quad (2.36)$$

Bu denklemin çözümü, sadece $u^{(+)} \neq 0$ olduğu durum için vardır. Böylece,

$$p_0 = \pm |\vec{p}| \quad (2.37)$$

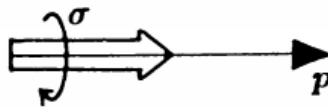
bulunur. Bu ifade kütleli parçacıklar için göreceli enerji ifadesini verir. $\vec{p}$, z eksenine doğrultusunda olmak üzere, (2.34) denklemi için çözüm

$$u^{(+)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

şeklinde dir. Bu çözüm, spinin hareket doğrultusunda olan sağ eli kütleli parçacığı tanımlar. Böylece,

$$\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} u^{(+)} = \sigma_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

elde edilir. Bu ifade kısaca, helisite işlemcisinin pozitif özdeğere sahip olduğunu ve şekil 2.1'de gösterildiği gibi spin ile $\vec{p}$ 'nin paralel olduğunu söyler. Pozitif helisite için pozitif enerji durumları bulunur.



Şekil 2.1 Spinin $\vec{p}$ ile paralel olduğu durum (Greiner 1987)

Sol elli kütsesiz parçacık,

$$i\hbar \frac{\partial \phi^{(-)}(\vec{r}, t)}{\partial t} = -c\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \phi^{(-)}(\vec{r}, t) \quad (2.40)$$

denklemleri ile tanımlanır. $\vec{\sigma}$, $-\vec{\sigma}$ ile yer değiştirilirse (2.30) bağıntısı sağlanır ve bu denklem kütsesiz spin- $\frac{1}{2}$ parçacıkları için Dirac denklemini verir ((2.31) ile aynı şekilde). Düzlem dalga özömleri,

$$\phi^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E(2\pi)^3}} e^{-ip \cdot x/\hbar} u^{(-)}(p) \quad (2.41)$$

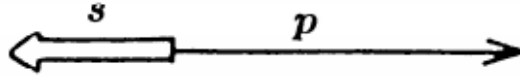
olarak seçilirse,

$$p_0 u^{(-)} = -\hat{\sigma} \cdot \vec{p} u^{(-)} \quad (2.42)$$

ve

$$u^{(-)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

elde edilir. (2.42) denkleminde p_0 pozitif ya da negatif olabilir. (2.41) özümü “nötrino durumu” olarak adlandırılır. Çünkü nötrino sol elli parçacıktır yani negatif helisiteye sahiptir. Şekil 2.2’de gösterildiği gibi, bu durumda spin $\vec{p}$ ’ye antiparaleldir (Greiner 1987).



Şekil 2.2 Spinin $\vec{p}$ ile antiparalel olduğu durum (Greiner 1987)

Anti nötrino durumları ($p_0 < 0$) için tersi geçerlidir, yani parçacık sağ ellidir. β bozunumu deneyleri nötrinin her zaman spin doğrultusuna anti paralel hareket ettiğini göstermiştir. Yani pozitif enerjili nötrino için helisite negatif (sol elli), negatif enerjili nötrino için helisite pozitiftir (sağ elli). Nötrinin (anti nötrino) her zaman sol elli (sağ elli) olması, sadece durgun kütsesi sıfır ise mümkündür.

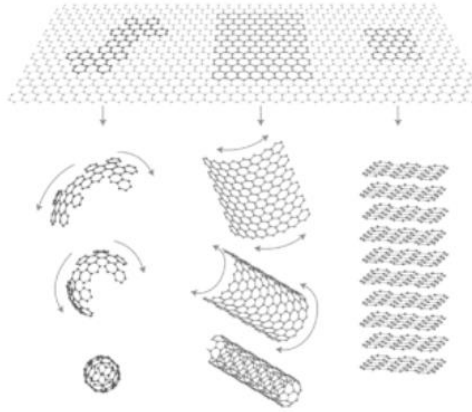
Grafende yük taşıyıcıları, kütsesiz Dirac elektronlarıdır ve Dirac noktası civarında bu elektronların hareketini tanımlamak için Dirac-Weyl denklemi kullanılır. Dirac ve Dirac Weyl denklemini sağlayan spin- $\frac{1}{2}$ parçacıklar kiral özelliğe (ellilik) sahiptirler. Kiralite işlemcisinin ($\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$) öz durumları sol ve sağ elli durumlar olarak tanımlanır: ψ_L , ψ_R . Burada, “L” sol elli durumları ve “R” de sağ elli durumları

etiketlemektedir. Kiralite işlemcisi, Hamiltoniyen ile sıra değiştirmez. Kütle ihmal edildiğinde, $\gamma_5 \psi_L = -\psi_L$, $\gamma_5 \psi_R = \psi_R$ bağıntıları sağlanır ve bu parçacıkların sol ve sağ ellilik durumları, negatif ve pozitif helisite durumları ile çakışırlar (Zee 2010). Yukarıda da söz edildiği gibi helisite işlemcisinin iki özdeğeri vardır: $\left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|p|} \right) \phi^{(\pm)} = \pm \phi^{(\pm)}$ ve grafende biri negatif helisiteye (değerlik bandındaki deşiklere) diğeri de pozitif helisiteye (iletkenlik bandındaki elektronlara) karşılık gelir. Helisite işlemcisi, Hamiltoniyen ile sıra değiştirir, yani helisite bir hareket sabitidir, korunur. Helisitenin korunması grafende Klein tünellemesine yol açar. Grafende Klein tünellemesi, iletkenlik bandındaki bir elektronun değerlik bandındaki deşik durumlarına tünellemesidir (Katsnelson vd. 2006, Beenakker 2008).

3. GRAFEN

Andre Geim ve Konstantin Novoselov 2004 yılında altıgen şeklinde dizilmiş karbon atomlarının katmanlarından oluşan grafiti ayırıp, tek katmanlı grafeni elde ettiler ve 2010 yılında bu keşifleri ile Nobel Fizik Ödülü'nün sahibi oldular (Novoselov 2004, Katsnelson 2012). Grafen karbonun iki boyutlu bir allotropudur (Neto vd. 2009). Her şeyden önce grafen, bilinen kristallerin aksine iki boyutlu kristallerin ilk örneğidir (Katsnelson 2012). Aynı zamanda grafen test edilen en güçlü malzemedir. Esnek bir yapıya sahip olan grafen, ısıyı ve elektriği çok iyi iletir.

Şekil 3.1'deki gibi, grafen küresel katlandığında fulleren, silindirik katlandığında nanotüp, üst üste koyulduğunda ise karbonun en kararlı allotropu olan grafit oluşur. Ayrıca, grafen kurdela şeklinde kesilerek nanoribonlar elde edilebilir.

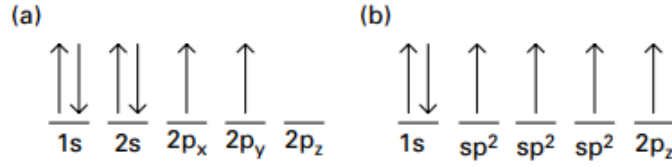


Şekil 3.1 Karbon atomunun allotropları: fulleren, nanotüp, grafit (Wong ve Akinwande 2011)

3.1 Grafenin Özellikleri

Grafen altıgen olarak düzenlenmiş karbon atomlarından oluşur. 4A elementi olan karbon atomunun 6 elektronu vardır. Şekil 3.2a'da bu elektronların yörüngelere yerleşimi gösterilmiştir. Karbonun 2s ve 2p yörüngelerinde yer alan dört elektronu vardır. Bu elektronlara değerlik (valans) elektronları denir ve aralarındaki bağ zayıftır.

Yörüngeler melezleştğinde (hibritleştğinde), elektron dağılımı şekil 3.2b’de görüldüğü gibi olur.

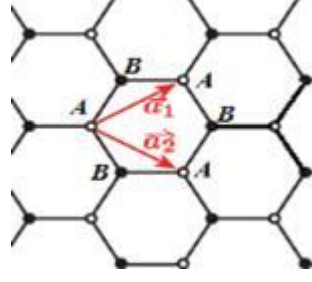


Şekil 3.2 (a) Karbon atomunda (b) grafende elektronların yörüngelere yerleşmesi (Wong ve Akinwande 2011)

Yeni yörüngeler melez yörüngeler olarak adlandırılır. Grafende, karbon atomlarının 2s yörüngeleri, 2p_x ve 2p_y yörüngeleri ile sp² melezleşmesi yapar. Bunun sonucunda, güçlü bağ olarak adlandırılan σ bağları oluşur ve bu bağlar grafende üçgensel düzlem yapıya yol açarlar (Wallace 1947). Grafendeki bal peteği yapısını oluşturan iki farklı üçgensel yapı (Bravais alt örgüsü) vardır. Bunlardan birindeki atomlar A diğerindekiler ise B atomları olarak adlandırılır. 2p_z elektronları ise komşu karbon atomları ile kovalent bağ yaparak π ve π^* bandını oluşturur. 2p_z yörüngelerindeki elektronlar çekirdeklere zayıf bir şekilde bağlıdır ve grafenin elektronik özelliklerinden sorumludurlar.

3.2 Grafenin Periyodik Yapısı

Baz vektörleri örgüyü periyodik olarak değişmez bırakan basit ötelemelerdir (Wong ve Akinwande, 2011). Grafenin kristal örgüsündeki baz vektörleri $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ şekil 3.3’te gösterildiği gibidir. Bu iki baz vektörü ilkel hücre olarak adlandırılan paralelkenarı oluştururlar. İlkel hücre kristali temsil eden en küçük birimdir ve tüm kristal uzayı bu ilkel hücrenin ötelemeleri ile elde edilir. Yani, herhangi bir $\vec{R} = m \vec{a}_1 + n \vec{a}_2$ vektörü, n, m tamsayı olmak üzere kristal örgüdeki bir noktanın koordinatını verir. Düzlemsel olan grafende karbon atomları, iki farklı alt örgüden oluşan, altıgen bal peteği örgü yapısına sahiptir. Grafenin her bir birim örgü hücresinde A ve B olarak adlandırılan iki karbon atomu bulunur.



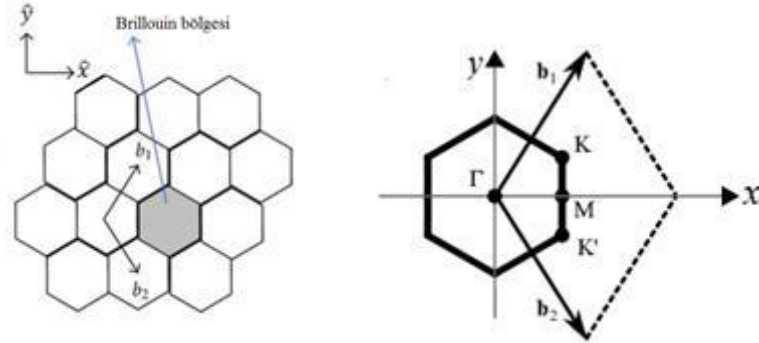
Şekil 3.3 Grafende A ve B olarak adlandırılan karbon atomlarının $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ baz vektörleri

Karbon atomları arasındaki uzaklık $a = 1,42 \text{ Å}$ olmak üzere, $\vec{a}_1$ ve $\vec{a}_2$ baz vektörleri aşağıdaki gibi yazılabilir (Wong ve Akinwande, 2011):

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{3a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \quad \vec{a}_2 = \left(\frac{3a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2} \right), \quad |\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = \sqrt{3}a. \quad (3.1)$$

3.3 Ters Örgü

Ters örgü, şekil 3.4’de gösterildiği gibi altıgen yapıya sahiptir ve gerçek örgünün 90° döndürülmüş halidir.



Şekil 3.4 Brillouin bölgesinin ters örgü için gösterimi

$\vec{a}$ birim örgü vektörleri ve $\vec{b}$ ters örgü vektörleri arasındaki bağıntı

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = 2\pi\delta_{ij}, \quad i = j = 1, 2 \quad (3.2)$$

şeklindedir. Bu eşitlikte (3.1) ile verilen baz vektörleri kullanılarak, ters örgü vektörleri aşağıdaki gibi bulunur (Wong ve Akinwande 2011):

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{2\pi}{3a}, \frac{2\sqrt{3}\pi}{3a} \right), \quad \vec{b}_2 = \left(\frac{2\pi}{3a}, -\frac{2\sqrt{3}\pi}{3a} \right), \quad |\vec{b}_1| = |\vec{b}_2| = \frac{4\pi}{\sqrt{3}a}. \quad (3.3)$$

Brillouin bölgesi şekil 3.4'de boyalı bölge ile gösterilen altıgen yapıdır ve katının elektronik band yapısını tanımlar. Brillouin bölgesinin belirleyici noktaları şekil 3.4'de gösterilmiştir. K, K' Brillouin bölgesinin eşdeğer olmayan köşelerini, M noktası bu köşelere ait kenarın orta noktasını ve Γ hücre merkezini (simetri noktası) gösterir:

$$\Gamma K = \left(\frac{2\pi}{3a}, \frac{2\pi}{3\sqrt{3}a} \right), \quad \Gamma K' = \left(\frac{2\pi}{3a}, -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}a} \right), \quad \Gamma M = \left(\frac{2\pi}{3a}, 0 \right). \quad (3.4)$$

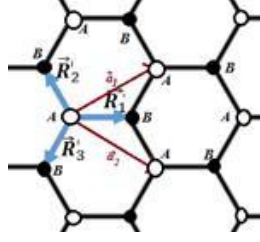
Brillouin bölgesinin diğer dört köşesi, K ve K' noktalarına ötelemeler (ters örgü baz vektörleri tarafından üretilen) uygulanarak elde edilir. Grafende Brillouin bölgesinin köşelerinden ikisinin (K, K') eşdeğer olmamasının nedeni, grafenin bal peteği örgüsünün iki alt Bravais örgüsüne sahip olmasıdır. Bu noktalar grafenin elektronik özelliklerinde önemli rol oynarlar, çünkü grafende düşük enerji uyarılmaları bu iki nokta etrafında yoğunlaşmıştır.

3.4 Grafende Sıkı Bağ Yaklaşımı

Farklı tipte iki atom ile oluşturulan örgü içindeki sıkı bağ yaklaşımını bulmak için dalga fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$\psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{R}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}} [c_A \phi_A(\vec{r} - \vec{R}) + c_B \phi_B(\vec{r} - \vec{R}')]. \quad (3.5)$$

Burada, C_A ve C_B normalizasyon katsayısıdır ve $\vec{R}' = \vec{R} + \vec{a}$ olarak tanımlıdır. $\vec{k}$ dalga vektörü ve momentum arasındaki ilişki $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ şeklindedir. $\phi_A(\vec{r} - \vec{R})$, A atomuna karşılık gelen dalga fonksiyonunu ve $\phi_B(\vec{r} - \vec{R}')$, B atomuna karşılık gelen dalga fonksiyonunu göstermektedir. Birim örgüdeki A atomunun koordinat sisteminin merkezinde olduğunu varsayalım. Şekil 3.5'de gösterildiği gibi merkezde olan A atomunun birinci en yakın komşuluğundaki B atomları için yer vektörleri $\vec{R}'_1, \vec{R}'_2, \vec{R}'_3$ ve birim örgü hücresindeki B atomunun birinci en yakın komşuluğunda bulunan atomlarının yer vektörleri $\vec{R}_1, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ olsun.



Şekil 3.5 Merkezde olan A atomunun birinci en yakın komşuluğundaki B atomları için yer vektörleri $\vec{R}'_1, \vec{R}'_2, \vec{R}'_3$

A atomuna komşu B atomları için yer vektörleri

$$\vec{R}'_1 = (a, 0), \quad \vec{R}'_2 = \left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), \quad \vec{R}'_3 = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right) \quad (3.6)$$

ve B atomuna komşu A atomları için yer vektörleri

$$\vec{R}_1 = (a, 0), \quad \vec{R}_2 = \left(\frac{3a}{2}, \frac{\sqrt{3}a}{2}\right), \quad \vec{R}_3 = \left(\frac{3a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}\right) \quad (3.7)$$

şeklindedir.

Her atomun (A ve B) dalga fonksiyonunun sadece kendisi ile üst üste geldiğini, yani

$$\langle A; \vec{R} | A; \vec{R}' \rangle = \delta_{RR'} \quad (3.8)$$

olduğunu varsayalım. Hamiltoniyeinin $|A; 0 \rangle$ ve $|B; \vec{R}_1 \rangle$ durumundaki beklenen değerleri

$$\langle A; 0 | H | \psi \rangle = c_A E(k), \quad (3.9)$$

$$\langle B; \vec{R}_1 | H | \psi \rangle = c_B E(k) \quad (3.10)$$

şeklindedir. A ve B atomlarının kendilerine en yakın olan atomlara geçiş yaptığı düşünülerek (sıkı bağ yaklaşımı), birinci yakın komşuluklar göz önüne alınırsa, $|\psi \rangle$ dalga fonksiyonunun sıfırdan farklı matris elemanlarına yol açan terimleri aşağıdaki gibi alınabilir:

$$|\psi \rangle \approx c_A (|A; 0 \rangle + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} |A; a_1 \rangle + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_2} |A; a_2 \rangle) + c_B (e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}'_1} |B; \vec{R}'_1 \rangle + e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}'_2} |B; \vec{R}'_2 \rangle + e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}'_3} |B; \vec{R}'_3 \rangle). \quad (3.11)$$

Bu durumda, Hamiltoniyeinin sıfırdan farklı matris elemanları

$$\begin{aligned} \langle A; 0 | H | A; 0 \rangle &= E_{AA} = E_{2P}, & \langle A; 0 | H | B; \vec{R}'_1 \rangle &= E_{AB_1}, \\ \langle A; 0 | H | B; \vec{R}'_2 \rangle &= E_{AB_2}, & \langle A; 0 | H | B; \vec{R}'_3 \rangle &= E_{AB_3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle B; \vec{R}_1 | H | B; \vec{R}_1 \rangle &= E_{BB} = E_{2P}, & \langle B; \vec{R}_1' | H | A; \vec{R}_2 \rangle &= E_{BA_2}, \\
\langle B; \vec{R}_1' | H | A; \vec{R}_3 \rangle &= E_{BA_3}, & \langle B; \vec{R}_1' | H | A; 0 \rangle &= E_{BA_1} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

Denklem (3.11), denklem (3.9) ve (3.10)'da yerine yazılıp, (3.12) ile verilen eşitlikler kullanıldığında

$$c_A (E(k) - E_{AA}) = c_B E_{AB} e^{iak_x} \left(1 + e^{-i\frac{3}{2}ak_x + i\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y} + e^{-i\frac{1}{2}ak_x - i\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y} \right), \quad (3.13)$$

$$c_B (E(k) - E_{BB}) = c_A E_{BA} e^{-iak_x} \left(1 + e^{i\frac{3}{2}ak_x - i\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y} + e^{i\frac{3}{2}ak_x + i\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y} \right) \quad (3.14)$$

denklemleri bulunur. Burada,

$$E_{AB_1} = E_{AB_2} = E_{AB_3} = E_{AB}, \quad (3.15)$$

$$E_{BA_1} = E_{BA_2} = E_{BA_3} = E_{BA} \quad (3.16)$$

olarak alınmıştır. Denklem (3.13) ve denklem (3.14) matris formunda ifade edilebilir:

$$\begin{pmatrix} E_{AA} & E_{AB} e^{iak_x} \left(1 + e^{-i\frac{3}{2}ak_x + i\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y} + e^{-i\frac{1}{2}ak_x - i\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y} \right) \\ E_{BA} e^{-iak_x} \left(1 + e^{i\frac{3}{2}ak_x - i\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y} + e^{i\frac{3}{2}ak_x + i\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y} \right) & E_{BB} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} = E(k) \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

$E_{AA} = E_{BB}$, $E_{BA} = E_{AB}^*$ için, etkin Hamiltoniyen

$$\begin{aligned}
H_{etkin} &= \begin{pmatrix} E_{AA} & E_{AB} e^{iak_x} \left(1 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y\right)e^{-i\frac{3}{2}ak_x} \right) \\ E_{AB}^* e^{iak_x} \left(1 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y\right)e^{i\frac{3}{2}ak_x} \right) & E_{AA} \end{pmatrix} \quad (3.18)
\end{aligned}$$

olarak alınabilir. Böylece, (3.17) ile verilen özdeğer problemi çözülerek,

$$E_{\pm}(k) = E_{AA} \pm \beta \sqrt{1 + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y\right)\cos\left(\frac{3}{2}ak_x\right) + 4\cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ak_y\right)} \quad (3.19)$$

bulunur. Burada,

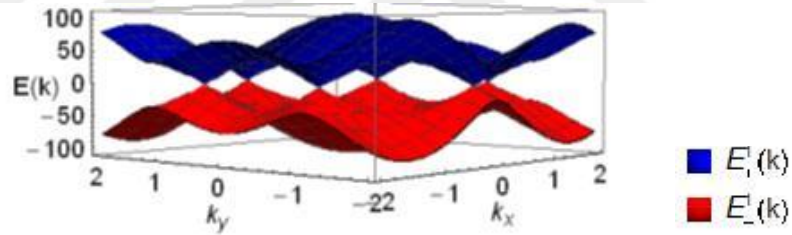
$$\beta = \sqrt{E_{AB}E_{AB}^*} \quad (3.20)$$

ile verilir. Grafenin birinci yakın atom komşuluğunda sıkı bağ enerji band yapısı şekil 3.6'da çizdirilmiştir. Şekilde de görüldüğü gibi altıgen olan Brillouin bölgesinin K noktalarında değerlik ve iletkenlik bandları çakışmaktadır ve bu noktaların civarında enerjiler k kuasi-momentumuna doğrusal olarak bağlıdır.

$c_A(k) = 1$ olmak üzere, bu özdeğerlere karşılık gelen öz durumlar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\psi_k^\pm = \begin{pmatrix} c_A^\pm(k) \\ c_B^\pm(k) \end{pmatrix},$$

$$\psi_k^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\pm \frac{E_{AB}^* e^{iak_x} \left(1 + 2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ak_y\right) e^{-i\frac{3}{2} ak_x} \right)}{\beta \sqrt{1 + 4 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ak_y\right) \cos\left(\frac{3}{2} ak_x\right) + 4 \cos^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ak_y\right)}} \right). \quad (3.21)$$

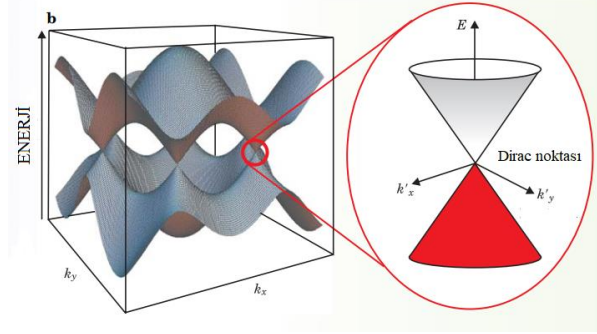


Şekil 3.6 Grafenin en yakın atom komşuluğunda sıkı bağ enerji band yapısı. Burada, $\beta = 36$, $E_{AA} = 0$ alınmıştır

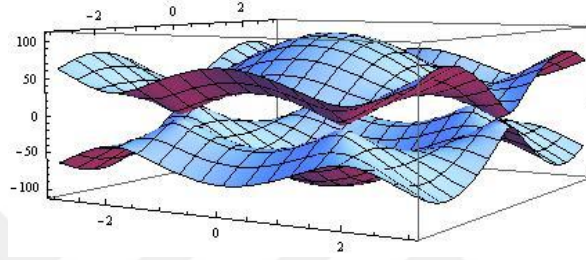
3.5 Sürekli Limit

Grafende “elektronların” Fermi enerjisindeki ($E_F = 0$) davranışı önemlidir. Şekil 3.7’de grafenin enerji band yapısı görülmektedir. Alttaki band $E_-(k)$ değerlik bandı (π bandı), üstteki band $E_+(k)$ iletim bandı (π^* bandı) olmak üzere, π bandının π^* bandına dokunduğu nokta Dirac noktası olarak adlandırılır (Fuchs ve Goerbig 2008, Neto vd. 2009, Wong ve Akinwande 2011) ve K ile gösterilir (bakınız şekil 3.7a ve şekil 3.7b). Bu nokta civarında enerji, k kuasi-momentumuna doğrusal olarak bağlıdır.

a)



b)



Şekil 3.7 (a) Grafenin Dirac noktası (K) civarında enerji band yapısı (Wilson 2006),
(b) Dirac noktasından bir kesit

(3.17) ile verilen matris özdeğer denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & E_{AB} e^{iak_x} \left(1 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ak_y\right) e^{-i\frac{3}{2} ak_x} \right) \\ E_{AB}^* e^{iak_x} \left(1 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ak_y\right) e^{i\frac{3}{2} ak_x} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} = (E - E_{AA}) \begin{pmatrix} c_A \\ c_B \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

olarak düzenlenebilir. $\vec{q}$ Dirac noktasındaki görel momentum olmak üzere,

$$\vec{k} = \vec{K} + \vec{q}, \quad (|\vec{q}| \ll |\vec{k}|) \quad (3.23)$$

(3.22)'deki etkin Hamiltoniyen, $\vec{K}$ Dirac noktası civarında seriye açılabilir:

$$H'_K = \begin{pmatrix} 0 & \beta e^{i\alpha} e^{iak_x} \left(\frac{3}{2} ai(q_x - iq_y) \right) \\ \beta e^{-i\alpha} e^{-iak_x} \left(-\frac{3}{2} ai(q_x + iq_y) \right) & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Burada, denklem (3.20)'de tanımlanan β tanımı gözönünde bulundurulmuştur. (3.24)
Hamiltoniyeni düzenlendikten sonra

$$H'_K = \frac{3}{2}a\beta \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\alpha+\frac{7\pi}{6})}(q_x - iq_y) \\ e^{-i(\alpha+\frac{7\pi}{6})}(q_x + iq_y) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

elde edilir. Bu Hamiltoniyene,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

benzerlik dönüşümü uygulandığında $H_q^K = S^{-1}H'_K S$,

$$H_q^K = \frac{3}{2}a\beta(q_x\sigma_x + q_y\sigma_y) \quad (3.27)$$

olarak bulunur. Benzer işlemler K' noktası için yapılırsa

$$H_q^{K'} = \frac{3}{2}a\beta(q_x\sigma_x - q_y\sigma_y) \quad (3.28)$$

sonucuna ulaşılır. K ve K' Dirac noktaları için olan bu iki matris kullanılarak, 4×4 'lük matris Hamiltoniyen aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$H_q = \frac{3}{2}a\beta \begin{pmatrix} q_x\sigma_x + q_y\sigma_y & 0 \\ 0 & q_x\sigma_x - q_y\sigma_y \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Fermi sürati

$$v_F = \frac{3}{2} \frac{a\beta}{\hbar} = \frac{c}{300} \quad (3.30)$$

olmak üzere, (3.29) Dirac-Weyl Hamiltoniyeni

$$H_q = \hbar v_F \begin{pmatrix} q_x\sigma_x + q_y\sigma_y & 0 \\ 0 & q_x\sigma_x - q_y\sigma_y \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

olarak tekrar yazılabilir. Denklem (3.23) ve $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ eşitliği dikkate alındığında, (3.31) Hamiltoniyeni, düzlemde (grafende) Fermi hızı ile ilerleyen kütesiz Dirac elektronlarının hareketini tanımlayan iki boyutta Dirac-Weyl Hamiltoniyeni olarak ifade edilebilir (Neto vd. 2009):

$$H = v_F \vec{\sigma} \cdot \vec{p}. \quad (3.32)$$

Burada, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ Pauli matrisi ve $\vec{p} = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ momentum işlemcisidir.

(3.31) Hamiltoniyeni için 4×1 'li spinör dalga fonksiyonu,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_A^K \\ \psi_B^K \\ \psi_A^{K'} \\ \psi_B^{K'} \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

ile verilir (Schiff 1949) ve bu Hamiltoniyene karşılık gelen özdeğer denkleminden $(H_q \psi = \mathcal{E} \psi)$ özdeğerler: $\mathcal{E}_{1,2} = \hbar v_F \sqrt{q_x^2 + q_y^2} = \hbar v_F |\vec{q}|$ olarak bulunur. $\theta_q = \arctan(\frac{q_y}{q_x})$ olmak üzere, bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\psi_K^\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm e^{i\theta_q} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{K'}^\pm = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \pm e^{i\theta_q} \end{pmatrix}. \quad (3.34)$$

4. SÜPERSİMETİK KUANTUM MEKANİĞİ YÖNTEMLERİ

Süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri çözülebilen bir problemten başlayarak yeni çözülebilir problemler hiyerarşisi kurmaya, problemlerin altında yatan cebirsel yapıları bulmaya, problemlerin spektrumlarını cebirsel olarak elde etmeye yararlar. Bir boyutta eş değer olan Darboux dönüşümü, çarpanlara ayırma, bağlaştırım (intertwining) ve şekil değişmezlik SUSY kuantum mekaniği yöntemlerindendir (Matveev ve Salle 1991, Cooper vd. 1995, Junker 1996, Fernandez 2010). Bu bölümde, çarpanlara ayırma, bağlaştırım ve şekil değişmezlik yöntemleri incelenmiştir.

4.1 Çarpanlara Ayırma Yöntemi

Tek parçacıklı bir sistem için kuantum mekaniksel Hamilton işlemcisi (Hamiltoniyen)

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (4.1)$$

şeklindedir. Burada, m parçacığın kütlesi, $\hbar$ Planck sabiti ve $V_1(x)$ potansiyel enerji fonksiyonudur. $\psi_1^0(x)$, $E_1^0 = 0$ taban durumu enerjisine karşılık gelen dalga fonksiyonu olmak üzere, H_1 Hamiltoniyenine karşılık gelen Schrödinger denklemi ($H_1\psi_1^0(x) = E_1^0\psi_1^0(x)$) aşağıdaki gibidir:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_1^0(x)}{dx^2} + V_1(x)\psi_1^0(x) = 0. \quad (4.2)$$

Bu denklemden potansiyel

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(\psi_1^0)''(x)}{\psi_1^0(x)} \quad (4.3)$$

olarak elde edilir. Burada, $(\psi_1^0)''(x) := \frac{d^2\psi_1^0(x)}{dx^2}$ şeklinde tanımlıdır. H_1 Hamilton işlemcisi birbirinin Hermitsel eşleniği olan, birinci mertebeden iki diferansiyel işlemcinin ($a^\pm$) çarpımı şeklinde yazılabilir (Cooper vd. 1995):

$$H_1 = a^+ a^-. \quad (4.4)$$

$W(x)$ süperpotansiyel olmak üzere, $a^\pm$ işlemcileri

$$a^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x), \quad a^- = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlıdır. Bu işlemciler H_1 Hamilton işlemcisinde yerine konulursa $V_1(x)$ potansiyeli

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (4.6)$$

olarak bulunur. Burada, $W'(x) := \frac{dW(x)}{dx}$ şeklinde tanımlıdır ve (4.6) denklemi bir Riccati denklemidir. Taban durumu $E_1^0 = 0$ için Schrödinger denkleminden,

$$H_1 \psi_1^0(x) = a^+ a^- \psi_1^0(x) = 0 \implies a^- \psi_1^0(x) = 0 \quad (4.7)$$

eşitliğine ulaşılır. Eğer $W(x)$ biliniyorsa, bu denklem çözülerek $\psi_1^0(x)$ taban durumu elde edilir. Ayrıca, bu denklemden $W(x)$ süperpotansiyeli taban durumu cinsinden ifade edilebilir:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{(\psi_1^0)'(x)}{\psi_1^0(x)}. \quad (4.8)$$

(4.5) ile verilen diferansiyel işlemcilerin ters sırada çarpımı yeni bir Hamilton işlemcisine yol açar:

$$H_2 = a^- a^+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1^0(x)}{dx^2} + V_2(x) \psi_1^0(x). \quad (4.9)$$

Burada, $V_2(x)$ potansiyeli

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (4.10)$$

şeklindedir.

H_1 ve H_2 Hamilton işlemcilerinin enerji özdeğerleri ve çözümleri arasında bir ilişki vardır. Bu Hamilton işlemcilerinin k . uyarılmış enerji düzeylerine karşılık gelen enerji özdeğerleri sırası ile E_1^k , E_2^k ve öz fonksiyonları $\psi_1^k(x)$, $\psi_2^k(x)$ olmak üzere, bu durumlar için özdeğer denklemleri

$$H_1 \psi_1^k(x) = a^+ a^- \psi_1^k(x) = E_1^k \psi_1^k(x), \quad H_2 \psi_2^k(x) = a^- a^+ \psi_2^k(x) = E_2^k \psi_2^k(x) \quad (4.11)$$

olarak yazılır. Burada, $k = 0, 1, 2, \dots$ enerji düzeylerini etiketlemektedir. Bu denklemlerin ilkinde soldan a^- ve ikincisine soldan a^+ işlemcileri etki ettirilirse

$$a^- a^+ a^- \psi_1^k(x) = H_2 (a^- \psi_1^k(x)) = E_1^k (a^- \psi_1^k(x)), \quad (4.12)$$

$$a^+ a^- a^+ \psi_2^k(x) = H_1 (a^+ \psi_2^k(x)) = E_2^k (a^+ \psi_2^k(x)), \quad (4.13)$$

denklemleri elde edilir. Buradan da, aşağıdaki bağıntılara ulaşılır:

$$E_2^k = E_1^{k+1}, \quad \psi_2^k(x) = a^- \psi_1^{k+1}(x), \quad \psi_1^k(x) = a^+ \psi_2^{k-1}(x). \quad (4.14)$$

4.2 Bağlaştırım Yöntemi

Bağlaştırım yöntemi, tam olarak çözülebilen çizgisel ve çizgisel olmayan problemler ile bunların hiyerarşilerini kurmak için kullanılan bir yöntemdir. Her zaman diferansiyel formda olmak zorunda olmamakla birlikte (matris de olabilir), L çizgisel diferansiyel bağlaştırım işlemcisi, H_1 ve H_2 skaler Hamiltoniyen işlemcilerini aşağıdaki gibi ilişkilendirir:

$$LH_1 = H_2L. \quad (4.15)$$

Bu durumda, ψ_1^k , H_1 'in E_1^k özdeğerli özfonksiyonu ise, $\psi_2^k = L\psi_1^k$ 'da H_2 'nin E_1^k özdeğerli bir özfonksiyonudur. Bunu açıkça görmek için, H_1 ve H_2 Hamiltoniyenleri için Schrödinger denklemlerini ele alalım:

$$H_1\psi_1^k = E_1^k \psi_1^k, \quad (4.16)$$

$$H_2\psi_2^k = E_2^k \psi_2^k. \quad (4.17)$$

Bağlaştırım işlemcisi, denklem (4.16)'ya uygulanıp

$$LH_1\psi_1^k = LE_1^k\psi_1^k, \quad (4.18)$$

denklem (4.15) ile verilen bağlaştırım bağıntısı kullanılırsa,

$$H_2(L\psi_1^k) = E_1^k(L\psi_1^k) \quad (4.19)$$

elde edilir. Yani $\psi_2^k = L\psi_1^k$, H_2 'nin E_1^k özdeğerli bir özfonksiyonudur.

L 'nin Hermitsel eşleniği ($L^\dagger$), L 'nin tersi doğrultusunda bağlaştırım yapar: $H_1L^\dagger = L^\dagger H_2$. Bu bağıntı ve denklem (4.15) ile verilen bağlaştırım bağıntısı, H_1 ve H_2 için iki gizli dinamik simetri işlemcisini verir (Kuru 2004):

$$[H_1, L^\dagger L] = [H_2, LL^\dagger] = 0. \quad (4.20)$$

4.3 şekil Değişmezlik

şekil değişmez potansiyeller (shape invariant), şekilleri aynı fakat bağlı oldukları parametreleri farklı olan süpereş potansiyellerdir ve aşağıdaki gibi ifade edilirler:

$$V_2(x, a_1) = R(a_1) + V_1(x, a_2). \quad (4.21)$$

Burada, $V_2(x, a_1)$ ve $V_1(x, a_2)$ şekil değişmez potansiyellerdir (Cooper vd. 2001). Ayrıca, a_1 parametrelerin kümesini ve a_2 ise a_1 'in fonksiyonunu göstermektedir.

4.4 Bir Boyutlu Schrödinger Hamiltoniyenlerinin Hiyerarşisi

Şekil değişmez Hamiltoniyenler için en çok kullanılan iki çeşit hiyerarşi durumu vardır: artan hiyerarşi ve azalan hiyerarşi (Infeld ve Hull 1951, Cooper vd. 1995, Fernandez 2010, Dong 2007).

i) Artan hiyerarşi

İkinci mertebeden H_n Hamiltoniyeni, birinci mertebeden birbirinin Hermitsel eşleniği olan $a_n^\pm$ diferansiyel işlemcileri cinsinden yazılabilir. Böylece hiyerarşi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H_n = -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_n(x) = a_n^+ a_n^- + \mu_n^2 = a_{n-1}^- a_{n-1}^+ + \mu_{n-1}^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.22)$$

Burada, $\mu_n^2 = (\mu_n)^2$ gerçel ve pozitif çarpanlara ayırma enerjisidir. Bundan sonra, basitlik olması açısından $\hbar = 1 = 2m$ olarak alınacaktır. $a_n^\pm$ işlemcileri, $W_n(x)$ süperpotansiyeli cinsinden aşağıdaki şekilde tanımlıyken

$$a_n^\pm = \mp \frac{d}{dx} + W_n(x), \quad (4.23)$$

$V_n(x)$ potansiyeli

$$V_n(x) = W_n(x)^2 - W_n'(x) + \mu_n^2 = W_{n-1}(x)^2 + W_{n-1}'(x) + \mu_{n+1}^2 \quad (4.24)$$

olarak ifade edilir. H_n Hamiltoniyenin taban durum dalga fonksiyonu, a_n^- işlemcisi tarafından yok edilir:

$$a_n^- \psi_n^0 = 0 \implies \psi_n^0(x) = K e^{-\int W_n(x) dx}. \quad (4.25)$$

Burada K , integral sabitidir. Taban durumu için enerji,

$$E_n^0 = \mu_n^2 \quad (4.26)$$

olarak yazılır. $a_n^\pm$ bağlantırım işlemcileri ve (4.22) hiyerarşisi kullanılarak, H_n ve H_{n+1} ardışık Hamiltoniyenleri arasındaki bağlantırım bağıntıları bulunur:

$$a_n^- H_n = H_{n+1} a_n^-, \quad H_n a_n^+ = a_n^+ H_{n+1}. \quad (4.27)$$

a_n^- yok edici işlemcisi, hiyerarşide sağa doğru, a_n^+ yaratıcı işlemcisi ise sola doğru etki eder:

$$a_n^-: \psi_n^k \rightarrow \psi_{n+1}^{k-1}, \quad a_n^+: \psi_{n+1}^{k-1} \rightarrow \psi_n^k. \quad (4.28)$$

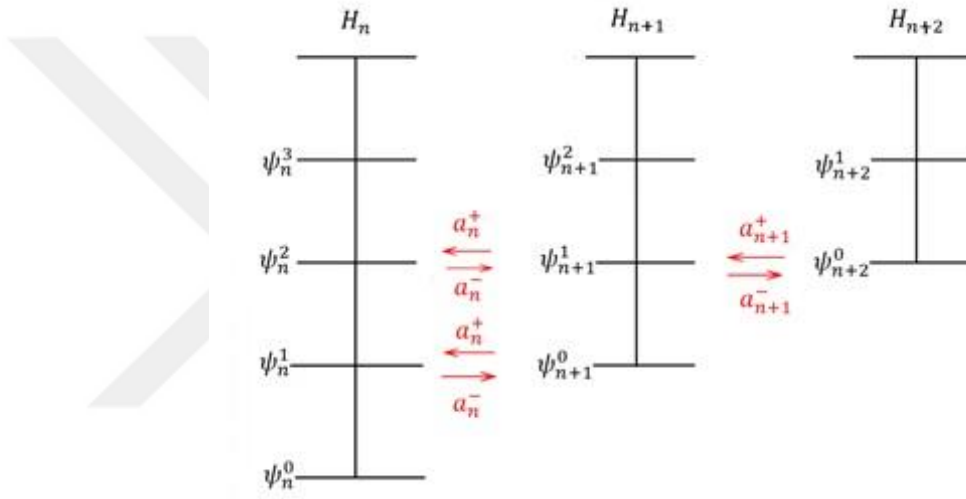
İşlemcilerin özfonksiyonlar üzerindeki etkisi

$$a_n^- \psi_n^k = \sqrt{\mu_{n+k}^2 - \mu_n^2} \psi_{n+1}^{k-1}, \quad a_n^+ \psi_{n+1}^{k-1} = \sqrt{\mu_{n+k}^2 - \mu_n^2} \psi_n^k \quad (4.29)$$

şeklindedir. Şekil 4.1'de artan H_n hiyerarşisi şematik olarak gösterilmiştir. H_{n+k} Hamiltoniyeinin taban durum özfonksiyonuna (ψ_{n+k}^0), a_n^+ yaratıcı işlemcileri uygulanarak, H_n Hamiltoniyeinin k . uyarılmış özfonksiyonu (ψ_n^k) elde edilir:

$$\psi_n^k \propto a_n^+ \dots a_{n+k-1}^+ \psi_{n+k}^0, \quad E_n^k = \mu_{n+k}^2 = (\mu_{n+k})^2. \quad (4.30)$$

Artan hiyerarşiye örnek olarak trigonometrik Pöschl-Teller Hamiltoniyeni verilebilir.



Şekil 4.1 Artan H_n Hamiltoniyeni hiyerarşisi

ii) Azalan hiyerarşi

Azalan hiyerarşi, $a_n^\pm$ diferansiyel işlemcileri cinsinden aşağıdaki gibidir:

$$H_n = -\frac{d^2}{dx^2} + V_n(x) = a_n^+ a_n^- - \mu_n^2 = a_{n+1}^- a_{n+1}^+ - \mu_{n+1}^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (4.31)$$

Burada, $\mu_n^2 = (\mu_n)^2$ gerçel ve pozitif çarpanlara ayırma enerjisidir. $a_n^\pm$ işlemcileri, $W_n(x)$ süperpotansiyel olmak üzere, denklem (4.23)'teki gibi tanımlıdır. Azalan hiyerarşi için $V_n(x)$ potansiyeli

$$V_n(x) = W_n(x)^2 - W_n'(x) - \mu_n^2 = W_{n+1}(x)^2 + W_{n+1}'(x) - \mu_{n+1}^2 \quad (4.32)$$

olarak ifade edilir. H_n Hamiltoniyeinin taban durum dalga fonksiyonu, a_n^- işlemcisi tarafından yok edilir: $a_n^- \psi_n^0 = 0$. $E_n^0 = -\mu_n^2$ negatif taban durum enerjisidir.

$a_n^\pm$ bağlaştırmı işlemcileri ve (4.32) hiyerarşisi kullanılarak, H_n ve H_{n-1} ardışık Hamiltoniyenleri arasındaki bağlaştırmı bağıntıları bulunur (Cooper vd. 1995):

$$a_n^- H_n = H_{n-1} a_n^-, \quad H_n a_n^+ = a_n^+ H_{n-1}. \quad (4.33)$$

a_n^- yok edici işlemcisi, hiyerarşide sola doğru, a_n^+ yaratıcı işlemcisi ise sağa doğru etki eder:

$$a_n^-: \psi_n^k \rightarrow \psi_{n-1}^{k-1}, \quad a_n^+: \psi_{n-1}^{k-1} \rightarrow \psi_n^k. \quad (4.34)$$

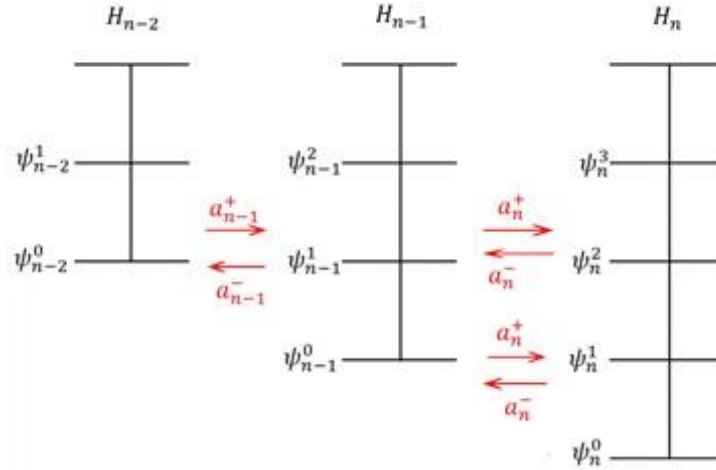
İşlemcilerin özfonksiyonlar üzerindeki etkisi

$$a_n^- \psi_n^k = \sqrt{\mu_n^2 - \mu_{n-k}^2} \psi_{n-1}^{k-1}, \quad a_n^+ \psi_{n-1}^{k-1} = \sqrt{\mu_n^2 - \mu_{n-k}^2} \psi_n^k \quad (4.35)$$

şeklindedir. Şekil 4.2’de azalan H_n hiyerarşisi şematik olarak gösterilmiştir. H_{n-k} Hamiltoniyenin taban durum özfonksiyonuna (ψ_{n-k}^0), a_n^+ işlemcileri uygulanarak, H_n Hamiltoniyenin k . uyarılmış özfonksiyonu (ψ_n^k) elde edilir:

$$\psi_n^k \propto a_n^+ a_{n-1}^+ \dots a_{n-k+1}^+ \psi_{n-k}^0, \quad E_n^k = E_{n-k}^0 = -\mu_{n-k}^2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

Burada, $\mu_{n-k}^2 = (\mu_{n-k})^2$ gerçel ve pozitifdir. Azalan hiyerarşiye örnek olarak hiperbolik Pöschl-Teller Hamiltoniyeni verilebilir.



Şekil 4.2 Azalan H_n Hamiltoniyeni hiyerarşisi

Yukarıda anlatılan bu iki duruma ek olarak, çarpanlara ayırma enerjileri eşit olan durum da olabilir:

$$\mu^2 = \mu_n^2, \quad \forall n. \quad (4.37)$$

Bu hiyerarşide, H_n Hamiltoniyenlerinin spektrumu aynıdır ve eş spektrumlu (isospectral) olarak adlandırılırlar.

5. HİPERBOL ÜZERİNDE DIRAC VE DIRAC WEYL DENKLEMLERİ

Bu tez çalışmasında, hiperbol yüzeyinde, yüzeye dik manyetik alan altında hareket eden kütsüz elektronların davranışını incelemek için, karşılık gelen Dirac-Weyl denklemi süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemleri kullanılarak çözülmüştür (Demir Kızılırmak vd. 2020). Daha sonra, hiperbol üzerinde Dirac denkleminin bağı durum çözümleri Dirac-Weyl denkleminin bağı durum çözümlerinden yola çıkılarak elde edilmiştir (Demir Kızılırmak ve Kuru 2021).

Grafen kuantum kapsülleri, iki tabakalı grafende bazı bölgelerde tabakaların birbirinden ayrılarak deforme olmasıyla oluşur (Liu vd. 2017, Abdullah vd. 2018). Manyetik alan etkisindeki hiperbol yüzeyinde Dirac elektronlarının hareketlerinin incelenmesinin, grafen kuantum kapsüllerinde uygulamaya sahip olabileceği düşünülmektedir. Ancak, bunun için grafenin deformasyonundan kaynaklanan etkiler de göz önünde bulundurulmalıdır. Burada yapılan bu kuramsal inceleme, daha sonra bu konuda yapılacak gerçeğe daha yakın çalışmalar için bir temel oluşturmaktadır. Böylece, deneysel ve teorik sonuçlar karşılaştırılabilecektir.

5.1 Hiperbol Üzerinde Dirac-Weyl Denklemi

(3 + 1) boyutta Kartezyen koordinatlarda kütsüz parçacıklar için Dirac-Weyl denklemi,

$$v_F(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \Phi(x, y, z, t) = i\hbar \frac{\partial \Phi(x, y, z, t)}{\partial t} \quad (5.1)$$

olarak yazılabilir. Burada, $\vec{\sigma} = (\vec{\sigma}_x, \vec{\sigma}_y, \vec{\sigma}_z)$ Pauli matrisi, $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla} = -i\hbar(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ üç boyutlu momentum işlemcisidir ve $\partial_x := \frac{d}{dx}$, $\partial_y := \frac{d}{dy}$, $\partial_z := \frac{d}{dz}$ olarak tanımlıdır. Dirac elektronu ve manyetik alan arasındaki etkileşme (5.1)'deki $\vec{p}$ momentum işlemcisi, $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$ ile değiştirilerek tanımlanır. Burada, $q = -e$ elektronun yükü ve $\vec{A}$ vektör potansiyelidir. $\vec{B}$ manyetik alanı, $\vec{A}$ vektör potansiyeli cinsinden

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (5.2)$$

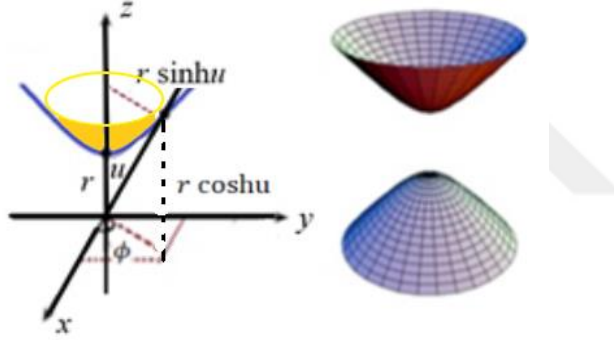
olarak tanımlanır. $\Phi(x, y, z, t) = \Psi(x, y, z)e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ ifadesi (5.1) denkleminde yerine yazılırsa, zamandan bağımsız Dirac-Weyl denklemi için,

$$v_F \left[\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \right] \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z) \quad (5.3)$$

elde edilir. Şimdi (5.3) denklemini bu probleme uygun şekilde yani hiperbolik koordinatlarda ifade edelim. Burada, $SO(1,2)$ simetrisini korumak için, Öklid iç çarpımı yerine, nokta "." ile temsil edilen $(-, -, +)$ işaretli skaler çarpımı (pseudo-skaler çarpım) kullanılmalıdır (Tung 1985).

z eksenini boyunca yönlendirilmiş iki yapraklı hiperbol $x^2 + y^2 - z^2 = -r^2$ denklemi ile tanımlanır. Hiperbolik koordinatlar (r, u, ϕ) , şekil 5.1'de gösterilmiştir ve Kartezyen koordinatlar (x, y, z) ile ilişkisi

$$x = r \sinh u \cos \phi, \quad y = r \sinh u \sin \phi, \quad z = r \cosh u \quad (5.4)$$



Şekil 5.1 Hiperbolik koordinatların gösterimi

ile verilir. Burada, $0 < u < \infty$, $0 \leq \phi < 2\pi$ ve $0 < r < \infty$ aralıklarında tanımlıdır (Demir Kızılırmak vd. 2020).

Hiperbolik koordinatlar cinsinden Kartezyen koordinatlarda momentum işlemcileri,

$$p_x = -i\hbar \partial_x = -i\hbar \left(-\sinh u \cos \phi \partial_r - \frac{\sin \phi}{r \sinh u} \partial_\phi + \frac{\cosh u \cos \phi}{r} \partial_u \right), \quad (5.5)$$

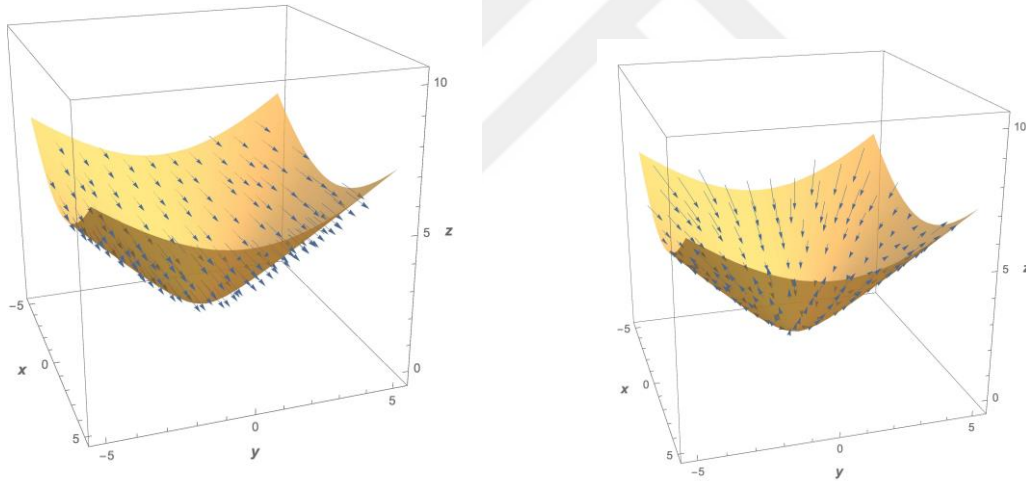
$$p_y = -i\hbar \partial_y = -i\hbar \left(-\sinh u \sin \phi \partial_r + \frac{\cos \phi}{r \sinh u} \partial_\phi + \frac{\cosh u \sin \phi}{r} \partial_u \right), \quad (5.6)$$

$$p_z = -i\hbar \partial_z = -i\hbar \left(\cosh u \partial_r - \frac{\sinh u}{r} \partial_u \right) \quad (5.7)$$

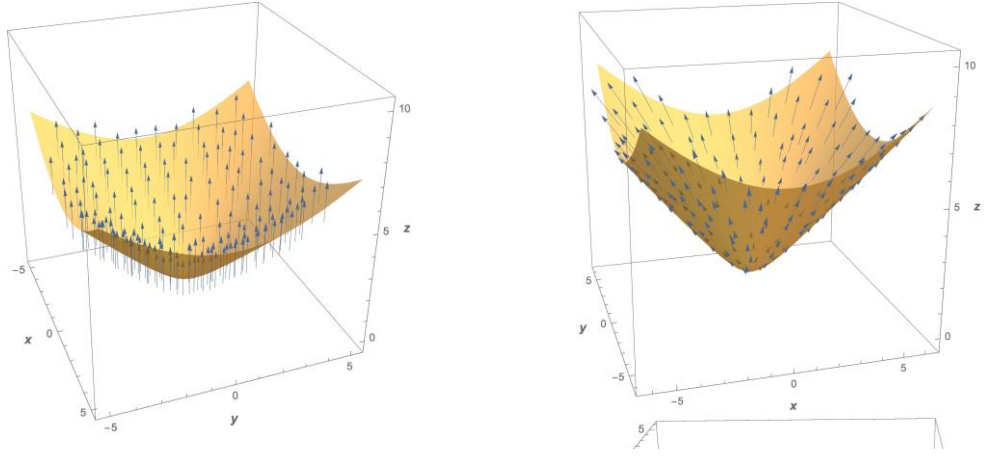
şeklindedir. Hiperbolün teğet düzleminde tanımlı momentum işlemcileri ise aşağıdaki gibidir (Gadella vd. 2011, Gadella vd. 2013):

$$\begin{aligned}\tilde{p}_x &= \frac{1}{2}(r p_x + p_x r) + \frac{1}{2}\left((\vec{r} \cdot \vec{p}) \frac{x}{r} + \frac{x}{r} (\vec{p} \cdot \vec{r})\right), \\ \tilde{p}_y &= \frac{1}{2}(r p_y + p_y r) + \frac{1}{2}\left((\vec{r} \cdot \vec{p}) \frac{y}{r} + \frac{y}{r} (\vec{p} \cdot \vec{r})\right), \\ \tilde{p}_z &= \frac{1}{2}(r p_z + p_z r) - \frac{1}{2}\left((\vec{r} \cdot \vec{p}) \frac{z}{r} + \frac{z}{r} (\vec{p} \cdot \vec{r})\right).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Bu vektörler, (pseudo-skaler çarpıma göre) hiperbolün bir noktasındaki momentum vektörlerinin o noktadaki teğet düzleme izdüşümünün kuantum benzerleridir ve açısal momentum olarak tanımlanabilirler. $r = R = \text{sabit}$ seçilerek problem hiperbol yüzeyine sınırlandırılır. p_x ve p_x 'in hiperbol yüzeyi üzerindeki iz düşümü olan $\tilde{p}_x$ momentum işlemcisi ve p_z ile p_z 'nin hiperbol yüzeyi üzerindeki iz düşümü olan $\tilde{p}_z$ momentum işlemcisi şekil 5.2 ve şekil 5.3'de sırasıyla gösterilmiştir.



Şekil 5.2 Soldaki grafik p_x momentum işlemcisini, sağdaki p_x 'in hiperbol yüzeyi üzerindeki iz düşümü olan $\tilde{p}_x$ momentum işlemcisini göstermektedir



Şekil 5.3 Soldaki grafik p_z momentum işlemcisini, sağdaki p_z 'nin hiperbol yüzeyi üzerindeki iz düşümü olan $\tilde{p}_z$ momentum işlemcisini göstermektedir

Çizgisel momentum işlemcileri ise, bu işlemciler sabit yarıçapa bölünerek bulunur. Böylece, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\hat{p}_x = \frac{-i\hbar}{R} \left(-\frac{\sin\phi}{\sinh u} \partial_\phi + \cosh u \cos\phi \partial_u + \sinh u \cos\phi \right), \quad (5.9)$$

$$\hat{p}_y = \frac{-i\hbar}{R} \left(-\frac{\cos\phi}{\sinh u} \partial_\phi + \cosh u \sin\phi \partial_u + \sinh u \sin\phi \right), \quad (5.10)$$

$$\hat{p}_z = \frac{-i\hbar}{R} (-\sinh u \partial_u - \cosh u). \quad (5.11)$$

Son olarak, problemin metriğine uygun Dirac matrislerini tanımlayalım. Bu problem için metrik $g^{ij} = \text{diag}(-1, -1, 1)$ şeklindedir. Bu durumda, Pauli matrisleri $\hat{\sigma} = (-\sigma_x, -\sigma_y, i\sigma_z) := (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$ olarak seçilir ve aşağıdaki bağıntıları sağlarlar:

$$\hat{\sigma}_k \hat{\sigma}_j + \hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_k = 0 \quad (k \neq j), \quad \hat{\sigma}_1^2 = \hat{\sigma}_2^2 = 1, \quad \hat{\sigma}_3^2 = -1. \quad (5.12)$$

Yukarıdaki seçim kullanılarak, Weyl temsiliinde Dirac matrisleri,

$$\beta := \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta \alpha_i := \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \hat{\sigma}_i \\ -\hat{\sigma}_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.13)$$

şeklinde yazılır (Zee 2010). Dirac matrislerinin bu seçimi için (5.3) ile verilen durağan Dirac-Weyl denklemindeki skaler çarpım, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\hat{\hat{\sigma}} \cdot \hat{p} = -\sigma_x \hat{p}_x - \sigma_y \hat{p}_y + i\sigma_z \hat{p}_z. \quad (5.14)$$

z eksenini etrafında dönme simetrisine sahip, hiperbol yüzeyine dik bir manyetik alan var olduğunu düşünelim. Bu durumda, $A(u)$, u 'ya bağlı bir fonksiyon olmak üzere vektör potansiyeli aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$\vec{A} = A(u)\hat{\phi} = A(u)(-\sin\phi, \cos\phi, 0). \quad (5.15)$$

Şimdiye kadar yapılan tanımlar kullanılıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra, hiperbolün yüzeyinde hareket eden Dirac elektronuna karşılık gelen Hamiltoniyen

$$H = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} (-\sinh u \partial_u - \cosh u) & ie^{-i\phi} \left(-\frac{i}{\sinh u} \partial_\phi + \cosh u \partial_u + \sinh u - \frac{qR}{c\hbar} A(u) \right) \\ ie^{i\phi} \left(\frac{i}{\sinh u} \partial_\phi + \cosh u \partial_u + \sinh u + \frac{qR}{c\hbar} A(u) \right) & -(-\sinh u \partial_u - \cosh u) \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

elde edilir. Böylece, Hamiltoniyen için özdeğer denklemi $\mathcal{E} = \frac{E}{\hbar v_F}$ olmak üzere,

$$H \Psi(R, u, \phi) = \mathcal{E} \Psi(R, u, \phi) \quad (5.17)$$

şeklinde bulunur.

5.1.1 Dönme simetrisi

R sabit olduğundan, bundan sonra $\Psi(R, u, \phi)$ yerine $\Psi(u, \phi)$ kullanılabilir: $\Psi(R, u, \phi) := \Psi(u, \phi)$. Bu durumda, (u, ϕ) hiperbol üzerinde bir çeşit polar koordinat olarak düşünülebilir. Şimdi, z yönündeki toplam açısal momentum işlemcisini

$$J_z = -i\hbar \partial_\phi + \frac{\hbar}{2} \sigma_z \quad (5.18)$$

olarak alalım. Sistem z eksenini etrafında dönme simetrisine sahip olduğu için J_z ve H işlemcileri sıra değiştirir $[H, J_z] = 0$. Böylece, J_z 'nin özfonksiyonları aynı zamanda Hamiltoniyenin de (5.17) özfonksiyonlarıdır:

$$J_z \Psi(u, \phi) = \lambda \hbar \Psi(u, \phi). \quad (5.19)$$

J_z 'nin açık ifadesi denklem (5.18)'de yerine konulup çözülürse, $\Psi(u, \phi)$

$$\Psi(u, \phi) = N \begin{pmatrix} e^{i(\lambda - \frac{1}{2})\phi} f_1(u) \\ e^{i(\lambda + \frac{1}{2})\phi} f_2(u) \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

olarak bulunur. Burada, N normalizasyon katsayısıdır. (5.20) ve (5.16) denklemleri, (5.17)'de yerine yazılır ve ifadeler düzenlenirse,

$$\left[\left(\frac{1}{R} (-\sin u \partial_u - \cosh u) \sigma_z + \left(\frac{i}{2R \sinh u} + \frac{i}{R} \cosh u \partial_u + \frac{i}{R} \sinh u \right) \sigma_x + \left(\frac{q}{c\hbar} A(u) - \frac{\lambda}{R \sinh u} \right) \sigma_y \right) F(u) = \varepsilon F(u) \right. \quad (5.21)$$

denklemini elde edilir. Burada, $F(u) = (f_1(u), f_2(u))^T$ sütun matrisidir ve T transpozunu gösterir.

5.1.2 Hermitsel form

(5.21) denkleminde σ_z 'li terimi yok etmek için,

$$F(u) = e^{-\frac{u}{2}\sigma_y} \begin{pmatrix} \psi_1(u) \\ \psi_2(u) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

olarak seçilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra, (5.21) denklemini

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{R} \partial_u + \frac{i}{2R} \coth u - i \left(\frac{q}{c\hbar} A(u) - \frac{\lambda}{R \sinh u} \right) \\ \frac{i}{R} \partial_u + \frac{i}{2R} \coth u + i \left(\frac{q}{c\hbar} A(u) - \frac{\lambda}{R \sinh u} \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(u) \\ \psi_2(u) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \psi_1(u) \\ \psi_2(u) \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

şeklinde bulunur. (5.23) ile verilen ifade Hermitsel değildir. Bu Hamiltoniyeinin Hermitsel olabilmesi için " $\frac{i}{2R} \coth u$ " terimini yok etmek gerekir. Bunun için aşağıdaki dönüşüm uygulanır:

$$(\psi_1(u), \psi_2(u))^T = \frac{1}{\sqrt{\sinh u}} (g_1(u), ig_2(u))^T = \frac{1}{\sqrt{\sinh u}} G(u). \quad (5.24)$$

Bu ifade, (5.23)'de yerine konularak aşağıdaki matris denklemini sağlayan etkin Hermitsel matris Hamiltoniyein elde edilir:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{R} \partial_u + i \left(\frac{\lambda}{R \sinh u} - \frac{q}{c\hbar} A(u) \right) \\ \frac{i}{R} \partial_u - i \left(\frac{\lambda}{R \sinh u} - \frac{q}{c\hbar} A(u) \right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(u) \\ ig_2(u) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} g_1(u) \\ ig_2(u) \end{pmatrix}. \quad (5.25)$$

5.2 SUSY Eş Hamiltoniyenler ve Taban Durumu

5.2.1 SUSY formülasyonu

Yukarıdaki problem ile ilişkili olarak, birinci mertebeden birbirinin Hermitsel eşleniği olan diferansiyel işlemciler ve $W(u)$ süperpotansiyeli,

$$a^\pm = \mp \partial_u + W(u), \quad W(u) = -\frac{\lambda}{\sinh u} + \frac{qR}{c\hbar} A(u) \quad (5.26)$$

olarak tanımlanabilir. Bu işlemciler cinsinden hiperbol yüzeyinde, yüzeye dik manyetik alan etkisi altındaki matris Hamiltoniyen ifadesi yeniden ifade edilebilir

$$\begin{pmatrix} 0 & -ia^+ \\ ia^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(u) \\ ig_2(u) \end{pmatrix} = R\mathcal{E} \begin{pmatrix} g_1(u) \\ ig_2(u) \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

ve buradan

$$a^+ g_2(u) = R\mathcal{E} g_1(u), \quad a^- g_1(u) = R\mathcal{E} g_2(u) \quad (5.28)$$

denklemleri yazılabilir. Böylece,

$$H_1 g_1(u) := a^+ a^- g_1(u) = \varepsilon g_1(u), \quad (5.29)$$

$$H_2 g_2(u) := a^- a^+ g_2(u) = \varepsilon g_2(u) \quad (5.30)$$

bir çift ikinci mertebeden etkin Schrödinger denklemi elde edilir. (5.29) ve (5.30) denklemleri matris formunda

$$\begin{pmatrix} a^+ a^- & 0 \\ 0 & a^- a^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(u) \\ ig_2(u) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} g_1(u) \\ ig_2(u) \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

olarak ifade edilir. Burada, $\varepsilon = R^2 \mathcal{E}^2$ şeklinde tanımlıdır.

H_1 ve H_2 süpersimetrik eş Hamiltoniyenlerdir ve

$$H_1 = -\partial_u^2 + V_1(u), \quad H_2 = -\partial_u^2 + V_2(u) \quad (5.32)$$

şeklinde yazılırlar. Bu Hamiltoniyenlere ait potansiyeller, süperpotansiyel cinsinden aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$V_1(u) = W(u)^2 - W'(u), \quad V_2(u) = W(u)^2 + W'(u). \quad (5.33)$$

Bu iki eş Hamiltoniyen, $a^\pm$ bağlaştırm işlemcileriyle aşağıdaki bağlaştırm bağıntılarını sağlarlar:

$$a^- H_1 = H_2 a^-, \quad H_1 a^+ = a^+ H_2. \quad (5.34)$$

Sonuç olarak, eğer H_2 (H_1) Hamiltoniyeninin spektrumu biliniyorsa, onun eşi olan H_1 (H_2) Hamiltoniyeninin spektrumu da taban durumu hariç bulunabilir.

H_1 Hamiltoniyenin, $\{g_1^k\}$ özfonksiyonlar kümesine karşılık gelen kesikli spektrumu (özdeğerler kümesi) $\{\varepsilon_1^k\}$, $k = 0, 1, \dots$ olsun. H_1 'in taban durumunun, a^- işlemcisi tarafından yok edildiğini düşünelim:

$$a^- g_1^0 = 0. \quad (5.35)$$

(5.29) denkleminin sonucu olarak H_1 için taban durumu enerji özdeğeri $\varepsilon_1^0 = 0$ olur. Bu denklemin çözümünden, $(0, \infty)$ aralığında karesi integrallenebilir ve sınır şartlarına uygun olan g_1^0 taban durumu elde edilir. Böylece, H_2 'nin kesikli spektrumu $\{\varepsilon_2^{k-1}\}$ ve karşılık gelen bire boylandırılmış (normalize) özfonksiyonları $\{g_2^{k-1}\}$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$a^- g_1^k(u) = \sqrt{\varepsilon_1^k} g_2^{k-1}(u), \quad \varepsilon_1^k = \varepsilon_2^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.36)$$

a^- işlemcisi, özfonksiyonlar üzerindeki fiziksel gereklilikleri koruduğundan, (5.31) denkleminin enerji özdeğerleri

$$\varepsilon^0 := \varepsilon_1^0 = 0, \quad \varepsilon^k := \varepsilon_1^k = \varepsilon_2^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.37)$$

olarak ifade edilir.

Yukarıdaki sonuçlar göz önüne alındığında, (5.25) denklemini ile verilen matris Hamiltoniyenin uyarılmış enerji durumlarına karşılık gelen özfonksiyonları,

$$G_{\pm}^k(u) = N \begin{pmatrix} \pm g_1^k(u) \\ i g_2^{k-1}(u) \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

olmak üzere Dirac-Weyl denkleminin enerji özdeğerleri,

$$\varepsilon_{\pm}^k := \frac{E}{\hbar v_F} = \pm \frac{1}{R} \sqrt{\varepsilon^k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.39)$$

şeklinde yazılır. Böylece, taban durum dalga fonksiyonu ve enerjisi de aşağıdaki gibidir:

$$G^0(u) = N \begin{pmatrix} g_1^0(u) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{\pm}^0 = \frac{1}{R} \sqrt{\varepsilon^0} = 0. \quad (5.40)$$

Taban durumunu bulmak için başka mümkün yollar da vardır. Örneğin;

$$a^+ g_2^0 = 0. \quad (5.41)$$

Ancak, burada yukarıda kullandığımız yolu takip etmek yeterlidir.

5.2.2 Sıfır enerjili taban durumu ve manyetik alan akısı

Denklem (5.26) ile verilen a^- işlemcisi, denklem (5.35)'de kullanılırsa, sıfır enerjili taban durumu dalga fonksiyonu $g_1^0(u)$ için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\left(\partial_u - \frac{\lambda}{\sinh u} + \frac{qR}{c\hbar} A(u) \right) g_1^0(u) = 0. \quad (5.42)$$

Bu denklemin çözümü,

$$g_1^0(u) = N \left(\tanh \frac{u}{2} \right)^\lambda e^{-\frac{qR}{c\hbar} \int A(u) du} \quad (5.43)$$

olarak bulunur. $g_1^0(u)$ fiziksel taban durumu, aşağıdaki asimptotik davranışları gösterir:

$$\begin{aligned} (a) \quad u \rightarrow 0, \quad g_1^0(u) &\rightarrow 0, \\ (b) \quad u \rightarrow \infty, \quad g_1^0(u) &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Şimdi, (5.43)'de verilen integral ifadesini yorumlamaya çalışalım. Manyetik alan,

$$B_{u,\phi} = \frac{1}{R \sinh u} [\partial_u (A(u) \sinh u)] \quad (5.45)$$

ile verilir. Bu manyetik alan için, u yarıçaplı çemberin manyetik akısı $\Phi(u)$

$$\Phi(u) = \int_0^u B_{u,\phi}(u) 2\pi R^2 \sinh u \, du = 2\pi R A(u) \sinh u \quad (5.46)$$

şeklindedir. Bu eşitlikten $A(u)$ akısı

$$A(u) = \frac{\Phi(u)}{2\pi R \sinh u} \quad (5.47)$$

olarak elde edilir. $u > u_0$ için manyetik alanı sıfır kabul edelim. $0 < u < u_0$ bölgesi için manyetik akı Φ_0 'dır ve $u > u_0$ için $A(u) = \frac{\Phi_0}{2\pi R \sinh u}$ 'dur. Böylece, integral

$$\int_0^u A(u) du = \int_0^{u_0} A(u) du + \int_{u_0}^u \frac{\Phi_0}{2\pi R \sinh u} du \quad (5.48)$$

şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak, $u > u_0$ için (5.43)'de verilen $g_1^0(u)$ değeri aşağıdaki hali alır:

$$g_1^0(u) = N \left(\tanh \frac{u}{2} \right)^{\lambda - \frac{\Phi_0}{\Phi_0}}. \quad (5.49)$$

Burada, $\Phi_0 = 2\pi c\hbar/q$ akı kuantumudur. Bunun sonucu olarak, (5.44)'de yer alan b koşulu yerine getirilmeyecektir. Buradan, kompakt sınırlı ve sonlu akıya sahip bir manyetik alanın hiperbol üzerinde fiziksel sıfır enerjili taban durumuna yol

açamayacağı görülür. Bu da düzlem grafen durumuna terstir. Düzlem grafen durumunda, sıfır enerji düzeyinin var olması ve bu enerji düzeyinin dejenereliğinin sonlu akıya bağlı olması Aharonov-Casher teoremi ile verilir (Aharonov ve Casher 1979, Kuru vd. 2018). Hiperbol üzerinde yalnızca akı ıraksadığında temel durum var olabilir ve bu düzeyin dejenereliği λ 'nın değerlerine bağlıdır.

5.3 Çözülebilir Durumlar

$A(u)$ fonksiyonu için özdeğer denkleminin analitik olarak çözülebileceği bazı özel fonksiyonlar aşağıdaki gibi sıralanabilir (Demir Kızılırmak vd. 2020):

$$(i) \quad A(u) = -\frac{ch}{eR} A_0 \coth u, \quad (5.50)$$

$$(ii) \quad A(u) = \frac{ch}{eR} \left(-\frac{\lambda'}{\sinh u} + C_1 \coth u - \frac{D_1}{C_1} \right), \quad (5.51)$$

$$(iii) \quad A(u) = \frac{ch}{eR} \left(-\frac{\lambda'}{\sinh u} - C_2 \tanh u - \frac{D_2}{C_2} \right), \quad (5.52)$$

$$(iv) \quad A(u) = \frac{ch}{eR} \left(-\frac{\lambda'}{\sinh u} - C_3 \tanh u - D_3 \operatorname{sech} u \right). \quad (5.53)$$

Burada λ' , C_k , D_k gerçel sabitlerdir. Bu vektör potansiyellerine karşılık gelen manyetik alanlar denklem (5.45)'den bulunur. $A(u) = 0$ olduğu durumda manyetik alan sıfırdır ve bu bağlı duruma yol açmaz, o yüzden bu durum göz ardı edilir. Birinci durum (i) sabit manyetik alanı verir, ikinci durum (ii) azalan manyetik alan bağlı duruma yol açar. Bu durumda, analitik çözümler, λ parametresinin λ' parametresiyle çakıştığı durumda bulunabilir. Üçüncü ve dördüncü durum ise orjinde istenmeyen sınır koşullarına sahip manyetik alan ve etkin potansiyele sahiptir. Sadece, $u \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$ sonlu limite sahip sonlu manyetik alana karşılık gelen parametrenin bazı özel değerleri için kabul edilebilirler. Burada, birinci ve ikinci durumlar ele alınmıştır.

5.3.1 Birinci durum (sabit manyetik alan)

Vektör potansiyeli (5.50)'deki gibi seçildiğinde, sabit manyetik alan elde edilir:

$$B_{u,\phi}(u) = -\frac{B_0}{R^2}. \quad (5.54)$$

Burada, $B_0 = A_0 \left(\frac{ch}{e}\right)$ sabittir ve $B_{u,\phi}(u)$ 'nin işareti manyetik alanın yönünü belirler. Bu nedenle, bu sistem kütesiz görelî parçacıklar için hiperbol üzerindeki Landau sistemi olarak düşünülebilir. Bu vektör potansiyeli için süperpotansiyel

$$W(u) = A_0 \coth u - \lambda \operatorname{cosech} u, \quad A_0 < \lambda, \quad (5.55)$$

ve süpersimetrik eş potansiyeller

$$V_1(u) = A_0^2 + (A_0^2 + \lambda^2 + A_0) \operatorname{cosech}^2 u - \lambda(2A_0 + 1) \coth u \operatorname{cosech} u, \quad (5.56)$$

$$V_2(u) = A_0^2 + (A_0^2 + \lambda^2 - A_0) \operatorname{cosech}^2 u - \lambda(2A_0 - 1) \coth u \operatorname{cosech} u \quad (5.57)$$

şeklinde. Bu potansiyeller, şekil değişmez potansiyellerdir ve $V_2(u, A_0 + 1) = V_1(u, A_0) + 2A_0 + 1$ koşulunu sağlarlar (Cooper vd. 1995).

H_1 Hamiltoniyenin taban durum dalga fonksiyonu $g_1^0(u)$, a^- işlemcisi tarafından yok edilir: $a^- g_1^0(u) = 0$. Denklem (5.55) ile verilen süperpotansiyel için a^- işlemcisi

$$a^- = \partial_u - \lambda \operatorname{cosech} u + A_0 \coth u \quad (5.58)$$

olmak üzere, sıfır enerjili taban durumu dalga fonksiyonu

$$g_1^0(u) = N \left(\tanh \frac{u}{2} \right)^\lambda \frac{1}{(\sinh u)^{A_0}} \quad (5.59)$$

olarak elde edilir. $g_1^0(u)$ 'nin asimptotik davranışı

$$\begin{aligned} a) \quad u \rightarrow 0, \quad g_1^0(u) &\approx u^{\lambda-A_0}, \\ b) \quad u \rightarrow \infty, \quad g_1^0(u) &\approx \frac{1}{(\sinh u)^{A_0}} \end{aligned} \quad (5.60)$$

şeklinde. Taban durumunun fiziksel olarak kabul edilebilir olması için $(g_1^0(u) \rightarrow 0)$,

$$A_0 > 0 \quad \text{ve} \quad \lambda - A_0 \geq 0 \quad (5.61)$$

koşulları sağlanmalıdır. Bu şartlar altında taban durumu enerjisi sıfırdır ve toplam açısal momentum λ 'nın (buçuklu tek) değerleri ile belirlenen sonsuz dejenereliğe sahiptir. Manyetik alan tüm u 'lar için sabit olduğundan, toplam akı sıfırdır ve bu da daha önceki yorumlar ile uyumludur.

$[A_0]$, A_0 'ın tamsayı kısmını göstermek üzere, enerji özdeğerleri aşağıdaki gibidir:

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_1^0 = 0, \quad \varepsilon^k = \varepsilon_1^k = \varepsilon_2^{k-1} = A_0^2 - (A_0 - k)^2, \quad k = 1, 2 \dots [A_0]. \quad (5.62)$$

Burada, tüm enerji düzeyleri aynı sonsuz dejenereliğe sahiptir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar,

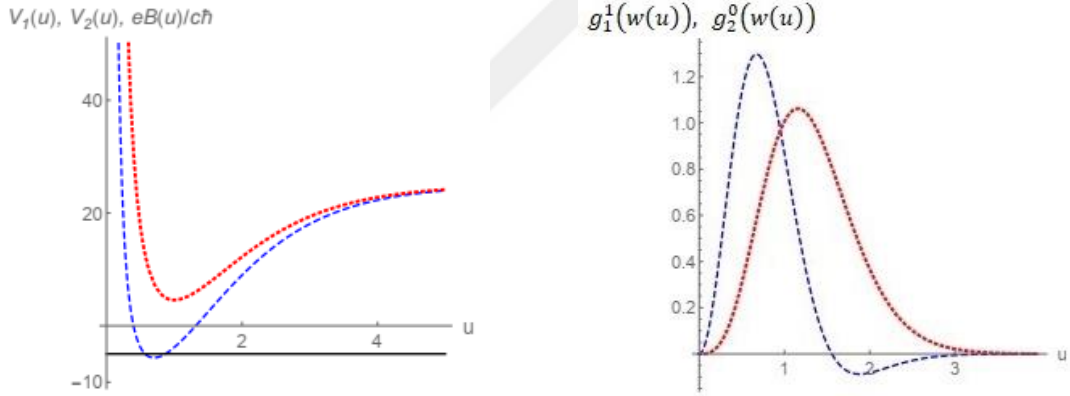
$$g_1^k(w(u)) = (w-1)^{s^-/2} (w+1)^{-s^+/2} P_k^{(s^--1/2, -s^+-1/2)}(w(u)), \quad (5.63)$$

$$g_2^k(w(u)) = (w-1)^{(s^--1)/2} (w+1)^{-(s^+-1)/2} P_k^{(s^-+1/2, -s^++1/2)}(w(u)) \quad (5.64)$$

şeklindedir. Burada, $P_k^{(a,b)}(w(u))$ Jacobi polinomu, $s^- = \lambda - A_0$, $s^+ = \lambda + A_0$ ve $w(u) = \cosh u$ olarak tanımlıdır. Dirac-Weyl denkleminde ait enerji özdeğerleri ise

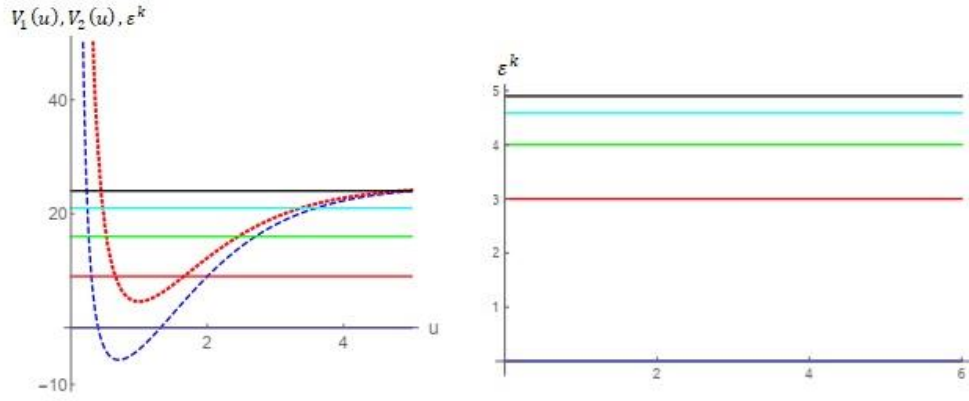
$$\mathcal{E}_\pm^k = \pm \frac{1}{R} \sqrt{A_0^2 - (A_0 - k)^2} \quad (5.65)$$

ile verilir. Şekil 5.4'de manyetik alan, $V_1(u)$, $V_2(u)$ süperes potansiyelleri ve ilk uyarılmış enerji düzeylerine karşılık gelen $g_1^1(w(u))$, $g_2^0(w(u))$ özfonksiyonlarının grafikleri çizdirilmiştir. Süpersimetrik eş Hamiltoniyenlerin ve Dirac-Weyl Hamiltoniyeninin bazı enerji özdeğerleri (hiperbol üzerindeki Landau düzeyleri) şekil 5.5'de gösterilmiştir. Sonuç olarak, (5.61) ile verilen koşulu sağlayan toplam açısal momentum değerleriyle etiketlenen sonsuz dejenereliğe sahip ve sıfır enerji düzeyini içine alan sonlu sayıda enerji düzeyi vardır.



Şekil 5.4 Sabit manyetik alan durumu için eş potansiyeller

(solda), $A_0 = 5$, $\lambda = 7$ değerleri için $g_1^1(w(u))$, $g_2^0(w(u))$ özfonksiyonları (sağda)



Şekil 5.5 $V_1(u)$ (kesikli çizgi), $V_2(u)$ (noktalı çizgi) eş potansiyelleri ve karşılık gelen ε^k enerji özdeğerleri

(solda), $k = 0$ (mavi), $k = 1$ (yeşil), $k = 2$ (kırmızı), $k = 3$ (açık mavi), $k = 4$ (siyah) değerleri için Dirac-Weyl Hamiltoniyeni enerji özdeğerleri (sağda)

5.3.2 İkinci durum

Vektör potansiyeli (5.51)'deki gibi seçilirse manyetik alan

$$B_{u,\phi} = \frac{c\hbar}{eR} \left(\frac{C_1}{R} - \frac{D_1}{RC_1} \coth u \right) \quad (5.66)$$

şeklindedir. Burada, C_1 ve D_1 sabittir. Bu manyetik alan başlangıç noktasında tekildir ve $u \rightarrow \infty$ 'da negatif sabit değere gider. $\lambda = \lambda'$ olduğu duruma karşılık gelen süperpotansiyel

$$W_2(u) = \frac{D_1}{C_1} - C_1 \coth u \quad (5.67)$$

olarak bulunur. Eş potansiyeller aşağıdaki gibidir:

$$V_1(u) = \frac{D_1^2}{C_1^2} + C_1^2 + C_1(C_1 - 1) \operatorname{cosech}^2 u - 2D_1 \coth u, \quad (5.68)$$

$$V_2(u) = \frac{D_1^2}{C_1^2} + C_1^2 + C_1(C_1 + 1) \operatorname{cosech}^2 u - 2D_1 \coth u. \quad (5.69)$$

Bu durumda, $g_1^0(u)$ taban durum dalga fonksiyonu $D_1 > C_1^2$ olmak üzere, a^- tarafından yok edilir. Bu potansiyeller Eckart potansiyeli olarak adlandırılır ve karşılık gelen enerji özdeğerleri

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_1^0 = 0,$$

$$\varepsilon^k = \varepsilon_1^k = \varepsilon_2^{k-1} = C_1^2 - (C_1 + k)^2 - \frac{D_1^2}{(C_1 + k)^2} + \frac{D_1^2}{C_1^2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.70)$$

ve özfonksiyonları

$$g_1^k(w(u)) = (w-1)^{s_1^+/2} (w+1)^{s_1^-/2} P_k^{(s_1^+, s_1^-)}(w(u)), \quad (5.71)$$

$$g_2^k(w(u)) = (w-1)^{s_2^+/2} (w+1)^{s_2^-/2} P_k^{(s_2^+, s_2^-)}(w(u)) \quad (5.72)$$

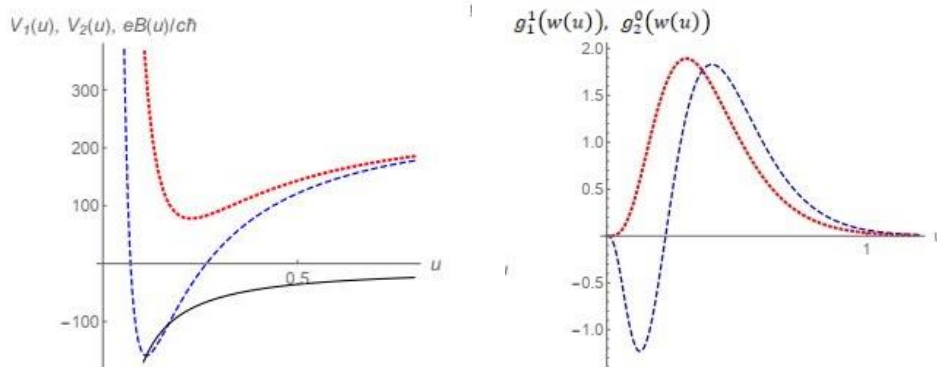
ile verilirler (Cooper vd. 1995). Burada, $P_k^{(a,b)}(w(u))$ Jacobi polinomu, $w(u) = \coth u$ ve $s_1^\pm = \pm \frac{D_1}{C_1+k} - (C_1+k)$, $s_2^\pm = \pm \frac{D_1}{C_1+k+1} - (C_1+k+1)$ olarak tanımlanır. Bu çözümler, $D_1 > C_1^2$ kuralına uygun durumda geçerlidir.

Dirac-Weyl denklemine ait enerji özdeğerleri ise

$$\varepsilon_\pm^k = \pm \frac{1}{R} \sqrt{C_1^2 - (C_1 + k)^2 - \frac{D_1^2}{(C_1 + k)^2} + \frac{D_1^2}{C_1^2}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.73)$$

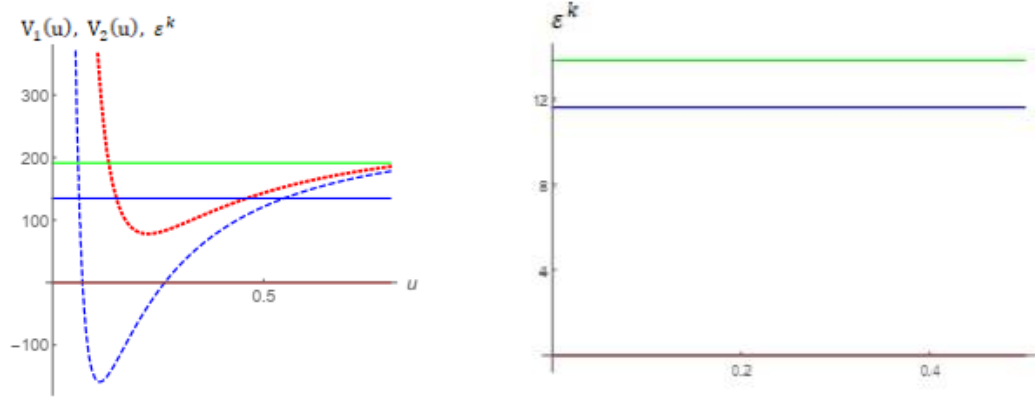
olarak bulunur. Şekil 5.6'da manyetik alan, $V_1(u)$, $V_2(u)$ süperes potansiyelleri ve ilk uyarılmış enerji düzeylerine karşılık gelen $g_1^1(w(u))$, $g_2^0(w(u))$ özfonksiyonlarının grafikleri çizdirilmiştir. Dirac-Weyl Hamiltoniyenin ve süpersimetrik eş Hamiltoniyenlerin bazı enerji özdeğerleri şekil 5.7'de gösterilmiştir.

$\lambda' \neq \lambda$ olduğu durumda spektrum analitik olarak çözülemez, fakat $\lambda \geq \lambda'$ ve $D_1 > C_1^2$ iken sıfır enerjili taban durumu bulunur.



Şekil 5.6 Manyetik alan ve eş potansiyeller

(solda), $C_1 = 3$, $D_1 = 54$ değerleri için $g_1^1(w(u))$ ve $g_2^0(w(u))$ dalga fonksiyonları (sağda)



Şekil 5.7 Eş potansiyeller ve karşılık gelen enerji özdeğerleri

(solda), $k = 0$ (kırmızı), $k = 1$ (mavi), $k = 2$ (yeşil) değerleri için Dirac-Weyl Hamiltoniyeni enerji özdeğerleri (sağda)

5.4 Hiperbol üzerinde Dirac denklemi

Manyetik alan varlığında $(3 + 1)$ boyutta kütleli parçacıklar için Dirac denklemi,

$$\left(\beta mc^2 + c \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right) \Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (5.74)$$

olarak yazılır. Burada, m kütle, c ışık hızı, e yüküdür. β ve $\vec{\alpha}$ matrisleri Pauli matrisleri cinsinden aşağıdaki gibi verilirler:

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix}. \quad (5.75)$$

$\Psi(\vec{r}, t)$ fonksiyonu zaman ve koordinatlar cinsinden değişkenlerine ayrılarak yazılabilir:

$$\Psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \begin{pmatrix} \varphi_p(\vec{r}) \\ \chi_p(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (5.76)$$

(5.74) denklemi aşağıdaki gibi iki tane 2×2 'lik matris denkleme indirgenir:

$$c \left(\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right) \chi_p = (E - mc^2) \varphi_p, \quad (5.77)$$

$$c \left(\vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right) \right) \varphi_p = (E + mc^2) \chi_p. \quad (5.78)$$

Buraya kadar en genel haliyle yazılan bu ifadeleri, buradan sonra hiperbol yüzeyine ($r = R = \text{sabit}$) sınırlandıralım, yani Dirac denklemini hiperbolik koordinatlarda ifade edelim. Dirac-Weyl denkleminde olduğu gibi manyetik alanın z eksenine etrafında dönme

simetrisine sahip olduğunu varsayalım. Böylece, $\varphi_p(u, \phi)$ ve $\chi_p(u, \phi)$, Dirac-Weyl denkleminin çözümü olan iki spinördür (Denklem (5.20)'den):

$$\varphi_p(u, \phi) = N \frac{e^{-\frac{i u \sigma_y}{2}}}{\sqrt{\sinh u}} \begin{pmatrix} e^{i(\lambda - \frac{1}{2})\phi} \varphi_1(u) \\ i e^{i(\lambda + \frac{1}{2})\phi} \varphi_2(u) \end{pmatrix}, \quad (5.79)$$

$$\chi_p(u, \phi) = N \frac{e^{-\frac{i u \sigma_y}{2}}}{\sqrt{\sinh u}} \begin{pmatrix} e^{i(\lambda - \frac{1}{2})\phi} \chi_1(u) \\ i e^{i(\lambda + \frac{1}{2})\phi} \chi_2(u) \end{pmatrix}. \quad (5.80)$$

Bu spinör çözümleri için, denklemler değişkenlere ayrılıp, denklem (5.18) ile verilen toplam açısal momentum J_z 'nin λ değeri gözönünde bulundurulduktan sonra, (5.77) ve (5.78) denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} 0 & -i a^+ \\ i a^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ i \chi_2 \end{pmatrix} = \frac{R}{c \hbar} (E - m c^2) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (5.81)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i a^+ \\ i a^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i \varphi_2 \end{pmatrix} = \frac{R}{c \hbar} (E + m c^2) \begin{pmatrix} \chi_1 \\ i \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.82)$$

Burada, $a^\pm$ birinci mertebeden birbirinin Hermitsel eşleniği olan diferansiyel işlemcilerdir ve denklem (5.26) ile verilirler. Kütlesiz parçacıklarda yaptığımız işlemlerde olduğu gibi (5.81) ve (5.82) denklemleri ayrıştırılabilir ve bu denklemler de aşağıdaki gibi matris formunda ifade edilebilirler:

$$\begin{pmatrix} a^+ a^- & 0 \\ 0 & a^- a^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i \varphi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ i \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a^+ a^- & 0 \\ 0 & a^- a^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ i \chi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \chi_1 \\ i \chi_2 \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

Burada,

$$\varepsilon = \frac{R^2 (E^2 - m^2 c^4)}{c^2 \hbar^2} = R^2 \mathcal{E}^2 \quad (5.84)$$

olmak üzere, her bir ε değeri için iki enerji özdeğeri vardır:

$$E_\pm = \pm \sqrt{\frac{c^2 \hbar^2}{R^2} \varepsilon + m^2 c^4} = \pm \sqrt{c^2 \hbar^2 \mathcal{E}^2 + m^2 c^4}. \quad (5.85)$$

Böylece, (5.83) tutarlılık denklemi her iki spinör tarafından sağlanırken, (5.81) ve (5.82) denklemleri Ψ 'yi oluşturan φ_i ve χ_i spinörleri arasında ilişki kurarlar.

Bu Dirac çözümlerini bulabilmek için, ilk olarak denklem (5.83)'ü χ_i spinörü için (φ_i spinörü ile de başlanabilir) çözelim. (5.83) denklemi (5.31) denklemi ile uyumlu olduğundan, denklem (5.37)'de verilen ε^k enerji özdeğerleri ve denklem (5.38) ile verilen $G_\pm^k$ çözümleri bu denklemin çözümü olarak kullanılabilir. Böylece, denklem

(5.83)'ü sağlayan χ_i çözümleri, aynı zamanda (5.27) ile verilen denklemi de sağlarlar. Bu durumda enerji özdeğerleri aşağıdaki gibidir:

$$R\mathcal{E}_{\pm}^k := \pm\sqrt{\varepsilon^k}, \quad k = 0,1,2, \dots \quad (5.86)$$

Denklem (5.82)'den

$$\varphi(u) = \frac{c\hbar\mathcal{E}}{E - mc^2} \chi(u) \quad (5.87)$$

elde edilir. χ_i çözümleri ise denklem (5.81)'den

$$\chi(u) = \frac{c\hbar\mathcal{E}}{E + mc^2} \varphi(u) \quad (5.88)$$

olarak yazılır. Denklem (5.87) ve (5.88) birbiriyle uyumludur.

(5.81) ve (5.82) matris denklemlerinin χ_i ve φ_i spinör çözümleri Dirac denkleminin çözümlerine yol açar. χ_p ve φ_p spinörleri arasındaki ilişki,

$$\chi_p(u, \phi) = \frac{c\hbar\mathcal{E}}{E + mc^2} \varphi_p(u, \phi), \quad (5.89)$$

ve

$$\varphi_p(u, \phi) = \frac{c\hbar\mathcal{E}}{E - mc^2} \chi_p(u, \phi) \quad (5.90)$$

şeklindedir. Enerji özdeğerlerinin alacağı işarete göre özfonksiyonlar da değişiklik gösterir. Denklem (5.86)'dan görüldüğü gibi, Dirac-Weyl denkleminde pozitif ve negatif enerjiler $\mathcal{E}_{\pm}$ ve bu enerji değerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $\Psi^{\pm}(u, \phi)$ vardır.

Dirac denkleminin enerji özdeğerleri de farklı iki işarete sahiptir ve $\mathcal{E}_{\pm}$ 'nin karesine bağlıdırlar (bu nedenle alt indis ihmal edildi):

$$E_{\pm} = \pm\sqrt{c^2\hbar^2\mathcal{E}^2 + m^2c^4}. \quad (5.91)$$

Sonuç olarak, her bir $E_{\pm}$ 'ye iki tane enerji karşılık gelir: $\mathcal{E}_{\pm}$. Böylece, $E_+ = +\sqrt{c^2\hbar^2\mathcal{E}^2 + m^2c^4}$ pozitif enerjisi için parçacıklara (elektronlara) karşılık gelen iki bağımsız özfonksiyon vardır:

$$\Psi_{E_+}^+ = \begin{pmatrix} \varphi_p^+ \\ \frac{c\hbar\mathcal{E}_+}{E_+ + mc^2} \varphi_p^+ \end{pmatrix}, \quad \Psi_{E_+}^- = \begin{pmatrix} \varphi_p^- \\ \frac{c\hbar\mathcal{E}_-}{E_+ + mc^2} \varphi_p^- \end{pmatrix}. \quad (5.92)$$

Benzer durum, $E_- = -\sqrt{c^2\hbar^2\mathcal{E}^2 + m^2c^4}$ negatif enerjili antiparçacıklar (deşikler) için de geçerlidir. Yani, E_- için iki bağımsız özfonksiyon

$$\Psi_{E_-}^+ = \begin{pmatrix} \frac{c\hbar\mathcal{E}_+}{E_- - mc^2} \chi_p^+ \\ \chi_p^+ \end{pmatrix}, \quad \Psi_{E_-}^- = \begin{pmatrix} \frac{c\hbar\mathcal{E}_-}{E_- - mc^2} \chi_p^- \\ \chi_p^- \end{pmatrix} \quad (5.93)$$

şeklindedir. Burada, $\mathcal{E}_\pm$ ifadesine karşılık gelen $\varphi_p^\pm$, $\chi_p^\pm$ aynı Dirac-Weyl denkleminin çözümleridir.

Taban durumu enerji özdeğerleri $E_{0\pm} = \pm mc^2$ için $E_\pm \rightarrow \pm mc^2$ alınarak, sadece bir bağımsız fonksiyon elde edilir. Denklem (5.92)'den

$$\Psi_{+mc^2} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.94)$$

ve denklem (5.93)'den ise

$$\Psi_{-mc^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_0 \end{pmatrix} \quad (5.95)$$

elde edilir. Burada, $\varphi_p^\pm = \chi_p^\pm = \varphi_0$ alınmıştır.

5.4.1 Sabit manyetik alan

Vektör potansiyel, denklem (5.50)'deki gibi seçildiğinde, denklem (5.54) ile verilen sabit manyetik alan elde edilir. χ_p ve φ_p Dirac-Weyl denkleminin çözümü olan iki spinördür ve (5.89) ve (5.90) denklemlerindeki gibi ilişkilidirler:

$$\chi_p(u, \phi) = \pm \sqrt{\frac{E - mc^2}{E + mc^2}} \varphi_p(u, \phi), \quad (5.96)$$

$$\varphi_p(u, \phi) = \pm \sqrt{\frac{E + mc^2}{E - mc^2}} \chi_p(u, \phi). \quad (5.97)$$

Bu durumda,

$$\varphi_p^\pm(u, \phi) = N \frac{e^{-\frac{i u \sigma_y}{2}}}{\sqrt{\sinh u}} \begin{pmatrix} \pm e^{i(\lambda - \frac{1}{2})\phi} g_1^k(u) \\ i e^{i(\lambda + \frac{1}{2})\phi} g_2^{k-1}(u) \end{pmatrix} \quad (5.98)$$

şeklindedir. Burada, $g_1^k(\theta)$ ve $g_2^{k-1}(\theta)$ sırasıyla, (5.63) ve (5.64) ile ve enerji ise (5.91) ve (5.65) denklemleri ile verilirler. Böylece, enerji özdeğerlerinin alacağı işarete göre özfonksiyonlar da değişiklik gösterir: $\Psi^\pm(\theta, \phi)$.

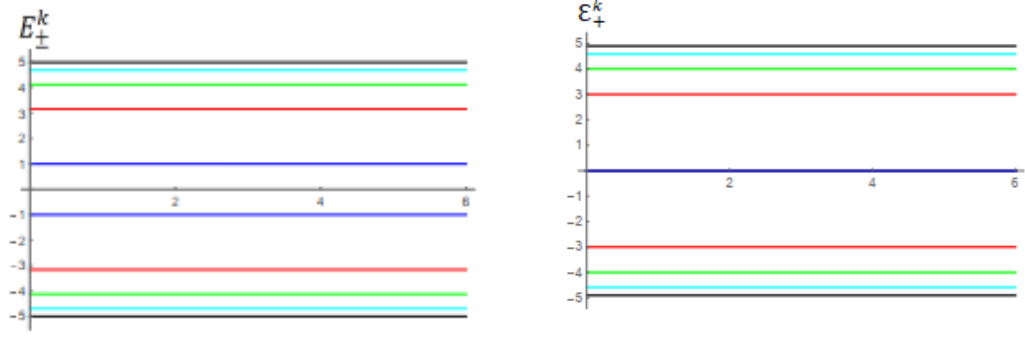
$E_+ = +\sqrt{\frac{c^2 \hbar^2}{R^2} (A_0^2 - (A_0 - k)^2) + m^2 c^4}$ ifadesi için iki bağımsız özfonksiyon vardır:

$$\Psi_{E_+}^+ = \begin{pmatrix} \varphi_p^+ \\ \sqrt{\frac{E_+ - mc^2}{E_+ + mc^2}} \varphi_p^+ \end{pmatrix}, \quad \Psi_{E_+}^- = \begin{pmatrix} \varphi_p^- \\ -\sqrt{\frac{E_+ - mc^2}{E_+ + mc^2}} \varphi_p^- \end{pmatrix}. \quad (5.99)$$

Benzer olarak, $E_- = -\sqrt{\frac{c^2 \hbar^2}{R^2} (A_0^2 - (A_0 - k)^2) + m^2 c^4}$ için özfonksiyonlar,

$$\Psi_{E_-}^+ = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E_- + mc^2}{E_- - mc^2}} \chi_p^+ \\ \chi_p^+ \end{pmatrix}, \quad \Psi_{E_-}^- = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{E_- + mc^2}{E_- - mc^2}} \chi_p^- \\ \chi_p^- \end{pmatrix} \quad (5.100)$$

şeklindedirler. Böylece, Dirac-Weyl denkleminin çözümleri kullanılarak, sabit manyetik alanda bir yük için Dirac denkleminin bağlı durum çözümleri elde edildi. Şekil 5.8'de, Dirac ve Dirac-Weyl Hamiltoniyenlerinin enerji özdeğerlerinin grafikleri verilmiştir. Bu grafiklerden görüldüğü gibi, kütleli durum için karşılık gelen taban durum değerlerinden ($-mc^2$ ve $+mc^2$) başlayan, sonlu sayıda negatif (deşiklere karşılık gelen) ve pozitif (elektronlara karşılık gelen) özdeğerler vardır. Kütleli durumda ($-mc^2, +mc^2$) aralığında bağlı durum yoktur. Ancak, kütsüz durumda pozitif ve negatif olanların yanı sıra sıfır enerjili durum da vardır. Burada elde edilen enerji düzeyleri, hiperbol üzerinde kütleli ve kütsüz parçacıkların Landau düzeyleri olarak düşünülebilirler. Ancak bunlar bilinen Landau düzeylerinden farklıdır. Çünkü hiperbol durumunda, manyetik alanın şiddetine bağlı olarak sonlu sayıda enerji düzeyi vardır. Her enerji düzeyi de açıl momentumun değerine (λ) bağlı olarak sonsuz dejenereliğe sahiptir.



Şekil 5.8 $k = 0$ (mavi), $k = 1$ (kırmızı), $k = 2$ (yeşil), $k = 3$ (açık mavi), $k = 4$ (siyah) için Dirac Hamiltoniyenin enerji özdeğerleri $E_{\pm}^k$ (solda) ve Dirac-Weyl Hamiltoniyenin enerji özdeğerleri $\epsilon_{\pm}^k$ (sağda) verilmiştir. Burada, $A_0 = 5$, $m = 1$ (kütleli durum için), $c = 1$, $\hbar = 1$ olarak Alınmıştır

6. DIRAC BENZERİ HAMILTONİYENLERİN ÇARPANLARINA AYIRMA YÖNTEMİ İLE İLİŞKİLENDİRİLMESİ

Bu bölümde, artan ve azalan hiyerarşi durumları için şekil değişmez Schrödinger Hamiltoniyenleri ile ilişkili Dirac benzeri matris Hamiltoniyenler tanıtıldı. Hem 2×2 hem de 4×4 (sadece artan hiyerarşi durumu için) Dirac benzeri Hamiltoniyenler için matris bağlaştırm işlemcileri, simetriteri ve bu sistemlere karşılık gelen enerji özdeğerleri ve özfonksiyonları bulundu (Demir Kızılırmak vd. 2021).

Dirac benzeri Hamiltoniyenler, daha yüksek boyutlu spin sistemlerinin indirgenmesinden elde edilebilir (Contreras-Astorga vd. 2016, Demir Kızılırmak vd. 2020). Bu durumda, bağlaştırm işlemcileri başlangıçtaki sistemin simetriteri ile ilişkilidir. Burada, artan hiyerarşiye örnek olarak trigonometrik PT potansiyeli ve azalan hiyerarşi için hiperbolik PT potansiyeli ele alındı.

6.1 İndirgenmiş Dirac Hamiltoniyenlerinin Artan Hiyerarşisi

Schrödinger Hamiltoniyeni H_n için denklem (4.22)'de verilen artan hiyerarşi göz önünde bulundurulursa, 2×2 'lik indirgenmiş Dirac Hamiltoniyeni

$$h_n = \begin{pmatrix} \mu_n & ia_n^+ \\ -ia_n^- & -\mu_n \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

olarak yazılabilir. Birinci mertebeden h_n matris işlemcisine Dirac benzeri Hamiltoniyen denir. Bu tip Dirac benzeri Hamiltoniyenler, düzlemsel grafen ile ilgili bir dizi problemde, küresel yüzeylerde veya silindiriksel simetriye sahip sistemlerde ortaya çıkarlar. Denklem (6.1) ile verilen h_n matris Hamiltoniyeni Hermitseldir.

h_n matrisinin karesi, artan hiyerarşinin bir çift Schrödinger Hamiltoniyenini (H_n ve H_{n+1}) verir:

$$h_n^2 = \begin{pmatrix} H_n & 0 \\ 0 & H_{n+1} \end{pmatrix} := \mathbf{H}_n. \quad (6.2)$$

Bu Hamiltoniyenler için hiyerarşi (4.22) ile verilir.

h_n ve h_{n+1} matris Hamiltoniyenleri, $A_n^\pm$ (anti) bağlaştırm işlemcileri ile aşağıdaki gibi ilişkilendirilir:

$$A_n^- h_n = \gamma h_{n+1} A_n^-, \quad h_n A_n^+ = \gamma A_n^+ h_{n+1}. \quad (6.3)$$

Burada, $A_n^\pm = (A_n^\mp)^\dagger$, dir ve $\gamma = \pm 1$ değerlerini alır. Ayrıca, $A_n^\pm$ (anti) bağlaştırmı işlemcileri, h_n^2 ve h_{n+1}^2 matris Hamiltoniyenleri arasında da ilişki kurar:

$$A_n^- h_n^2 = h_{n+1}^2 A_n^-, \quad h_n^2 A_n^+ = A_n^+ h_{n+1}^2. \quad (6.4)$$

$\gamma = 1$ için bağlaştırmı işlemcileri R_n^-

$$R_n^- = \begin{pmatrix} a_n^- & i(\mu_{n+1}^- - \mu_n^-) \\ 0 & a_{n+1}^- \end{pmatrix}, \quad R_n^- h_n = h_{n+1} R_n^- \quad (6.5)$$

şeklindedir ve $\gamma = -1$ için anti bağlaştırmı işlemcileri T_n^-

$$T_n^- = \begin{pmatrix} a_n^- & -i(\mu_{n+1}^+ + \mu_n^-) \\ 0 & -a_{n+1}^+ \end{pmatrix}, \quad T_n^- h_n = -h_{n+1} T_n^- \quad (6.6)$$

ile verilir.

6.1.1 Dirac hiyerarşisinin spektrumu

Her bir Dirac Hamiltoniyeni için enerji özdeğer denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$h_n \Psi_n^k = \varepsilon_n^k \Psi_n^k. \quad (6.7)$$

Burada, ε_n^k ifadesi h_n Dirac Hamiltoniyeninin k . uyarılmış enerji özdeğerlerini ve Ψ_n^k ise karşılık gelen spinör özfonksiyonunu gösterir. (6.2) ile verilen denklem ile, h_n 'nin spektrumu ve spinör özfonksiyonları $(\varepsilon_n^k, \Psi_n^k)$, H_n ve H_{n+1} Schrödinger Hamiltoniyenlerinininkiler $((\mu_{n+k}^2, \psi_n^k)$ ve $(\mu_{n+k+1}^2, \psi_{n+1}^k))$ cinsinden elde edilebilir.

Ψ_n^k dalga fonksiyonu,

$$\Psi_n^k = \begin{pmatrix} \alpha \psi_n^k \\ i\beta \psi_{n+1}^{k-1} \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (6.8)$$

olarak yazılabilir. Burada, α ve β 'lar (6.1) ile verilen h_n 'ye karşılık gelen enerji özdeğer denkleminde bulunurlar. Enerji özdeğerlerinin işaretini belirtmek için, hem enerji özdeğerlerinde $(\varepsilon_n^{k\pm} = \pm\sqrt{\mu_{n+k}^2})$ hem de özfonksiyonlarda $(\Psi_n^{k\pm})$ “ $\pm$ ” işareti kullanılır.

Pozitif spektrum ve taban durumu için enerjiler ve özfonksiyonlar

$$\varepsilon_n^{k+} = \mu_{n+k}, \quad \Psi_n^{k+} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{n+k} + \mu_n} \psi_n^k \\ -i\sqrt{\mu_{n+k} - \mu_n} \psi_{n+1}^{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\varepsilon_n^{0+} = \mu_n, \quad \Psi_n^{0+} = \begin{pmatrix} \psi_n^0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k = 0 \quad (6.9)$$

olarak, negatif spektrum için enerji ve özfonksiyonlar ise

$$\varepsilon_n^{k-} = -\mu_{n+k}, \quad \Psi_n^{k-} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{n+k} - \mu_n} \psi_n^k \\ i\sqrt{\mu_{n+k} + \mu_n} \psi_{n+1}^{k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.10)$$

şeklinde bulunur. Spektrumun bazı özellikleri şöyledir.

1) $\Psi_n^{k\pm}$ negatif ve pozitif çözümleri, h_n^2 'nin aynı pozitif enerji özdeğerli çözümleridir:

$$(h_n)^2 \Psi_n^{k\pm} = \begin{pmatrix} H_n & 0 \\ 0 & H_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{n+k} \pm \mu_n} \psi_n^k \\ \pm i\sqrt{\mu_{n+k} \pm \mu_n} \psi_{n+1}^{k-1} \end{pmatrix} = \mu_{n+k}^2 \Psi_n^{k\pm}. \quad (6.11)$$

2) “Negatif taban durum” enerjisi $k = 1$ için varken, taban durumu $k = 0$ sadece pozitif enerji için vardır.

3) Pozitif enerji için özfonksiyonlar, alt bileşenden daha büyük normlu üst bileşene sahipken, negatif enerji için özfonksiyonlar zıt karaktere sahiptir: alt bileşenin normu, üst bileşenden daha büyüktür.

4) Pozitif ve negatif özfonksiyonlar birbirlerine diktirler.

6.1.2 Kütlesiz Dirac-Weyl denkleminin spektrumu

h_n Dirac Hamiltoniyenleri için çarpanlara ayırma enerjisi (μ_n^2), kütle ile ilişkili olduğu düşünülen μ_n 'ye bağlıdır. Özel olarak bir $n = n_0$ için h_{n_0} 'ın spektrumunu ele alalım, öyle ki $\mu_{n_0} = 0$ olsun. Ancak, Schrödinger Hamiltoniyen hiyerarşisinde $\mu_{n_0}^2 \neq 0$ 'dır. Bu durumda, bütün hiyerarşiden ($H_n = a_n^+ a_n^- + \mu_n^2$), $\mu_{n_0}^2 = E_{n_0}^0$ enerji değerini çıkartalım. Böylece yeni hiyerarşi aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{H}_n = a_n^+ a_n^- + \tilde{\mu}_n^2 \quad (6.12)$$

ve burada, $\tilde{\mu}_n^2$ ifadesi

$$\tilde{\mu}_n^2 = \mu_n^2 - \mu_{n_0}^2 \quad (6.13)$$

şeklindedir. Yeni hiyerarşi, bir önceki (H_n) ile aynı özelliklere, aynı özfonksiyonlara, bağlaştırm işlemcilerine vb. sahiptir, sadece hiyerarşinin spektrumu aynı miktarda ($\mu_{n_0}^2$ kadar) değişmiştir:

$$\tilde{E}_n^k = \tilde{E}_{n+k}^0 = \tilde{\mu}_{n+k}^2 = E_{n+k}^0 - E_{n_0}^0, \quad \tilde{E}_{n_0}^0 = 0. \quad (6.14)$$

Başka bir deyişle, yeni Hamiltoniye'nin $\tilde{H}_{n_0}$, taban durum enerjisi sıfırdır ve böylece karşılık gelen Dirac Hamiltoniye'nin kütlesi sıfır olacaktır:

$$\tilde{h}_n = \begin{pmatrix} \tilde{\mu}_n & ia_n^+ \\ -ia_n^- & -\tilde{\mu}_n \end{pmatrix}, \quad \tilde{h}_{n_0} = \begin{pmatrix} 0 & ia_{n_0}^+ \\ -ia_{n_0}^- & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mu}_{n_0} = 0. \quad (6.15)$$

$\tilde{\mu}_n$ ifadesinin yeni değerleri için, sırasıyla (6.9) ve (6.10) ile verilen pozitif ve negatif spektrum ifadeleri $\tilde{\varepsilon}_n^{k\pm}$ ve dalga fonksiyonları $\tilde{\Psi}_n^{k\pm}$ hala geçerlidir.

6.1.3 Bağlaştırm işlemcileri tarafından yok edilen özfonksiyonlar

T_n^- ve R_n^- bağlaştırm işlemcileri tarafından yok edilen özfonksiyonları elde edelim. Bu işlemciler birinci mertebeden çizgisel 2×2 matris diferansiyel işlemci olduklarından, çizgisel bağımsız iki vektör fonksiyonunu yok ederler. R_n^- tarafından yok edilen özfonksiyonlar pozitif enerjiler için taban durumu ve negatif enerjiler için taban durumu,

$$\begin{aligned} \Psi_n^{0+} &= \begin{pmatrix} \psi_n^0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_n^{0+} &= \mu_n, \\ \Psi_n^{1-} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{n+1} - \mu_n} \psi_n^1 \\ i\sqrt{\mu_{n+1} + \mu_n} \psi_{n+1}^0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_n^{1-} &= -\mu_{n+1}, \end{aligned} \quad (6.16)$$

şeklindedir. T_n^- tarafından yok edilen özfonksiyonlar pozitif enerjiler için taban durumu ve pozitif enerjiler için birinci uyarılmış durumdur:

$$\begin{aligned} \Psi_n^{0+} &= \begin{pmatrix} \psi_n^0 \\ 0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_n^{0+} &= \mu_n, \\ \Psi_n^{1+} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_{n+1} + \mu_n} \psi_n^1 \\ -i\sqrt{\mu_{n+1} - \mu_n} \psi_{n+1}^0 \end{pmatrix}, & \varepsilon_n^{1+} &= \mu_{n+1} \end{aligned} \quad (6.17)$$

şeklindedir. T_n^- ve R_n^- matris bağlaştırm işlemcileri, h_n Hamiltoniye'nin en düşük enerji durumlarını, a_n^- işlemcilerinin H_n Hamiltoniye'nin taban durumlarını yok etmesine benzer şekilde yok ederler.

6.1.4 Simetri işlemcileri

Dirac benzeri indirgenmiş Hamiltoniye'ler (h_n tipindeki denklemler), sadece bir değişkene bağlıdır. Bunun sonucu olarak, Hamiltoniyeden başka bağımsız simetri yoktur. Başka bir deyişle tüm simetriler h_n Hamiltoniye'nin fonksiyonudur.

Bu simetrisini elde etmenin yöntemlerinden biri bağlaştırmı işlemcilerini ters sırada çarpmaktır. S_n için $R_n^+ R_n^-$ çarpımı h_n 'nin simetrisini verir:

$$R_n^- h_n = h_{n+1} R_n^-, \quad h_n R_n^+ = R_n^+ h_{n+1} \Rightarrow [S_n, h_n] = 0. \quad (6.18)$$

Bu simetri işlemcisi, h_n 'nin fonksiyonudur:

$$S_n = R_n^+ R_n^- = (h_n - \mu_n)(h_n + \mu_{n+1}) \quad (6.19)$$

ve $[R_n^+, R_n^-]$ sıra değişim bağıntısı

$$R_n^+ R_n^- - R_{n-1}^- R_{n-1}^+ = h_n(\mu_{n+1} - 2\mu_n + \mu_{n-1}) + \mu_n(\mu_{n-1} - \mu_{n+1}) \quad (6.20)$$

olarak bulunur. Anti bağlaştırmı işlemcileri tarafından üretilen diğer simetri işlemcisi ise benzer şekilde elde edilir:

$$S'_n = T_n^+ T_n^- = (h_n - \mu_n)(h_n - \mu_{n+1}). \quad (6.21)$$

$[T_n^+, T_n^-]$ sıra değişim bağıntısı ise,

$$T_n^+ T_n^- - T_{n-1}^- T_{n-1}^+ = -h_n(\mu_{n+1} + 2\mu_n + \mu_{n-1}) - \mu_n(\mu_{n-1} - \mu_{n+1}) \quad (6.22)$$

olarak bulunur.

6.1.5 4×4 Dirac benzeri Hamiltoniyenler için bağlaştırmı işlemcileri

m_0 kütleli, 4×4 'lük Dirac benzeri bir Hamiltoniyeni, h_n Hamiltoniyeni cinsinden aşığıdaki gibi tanımlayalım:

$$\mathcal{H}_n = \begin{pmatrix} m_0 c^2 & h_n \\ h_n & -m_0 c^2 \end{pmatrix}. \quad (6.23)$$

Daha sonra, bu Hamiltoniyenler için 4×4 'lük bağlaştırmı işlemcileri, 2×2 'lik $R_n^\pm = (R_n^\mp)^\dagger$ ve $T_n^\pm = (T_n^\mp)^\dagger$ işlemcileri cinsinden aşığıdaki gibi alınabilir ($c = 1$):

$$\mathcal{R}_n^- = \begin{pmatrix} R_n^- & 0 \\ 0 & R_n^- \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{R}}_n^- = \begin{pmatrix} -m_0 M^- & R_n^- \\ R_n^- & m_0 M^- \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

$$\mathcal{T}_n^- = \begin{pmatrix} -T_n^- & 0 \\ 0 & T_n^- \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{T}}_n^- = \begin{pmatrix} m_0 M^- & -T_n^- \\ T_n^- & m_0 M^- \end{pmatrix}. \quad (6.25)$$

Burada, $M^- := -i\sigma^+ = -i(\sigma_1 + i\sigma_2)$ ile verilir ve 2×2 'lik h_n Hamiltoniyenleri ile aşığıdaki (anti) sıra değişim bağıntılarını sağlarlar:

$$M^- h_n + h_{n+1} M^- = -2R_n^-, \quad M^- h_n - h_{n+1} M^- = -2T_n^-. \quad (6.26)$$

Böylece, 4×4 'lük Dirac benzeri Hamiltoniyenler için bağlaştırmı işlemcileri elde edilmiş olur:

$$\mathcal{R}_n^- \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n+1} \mathcal{R}_n^-, \quad \mathcal{T}_n^- \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n+1} \mathcal{T}_n^-. \quad (6.27)$$

Bu işlemcilerin Hermitsel eşlenikleri, $\mathcal{R}_n^+ = (\mathcal{R}_n^-)^\dagger$ ve $\mathcal{T}_n^+ = (\mathcal{T}_n^-)^\dagger$, tam tersi bağlaştırım bağıntılarını sağlarlar. 4×4 'lük Dirac benzeri Hamiltoniyenlerin hiyerarşisi için, global bağlaştırım işlemcilerinin dört boyutlu uzayı elde edilmiş oldu. Bu durum şaşırtıcıdır, çünkü skaler Hamiltoniyen hiyerarşisi için bağlaştırım işlemcilerinin yalnızca bir kümesi vardır. Ancak bu durumda, her bir $\mathcal{H}_n$ Hamiltoniyeninin negatif ve pozitif enerji düzeylerinin dejenereliği nedeniyle, dört çift bağlaştırım işlemcisi vardır: $\mathcal{R}_n^\pm, \tilde{\mathcal{R}}_n^\pm, \mathcal{T}_n^\pm, \tilde{\mathcal{T}}_n^\pm$.

$\mathcal{H}_n$ 'nin spektrumu ve enerji özfonksiyonları elde edilebilir. $\mathcal{H}_n$ 'nin enerji özdeğer denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathcal{H}_n \Xi_n^{ks} = E_{n\pm}^k \Xi_n^{ks}. \quad (6.28)$$

Burada, $E_{n\pm}^k$ enerjidir ve Ξ_n^{ks} özfonksiyonu h_n 'nin aynı tip iki öz spinörünün birleşiminden oluşur:

$$\Xi_n^{ks} = \begin{pmatrix} \Psi_n^{ks} \\ \Phi_n^{ks} \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

Örneğin; Ψ_n^{ks} , h_n Hamiltoniyeninin ϵ_n^{ks} enerji özdeğerli özfonksiyonuna karşılık gelir, k enerji düzeyini ve $s = \pm$ enerjinin işaretini gösterir. (6.28) ile verilen özdeğer denkleminde $\mathcal{H}_n$ yazılırsa, aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$m_0 c^2 \Psi_n^{ks} + h_n \Phi_n^{ks} = E_{n\pm}^k \Psi_n^{ks}, \quad -m_0 c^2 \Phi_n^{ks} + h_n \Psi_n^{ks} = E_{n\pm}^k \Phi_n^{ks}. \quad (6.30)$$

Yukarıdaki denklemlerden,

$$\Phi_{n\pm}^{ks} = \frac{h_n \Psi_n^{ks}}{E_{n\pm}^k + m_0 c^2}, \quad \Psi_{n\pm}^{ks} = \frac{h_n \Phi_n^{ks}}{E_{n\pm}^k - m_0 c^2} \quad (6.31)$$

bağıntılarına ulaşılır. Bu ifadeler (6.30) denkleminde yazıldığında, Ψ ve Φ spinörleri için aşağıdaki denklemler bulunur:

$$h_n^2 \Psi_n^{ks} = ((E_n^k)^2 - m_0^2 c^4) \Psi_n^{ks}, \quad h_n^2 \Phi_n^{ks} = ((E_n^k)^2 - m_0^2 c^4) \Phi_n^{ks}. \quad (6.32)$$

$h_n^2 \Psi_n^{ks} = (\epsilon_n^{ks})^2 \Psi_n^{ks}$ ifadesi göz önünde bulundurularak, enerji özdeğerleri

$$E_{n\pm}^k = \pm \sqrt{(\epsilon_n^{ks})^2 + m_0^2 c^4} = \pm \sqrt{\mu_{n+k}^2 + m_0^2 c^4} \quad (6.33)$$

elde edilir. Burada, $(\epsilon_n^{ks})^2 = \mu_{n+k}^2$ 'dir. Böylece, enerji özfonksiyonları

$$\Xi_{n+}^{ks} = \begin{pmatrix} \Psi_n^{ks} \\ \Phi_{n+}^{ks} \end{pmatrix}, \quad \Phi_{n+}^{ks} = \frac{s \mu_{n+k} \Psi_n^{ks}}{\sqrt{\mu_{n+k}^2 + m_0^2 c^4} + m_0 c^2}, \quad (6.34)$$

$$\Xi_{n-}^{ks} = \begin{pmatrix} \Psi_{n-}^{ks} \\ \Phi_{n-}^{ks} \end{pmatrix}, \quad \Psi_{n-}^{ks} = \frac{s\mu_{n+k}\Phi_n^{ks}}{\sqrt{\mu_{n+k}^2 + m_0^2 c^4} + m_0 c^2} \quad (6.35)$$

olarak bulunur.

Sıfırdan farklı m_0 için denklem (6.33) spektrumu, h_n 'nin tersine pozitif ve negatif enerji özdeğerleri için simetriktir. Enerji özdeğerleri basit dejenereliğe sahip taban durumu haricinde, çifte dejenereliğe sahiptir, $s = \pm$.

6.2 Trigonometrik Pöschl-Teller Potansiyeli

Trigonometrik Pöschl-Teller potansiyeline karşılık gelen Hamiltoniyen işlemcisi,

$$H_n(x) = -\partial_{xx} + \frac{(n+1/2)(n-1/2)}{\sin^2 x}, \quad x \in (0, \pi), \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.36)$$

şeklindedir. $a_n^\pm$ işlemcileri ve enerjiler

$$a_n^\pm = \mp \partial_x + (n+1/2) \cot x, \quad \mu_n^2 = (n+1/2)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.37)$$

olmak üzere, denklem (6.36) ile verilen Hamiltoniyen için hiyerarşi denklem (4.22)'deki gibidir. Bu durumda, h_n matris Hamiltoniyeni aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$h_n = \begin{pmatrix} n+1/2 & i(-\partial_x - (n+1/2)\cot x) \\ -i(-\partial_x - (n+1/2)\cot x) & -n-1/2 \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

Denklem (6.38) ifadesinin karesi denklem (6.2)'de verildiği gibi H_n ve H_{n+1} Hamiltoniyenlerine yol açar. Denklem (6.5) ve denklem (6.6) ile verilen bağlaştırm işlemcileri aşağıdaki hali alır:

$$R_n^- = \begin{pmatrix} \partial_x - (n+1/2)\cot x & i \\ 0 & \partial_x - (n+3/2)\cot x \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

$$T_n^- = \begin{pmatrix} \partial_x - (n+1/2)\cot x & -i(2n+2) \\ 0 & -(-\partial_x - (n+3/2)\cot x) \end{pmatrix}. \quad (6.40)$$

6.2.1 Küre üzerinde Dirac benzeri denklemler

Burada, küre yüzeyinde tanımlı skaler ve spinör parçacık sistemlerinin indirgenmesiyle, sırasıyla, denklem (6.36) ile verilen skaler PT Schrödinger Hamiltoniyeninin ve denklem (6.38) ile verilen matris PT Dirac Hamiltoniyeninin nasıl elde edileceği gösterildi.

i) Skaler sistem

Küre yüzeyi üzerinde tanımlı bir sistem ele alalım. Küre yüzeyi üzerindeki noktalar $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (6.41)$$

denklemini sağlar. $SO(3)$ grubu küre üzerinde tanımlı $\tilde{\psi}(x)$ skaler dalga fonksiyonlarına

$$U(g)\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(g^{-1}x), \quad g \in SO(3) \quad (6.42)$$

şeklinde etki eder. Kartezyen koordinatlar (x, y, z) ve küresel koordinatlar (r, θ, ϕ) arasındaki ilişki

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (6.43)$$

olarak verilir. $SO(3)$ Lie grubunun Hermitsel üreticileri olan açısal momentum bileşenleri L_i , $i = 1, 2, 3$ (L_x, L_y, L_z) aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned} L_x &= -i(y\partial_z - z\partial_y) = i(\sin \phi \partial_\theta + \cos \phi \cot \theta \partial_\phi), \\ L_y &= -i(z\partial_x - x\partial_z) = i(-\cos \phi \partial_\theta + \sin \phi \cot \theta \partial_\phi), \\ L_z &= -i(x\partial_y - y\partial_x) = i(-\partial_\phi). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Alçaltıcı ve yükseltici açısal momentumlar ise

$$L_\pm = L_x \pm iL_y, \quad L_\pm = e^{\pm i\phi}(\pm \partial_\theta + i \cot \theta \partial_\phi) \quad (6.45)$$

şeklinde yazılır. Bunlar için sıra değişme bağıntıları,

$$[L_z, L^\pm] = \pm L^\pm, \quad [L^-, L^+] = -2L_z \quad (6.46)$$

olarak elde edilir.

Küre üzerinde tanımlı dalga fonksiyonlarının uzayında, Casimir işlemcisi $\tilde{H} := C = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$, iki boyutlu serbest parçacık Hamiltoniyeni rolü oynar. Bu Hamiltoniyene karşılık gelen özdeğer denklemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\tilde{H}\tilde{\psi}_\ell = \left(-\partial_{\theta\theta} - \cot \theta \partial_\theta - \frac{\partial_{\phi\phi}}{\sin^2 \theta}\right)\tilde{\psi}_\ell = \ell(\ell + 1)\tilde{\psi}_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (6.47)$$

Burada, $\tilde{H}$ Hamiltoniyenin özdeğeri $\ell(\ell + 1)$ 'dir. Bu özdeğer denkleminde, birinci mertebeden türev içeren terimi yok etmek için aşağıdaki dönüşümler kullanılır:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{\sin \theta}}\psi, \quad \Rightarrow \quad \partial_\theta \rightarrow \partial_\theta - \frac{1}{2} \cot \theta, \quad \tilde{H} \rightarrow H - 1/4. \quad (6.48)$$

Dönüşümler sonucunda Hermitsel Hamiltoniyen

$$H\psi_\ell = \left(-\partial_{\theta\theta} - \frac{1/4 + \partial_{\phi\phi}}{\sin^2\theta} \right) \psi_\ell = (\ell + 1/2)^2 \psi_\ell, \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (6.49)$$

elde edilir. Denklem (6.48)'de kullanılan Schrödinger Hamiltoniyeni Casimir işlemcisi cinsinden ifade edilebilir:

$$H = L^2 + 1/4. \quad (6.50)$$

Çözümlerin değişkenlerine ayrıldığı düşünülürse, denklem (6.45) ile tanımlanan L_z üreticileri için özfonksiyonlar

$$\psi_{\ell n}(\theta, \phi) = \psi_{\ell n}(\theta) e^{in\phi}, \quad L_z \psi_{\ell n}(\theta, \phi) = n \psi_{\ell n}(\theta, \phi), \quad |n| \leq \ell, \quad (6.51)$$

şeklindeir. Burada, $\psi_{\ell n}(\theta)$ bileşenleri indirgenmiş denklemleri sağlarlar:

$$H_n \psi_{\ell n} = \left(-\partial_{\theta\theta} + \frac{(n+1/2)(n-1/2)}{\sin^2\theta} \right) \psi_{\ell n} = (\ell + 1/2)^2 \psi_{\ell n}. \quad (6.52)$$

Burada, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm \ell$ değerlerini alır. Verilen n için, indirgenmiş H_n Hamiltoniyenine karşılık gelen enerji özdeğerleri,

$$E_n^k = (n + k + 1/2)^2, \quad k = 0, 1, \dots, \quad n + k = \ell \quad (6.53)$$

ile verilir. Denklem (6.52) ve denklem (6.36) aynı denklemlerdir. Böylece, aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$H_n \psi_n^k = \varepsilon_n^k \psi_n^k, \quad E_n^k = (n + k + 1/2)^2 \rightarrow n + k = \ell \rightarrow \psi_n^k = \psi_{n+k,n}, \quad (6.54)$$

$$H_n \psi_{\ell n} = \varepsilon_{\ell n} \psi_{\ell n}, \quad \varepsilon_{\ell n} = (\ell + 1/2)^2 \rightarrow n + k = \ell \rightarrow \psi_{\ell n} = \psi_n^{\ell-n}. \quad (6.55)$$

Bu ilişkilerden, H_n hiyerarşisindeki özfonksiyonların küresel harmonik olduğu sonucu çıkartılır:

$$\begin{aligned} \psi_n^k(\theta) e^{in\phi} &\propto \sqrt{\sin\theta} Y_{\ell n}(\theta, \phi), & \ell = n + k, \\ \psi_n^0(\theta) e^{in\phi} &\propto \sqrt{\sin\theta} Y_{nn}(\theta, \phi), & k = 0. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Denklem (6.48) ve denklem (6.45) kullanılarak yörüngesel açısal momentumlar,

$$\begin{aligned} L_+ &= e^{i\phi} (\partial_\theta + \cot\theta (-1/2 + i\partial_\phi)), \\ L_- &= e^{-i\phi} (-\partial_\theta + \cot\theta (-1/2 + i\partial_\phi)) \end{aligned} \quad (6.57)$$

olarak yazılabilir. Bu işlemciler, Denklem (6.51)'de verilen çözümlere etki ettiklerinde indirgenmiş işlemciler bulunur:

$$L_n^+ = \partial_\theta - \cot\theta (1/2 + n), \quad L_n^- = -\partial_\theta - \cot\theta (1/2 + n). \quad (6.58)$$

Bu ifadeler (6.37) denkleminde yer alan bağlaştırm işlemcileri olan $a_n^- (L_n^+)$ ve $a_n^+ (L_n^-)$ ile aynıdır.

ii) Spinör sistem

Birim küre üzerinde tanımlı spinör sistemini ele alalım. $SU(2)$ grubunun, $\Psi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{S}^2$ üzerine etkisi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$U(g)\Psi(\mathbf{x}) = D(g)\Psi(g^{-1}\mathbf{x}), \quad g \in SU(2). \quad (6.59)$$

Burada, D $SU(2)$ 'nin spin 1/2 temel gösterimidir ve $g \in SU(2)$ 'nin küre üzerindeki etkisidir. Bu etkiye karşılık gelen üreticiler toplam dönmeler (spin ve yörünge toplamı) ile verilirler:

$$J_i = L_i(\theta, \phi) + \frac{1}{2}\sigma_i := L_i(\theta, \phi) + S_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.60)$$

Burada, σ_i ($\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$) 2×2 'lik Pauli spin matrisleridir. Bu durumda, Casimir işlemcisi

$$C_s = J^2 = \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{S}\mathbf{L} + \mathbf{S}^2 \quad (6.61)$$

şeklindedir. Ayrıca, $\mathbf{L}^2$ ve $\mathbf{S}^2$ 'nin de spinör sistemi için Casimir işlemcisi oldukları açıktır. J işlemcisi ile sıra değişen diğer Casimir işlemcisi ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\tilde{h} := C_{so} = 2\mathbf{L}\mathbf{S} = 2\left(\sum_k L_k S_k\right). \quad (6.62)$$

Alçaltıcı ve yükseltici spin işlemcileri,

$$S_{\pm} = S_x \pm iS_y, \quad S_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.63)$$

kullanılarak denklem (6.62)'de verilen $\tilde{h}$ ifadesi yeniden yazılabilir:

$$\tilde{h} = L_- S_+ + L_+ S_- + 2L_z S_z. \quad (6.64)$$

Burada, işlemciler yerine yazılırsa, $\tilde{h}$ ifadesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} -i\partial_\phi & e^{-i\phi}(-\partial_\theta + \cot\theta(-1/2 + i\partial_\phi)) \\ e^{i\phi}(\partial_\theta + \cot\theta(-1/2 + i\partial_\phi)) & i\partial_\phi \end{pmatrix}. \quad (6.65)$$

$\tilde{h}$ işlemcisi ve J 'nin üreticileri sıradışıdır. Böylece, özfonksiyonlar J^2 ve J_z 'ye karşılık gelen j ve m parametreleri ile etiketlenirler:

$$J^2\Psi_{jm} = j(j+1)\Psi_{jm}, \quad J_z\Psi_{jm} = m\Psi_{jm}. \quad (6.66)$$

J^2 'nin belirlenmemiş değeri için, J_z üreticisinin özfonksiyonuna, denklem (6.65) ile verilen matris Hamiltoniye uygulanırsa,

$$J_z\Psi_{jm} = m\Psi_{jm} \Rightarrow \Psi_{jm}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \varphi_m(\theta)e^{i(m-1/2)\phi} \\ \chi_m(\theta)e^{i(m+1/2)\phi} \end{pmatrix}, \quad (6.67)$$

θ değişkenine bağlı indirgenmiş Hamiltoniye elde edilir:

$$\tilde{h}_m = \begin{pmatrix} m - 1/2 & (-\partial_\theta + m \cot \theta) \\ -(-\partial_\theta + m \cot \theta) & -m - 1/2 \end{pmatrix}. \quad (6.68)$$

Böylece, $\tilde{h}_m + 1/2 = h_n$, $m = n + 1/2$ eşitliğine ulaşılır. Burada m , (saf) yarım tam sayı değerlerini alır. Yani, (6.67)'nin spinör bileşenlerine karşılık gelen L_z açısal momentum değerleri, $m - 1/2 = n$ ve $m + 1/2 = n + 1$ tamsayı değer alırlar. $h = \tilde{h} + 1/2$ indirgenmemiş Hamiltoniyeni göstermektedir.

Ayrıca, denklem (6.49)'da yer alan Schrödinger denkleminde ulaşmak için, $\tilde{h}$ ifadesinin karesi alınabilir:

$$(2LS)^2 = L^2 - 2LS \Rightarrow \left(2LS + \frac{1}{2}\right)^2 = L^2 + \frac{1}{4} := H. \quad (6.69)$$

Başka bir deyişle, $h = \tilde{h} + 1/2$ olarak seçildiğinde, $h^2 = H$ olur. $\tilde{h}_m$ Hamiltoniyeni $m = n + 1/2$ olmak üzere, skaler Hamiltoniyeni köşegeni üzerinde bulunduran matris Hamiltoniyeni verir:

$$\left(\tilde{h}_m + \frac{1}{2}\right)^2 = \begin{pmatrix} H_n & 0 \\ 0 & H_{n+1} \end{pmatrix}, \quad m = n + 1/2. \quad (6.70)$$

$n = m - 1/2$ ve $n + 1 = m + 1/2$ ifadeleri spinör bileşenleri için kullanılır.

Böylece, skaler H_n Hamiltoniyenine karşılık gelen birinci mertebeden Dirac benzeri matris Hamiltoniyenin (h_n) orijini çarpanlara ayırma yöntemiyle açıklanmıştır. Şimdi, h 'nin simetrisi aracılığıyla, h_n için bağlaştırm işlemcilerini tanımlayalım.

iii) Simetri ve anti simetriler

J_z ve J^2 'nin özfonksiyonları Ψ_{jm} 'ler için, $J_\pm$ alçaltıcı ve yükseltici işlemcilerine karşılık gelen simetrisi bulalım. $J_\pm$ 'ye karşılık gelen ifadeler aşağıdaki gibidir:

$$J_+ = L_+ + S_+ = \begin{pmatrix} e^{i\phi}(\partial_\theta + \cot \theta(-1/2 + i\partial_\phi)) & 1 \\ 0 & e^{i\phi}(\partial_\theta + \cot \theta(-1/2 + i\partial_\phi)) \end{pmatrix},$$

$$J_- = L_- + S_-$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\phi}(-\partial_\theta + \cot \theta(-1/2 + i\partial_\phi)) & 0 \\ 1 & e^{-i\phi}(-\partial_\theta + \cot \theta(-1/2 + i\partial_\phi)) \end{pmatrix}. \quad (6.71)$$

J_+ , Ψ_{jm} üzerine ve J_- , $\Psi_{j,m+1}$ üzerinde etki ettiklerinde, denklem (6.67)'nin bileşenleri olan $\varphi_m(\theta)$ ve $\chi_m(\theta)$ üzerine etki ederler ve aşağıdaki hali alırlar:

$$\begin{aligned} J_m^+ &= \begin{pmatrix} \partial_\theta - m \cot \theta & 1 \\ 0 & \partial_\theta - (m+1) \cot \theta \end{pmatrix}, \\ J_m^- &= \begin{pmatrix} -\partial_\theta - m \cot \theta & 0 \\ 1 & -\partial_\theta - (m+1) \cot \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Bunlar da daha önceden tanımlanan bağlaştırm işlemcileri ile ilişkilidirler: $R_n^\pm \approx J_m^\mp$, $m = n + 1/2$.

$T^\pm$ anti simetrileri, h Hamiltoniyeni ile aşağıdaki gibi anti sıradeğişme bağıntılarını sağlarlar ve J_z 'nin öteleme işlemcisi gibi davranırlar:

$$T^\pm(\tilde{h} + 1/2) = -(\tilde{h} + 1/2)T^\pm, \quad [J_z, T^\pm] = \pm T^\pm. \quad (6.73)$$

$\tilde{h} + 1/2$ ile olan anti sıra değişme bağıntılarından dolayı, $T^\pm$ işlemcileri pozitif enerji durumunu $\tilde{h} + 1/2$ ile aynı fakat zıt işaretli enerji durumuna dönüştürür. Ayrıca, anti simetriler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$T^+ = L_+ S_3 - L_3 S_+, \quad (T^+)^{\dagger} = T^- = L_- S_3 - L_3 S_- . \quad (6.74)$$

Burada, $S_3 = S_z$ ve $L_3 = L_z$ 'dir. Bu matris işlemciler, Ψ_{jm} 'ler üzerine etki ettiklerinde (6.40) ifadesinde verilen $T^\pm$ 'leri verirler. Yukarıda tanıtılan anti simetri işlemcilerinin yanısıra, T_3 olarak adlandırılan bir işlemci tanımlanmalıdır:

$$T_3 = -\frac{1}{2}(L_+ S_- - L_- S_+). \quad (6.75)$$

$T_\pm$ ve T_3 anti simetrileri aşağıdaki bağıntıları sağlarlar:

$$\begin{aligned} [J_+, T^+] &= 0, & [J_+, T^-] &= 2T_3, & [J_\pm, T_3] &= \mp T^\pm, \\ [J_3, T^\pm] &= \pm T^\pm, & [J_3, T_3] &= 0. \end{aligned} \quad (6.76)$$

$T^\pm, T_3$ işlemcileri, pozitif ve negatif enerji durumlarının uzaylarını birbiriyle ilişkilendirdiklerinden “tek” işlemcidirler. $T^\pm$ çifti, enerjinin işaretini değiştirmenin yanısıra, $J_3 = J_z$ 'nin m enerji özdeğerini de değiştirir, ancak T_3 m 'yi değişmez bırakır. Eğer başlangıçtaki uzay pozitif ya da negatif ise, tümü J^2 'nin j enerji özdeğerlerini sırasıyla $j - 1$ veya $j + 1$ 'e dönüştürür. Bu da aşağıdaki bağıntı ile uyumludur:

$$[J^2, T^+] = 2(\tilde{h} + 1/2)T^+. \quad (6.77)$$

iv) Spektrum ve özfonksiyonlar

Öncelikle, (6.67) ile verilen J_z momentumunun belirli bir değerine sahip özfonksiyonlar seçelim. (6.70)'den görüldüğü gibi, $\tilde{h}_m + \frac{1}{2}$ 'nin karesi, köşegenlerinde

H_n ve H_{n+1} olan köşegen bir matristir. H_n ve H_{n+1} skaler Hamiltoniyenleri, sırasıyla ψ_n^k ve ψ_{n+1}^{k-1} özfonksiyonlarına sahiptir ve enerji özdeğerleri aynıdır. Bu enerji özdeğerleri aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$E_n^k = (n + k + 1/2)^2. \quad (6.78)$$

$\tilde{h}_m + \frac{1}{2}$ 'nin spinör özfonksiyonları için Ψ_n^k dalga fonksiyonu,

$$\Psi_n^k = \begin{pmatrix} \alpha \psi_n^k(\theta) e^{i(m-1/2)\phi} \\ \beta \psi_{n+1}^{k-1}(\theta) e^{i(m+1/2)\phi} \end{pmatrix}, \quad m = n + 1/2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.79)$$

şeklindedir. Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sabitleri aşağıdaki özdeğer denkleminde bulunabilir:

$$(\tilde{h}_m + 1/2) \Psi_n^k = \tilde{\epsilon} \Psi_n^k. \quad (6.80)$$

Pozitif enerji çözümleri,

$$\tilde{\epsilon}_n^{k+} = +(n + k + 1/2), \quad \Psi_n^{k+} = \begin{pmatrix} \alpha_n^{k+} \psi_n^k(\theta) e^{i(m-1/2)\phi} \\ \beta_n^{k+} \psi_{n+1}^{k-1}(\theta) e^{i(m+1/2)\phi} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (6.81)$$

şeklindedir. Negatif enerji çözümleri ise

$$\tilde{\epsilon}_n^{k-} = -(n + k + 1/2), \quad \Psi_n^{k-} = \begin{pmatrix} \alpha_n^{k-} \psi_n^k(\theta) e^{i(m-1/2)\phi} \\ \beta_n^{k-} \psi_{n+1}^{k-1}(\theta) e^{i(m+1/2)\phi} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.82)$$

ile verilir. Burada özfonksiyonlar aşağıdaki sabitlerle belirlenirler:

$$\alpha_n^{k+} = \sqrt{2n + k + 1}, \quad \beta_n^{k+} = -\sqrt{k}; \quad \alpha_n^{k-} = \sqrt{k}, \quad \beta_n^{k-} = \sqrt{2n + k + 1}. \quad (6.83)$$

Taban durumu için enerji çözümü pozitifdir,

$$\tilde{\epsilon}_n^{0+} = +(n + 1/2), \quad (6.84)$$

ve dalga fonksiyonu

$$\Psi_n^{0+}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \psi_n^0(\theta) e^{i(m-1/2)\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.85)$$

ile verilir.

$\Psi_n^{k\pm}$ özfonksiyonları ve bunların spinör bileşenleri, $\tilde{h}$ 'nin simetrisi J_z, L^2, J^2 cinsinden tanımlanabilir.

J_z : $\Psi_n^{k\pm}$ özfonksiyonlarında bulunan n etiketinin anlamı, $\Psi_n^{k\pm}$ 'lerin J_z 'nin $m = n + 1/2$ enerji özdeğerli özfonksiyonları olduğunu gösterir:

$$J_z \Psi_n^{k\pm} = m \Psi_n^{k\pm}, \quad m = n + 1/2. \quad (6.86)$$

L^2 : $\Psi_n^{k\pm}$ 'nin spinör bileşenleri olan $\psi_n^k(\theta) e^{i(m-1/2)\phi}$ ve $\psi_{n+1}^{k-1}(\theta) e^{i(m+1/2)\phi}$ skaler fonksiyonları, L^2 'nin " $\ell(\ell + 1)$ " özdeğerli özfonksiyonlarıdır. Böylece, $\tilde{h}$ 'nin spinör özfonksiyonları L^2 'nin de aynı enerji değerli özfonksiyonlarıdır:

$$(L^2 + 1/4)\Psi_n^{k\pm} = (\ell + 1/2)^2\Psi_n^{k\pm}, \quad \ell = n + k, \quad m = n + 1/2. \quad (6.87)$$

J^2 : $\tilde{h}$ 'nin yukarıdaki özfonksiyonları J^2 'nin de özfonksiyonlarıdır. Denklem (6.61) kullanılarak bu görülebilir:

$$\begin{aligned} J^2\Psi_n^{k+} &= (L^2 + \tilde{h} + s^2)\Psi_n^{k+} = (\ell(\ell + 1) + \ell + 3/4)\Psi_n^{k+} \\ &= (\ell + 1/2)(\ell + 3/2)\Psi_n^{k+} \end{aligned} \quad (6.88)$$

Başka bir ifade ile,

$$\begin{aligned} J^2\Psi_n^{k+} &= (j^+)(j^+ + 1)\Psi_n^{k+}, & j^+ &= \ell + 1/2, \\ J^2\Psi_n^{k-} &= (j^-)(j^- + 1)\Psi_n^{k-}, & j^- &= \ell - 1/2 \end{aligned} \quad (6.89)$$

şeklinde yazabilir.

Bu sonuçlar, spinör dalga fonksiyonlarının (Ψ 'lerin) yörünge “ ℓ ” ve spin $s = 1/2$ tensör temsillerinin çarpımına eşit olmasıyla açıklanabilir: $\Psi \in \ell \otimes 1/2$. Açısal momentumun bileşimiden,

$$\ell \otimes 1/2 = j^+ \oplus j^-, \quad j^\pm = \ell \pm 1/2 \quad (6.90)$$

olarak yazılır. Böylece, Ψ_n^{k+} pozitif enerji spinörleri j^+ toplam açısal momentum temsiline, Ψ_n^{k-} negatif enerji spinörleri j^- toplam açısal momentum temsiline sahiptir.

Özet olarak, $\tilde{h} + 1/2$ özfonksiyonları iki farklı şekilde etiketlenebilir:

$$\begin{aligned} \Psi_n^{k+} &= \Psi_{j^+ \ell m}; & \tilde{\varepsilon}_n^{k+} &= \ell + 1/2, & j^+ &= \ell + 1/2, \\ \Psi_n^{k-} &= \Psi_{j^- \ell m}; & \tilde{\varepsilon}_n^{k-} &= -(\ell + 1/2), & j^- &= \ell - 1/2. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Burada, $\ell = n + k$, $m = n + 1/2$ 'dir. Sonuç olarak, $\tilde{\varepsilon}_n^{k+}$ pozitif enerji dejenereliği, karşılık gelen $\tilde{\varepsilon}_n^{k-}$ negatif enerji dejenereliğinden daha büyüktür. Bunun nedeni, pozitif öz uzayın $2\ell + 2$ boyutlu $j^+ = \ell + 1/2$ temsiline, negatif öz uzayın ise 2ℓ boyutlu j^- temsiline olmasıdır.

6.3 İndirgenmiş Dirac Hamiltoniyenlerinin Azalan Hiyerarşisi

Bir önceki kesimde yapılanları, denklem (4.31)'deki gibi tanımlanan ikinci mertebeden H_n azalan Hamiltoniyen hiyerarşisine uygulayalım:

$$H_{n-1} = -\partial_{xx} + V_n(x) = a_{n-1}^+ a_{n-1}^- - \mu_{n-1}^2 = a_n^- a_n^+ - \mu_n^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (6.92)$$

Dirac benzeri Hamiltoniyen,

$$h_n = \begin{pmatrix} \mu_n & i a_n^- \\ i a_n^+ & -\mu_n \end{pmatrix} \quad (6.93)$$

olarak tanımlanabilir. h_n matrisinin karesi, bir çift Schrödinger Hamiltoniyeni (H_n ve H_{n-1}) verir:

$$h_n^2 = - \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ 0 & H_n \end{pmatrix} := -H_n. \quad (6.94)$$

Bu Dirac benzeri Hamiltoniyenin, artan hiyerarşi durumundakinden farkı Hermitsel olmamasıdır. Buradaki Hermitsellik, σ_3 -Hermitsellik (Mostafazadeh 2002) olarak tanımlanır:

$$h_n = \sigma_3 h_n^\dagger \sigma_3 = h_n^\# . \quad (6.95)$$

σ_3 ve denklem (6.94)'de verilen h_n^2 sıra değiştiğinden, h_n^2 Hermitseldir: $(h_n^2)^\dagger = h_n^2$.

h_n ve h_{n-1} matris Hamiltoniyenleri, $A_n^\pm$ bağlaştırm işlemcileri ile denklem (4.33)'de verildiği gibi azalan hiyerarşi için aşağıdaki gibi ilişkilendirilir:

$$A_n^- h_n = \gamma h_{n-1} A_n^-, \quad h_n A_n^+ = \gamma A_n^+ h_{n-1}. \quad (6.96)$$

Burada, $A_n^\pm = \sigma_3 (A_n^\pm)^\dagger \sigma_3$ ve $\gamma = \pm 1$ 'dir. Ayrıca, $A_n^\pm$ bağlaştırm işlemcileri, h_n^2 ve h_{n-1}^2 matris Hamiltoniyenleri arasında da ilişki kurar:

$$A_n^- h_n^2 = h_{n-1}^2 A_n^-, \quad h_n^2 A_n^+ = A_n^+ h_{n-1}^2. \quad (6.97)$$

$\gamma = 1$ için bağlaştırm işlemcileri

$$R_n^- = \begin{pmatrix} a_{n-1}^- & 0 \\ i(\mu_{n-1} - \mu_n) & a_n^- \end{pmatrix}, \quad R_n^- h_n = h_{n-1} R_n^- \quad (6.98)$$

şeklindedir. $\gamma = -1$ için anti bağlaştırm işlemcileri $T_n^\pm$

$$T_n^- = \begin{pmatrix} a_{n-1}^- & 0 \\ i(\mu_{n-1} + \mu_n) & -a_n^- \end{pmatrix}, \quad T_n^- h_n = -h_{n-1} T_n^- \quad (6.99)$$

ile verilir.

6.3.1 Azalan Dirac hiyerarşisinin spektrumu

h_n matris Hamiltoniyenin özfonksiyonu ve spektrumu daha önce kullanılan yöntemlerle bulunabilir. Pozitif spektrum için enerji ve özfonksiyon

$$\varepsilon_n^{k+} = \mu_{n-k}, \quad \Psi_n^{k+} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_n + \mu_{n-k}} \psi_{n-1}^{k-1} \\ i\sqrt{\mu_n - \mu_{n-k}} \psi_n^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (6.100)$$

şeklindeyken, negatif spektrum ve taban durumu için enerji ve özfonksiyon

$$\varepsilon_n^{k-} = -\mu_{n-k}, \quad \Psi_n^{k-} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_n - \mu_{n-k}} \psi_{n-1}^{k-1} \\ i\sqrt{\mu_n + \mu_{n-k}} \psi_n^k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.101)$$

$$\varepsilon_n^{0-} = -\mu_n, \quad \Psi_n^{0-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n^0 \end{pmatrix}, \quad k = 0 \quad (6.102)$$

ile verilir. Skaler azalan hiyerarşinin Dirac benzeri ifadesinde taban durumu negatif enerjiye sahiptir. Anti parçacık durumları pozitif enerji spektrumu ile gösterilir. Denklem (6.93)'den açıkça görüldüğü gibi, bu Hermitsel olmayan matris Hamiltoniyenin bir örneğidir ve kesikli enerji düzeyleri gerçel ve karşılık gelen özfonksiyonların karesi integrallenebilir.

6.3.2 Bağlaştırm işlemcileri tarafından yok edilen özfonksiyonlar

T_n^- ve R_n^- bağlaştırm işlemcileri tarafından yok edilen özfonksiyonları bulalım. R_n^- 'nin yok ettiği özfonksiyonlar:

1) Negatif enerjiler için taban durumu

$$\Psi_n^{0-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n^0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n^{0-} = -\mu_n, \quad (6.103)$$

2) Pozitif enerjiler için taban durumu

$$\Psi_n^{1+} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_n + \mu_{n-1}} \psi_{n-1}^0 \\ i\sqrt{\mu_n - \mu_{n-1}} \psi_n^1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n^{1+} = \mu_{n-1} \quad (6.104)$$

şeklindedir. T_n^- tarafından yok edilen özfonksiyonlar ise aşağıdaki gibidir:

1) Negatif enerjiler için taban durumu

$$\Psi_n^{0-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_n^0 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n^{0-} = -\mu_n, \quad (6.105)$$

2) Negatif enerjiler için birinci uyarılmış durum

$$\Psi_n^{1-} = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu_n - \mu_{n-1}} \psi_{n-1}^0 \\ i\sqrt{\mu_n + \mu_{n-1}} \psi_n^1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_n^{1-} = -\mu_{n-1}. \quad (6.106)$$

6.4 Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli

Hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeline karşılık gelen Hamiltoniyen işlemcisi (Flügge 1999),

$$H_n = -\partial_{xx} - \frac{(n + 1/2)(n - 1/2)}{\cosh^2 x}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.107)$$

şeklindedir. Azalan hiyerarşi (4.31) denkleminde verildiği gibidir. $a_n^\pm$ işlemcileri ve enerjiler

$$a_n^\pm = \pm \partial_x + (n - 1/2) \tanh x, \quad \mu_n^2 = (n - 1/2)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.108)$$

olmak üzere, h_n matris Hamiltoniyeni aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$h_n = \begin{pmatrix} (n - 1/2) & i(\partial_x + (n - 1/2)\tanh x) \\ i(-\partial_x + (n - 1/2)\tanh x) & -(n - 1/2) \end{pmatrix}. \quad (6.109)$$

Bağlaştırım işlemcileri,

$$R_n^+ = \begin{pmatrix} -\partial_x + (n - 3/2)\tanh x & -i \\ 0 & -\partial_x + (n - 1/2)\tanh x \end{pmatrix}, \quad (6.110)$$

$$T_n^+ = \begin{pmatrix} -\partial_x + (n - 3/2)\tanh x & i(2n - 2) \\ 0 & -(-\partial_x + (n - 1/2)\tanh x) \end{pmatrix} \quad (6.111)$$

şeklindedir.

6.4.1 Hiperbol üzerinde Dirac benzeri denklemler

Hiperbolik PT skaler Hamiltoniyeni (6.107) ve matris PT Hamiltoniyeni (6.109), trigonometrik duruma benzer şekilde hiperbol üzerinde tanımlanan bir sistemin değişkenlerine ayrılması ile elde edilebilir. Denklem (6.107)'de verilen potansiyeli elde etmek için, tek yapraklı hiperbol kullanılabilir. Tek yapraklı hiperbol seçimindeki amaç, açısız ϕ değişkenine bağlı özfonksiyonlar ile çalışmak ve hiperbolik potansiyelin bu özel formunu elde etmektir.

i) Skaler sistem

Hiperbol yüzeyi üzerinde bir noktanın koordinatları,

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad (6.112)$$

denklemini sağlar. Pseudo-küresel koordinatlar

$$x = \cosh \chi \cos \phi, \quad y = \cosh \chi \sin \phi, \quad z = \sinh \chi \quad (6.113)$$

olarak verilir. (6.112) ile tanımlanan yüzey $SO(2,1)$ grubu altında değişmezdir ve hiperbol üzerinde tanımlı $\tilde{\psi}(x)$ skaler dalga fonksiyonlarına etkisi

$$U(g)\tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}(g^{-1}x), \quad g \in SO(2,1) \quad (6.114)$$

şeklindedir. $SO(2,1)$ grubunun üreticilerinden olan L_z , z eksenini etrafında dönme üretir ve L_x ve L_y , sırasıyla x ve y eksenleri etrafında hiperbolik dönüşümlerine yol açarlar. Bu işlemcilerin, Kartezyen koordinatlarda diferansiyel temsili aşağıdaki gibidir:

$$L_x = y\partial_z + z\partial_y, \quad L_y = -x\partial_z - z\partial_x, \quad L_z = -x\partial_y + y\partial_x. \quad (6.115)$$

Bu ifadelerde Pseudo-küresel koordinatlar kullanılıp, i ile çarpılırsa $SO(2,1)$ grubunun üreticileri,

$$\begin{aligned} L_x &= i(\sin \phi \partial_\chi + \tanh \chi \cot \phi \partial_\phi), \\ L_y &= i(-\cos \phi \partial_\chi + \tanh \chi \sin \phi \partial_\phi), \\ L_z &= i(-\partial_\phi) \end{aligned} \quad (6.116)$$

olarak elde edilir. Sıra değiştirme bağıntıları $so(2,1) \approx su(1,1)$ Lie cebrine yakındır ve

$$[L_z, L_x] = iL_y, \quad [L_z, L_y] = -iL_x, \quad [L_x, L_y] = -iL_z \quad (6.117)$$

şeklindedirler.

Denklem (6.116) ile verilen gösterimden, alçaltıcı ve yükseltici işlemciler,

$$L_\pm = L_x \pm iL_y = e^{\pm i\phi}(\pm \partial_\chi + i \tanh \chi \partial_\phi) \quad (6.118)$$

elde edilir. Bu bazda sıra değiştirme bağıntıları,

$$[L_z, L_\pm] = \pm L_\pm, \quad [L_+, L_-] = -2L_z \quad (6.119)$$

ile verilirler.

Skaler Schrödinger Hamiltoniyeni ile belirlenen Casimir işlemcisi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$C := \tilde{H} = L_x^2 + L_y^2 - L_z^2 = L_+ L_- - L_z(L_z - 1). \quad (6.120)$$

Bu Hamiltoniyene karşılık gelen özdeğer denklemi aşağıdaki gibidir (Vilenkin 1968):

$$\tilde{H}\tilde{\psi} = -\lambda(\lambda - 1)\tilde{\psi}, \quad \lambda = 1, 2, 3, \dots \quad (6.121)$$

Pseudo-küresel koordinatlarda $C(= \tilde{H})$,

$$\tilde{H} = -\partial_{\chi\chi} - \tanh \chi \partial_\chi - \frac{\partial_{\phi\phi}}{\cosh^2 \chi} \quad (6.122)$$

olarak ifade edilir. Birinci mertebeden türev içeren terimi yok etmek için aşağıdaki dönüşüm kullanılır:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{\cosh \chi}} \psi \Rightarrow \partial_\chi \rightarrow \partial_\chi - \frac{1}{2} \tanh \chi. \quad (6.123)$$

Böylece, ötelenmiş Hamiltoniyen $H := \tilde{H} - 1/4$

$$H = \tilde{H} - 1/4 = -\partial_{\chi\chi} + \frac{1/4 + \partial_{\phi\phi}}{\cosh^2 \chi} \quad (6.124)$$

halini alır. Denklem (6.121)'e göre H Hamiltoniyenin enerji özdeğer denklemi,

$$H\psi = -(\lambda - 1/2)^2 \psi, \quad \lambda = 1, 2, \dots \quad (6.125)$$

elde edilir. L_z ve C 'nin ortak özfonksiyonları,

$$\psi(\chi, \phi) = \psi_n(\chi)e^{in\phi}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (6.126)$$

olarak alındığında,

$$H_n \psi_n = \left(-\partial_{\chi\chi} + \frac{(n+1/2)(n-1/2)}{\cosh^2 \chi} \right) \psi_n = -(\lambda - 1/2)^2 \psi_n, \\ \lambda = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (6.127)$$

ifadesi elde edilir. Burada, $n \geq \lambda \geq 1$ 'dir. Böylece, n belirlendiğinde, bağlı durum sayısı sonludur: $k = 0, 1, \dots, n-1$. λ enerji özdeğeri sabit tutulduğunda, potansiyeller $n \geq \lambda$ ile etiketlenen negatif enerji düzeylerine sahiptirler. ψ_n^k özfonksiyonuna karşılık gelen enerji özdeğerleri,

$$E_n^k = -(n-k-1/2)^2, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (6.128)$$

ile verilir. Böylece, aşağıdaki bağıntılar yazılabilir:

$$\lambda = n - k, \quad L_z \psi_n^k = n \psi_n^k, \quad \lambda = n, n-1, \dots, 1. \quad (6.129)$$

Diğer taraftan, H_n ve H_{n-1} Hamiltonienleri arasında etki eden alçaltıcı ve yükseltici işlemciler, denklem (6.123)'de verilen dönüşümden sonra

$$L_+ = L_x + iL_y = +\partial_\chi - (n-1/2)\tanh\chi, \\ L_- = L_x - iL_y = -\partial_\chi - (n-1/2)\tanh\chi \quad (6.130)$$

halini alır. Bu ifadeler (6.108) denkleminde yer alan bağlaştırım işlemcileri olan a_n^- (L_n^+) ve a_n^+ (L_n^-) ile aynıdır.

ii) Spinör sistem

(6.112) ile tanımlı hiperbol üzerinde, $\Psi(x)$ spinör dalga fonksiyonlarının uzayında tanımlı $so(2,1) \approx su(1,2)$ spinör gösterimini ele alalım. Bu uzayda, K_i olarak adlandırılan $SU(1,1)$ üreticileri aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$K_i = L_i + S_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.131)$$

Burada, (6.116) ile verilen yörünge üreticileri ($L_1 = L_x, L_2 = L_y, L_3 = L_z$) ve spinör üreticileri ($S_1 = S_x, S_2 = S_y, S_3 = S_z$)

$$S_x = i\frac{1}{2}\sigma_x, \quad S_y = i\frac{1}{2}\sigma_y, \quad S_z = i\frac{1}{2}\sigma_z. \quad (6.132)$$

olarak verilirler. Böylece, $S_\pm = S_x \pm iS_y$ aşağıdaki şekildedir:

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.133)$$

S_x, S_y anti Hermitsel, S_z ise Hermitseldir. Bunlar $su(1,1)$ Lie cebirini sağlarlar:

$$\begin{aligned} [S_z, S_x] &= iS_y, & [S_z, S_y] &= -iS_x, & [S_x, S_y] &= -iS_z, \\ [S_z, S_{\pm}] &= \pm S_{\pm}, & [S_-, S_+] &= 2S_z. \end{aligned} \quad (6.134)$$

Bu durumda, Casimir işlemcisi

$$\begin{aligned} C_s = \mathbf{K}^2 &= (L_x + S_x)^2 + (L_y + S_y)^2 - (L_z + S_z)^2 = \mathbf{L}^2 + 2\mathbf{SL} + \mathbf{S}^2 \\ &= -v(v-1) \end{aligned} \quad (6.135)$$

şeklindedir ve matris Hamiltoniyen h ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$h = 2\mathbf{LS} = 2(L_x S_x + L_y S_y - L_z S_z) = L_+ S_- + L_- S_+ - 2L_z S_z. \quad (6.136)$$

Burada, $\mathbf{S}^2 = -3/4$ 'dir. (6.133) ile verilen ifadeler ve (6.118) ile verilen $L_{\pm}$ yörünge işlemcisi

$$L_{\pm} = e^{\pm i\phi} (\pm \partial_{\chi} + (i\partial_{\phi} \mp 1/2) \tanh \chi) \quad (6.137)$$

(6.123)'teki dönüşümden sonra, denklem (6.136)'da yerine yazıldığında, matris Hamiltoniyenin açık ifadesine ulaşılır:

$$h = \begin{pmatrix} i\partial_{\phi} & ie^{-i\phi}(-\partial_{\chi} + (i\partial_{\phi} + 1/2)\tanh \chi) \\ ie^{i\phi}(\partial_{\chi} + (i\partial_{\phi} + 1/2)\tanh \chi) & -i\partial_{\phi} \end{pmatrix}. \quad (6.138)$$

S_x, S_y matris üreticileri Hermitsel olmadığından, bu Hamiltoniyen de Hermitsel değildir. (6.135) ile verilen Casimir işlemcisi (C 'nin) ve K_z 'nin ortak Ψ_{vm} özfonksiyonları aşağıdaki gibidir:

$$K_z \Psi_{vm} = m \Psi_{vm} \Rightarrow \Psi_{vm}(\chi, \phi) = \begin{pmatrix} \varphi_m(\chi) e^{i(m-1/2)\phi} \\ \xi_m(\chi) e^{i(m+1/2)\phi} \end{pmatrix}. \quad (6.139)$$

h 'nin bu özfonksiyonlar üzerindeki etkisinden, χ değişkenli indirgenmiş Hamiltoniyen,

$$h_m = \begin{pmatrix} -m + 1/2 & i(-\partial_{\chi} + m \tanh \chi) \\ i(\partial_{\chi} + m \tanh \chi) & m + 1/2 \end{pmatrix} \quad (6.140)$$

olarak bulunur. h 'nin karesi alınırsa,

$$h^2 = -\mathbf{L}^2 + h \quad (6.141)$$

elde edilir. Böylece, (6.124)'e göre $H = \mathbf{L}^2 - 1/4$ aşağıdaki gibi yazılır:

$$(h - 1/2)^2 = -H = -\left(-\partial_{\chi\chi} + \frac{1/4 + \partial_{\phi\phi}}{\cosh^2 \chi}\right). \quad (6.142)$$

(6.140) denkleminde verilen indirgenmiş Hamiltoniyenin karesi $\left(h_m - \frac{1}{2}\right)^2$

$$\left(h_m - \frac{1}{2}\right)^2 = -\begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ 0 & H_n \end{pmatrix} \quad (6.143)$$

olarak bulunur. Burada, $m = n - 1/2$ için H_m (6.127) ile verilen H_n ile çakışır.

Şimdi, bazı noktalara dikkat çekelim:

- (a) h 'nin karesi için bu iki formül uyumludur, çünkü h 'nin gerçel spektrumunun karesi her zaman pozitif bir spektrum üretir, yani h 'nin karesi (6.127)'de gösterildiği gibi negatif bir spektruma sahip H skaler Hamiltoniyenlerinden zıt işarete sahip olmalıdır.
- (b) (6.138)'de verilen matris hiperbolik Hamiltoniyen h veya indirgenmiş formu (6.140)'ın açıkça Hermitsel olmaması bir tutarsızlık gibi görünmektedir. Bununla birlikte, h Hermitsel olmamasına rağmen, karesi integrallenebilir çözümlere ve gerçel kesikli bir spektruma sahiptir. Bu özellik, aşağıdaki alt bölümde özdeğerler ve özfonksiyonlar bulunarak gösterilecektir.
- (c) Önceki açıklamanın bir sonucu olarak, $SU(1,1)$ 'in bu spinör temsili üniter değildir. Bununla birlikte, aşağıdaki gibi tanımlı olan Hermitsel değişmez çarpım vardır:

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int \Phi^\dagger(\chi, \phi) \sigma_3 \Psi(\chi, \phi) d\chi d\phi. \quad (6.144)$$

Burada, hiperbol üzerindeki değişmez ölçü, (6.123) ile verilen dönüşümle dalga fonksiyonlarında gizlidir. Gerçekten, (6.138) ile verilen indirgenmiş Hamiltoniyen'in, σ_3 'e göre Hermitsel olduğu kontrol edilebilir: $h^\dagger \sigma_3 = \sigma_3 h$. Bu, üniter olmayan karakterle tutarlı, pozitif tanımlı olmayan bir çarpımdır.

iii) Spektrum ve Özfonksiyonlar

$\left(h - \frac{1}{2}\right)^2$ 'nin köşegen ifadesi göz önüne alınır, aynı zamanda (6.140)'da verilen h_m matrisinin elemanları yazılırsa, (6.108) $a_m^\pm$ işlemcilerinden yararlanılarak özfonksiyonların aşağıdaki gibi olacağı tahmin edilebilir:

$$\begin{pmatrix} -m & -ia_m^- \\ -ia_m^+ & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \psi_{m-1}^{k-1} \\ i\beta \psi_m^k \end{pmatrix} = \varepsilon_n^k \begin{pmatrix} \alpha \psi_{m-1}^{k-1} \\ i\beta \psi_m^k \end{pmatrix}. \quad (6.145)$$

Bu ifade göz önüne alınarak, $a_m^\pm$ işlemcilerinin özfonksiyonlar üzerindeki etkisi,

$$\begin{aligned} a_m^- \psi_m^k &= \sqrt{\mu_m^2 - \mu_{m-k}^2} \psi_{m-1}^{k-1}, & a_m^+ \psi_{m-1}^{k-1} &= \sqrt{\mu_m^2 - \mu_{m-k}^2} \psi_m^k, \\ \mu_{m-k}^2 &= (m-k)^2 \end{aligned} \quad (6.146)$$

olarak elde edilir. h 'nin enerji özdeğerleri,

$$\varepsilon_n^{k\pm} = \pm(m - k), \quad m = n - 1/2 \quad (6.147)$$

ile verilir. Bunlara karşılık gelen $\Psi_n^{k\pm}$ özfonksiyonları ise $\alpha^\pm$ ve $\beta^\pm$ sabitleri ile belirlenirler:

$$\alpha^- = \sqrt{k}, \quad \beta^- = \sqrt{2m - k}, \quad \alpha^+ = \sqrt{2m - k}, \quad \beta^+ = \sqrt{k}. \quad (6.148)$$

Taban durumu özfonksiyonları negatiftir:

$$\varepsilon_n^{0-} = -m, \quad \psi_n^{0-} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_m^0 \end{pmatrix}. \quad (6.149)$$

Negatif spektrum spinör özfonksiyonlarının alttaki bileşeni daha büyüktür (spin $-1/2$). Bununla birlikte, pozitif spektrum spinör özfonksiyonlarının daha büyük bileşeni üst bileşendir ve spin $1/2$ 'ye karşılık gelir. Her pozitif veya negatif özdeğer için dejenerelik sonsuzdur. Aşağıda, aynı mutlak değere sahip ancak zıt işaretli özdeğerlere karşılık gelen $SU(1, 1)$ temsillerini belirleyelim: $\varepsilon_n^{k\pm} = \pm(n - k - 1/2)$. $\Psi_n^{k\pm}$ özfonksiyonları ve bunların spinör bileşenleri, $\tilde{h}$ 'nin sıra değiştiren simetrileri K_z, L^2, K^2 cinsinden tanımlanabilir.

K_z : $\Psi_n^{k\pm}$ özfonksiyonlarında bulunan n etiketi, bunların K_z 'nin $m = n - 1/2$ enerji özdeğerli özfonksiyonları olduğunu ifade eder:

$$K_z \Psi_n^{k\pm} = m \Psi_n^{k\pm}, \quad m = n - 1/2. \quad (6.150)$$

L^2 : $\Psi_n^{k\pm}$ 'nin spinör bileşenleri olan $\psi_n^k(\theta)e^{i(m+1/2)\phi}$ ve $\psi_{n-1}^{k-1}(\theta)e^{i(m-1/2)\phi}$ skaler fonksiyonları, L^2 'nin $\lambda = n - k$ özdeğerli özfonksiyonlarıdır. Böylece, $\tilde{h}$ 'nin spinör özfonksiyonları L^2 'nin de aynı enerji özdeğerli özfonksiyonlarıdır:

$$(L^2 - 1/4)\Psi_n^{k\pm} = -(\lambda - 1/2)^2 \Psi_n^{k\pm}, \quad \lambda = n - k, \quad m = n - 1/2. \quad (6.151)$$

K^2 : Yukarıda belirtien $\tilde{h}$ 'nin özfonksiyonları K^2 'nin de özfonksiyonlarıdır. Denklem (6.61) kullanılarak, aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\begin{aligned} K^2 \Psi_n^{k-} &= (L^2 + \tilde{h} + S^2) \Psi_n^{k-} = (-\lambda(\lambda - 1) - \lambda + 1/4) \Psi_n^{k-} \\ &= -(\lambda + 1/2)(\lambda - 1/2) \Psi_n^{k-}. \end{aligned} \quad (6.152)$$

Başka bir deyişle,

$$\begin{aligned} K^2 \Psi_n^{k-} &= (v^+)(v^+ - 1) \Psi_n^{k-}, \quad v^+ = \lambda + 1/2, \\ K^2 \Psi_n^{k+} &= (v^-)(v^- - 1) \Psi_n^{k+}, \quad v^- = \lambda - 1/2 \end{aligned} \quad (6.153)$$

şeklinde yazabilir. Spinör dalga fonksiyonları (Ψ 'ler), yörünge " λ " ve spin $s = 1/2$ temsillerinin tensör çarpımının elemanlarıdır: $\Psi \in \lambda \otimes 1/2$. Açısal momentumun bileşiminden,

$$\lambda \otimes 1/2 = v^+ \oplus v^-, \quad v^\pm = \lambda \pm 1/2 \quad (6.154)$$

yazılır.

Böylece, Ψ_n^{k-} negatif enerji spinörleri v^+ toplam açısal momentum temsiline, Ψ_n^{k+} pozitif enerji spinörleri v^- toplam açısal momentum temsiline sahiptir. Sonuç olarak, burada verilen Hermitsel olmayan matris Hamiltoniyeni için spektrumun gerçel olduğu gösterilmiş oldu.

iv) Simetri ve Anti Simetriler

$K_\pm$ ve K_3 simetrileri $su(1,1)$ durumu için aşağıdaki gibidir:

$$K_+ = L_+ + S_+, \quad K_- = L_- + S_-, \quad K_3 = L_3 + S_3. \quad (6.155)$$

$K_3 = K_z$ 'nin özfonksiyonları için olan kısıtlamalar, $R_n^\pm$ bağlaştırm işlemcilerine yol açar.

$h_n - 1/2$ Hamiltoniyeni ile anti sıradeğişen $T^\pm$ anti simetrileri aşağıdaki bağıntıları sağlarlar:

$$T^\pm(\tilde{h} - 1/2) = -(\tilde{h} - 1/2)T^\pm, \quad [K_3, T^\pm] = \pm T^\pm. \quad (6.156)$$

Ayrıca, trigonometrik durum ile aynı ifadelerle sahiptirler:

$$T^+ = L_+ S_3 - L_3 S_+, \quad T^- = L_- S_3 - L_3 S_-, \quad T_3 = -\frac{1}{2}(L_+ S_- - L_- S_+). \quad (6.157)$$

Dirac-Weyl benzeri denklemlerin spektrumu, bağlaştırm işlemcileri cinsinden simetrileri, 4×4 'lük Dirac benzeri Hamiltoniyenler için global bağlaştırm işlemcileri ve spektrumu da trigonometrik duruma benzer şekilde elde edilebilir.

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, öncelikle görelî, $\text{spin}-\frac{1}{2}$ parçacıkların hareketini tanımlayan Dirac (kütleli) ve Dirac-Weyl (kütlesiz) denklemleri incelenmiştir. Dirac denkleminin düzlem dalga çözümleri parçacıklar ve anti parçacıklar için elde edilmiştir.

Daha sonra, 2010 yılı Nobel Fizik Ödülü'ne konu olan grafen incelenmiştir. Karbon atomlarının altıgen şeklinde dizilmesiyle oluşan grafen, karbonun bir allotropu olan grafitin tek bir katmanına verilen addır. Bu çalışmada ilk olarak grafenin enerji band yapısı sıkı bağ yaklaşımı kullanılarak elde edilmiştir. Grafende Dirac noktası civarında kütlesiz Dirac elektronları için Dirac-Weyl denkleminin geçerli olduğu, sıkı bağ yaklaşımından elde edilen etkin Hamiltoniyenden yola çıkılarak gösterilmiştir.

Süpersimetrik kuantum mekaniği yöntemlerinden olan, çarpanlara ayırma, bağlaştırm ve şekil değişmezlik incelenmiştir. Özel olarak, artan ve azalan şekil değişmez Hamiltoniyen hiyerarşileri tanıtılmıştır.

Dönme simetrisine sahip yüzeye dik bir manyetik alan altında, hiperbol yüzeyi üzerinde kütlesiz Dirac parçacıklarının hareketi SUSY yöntemleri kullanılarak belirlenmiştir. Dirac-Weyl denklemi bu yüzeyde metrik ve spin bağlantısı aracılığıyla tanımlamak yerine, uygun koordinatlarda (hiperbolik koordinatlarda) ifade edilerek ele alınmıştır. Bu işlem, yüzeye teğet momentum işlemcilerinin tanımlanması yoluyla basit bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Ele alınan konulardan biri de taban (sıfır enerji) durumunun varlığı ve dejenereliği ile ilişkili olan Aharonov-Casher teoreminin geçerliliğidir. Burada, hiperbol yüzeyinde kompakt sınırlı, radyal simetrik manyetik alanlar ve sonlu manyetik akı durumunda sıfır enerji durumlarının olmadığı gösterilmiştir. Başka bir deyişle, kütlesiz parçacıkların hiperbol yüzeyinde hareketinin, düzlemde olduğundan oldukça farklı olduğu gösterilmiştir. Bu çalışmada, yalnızca sonlu sayıda enerji düzeyi var olan, analitik olarak çözülebilen birkaç durum ele alınmıştır. İncelenen analitik olarak çözülebilir durumlardan biri sabit manyetik alana karşılık gelir. Bu durumda, kesikli spektrumun sıfır enerjili taban durum düzeyi ve uyarılmış sonlu enerji düzeyi vardır. Enerji

düzeyinin sonsuz dejenereliği, açısal momentum ile karakterize edilir. Diğer durumlarda, Dirac-Weyl denklemi yalnızca bir açısal momentum $\lambda = \lambda'$ için çözülebilir (Demir Kızıllırmak vd. 2020). Daha önce de belirtildiği gibi, bu problem hiperbol formuna sahip veya çeşitli şekillerde deforme olmuş grafen yüzeylerin farklı uygulamalarında yardımcı olabilir.

Hiperbol üzerinde manyetik alan varlığında kütleli parçacıklar için Dirac denkleminin çözümleri kütsüz parçacıklar için olan Dirac-Weyl denkleminin çözümleri cinsinden elde edilebilir. Bu çalışmada, örnek olarak sabit manyetik alan varlığında çözümler elde edilmiştir (Demir Kızıllırmak ve Kuru 2021). Burada elde edilen enerji düzeyleri, hiperbol üzerinde kütleli ve kütsüz parçacıkların Landau düzeyleri olarak düşünülebilirler. Ancak bunlar bilinen Landau düzeylerinden farklıdırlar. Çünkü hiperbol durumunda, manyetik alanın şiddetine bağlı olarak sonlu sayıda enerji düzeyi vardır. Her enerji düzeyi de açısal momentumun değerine (λ) bağlı olarak sonsuz dejenereliğe sahiptir.

Son bölümde, öncelikle Schrödinger tipindeki süpersimetrik eş Hamiltoniyenler ele alınmıştır. Daha sonra, bu skaler Hamiltoniyenlerin bir boyutta indirgenmiş Dirac Hamiltoniyenleri ile ilişkisi ortaya konulmuştur. Matris Hamiltoniyenler için matris bağlaştırım ve anti bağlaştırım işlemcileri, skaler Hamiltoniyenlerinki cinsinden ve simetri işlemcileri de bu matris bağlaştırım cinsinden bulunmuştur. Ayrıca, Dirac Hamiltoniyen hiyerarşisinin (h_n) spektrumu verilmiştir. Bunlara ek olarak Dirac-Weyl denkleminin Dirac Hamiltoniyen hiyerarşisinin içinde yer aldığı da gösterilmiştir. Burada, örnek olarak trigonometrik ve hiperbolik Pöschl-Teller potansiyelleri verilmiştir. Skaler trigonometrik PT potansiyeli gerçel matris Hamiltoniyene yol açarken, skaler hiperbolik PT potansiyeli gerçel özdeğerli Hermitsel olmayan matris Hamiltoniyene yol açmıştır (Demir Kızıllırmak vd. 2021).

Bundan sonra, bu çalışmada izlenen yolu takip ederek, tüm skaler çarpanlara ayrılabilir şekil değişmez potansiyeller için (m_0 kütlesi olsun ya da olmasın) Dirac benzeri durumları bulmayı amaçlamaktayız.

KAYNAKLAR

- Abdullah, H. M., Van der Donck, M., Bahlouli, H., Peeters, F. M. ve Van Duppen, B. 2018. Graphene quantum blisters: a tunable system to confine charge carriers, *Applied Physics Letters*, 112, 213101.
- Aharonov, Y., Casher, A. 1979. Ground state of a spin- $\frac{1}{2}$ charged particle in a two dimensional magnetic field. *Physical Review A*, 19, 2461-2462.
- Beenakker, C. W. J. 2008. Andreev reflection and Klein tunneling in graphene. *Reviews of Modern Physics*, 80, 1337.
- Castillo-Celeita, M., Fernandez C., D. J. 2020. Dirac electron in graphene with magnetic fields arising from first-order intertwining operators, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 53, 035302.
- Contreras-Astorga, A., Fernandez C., D. J., Negro, J. 2012. Solutions of the Dirac equation in a magnetic field and intertwining operators. *SIGMA*, 8, 082.
- Contreras-Astorga, A., Negro, J., Tristao, S. 2016. Confinement of an electron in a non-homogeneous magnetic field: Integrable vs superintegrable quantum systems. *Physics Letters A*, 380, 48-55.
- Cooper, F., Khare, A., Sukhatme, U. 1995. *Supersymmetry and Quantum Mechanics*. *Physics Reports*, 251, 267-385.
- Cooper, F., Khare, A., Musto, R., Wipf, A. 1988. Supersymmetry and the Dirac equation. *Annals of Physics*, 187, 1-28.
- Cooper, F., Khare, A., Sukhatme, U. P. 2001. *Supersymmetry in Quantum Mechanics*. World Scientific, 137, Singapore.
- Demir Kızıllırmak, D., Kuru, Ş., Negro, J. 2020. Dirac-Weyl equations on a hyperbolic graphene surface under magnetic field. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, 118, 113926.
- Demir Kızıllırmak, D., Kuru, Ş. 2021. The solutions of Dirac equation on the hyperboloid under perpendicular magnetic fields. *Physica Scripta*, 96, 025806.
- Demir Kızıllırmak, D., Kuru, Ş., Negro, J. 2021. Dirac-like Hamiltonians associated to Schrödinger factorizations. *The European Physical Journal Plus*, 136, 668.
- Dong, S.-H., 2007. *Factorization Method in Quantum Mechanics*. Springer, 289, Dordrecht.

- Downing, C. A., Stone, D. A. ve Portnoi, M. E. 2011. Zero-energy states in graphene quantum dots and rings. *Physical Review B*, 84, 155437.
- Fernandez C., D. J., 2010. Supersymmetric Quantum Mechanics. C., AIP Conference Proceedings, 1287, 3.
- Flügge, S. 1999. *Practical Quantum Mechanics*. Springer-Verlag, 620, Berlin.
- Fuchs, J. N., Goerbig, M. O. 2008. *Introduction to The Physical Properties of Graphene*. Lectures Notes, Paris.
- Gadella, M., Negro, J., Nieto, L. M., Pronko, G. P. ve Santander, M. 2011. Spectrum generating algebras for the free motion in S^3 . *Journal of Mathematical Physics*, 52, 063509.
- Gadella, M., Negro, J., Pronko, G. P. ve Santander, M. 2013. Spectrum generating algebra for the continuous spectrum of a free particle in Lobachevski space. *Journal of Mathematical Physics*, 54, 023510.
- Goerbig, M. O. 2011. Electronic properties of graphene in a strong magnetic field. *Reviews of Modern Physics*, 83, 1193–1243.
- Greiner, W. 1987. *Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations*. Springer-Verlag, 424, Berlin.
- Griffiths, D. 2008. *Introduction to Elementary Particles*. WILEY-VCH-Verlag, 392, Berlin.
- Hewageegana, P., Apalkov, V. 2008. Electron localization in graphene quantum dots. *Physical Review B*, 77, 245426.
- Infeld, L., Hull, T. E. 1951. The Factorization Method. *Reviews of Modern Physics*, 23, 21.
- Jakubsky, V., Kuru, Ş., Negro, J. ve Tristao, S. 2013. Supersymmetry in spherical molecules and fullerenes under perpendicular magnetic fields. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 25, 165301.
- Junker, G. 1996. *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics*. Springer Verlag, 172, Berlin.
- Katsnelson, M. I., Novoselov K. S., Geim A. K. 2006. Chiral tunneling and the Klein paradox in graphene. *Nature Physics*, 2, 620-625.
- Katsnelson, M. I. 2012. *Graphene: Carbon in Two Dimensions*. Cambridge University Press, 338, New York.

- Kuru, Ş. 2004. Çizgisel ve Çizgisel Olmayan Integrallenebilir Sistemler, Darboux Dönüşümleri ve Süpersimetri. Doktora tezi (basılmamış). Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Fizik Anabilim Dalı, 110, Ankara.
- Kuru, Ş., Negro, J. ve Nieto, L. M. 2009. Exact analytic solutions for a Dirac electron moving in graphene under magnetic fields. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 21, 455305.
- Kuru, Ş., Negro, J. ve Sourrouille, L. 2018. Confinement of Dirac electrons in graphene magnetic quantum dots. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 30, 365502.
- Liu, Y., Liu, X., Zhang, Y., Xia, Q. ve He, J. 2017. Effect of magnetic field electronic transport in a bilayer graphene nanomesh. *Nanotechnology*, 28, 235303.
- Matveev, V. B., Salle, M. A. 1991. *Darboux Transformations and Solitons*. Springer-Verlag, 120, Berlin.
- Milpas, E., Torres, M., Murguia, G. 2011. Magnetic field barriers in graphene: an analytically solvable model. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23, 245304.
- Mostafazadeh, A. 2002. Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian. *Journal of Mathematical Physics*, 43, 205.
- Neto, A. H. C., Guinea, F., Peres, N. M. R., Novoselov, K. S., Geim, A. K. 2009. The Electronic Properties of Graphene. *Reviews of Modern Physics*, 81, 109-163.
- Nieto, L. M., Pecheritsin, A. A., Samsonov, B. F. 2003. Intertwining technique for the one-dimensional stationary Dirac equation. *Annals of Physics*, 305, 151-189.
- Novoselov, K. S., Geim, A. K., Morozov, S. V., Jiang, D., Zhang, Y., Dubonos, S.V., Grigorieva, I. V., Firsov. 2004. Electric field effect in atomically thin carbon films. *Science*, 306, 5696.
- Phan, A.-L., Le, D.-N., Le, V.-H., Roy, P. 2020. Electronic spectrum of spherical fullerene molecules in the presence of generalized magnetic fields. *The European Physical Journal Plus*, 135, 666.
- Pozdeeva, A., Schulze-Halberg, A. 2010. Darboux transformations for a generalized Dirac equation in two dimensions. *Journal of Mathematical Physics*, 51, 113501.
- Schiff, I. L. 1949. *Quantum Mechanics*. McGraw-Hill Book Company, 417, New York.
- Shankar, R. 1994. *Principles of Quantum Mechanics*. Springer US, 676, New York.

Tung, W.-K. 1985. Group Theory in Physics. World Scientific, 344, Singapore.

Vilenkin, N. J. 1968. Special Functions and Theory of Group Representations. American Mathematical Society, 613, United States of America.

Wallace, P. R. 1947. The Band Theory of Graphite. Physical Review, 71, 622.

Wilson, M. 2006. Electrons in atomically thin carbon sheets behave like massless particles. Physics Today, 9, 21-23.

Wong, P. H.-S., Akinwande, D. 2011. Carbon Nanotube and Graphene Device Physics. Cambridge University Press, 249, UK.

Zee, A. 2010. Quantum Field Theory in a Nutshell. Princeton University Press, 576, USA.

