

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ROBUST BAYESYEN REGRESYON ANALİZİ

Mutlu KAYA

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2019

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Mutlu KAYA tarafından hazırlanan **“Robust Bayesyen Regresyon Analizi”** adlı tez çalışması 27/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof. Dr. Olçay ARSLAN
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Meral Candan ÇETİN
Hacettepe Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Olçay ARSLAN
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



Üye : Prof. Dr. Mehmet YILMAZ
Ankara Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



Üye : Doç. Dr. Emel ÇANKAYA
Sinop Üniversitesi İstatistik Anabilim Dalı



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

27.12.2019



Mutlu KAYA

ÖZET

Doktora Tezi

ROBUST BAYESYEN REGRESYON ANALİZİ

Mutlu KAYA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Olçay ARSLAN

Doğrusal regresyon modellerinde parametre tahmini genellikle En Küçük Kareler (EKK) ve En Çok Olabilirlik (EÇO) yöntemleri kullanılarak yapılmaktadır. Bu yöntemler kullanılarak elde edilen tahmin ediciler, veri setinde aykırı gözlem olması veya hata dağılımının Normal'den sapması gibi durumlara karşı oldukça duyarlıdır. Bu gibi durumlarda, aykırı gözlemlerin varlığından ve model varsayımlarındaki sapmalardan etkilenmeyen robust tahmin edicilerin kullanıldığı bilinmektedir. Bu tahmin edicileri elde etmenin bir yolu, kalın kuyruklu dağılıma dayalı modelleri veya bilinen robust tahmin yöntemlerini kullanmaktır. İstatistiksel modelleme çalışmalarında, klasik tahmin yöntemlerine alternatif olarak Bayesyen yöntemlerin kullanımı da sıklıkla tercih edilmektedir. Bayesyen regresyon modellemesinden elde edilen tahmin ediciler de tıpkı EKK ve EÇO tahmin edicileri gibi Normallik varsayımının sağlanmamasından ve aykırı gözlemlerin varlığından etkilenmektedir. Böyle durumlarda, kalın kuyruklu hata dağılımı ve/veya kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı regresyon modellerinden elde edilen robust Bayesyen tahmin ediciler kullanılmaktadır. Bu tez çalışmasında, öncelikle eliptik dağılım ailesine ait kalın kuyruklu, tek değişkenli ve simetrik Student-t, Laplace ve Ramsay-Novick (RN) dağılımlarına dayalı regresyon modeli parametreleri için robust tahmin ediciler elde edilmiştir. Sonrasında tezin asıl amacına yönelik olarak Bayesyen yaklaşım kullanılmış olup Student-t, Laplace ve RN hata dağılımları ve bilgi içermeyen / bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri oluşturulmuş ve model parametrelerinin robust bayesyen tahmin edicileri elde edilmiştir. Elde edilen tüm tahmin edicilerin performansları, simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması yapılarak karşılaştırılmıştır. RN hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma (Normal, Student-t, Laplace) dayalı regresyon modelleri için önerilen robust bayesyen tahmin edicilerinin, tüm yönlerdeki (x -, y - ve $x-y$) aykırı gözlemlere karşı robust parametre tahminleri verdiği gösterilmiştir.

Aralık 2019, 278 sayfa

Anahtar Kelimeler: Robust Bayesyen regresyon, Ramsay-Novick (RN) dağılımı, robust regresyon, kalın kuyruklu dağılımlar, Bayesyen regresyon, tam koşullu sonsal dağılım, Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) simülasyon yöntemi

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ROBUST BAYESIAN REGRESSION ANALYSIS

Mutlu KAYA

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Olçay ARSLAN

In linear regression models, parameter estimation is generally performed by using Least Square (LS) and Maximum Likelihood (ML) methods. The estimators obtained by using these methods are highly sensitive to the situations such as outliers in the data set or deviation from Normal of the error distribution. In such cases, it is known that used robust estimators which are not affected from the existence of outliers and departures from the model assumptions. One way of obtaining these estimators is to use models based on heavy-tailed distribution or known robust estimation methods. In statistical modeling studies, the use of Bayesian methods as an alternative to classical estimation methods is frequently preferred. Estimators derived from Bayesian regression modelling, just like LS and ML estimators, are also affected by the lack of normality assumptions and the existence of outliers. In such circumstances, robust Bayesian estimators derived from regression models based on heavy-tailed error distribution and / or heavy-tailed prior distribution are used. In this thesis, first of all, robust estimators for the regression model parameters based on heavy-tailed, univariate and symmetric Student-t, Laplace and Ramsay-Novick (RN) distributions belonging to the elliptical distribution family were achieved. After that, Bayesian approach was used for main purpose of the thesis and Student-t, Laplace and RN error distributions and non-informative / informative prior distribution-based regression models were formed and robust bayesian estimators of the model parameters were obtained. The performances of all estimators were compared by simulation study and real data application. It has been shown that robust bayesian estimators proposed for regression models based on RN error distribution and informative prior distribution (Normal, Student-t, Laplace) give robust parameter estimates against outliers in all directions ($x -$, $y -$ and $x - y$).

December 2019, 278 pages

Key Words : Robust Bayesian regression, Ramsay-Novick (RN) distribution, robust regression, heavy-tailed distributions, Bayesian regression, full conditional posterior distribution, Markov Chain Monte Carlo (MCMC) simulation method

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimime başladığım günden itibaren engin bilgi, birikim ve tecrübelerini benimle paylaşan, yol gösteren ve her zaman yanımda olan, güler yüzü ve samimiyeti ile bana daima destek vererek çalışma azmimi artıran, büyük bir sabır ve titizlikle çalışmama yön veren, sadece akademik anlamda değil hayata dair de değerli önerilerde bulunup moral ve motivasyonumu en üst seviyede tutan, kendisi ile çalışmaktan büyük onur duyduğum saygıdeğer danışman hocam sayın Prof. Dr. Olçay ARSLAN (Ankara Üniversitesi, İstatistik A.B.D.)’a en içten duygularıyla sonsuz teşekkür ederim.

Tez önerimden itibaren çalışmamı büyük bir özveri ile takip eden, değerli fikir ve önerilerini benimle paylaşan, zorlandığımı hissettiğim ve moralimin bozulduğu anlarda sabırlı kişiliği ile çalışmamı yürütmemde bana yol gösteren, güler yüzü ve pozitif kişiliği ile eğitim hayatımın dışında da manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, TİK raporlarımı titizlikle okuyarak TİK toplantılarındaki kıymetli öneri ve katkılarından dolayı Yüksek Lisans danışman hocam ve TİK üyesi sayın Doç Dr. Emel ÇANKAYA (Sinop Üniversitesi, İstatistik A.B.D.)’ya çok teşekkür ederim. Ayrıca, doktora eğitimimde ders aşamasında tanışmış olduğum, kendisinden ders almaktan büyük mutluluk duyduğum, esprili ve sevecen kişiliği ile bana daima pozitif enerji veren, TİK raporlarımı özveri ile okuyup TİK toplantılarında değerli yorum ve önerilerinden dolayı sayın TİK üyesi Prof. Dr. Mehmet YILMAZ (Ankara Üniversitesi, İstatistik A.B.D) hocama çok teşekkür ediyorum. Tez çalışmamı titizlikle inceleyerek değerli fikir ve önerilerini benimle paylaşan sayın Prof. Dr. Meral Candan ÇETİN (Hacettepe Üniversitesi, İstatistik A.B.D) ve Prof. Dr. Birdal ŞENOĞLU (Ankara Üniversitesi, İstatistik A.B.D) hocalarıma en içten duygularıyla teşekkürlerimi sunuyorum.

Doktora eğitimimi yapmak amacıyla Ankara Üniversitesi’ni tercih etmemde bana büyük manevi desteği olan, eğitim hayatımın geleceği için ufkumu genişleterek bana yol gösteren, güler yüzü ve sevecen kişiliği ile pozitif enerji veren sayın hocam Prof. Dr. Ensar BAŞPINAR (Ankara Üniversitesi, Zootekni A.B.D)’a teşekkürü bir borç bilirim. Doktora eğitimime başlamadan önce manevi anlamda destek olan sayın Doç Dr. Alper SİNAN (Akdeniz Üniversitesi, Eğitimde Ölçme ve Değerlendirme A.B.D) ve sayın Dr. Öğr. Üyesi Demet AYDIN (Sinop Üniversitesi, İstatistik A.B.D) hocalarıma da teşekkür ediyorum. Doktora eğitimimin ders aşamasında tanıştığım değerli arkadaşlarım Doç Dr. Fatma Zehra DOĞRU (Giresun Üniversitesi, İstatistik A.B.D), Dr. Öğr. Üyesi Fatma Gül AKGÜL (Artvin Çoruh Üniversitesi, Bilgisayar Bilimleri A.B.D), Arş. Gör. Dr. Yeşim GÜNEY (Ankara Üniversitesi, İstatistik A.B.D), Arş. Gör. Dr. Şenay ÖZDEMİR (Afyon Kocatepe Üniversitesi, İstatistik A.B.D) ve Arş. Gör. Yetkin TUAÇ (Ankara Üniversitesi, İstatistik A.B.D)’a misafirperver ve yardımseverlikleri için teşekkür ederim.

Hayatımın her safhasında hiçbir karşılık beklemeksizin bana destek olan, varlıklarıyla bana yaşama gücü veren, iyi ve kötü günümde daima yanımda olan canım annem, değerli abim ve eğitimim devam ederken Dünya’ya gelen biricik oğluma en kalbi duygularıyla teşekkür ederim.

Mutlu KAYA
Ankara, Aralık 2019

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ	1
2. DOĞRUSAL REGRESYON MODELLERİNDE SİMETRİK KALIN KUYRUKLU DAĞILIMLARA DAYALI ROBUST PARAMETRE TAHMİNİ.....	11
2.1 Eliptik Dağılım Ailesi	11
2.1.1 Tek değişkenli simetrik eliptik dağılımlar.....	11
2.1.2 Çok değişkenli simetrik eliptik dağılımlar	14
2.2 Eliptik Dağılımların Normal Dağılımın Ölçek Karması Olarak Gösterimi.....	16
2.2.1 t dağılımının Normal dağılımın ölçek karması olarak ifade edilmesi	17
2.2.2 Laplace dağılımının Normal dağılımın ölçek karması olarak ifade edilmesi	19
2.3 t Dağılımına Dayalı Doğrusal Regresyon Modelinde Robust Parametre Tahmini	20
2.4 Laplace Dağılımına Dayalı Doğrusal Regresyon Modelinde Robust Parametre Tahmini.....	24
2.5 RN Dağılımına Dayalı Doğrusal Regresyon Modelinde Robust Parametre Tahmini	27
2.6 Simülasyon Çalışması	38
3. DOĞRUSAL REGRESYON MODELLERİNDE BAYESYEN PARAMETRE TAHMİNİ.....	47
3.1 Bilgi İçermeyen Önsel Dağılım	48
3.1.1 Varyansın bilindiğinin varsayılması.....	48
3.1.2 Varyansın bilinmediğinin varsayılması	51
3.2 Bilgi İçeren Önsel Dağılım	53
3.2.1 Varyansın bilindiğinin varsayılması.....	55
3.2.2 Varyansın bilinmediğinin varsayılması	56
3.3 Simülasyon Çalışması	58
3.3.1 MCMC simülasyon yöntemi	58
4. DOĞRUSAL REGRESYON MODELLERİNDE ROBUST BAYESYEN PARAMETRE TAHMİNİ	68
4.1 Bilgi İçermeyen Önsel Dağılım	69
4.1.1 t hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini.....	69
4.1.2 Laplace hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini.....	72
4.1.3 RN hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini.....	75
4.2 Bilgi İçeren Önsel Dağılım	81

4.2.1	Kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini.....	82
4.2.2	Normal hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde bayesyen parametre tahmini.....	96
4.2.3	Kalın kuyruklu hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini.....	102
4.3	Simülasyon Çalışması	137
5.	GERÇEK VERİ UYGULAMASI	183
5.1	Bazı Model Seçim Kriterleri	183
5.2	Stack Loss Bitki Verisi	187
5.3	Coleman Verisi.....	197
5.4	Vücut Yağı Verisi.....	208
6.	TARTIŞMA VE SONUÇ	221
	KAYNAKLAR.....	224
	EKLER.....	231
EK 1	N-NI, t-NI, L-NI ve RN-NI Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması için Rv.3.4.4 ve WinBUGS Programlarında Yazılmış Olan Program Kodları	232
EK 2	N-N, N-t, N-L, t-N, L-N, RN-N, t-t, t-L, L-t, L-L, RN-t ve RN-L Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması için Rv.3.4.4 ve WinBUGS Programlarında Yazılmış Olan Program Kodları	242
EK 3	Gerçek Veri Uygulamasında Kullanılan Veri Setleri.....	271
	ÖZGEÇMİŞ	277

SİMGELER DİZİNİ

$ \cdot $	Matris determinantı
$\gamma(\cdot, \cdot)$	Alt tamamlanmamış gamma fonksiyonu
$\Gamma(\cdot, \cdot)$	Üst tamamlanmamış gamma fonksiyonu
$\Gamma(\cdot)$	Gamma fonksiyonu
$\pi(\cdot)$	R^+ 'da tanımlı yoğunluk fonksiyonu
χ^2	Ki-kare
N_n	n boyutlu Normal dağılım
lbs	Ağırlık birimi, libre's
inç	İngiliz uzunluk ölçü birimi
$\psi(\cdot)$	Eliptik dağılımın karakteristik üretici
$D(\cdot)$	Sapma
$f_N(\cdot \cdot, \cdot)$	Normal yoğunluk fonksiyonu
$f_{Ga}(\cdot \cdot, \cdot)$	Gamma yoğunluk fonksiyonu
$f_{Üstel}(\cdot \cdot, \cdot)$	Üstel yoğunluk fonksiyonu
$g(\cdot)$	Yoğunluk üretici
$g_n(\cdot)$	Negatif olmayan Lebesgue ölçülebilir fonksiyon
$H(\cdot)$	Karma dağılım fonksiyonu
$IF(\cdot)$	Etki fonksiyonu
$IGa(\cdot, \cdot)$	Ters Gamma dağılımı
$K_a(\cdot)$	Üçüncü dereceden uyarlanmış Bessel fonksiyonu
$K_p^*(\cdot)$	İkinci tür uyarlanmış Bessel fonksiyonu
$L(\cdot, \cdot)$	Laplace dağılımı
$MIF(\cdot)$	Uyarlanmış etki fonksiyonu
$N(\cdot, \cdot)$	Normal dağılım
$RN(\cdot, \cdot, \cdot)$	RN dağılımı
$S(\cdot)$	Standart eliptik (küresel) dağılım
$sgn(\cdot)$	İşaret fonksiyonu
$S_n(\cdot)$	n boyutlu küresel dağılım
$t(\cdot, \cdot, \cdot)$	t dağılımı

Kısaltmalar

AIC	Akaike bilgi kriteri
DIC	Sapma bilgi kriteri
EÇO	En çok olabilirlik / Maximum Likelihood, ML
EKK	En küçük kareler / Least Squares, LS
EM	Expectation-Maximization
GM	Genelleştirilmiş M

LAD	En küçük mutlak sapmalar
MCMC	Markov Zinciri Monte Carlo
L-N	Laplace hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
L-NI	Laplace hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
L-L	Laplace hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
LMS	En küçük medyan kareler
L-t	Laplace hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
LTS	En küçük kırılmış kareler
N-N	Normal hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
N-NI	Normal hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
NI	Bilgi içermeyen
N-L	Normal hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
N-t	Normal hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
rbayes	Robust bayesyen
RM	Tekrarlı medyan
RMSE	Hata kareler ortalamasının karekökü
RN	Ramsay-Novick
RN-NI	RN hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
RN-N	RN hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
RN-L	RN hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
RN-t	RN hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
t-L	t hata dağılımına ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
t-N	t hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
t-NI	t hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modeli
t-t	t hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modeli

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Farklı serbestlik dereceli t dağılımlarının Normal dağılım ile kıyaslanması ($\mu = 0, \sigma^2 = 1$)	21
Şekil 2.2	Farklı parametre değerli Laplace dağılımlarının Normal dağılım ile kıyaslanması	25
Şekil 2.3	Farklı parametre değerli standart RN dağılımlarının standart Normal dağılım ile kıyaslanması	31
Şekil 2.4	$d(v, x) = \frac{ x - \mu }{\sigma}$ ifadesine dayalı uyarlanmış etki fonksiyonları grafiği	32
Şekil 2.5	$a = 0.05$ ve $b = 2$ değerli $\rho = \eta_{ab}(x)$ fonksiyonunun grafiği	33
Şekil 2.6	$\rho = x^2/2$ ve $\rho = \eta_{ab}(x)$ fonksiyonlarının grafiği	33
Şekil 5.1	Stack loss verisi için EKK ve M yöntemlerine göre elde edilen standartlaştırılmış artık grafiği	188
Şekil 5.2	Stack loss verisi için farklı hata dağılımlarına dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	190
Şekil 5.3	Stack loss verisi için farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	192
Şekil 5.4	Stack loss verisi için Normal hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	194
Şekil 5.5	Stack loss verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	195
Şekil 5.6	Stack loss verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	196
Şekil 5.7	Coleman verisi için EKK ve LMS yöntemlerine göre elde edilen standartlaştırılmış artık grafiği	198
Şekil 5.8	Coleman verisi için farklı hata dağılımlarına dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	200
Şekil 5.9	Coleman verisi için farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	202

Şekil 5.10	Coleman verisi için Normal hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	205
Şekil 5.11	Coleman verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	206
Şekil 5.12	Coleman verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	207
Şekil 5.13	Vücut yağı verisi için EKK ve LTS yöntemlerine göre elde edilen standartlaştırılmış artık grafiği	209
Şekil 5.14	Vücut yağı verisi için farklı hata dağılımlarına dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	212
Şekil 5.15	Vücut yağı verisi için farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	214
Şekil 5.16	Vücut yağı verisi için Normal hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	218
Şekil 5.17	Vücut yağı verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	218
Şekil 5.18	Vücut yağı verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği	219

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1	Tek değişkenli simetrik bazı eliptik dağılımlar	13
Çizelge 2.2	Çok değişkenli simetrik bazı eliptik dağılımlar.....	15
Çizelge 2.3	Aykırı gözlemsiz bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	39
Çizelge 2.4	$n = 30$ genişliğinde aykırı gözlemlili bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı modellerin robust / robust olmayan parametre tahminleri ve RMSE değerleri	40
Çizelge 2.5	$n = 50$ genişliğinde aykırı gözlemlili bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı modellerin robust / robust olmayan parametre tahminleri ve RMSE değerleri	42
Çizelge 2.6	$n = 100$ genişliğinde aykırı gözlemlili bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı modellerin robust / robust olmayan parametre tahminleri ve RMSE değerleri	44
Çizelge 3.1	a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri	63
Çizelge 3.2	a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri....	65
Çizelge 4.1	a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri ...	141

Çizelge 4.2	a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	144
Çizelge 4.3	a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	147
Çizelge 4.4	a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modeli parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	150
Çizelge 4.5	a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	153
Çizelge 4.6	a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	156
Çizelge 4.7	a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	159

Çizelge 4.8	a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	162
Çizelge 4.9	a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0,1,3), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0,1,3), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	164
Çizelge 4.10	a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	167
Çizelge 4.11	a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	170
Çizelge 4.12	a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0,1,3), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0,1,3), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	173
Çizelge 4.13	a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0,1,3), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0,1,3), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	176

Çizelge 4.14 a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri	179
Çizelge 5.1 Stackloss verisinde yer alan aykırı gözlemlere ilişkin EKK ve M regresyon modellerinden elde edilen artık ve standartlaştırılmış artık değerleri	188
Çizelge 5.2 Stack loss verisi için oluşturulan farklı hata dağılımlarına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri	189
Çizelge 5.3 Stack loss verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine yönelik bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri	191
Çizelge 5.4 Stack loss verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine yönelik bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri	193
Çizelge 5.5 Coleman verisinde yer alan aykırı gözlemlere ilişkin EKK ve LMS regresyon modellerinden elde edilen artık ve standartlaştırılmış artık değerleri	198
Çizelge 5.6 Coleman verisi için oluşturulan farklı hata dağılımlarına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri	199
Çizelge 5.7 Coleman verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri	201
Çizelge 5.8 Coleman verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri	203
Çizelge 5.9 Coleman verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin DIC değerleri	204
Çizelge 5.10 Vücut yağı verisinde yer alan aykırı gözlemlere ilişkin LTS regresyon modelinden elde edilen artık ve standartlaştırılmış artık değerleri	209
Çizelge 5.11 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımlarına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri	210

Çizelge 5.12 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri	213
Çizelge 5.13 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri	215
Çizelge 5.14 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin DIC değerleri	217



1. GİRİŞ

Doğrusal regresyon, biri bağımlı (açıklanan) diğeri bağımsız (açıklayıcı) değişken olarak adlandırılan değişkenler arasındaki doğrusal ilişkinin matematiksel bir model ile ifade edilmesini sağlayan bir yöntemdir. Çok sayıda bağımsız değişkenin, bağımlı değişken üzerindeki etkisi araştırılmak istenildiğinde kullanılacak regresyon modeli, çoklu doğrusal regresyon modelidir. Bu model,

$$\begin{aligned} y &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k + \varepsilon \\ &= \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_j + \varepsilon \end{aligned} \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilir ve “k” bağımsız değişkenli çoklu doğrusal regresyon modeli olarak adlandırılır. Bu eşitlikte; y , bağımlı değişken, x_j , bağımsız değişken, $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ parametreleri, regresyon modeli katsayıları ve ε , rasgele hata terimidir. Tanımlanan bu kuramsal modelde parametre tahmininin yapılabilmesi için $(y_1, x_1), \dots, (y_n, x_n)$ örneklemini ele alınarak aşağıdaki regresyon modeli kullanılır.

$$\begin{aligned} y_i &= \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i = \beta_0 + \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} + \varepsilon_i \\ &= \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (1.2)$$

Burada y_i bağımlı değişken, n gözlem sayısı, $p = k + 1$ olmak üzere $\mathbf{x}_i'$, $(1 \times p)$ boyutlu bağımsız değişken vektörü, $\boldsymbol{\beta}$, $(p \times 1)$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü ve ε_i rasgele hata terimleridir (Montgomery vd. 1992). (1.2) eşitliğinde tanımlanan regresyon modeli, rasgele hata terimlerinin beklenen değerinin sıfır ($E(\varepsilon_i) = 0$) ve varyansının σ^2 ($V(\varepsilon_i) = \sigma^2$) olduğu varsayılarak oluşturulur.

Regresyon modellemesinde en sık kullanılan klasik parametre tahmin yöntemleri, En Küçük Kareler (EKK, Least Squares (LS)) ve En Çok Olabilirlik (EÇO, Maximum Likelihood (ML)) yöntemidir (Legendre 1805, Fisher 1922).

EKK yöntemi, istatistik literatüründe geniş bir çalışma alanına sahip olup parametre tahmininde dağılıma dayalı bir varsayım gerektirmemektedir. Ancak bu yöntemin dezavantajı, veri seti içerisinde verinin çoğunluğundan farklılık gösteren az sayıda aykırı gözlem olsa bile parametre tahminlerinde önemli derecede etkinin meydana gelmesidir.

Yöntemin temeli, hata terimleri kareleri toplamını minimum yapan regresyon denkleminin bulunmasına dayanmaktadır. En küçük kareler fonksiyonu,

$$S(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \beta_0 - \sum_{j=1}^k \beta_j x_{ij} \right)^2 \quad (1.3)$$

olmak üzere bu fonksiyonun $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ 'ya göre türevinin alınması durumunda EKK Normal denklemleri elde edilir ve bu denklemlerin çözülmesi sonucunda EKK tahmin edicileri $(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k)$ bulunur.

Denklem (1.2)'de verilen modelin matris notasyonu ile gösterimi,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (1.4)$$

olarak tanımlanır. Bu eşitlikte; $\mathbf{y}$, $(n \times 1)$ boyutlu bağımlı değişken vektörü, $\mathbf{X}$, $(n \times p)$ boyutlu bağımsız değişkenler matrisi (tasarım matrisi), $\boldsymbol{\beta}$, $(p \times 1)$ boyutlu bilinmeyen parametre vektörü ve $\boldsymbol{\varepsilon}$, $(n \times 1)$ boyutlu rasgele hata terimleri vektörüdür. Buradan EKK tahmin edicileri vektörü $(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})$,

$$S(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ 'ya göre minimum yapılmasıyla

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (1.5)$$

şeklinde bulunur. Tahmin edilmiş $\mathbf{y}$ 'ler, $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ eşitliği kullanılarak elde edilir.

Hata varyansı olan σ^2 parametresinin EKK tahmin edicisi ise

$$\hat{\sigma}_{LS}^2 = \frac{1}{(n-p)} \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \quad (1.6)$$

olarak elde edilir. Normallik varsayımı altında bu tahmin edici, örneklem hata varyansı (S^2) olarak adlandırılır ve $(n-p)$ serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir

$$\left(\frac{(n-p)\hat{\sigma}_{LS}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-p)} \right) \text{ (Montgomery vd. 1992).}$$

Regresyon modellerinde istatistiksel sonuç çıkarımı yapılabilmesi için rasgele hata terimlerinin (ε_i) birbirinden bağımsız ve özdeş (independent and identically distributed, iid) genellikle Normal dağılıma sahip olması varsayımının sağlanması gereklidir. Bu dağılım varsayımı doğrultusunda oluşturulan model parametrelerinin tahmin edicileri, EÇO yöntemi kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

(1.4) modelinde yer alan hata terimleri vektörünün n boyutlu Normal dağılıma sahip olduğu ($\boldsymbol{\varepsilon} \sim N_n(0_n, \sigma^2 I_n)$) varsayımı altında olabilirlik fonksiyonu,

$$P(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})\right) \quad (1.7)$$

olup log-olabilirlik fonksiyonu ise

$$\ln P(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln(\sigma) - \frac{n}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \quad (1.8)$$

olarak elde edilir. Bu fonksiyonun $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'ya göre türevleri alınarak sıfıra eşitlendiğinde EÇO tahmin edicileri,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} \\ \hat{\sigma}_{ML}^2 &= \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML})' (\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{ML})}{n} \end{aligned} \quad (1.9)$$

eşitlikleri şeklinde bulunur. $\hat{\beta}_{ML}$, β 'nın en iyi doğrusal yansız tahmin edicisi olup β ortalamalı ve $\sigma^2 (X'X)^{-1}$ varyanslı çok değişkenli Normal dağılıma sahiptir (Draper ve Smith 1981). Ayrıca burada elde edilen $\hat{\beta}_{ML}$ ile (1.5) eşitliğinde tanımlanan $\hat{\beta}_{LS}$ tahmin edicisinin aynı olduğu görülmektedir. $\hat{\sigma}_{ML}^2$ ise σ^2 parametresinin yanlı bir tahmin edicisi olup asimptotik olarak yansız tahminler vermektedir (Montgomery vd. 2001).

Doğrusal regresyon modellerinde normallik varsayımının sağlanması gerçek Dünya problemlerinde her zaman mümkün olmayabilir. Bu nedenle hataların dağılımının Normal'den sapması veya Normal dağılıma dayalı istatistiksel sonuç çıkarımlarının veri setindeki aykırı gözlemlerden etkilenmesi gibi problemler ortaya çıkmış ve literatürde birçok yazar tarafından incelenmiştir (Box 1953, Tukey 1960, Hampel vd. 1986, Lange vd. 1989, Maronna vd. 2006, Huber ve Ronchetti 2009). EKK ve EÇO tahmin edicileri, sözü edilen bu problemlere karşı oldukça duyarlıdır. Böyle durumlarla karşılaşıldığında, literatürde pek çok araştırmacı tarafından robust parametre tahmin yöntemlerinin kullanımı önerilmiştir. Bu yöntemler kullanılarak elde edilen tahmin ediciler, model varsayımlarındaki sapmalardan ve aykırı gözlemlerin varlığından etkilenmeyen güvenilir çıkarımların elde edilmesini sağlayan robust tahmin edicilerdir.

Bir tahmin edicinin robust olması, etki fonksiyonu (Influence Function, IF) ve bozulma noktası (Breakdown Point, BDP) kullanılarak belirlenmektedir. Etki fonksiyonları, aykırı gözlemlerin parametre tahminleri üzerindeki etkisini sınırlandırmak amacıyla kullanılan fonksiyonlar olup bozulma noktası ise aykırı gözlemlerin yüzde kaç ile başa çıkılabileceği hakkında bilgi veren bir ölçüttür. Eğer bir tahmin edici, bir tane bile aykırı gözleme duyarlı ise bu tahmin edicinin bozulma noktası sıfırdır. EKK tahmin edicileri bu duruma en güzel örnektir.

Robust parametre tahmini, hatalar için Normallik varsayımının sağlanmadığı durumlarda kalın kuyruklu hata dağılımı veya aykırı gözlemlerin etkisini sınırlandıran dağılıma dayalı olmayan robust tahmin yöntemleri (M-tahmini, GM-tahmini, RM-tahmini, LMS-tahmini, LTS tahmini, S-tahmini, MM-tahmini vb.) kullanılarak yapılmaktadır (Huber 1981, Rousseeuw ve Leroy 1987).

Normal dağılıma göre daha kalın kuyruklu olan alternatif dağılımların kullanımının tercih edildiği pek çok çalışma mevcuttur. Bu dağılımların tipik bir örneği eliptik dağılım ailesine ait dağılımlardan biri olan t dağılımıdır. t dağılımına dayalı regresyon modeli parametrelerinin tahminine ilişkin literatürde yer alan çalışmalardan bazıları şu şekilde özetlenebilir: Kalın kuyruklu verinin robust tahmininde t dağılımının kullanımı, Lange vd. (1989) tarafından araştırılmış olup Bolfarine ve Valle (1994) ise t dağılımını kullanarak normal ölçüm hatalı modellerin robust parametre tahminlerini elde etmiştir. Bu çalışmalara ek olarak Arslan vd. (1995), çok değişkenli t dağılımı için EM (Expectation –Maximization) algoritmasının yakınsaklık davranışını incelemiştir. Ayrıca tek değişkenli genelleştirilmiş t dağılımına dayalı robust konum ve ölçek tahminleri, Arslan (2003) tarafından elde edilmiştir. Klasik yöntemlere ek olarak t dağılımının Bayesyen istatistikteki uygulamaları, Gelman vd. (2003) tarafından gösterilmiştir. Ayrıca tek değişkenli robust regresyon modellemesinin yanı sıra Piche (2011), t dağılımına dayalı robust çok değişkenli doğrusal regresyon analizini uygulamıştır. t dağılımına dayalı regresyon modeli parametrelerinin tahmin edicileri, x – ve x – y yönlerindeki aykırı gözlemlerden etkilenmekte ancak y -yönündeki aykırı gözleme karşı robust tahminler vermektedir.

Eliptik dağılım ailesinin bir diğer üyesi Laplace dağılımıdır. Bu dağılım da Normal dağılıma kıyasla daha kalın kuyruklara sahip olup Laplace dağılımına dayalı regresyon modeli parametrelerinin EÇÖ tahmini, en küçük mutlak sapmalar (Least Absolute Deviation, LAD) tahmini olarak adlandırılmaktadır. Bu tahminin elde edilmesini sağlayan LAD regresyon yöntemi, EKK yöntemine kıyasla hataların mutlak değerce toplamının en küçüklenmesi esasına dayanmaktadır. İlk olarak Boscovich tarafından 1757 yılında öne sürülmüş olup sonrasında birçok yazar tarafından da incelenmiştir. Sharpe (1971), Laplace dağılımına dayalı LAD regresyonun EKK'ya kıyasla robust bir yöntem olduğuna dair bilgiler vermiş olup Smith ve Hall (1972) ise LAD tahmin edicisinin Laplace dağılımına dayalı model altındaki küçük örneklerde EKK tahmin edicisinden daha üstün olduğunu göstermiştir. LAD tahmin edicileri, y -yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust tahminler vermesine rağmen x – yönündeki aykırı gözlemlere nispeten duyarlıdır (Ellis ve Morgenthaler 1992, Gutenbrunner vd. 1993). Bu çalışmalara ek olarak Arslan (2010), çok değişkenli, çarpık Laplace dağılımının özelliklerini ve parametre tahminlerini göstermiştir.

Aykırı gözlemlerli bir veri setinin modellenmesinde bu gözlemlerin etkisini sınırlayarak güvenilir sonuçlar elde edilmesini sağlayan dağılıma dayalı olmayan robust regresyon yöntemlerinin kullanımına yönelik literatürde pek çok çalışma mevcuttur. Huber (1964) tarafından hataların karesi yerine başka bir fonksiyonunun en küçüklenmesi ile EKK tahmin edicilerine göre robust olan tahmin edicilerin kullanımı önerilmiştir. (Huber 1973, 1981). Bu tahmin ediciler, “M tahmin edicileri” olarak adlandırılmakta olup uygun amaç fonksiyonunun en küçüklenmesi ile aykırı gözlemlerin etkisini sınırlandıran ya da tamamen ortadan kaldıran bir etkiye sahiptir. M tahmin edicileri, y – yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust ancak x – yönündeki aykırı gözlemlere karşı oldukça duyarlıdır (Huber, 1967, 1973, 1977, Hampel vd. 1986). Bu duyarlılığı sebebiyle düşük bozulma noktasına sahip oldukları söylenebilir. Sözü edilen bu temel çalışmalara ek olarak Rousseeuw ve Leroy (1987), Arslan (1997), Arslan vd. (2000) ve Maronna (2006) tarafından da bu alanda önemli çalışmalar yapılmıştır.

M tahmin edicilerinin düşük bozulma noktasına sahip olması, hem x – hem de y – yönündeki aykırı gözlemlerin varlığına karşı robust olan Genelleştirilmiş M (GM) tahmin edicilerinin gelişmesine sebep olmuştur. İlk GM tahmin edicisi, Mallows (1975) tarafından önerilmiş olup bu tahmin edicilerin esas amacı, belirli bir ağırlık fonksiyonu aracılığıyla x – yönündeki aykırı gözlemlerin etkisini sınırlandırmaktır (Kruskal ve Welsh 1982, Simpson vd. 1992).

M ve GM tahmin edicilerine alternatif olarak yüksek bozulma noktasına sahip tahmin ediciler de geliştirilmiştir. Siegel (1982), % 50 bozulma noktasına sahip tekrarlı medyan (Repeated Median, RM) tahmin edicilerinin kullanımını önermiş olup bu tahmin edicilerin eşdeğişkenlik (equivariant) özelliğine sahip olmaması sebebiyle Rousseeuw (1984), hataların kareleri toplamını en küçüklemeyi amaçlayan En Küçük Medyan Kareler (Least Median Squares, LMS) tahmin edicilerini geliştirmiştir. Bu tahmin ediciler, sınırlı etki fonksiyonu, % 50 bozulma noktası ve eşdeğişkenlik özelliklerine sahiptir. Bu özelliğe sahip tahmin edicilerden bir diğeri ise En Küçük Kırpılmış Kareler (Least Trimmed Squares, LTS) tahmin edicileridir (Rousseeuw 1984). Sözü edilen bu tahmin edicilere ek olarak, Rousseeuw ve Yohai (1984) tarafından LMS’nin genelleştirilmesi ile hataların yayılımını minimuma indirgeyen S tahmin edicileri ortaya çıkarılmıştır. Bu tahmin ediciler, yüksek bozulma noktasına sahip ancak etkin tahmin

edici değildirler. Bu nedenle, hem etkin hem de yüksek bozulma noktasına sahip olan MM tahmin edicileri tanımlanmıştır (Yohai 1987).

Regresyon analizinde tahmin sürecinin hangi istatistiksel yaklaşım altında değerlendirildiği oldukça önemlidir. Bu bağlamda; sözü edilen klasik yaklaşımlara alternatif olarak, temeli Bayes teorisine dayandırılan Bayesyen yaklaşımın kullanımı tercih edilebilir. Bayesyen yaklaşımın karakteristik özelliği, daha önceki çalışma ve deney sonuçlarından veya uzman kişilerin görüşlerinden elde edilen önsel (prior) bilginin analize dahil edilmesidir. Bu önsel bilgi ile verinin içermiş olduğu objektif bilginin birleştirilmesi sonucunda ortaya çıkan sonsal (posterior) bilgi, parametre hakkında çıkarsama yapmak amacıyla kullanılmaktadır.

Bayesyen regresyon analizi, doğrusal regresyonun Bayesyen yaklaşım kullanılarak uygulanmasını sağlayan bir analiz olup bu analizin gerçekleştirilmesi durumunda model parametrelerinin bayesyen tahmin edicileri elde edilir. Literatürde, Bayesyen regresyon modellemesindeki tahmin sürecine yönelik birçok çalışma mevcuttur. Tiao ve Zellner (1964), regresyon modeli parametreleri hakkında çıkarımlar yapabilmek için veriden gelen bilgi ile bağlantılı olarak önsel bilgilerin nasıl kullanılabileceğini göstermiş olup Zellner (1975) ise çoklu regresyon modelinde regresyon hata terimlerinin Bayesyen analizini gerçekleştirmiştir. Ntzoufras (2009) tarafından regresyon modeli parametrelerinin bayesyen tahminlerinin WinBUGS paket programı kullanımıyla nasıl elde edileceği gösterilmiş olup Hitchcock (2012), çoklu regresyon modeli parametrelerinin bilgi içermeyen önsel kullanılması durumunda bayesyen tahminlerini incelemiştir. Bu çalışmalara ek olarak; Evans (2012), Bayesyen regresyon analizinin kullanımını göstermiş olup Klasik ve Bayesyen regresyon yöntemlerini karşılaştırmıştır.

Bayesyen regresyon modellemesinde elde edilen tahmin ediciler, tıpkı klasik regresyon analizinde olduğu gibi model varsayımındaki sapmalardan ve aykırı gözlemlerin varlığından oldukça etkilenmektedir. Böyle durumlarla karşılaşıldığında, sözü edilen bu problemlerden mümkün olduğunca etkilenmeyen robust tahmin edicilerin elde edilebilmesi amaçlanmaktadır. Bu tahmin edicileri elde etmenin bir yolu, örnekleme dağılımı (olabilirlik) ve/veya parametrenin önsel dağılımı için Normal dağılıma alternatif olarak kalın kuyruklu bir dağılımın kullanılmasıdır. Bu doğrultuda, kalın kuyruklu hata dağılımı ve/veya kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı robust Bayesyen regresyon

modellemesinden elde edilen tahmin ediciler, veri setinde yer alan aykırı gözlemlere karşı robust tahminler elde edilmesini sağlamaktadır.

Robust Bayesyen regresyon modellemesinde parametre tahminine yönelik literatürde yer alan çalışmaların bazıları şu şekilde özetlenebilir: Zellner (1976), çok değişkenli t dağılımına dayalı regresyon modelinin Bayesyen analizini gerçekleştirmiştir. Ayrıca Mendoza ve Pena (2010), t dağılımına dayalı regresyon parametrelerinin Bayesyen tahminlerinin elde edilmesini göstermiş olup Alhamzawi vd. (2012), robust Bayesyen quantile regresyon yöntemini önermiştir. Bu çalışmalara ek olarak, Vallejos ve Steel (2013) ise t hata dağılımı ve Jeffreys önsel dağılımına dayalı regresyon modelinin Bayesyen analizini yapmıştır. Simetrik dağılımların içine çarpıklığın dahil edilmesi ise ilk kez Fernandez ve Steel (1998) tarafından önerilmiştir.

Bu çalışmalardaki kalın kuyruklu dağılımlara alternatif olarak Ramsay ve Novick (1980) ise aynı amaç için farklı bir dağılımın kullanımını önermiştir. Bu dağılım, aykırı gözlemlerin parametre tahminleri üzerindeki etkisini sınırlandırmak amacıyla Ramsay-Novick (RN) dağılımı adıyla eliptik dağılım ailesine ait kalın kuyruklu yeni bir dağılım olup Ramsay ve Novick (1980), bu dağılıma dayalı Bayesyen regresyon modeli parametrelerinin robust tahmin sürecindeki kullanımını incelemiştir.

Bu tez çalışmasının amacı, kalın kuyruklu hata dağılımına dayalı Bayesyen regresyon modeli parametrelerinin tüm yönlerdeki ($x-$, $y-$ ve $x-y$) aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahmin edicilerini elde etmektir. Bu amaç doğrultusunda çalışmada, kalın kuyruklu hata dağılımı olarak eliptik dağılım ailesine ait tek değişkenli ve simetrik t , Laplace ve RN dağılımlarının kullanımı tercih edilmiştir. Ayrıca çalışmada, t ve Laplace dağılımlarına alternatif olarak RN dağılımına dayalı regresyon modeli parametre tahminleri için elde edilen klasik tahmin ediciler de önerilmiştir.

t ve Laplace dağılımlarına sahip rasgele verilerin üretilmesi, mevcut bilinen istatistiksel paket programlar yoluyla mümkündür. Ancak RN dağılımı için böyle bir durum söz konusu değildir. Bu nedenle RN dağılımından veri üretme sürecinde Markov Zinciri Monte Carlo (MCMC) simülasyon yöntemlerinden bağımsız Metropolis-Hasting örnekleme yönteminin kullanımı tercih edilmiştir.

Tez çalışması 6 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, doğrusal regresyon modeline yönelik temel bilgiler verilmiş olup model parametrelerinin klasik, robust, Bayesyen ve robust Bayesyen regresyon tahmin yöntemlerinin kullanım amacına yönelik açıklamalar yapılmış ve bazı literatür çalışmaları özetlenmiştir. İkinci bölümde ise öncelikle eliptik dağılım ailesi tanıtılmış ve eliptik dağılımların Normal dağılımın ölçek karması olarak gösterimleri ele alınmıştır. Ayrıca, regresyon modeli hata terimlerinin eliptik dağılım ailesine ait olan ve bu çalışmada kullanımı tercih edilen t , Laplace ve RN kalın kuyruklu dağılımlardan birine sahip olması durumunda model parametrelerinin robust tahmin edicileri ve bu tahmin ediciler kullanılarak bulunan robust parametre tahminleri, simülasyon çalışması yapılarak elde edilmiştir. Bu bölümde ifade edilen RN dağılımına dayalı regresyon modeli parametrelerinin robust tahmin edicileri ve bu tahmin edicilere yönelik parametre tahminleri ilk kez bu tez çalışmasında elde edilmiştir. Üçüncü bölümde, bu tezin asıl amacına yönelik olarak klasik yaklaşıma alternatif olarak Bayesyen yaklaşım ele alınmıştır. Burada bilgi içermeyen ve bilgi içeren önsel dağılım kullanımıyla Bayesyen regresyon modeli detaylı olarak incelenmiş ve model parametrelerinin bayesyen tahmin edicileri verilmiştir. Ek olarak, MCMC simülasyon yöntemlerinden Gibbs örnekleme kullanılarak bir simülasyon çalışması yapılmış ve bayesyen parametre tahminleri elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise öncelikle t , Laplace ve RN hata dağılımlarına ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı Bayesyen regresyon modelleri ele alınmış ve model parametrelerinin robust Bayesyen tahmin edicileri bulunmuştur. Sonrasında Normal, t , Laplace, RN hata dağılımlarına ve bilgi içeren önsel dağılımlara (Normal, t , Laplace ve RN) dayalı Bayesyen regresyon modelleri parametrelerinin tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen tüm tahmin ediciler, hem parametrelerin tam koşullu sonsal yoğunlukları hem de iteratif çözüm yolu kullanılarak bulunmuştur. Bölüm sonunda MCMC simülasyon yöntemlerinden Gibbs ve Metropolis-Hasting örnekleme yöntemleri kullanılarak simülasyon çalışması yapılmış ve model parametrelerinin robust bayesyen tahminleri elde edilmiştir. t ve Laplace hata dağılımına dayalı Bayesyen regresyon modelleri sadece y – yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust tahminler vermektedir. Tez çalışmasının esas amacı ise tüm yönlerdeki (x – , y – ve x – y) aykırı gözlemlere karşı robust tahminlerin elde edilebilmesidir.

Bu amaç doğrultusunda, ilk defa bu çalışmada önerilen RN hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılımlara (Normal, t ve Laplace) dayalı robust Bayesyen regresyon modellerinin kullanımı gösterilmiştir. Tüm bölümlerde uygulanan simülasyon çalışmalarında parametre tahminlerinin elde edilmesinde kullanılan program kodları, Ek'1 ve Ek'2'de verilmiştir.

Beşinci bölümde, diğer bölümlerde ele alınan tüm modellerin uygulanabilirliği, üç farklı gerçek veri örneği üzerinde gösterilmiştir. Model performansları, Akaike bilgi kriteri (Akaike information criterion, AIC) ve Sapma bilgi kriteri (Deviance information criterion, DIC) kullanılarak karşılaştırılmış olup ele alınan modellerin parametre tahminleri kullanılarak artık grafikleri elde edilmiştir. Tezin son bölümünde ise bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar yer almaktadır.

2. DOĞRUSAL REGRESYON MODELLERİNDE SİMETRİK KALIN KUYRUKLU DAĞILIMLARA DAYALI ROBUST PARAMETRE TAHMİNİ

Bu bölümde, ilk olarak eliptik dağılım ailesi tanıtılmış ve eliptik dağılımların Normal dağılımın ölçek karması olarak gösterimleri ele alınmıştır. Sonrasında ise tez çalışmasına dahil edilen eliptik dağılım ailesine ait tek değişkenli, simetrik ve kalın kuyruklu t , Laplace ve RN dağılımlarına ilişkin bilgiler verilmiştir. Ayrıca, (1.2) regresyon modelinde yer alan rasgele hata terimleri dağılımının sözü edilen bu dağılımlardan biri olduğunun varsayılması durumunda model parametrelerinin dağılıma dayalı robust tahmin edicileri elde edilmiştir. Söz konusu kalın kuyruklu dağılımlara dayalı regresyon modeli parametrelerinin robust tahminleri, simülasyon çalışması yapılarak bulunmuştur.

2.1 Eliptik Dağılım Ailesi

Tek değişkenli ve çok değişkenli, simetrik veya çarpık olan olasılık dağılımlarının bir ailesi, eliptik dağılım ailesi'dir. İlk olarak Kelker (1970) tarafından tanıtılmıştır ve sonrasında birçok yazar tarafından incelenmiştir (Fang ve Anderson 1990, Gupta ve Varga 1993, Bilodeau ve Brenner 1999). Bu aile aynı zamanda konum parametresi ve pozitif bir ölçek parametresi tarafından parametrelenen olasılık dağılımları ailesi olan konum-ölçek ailesi olarak da bilinmektedir (Shao 2003).

Eliptik dağılım ailesi içerisinde yer alan dağılımlar, eliptik dağılım olarak adlandırılmaktadır. Bu dağılımların yoğunluk fonksiyonlarının eş yükselti eğrileri (izo-kontürleri) elipsoid şekline benzemektedir. Bu nedenle dağılım, eliptik dağılım adını almıştır (Valdez ve Chernih 2003).

2.1.1 Tek değişkenli simetrik eliptik dağılımlar

Eliptik dağılımların tanımı, karakteristik fonksiyonları kullanılarak ifade edilebilir. Karakteristik fonksiyon, herhangi bir dağılım için daima var olan bir fonksiyondur. Herhangi bir X rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu; t herhangi bir gerçel sayı ve ψ skaler bir fonksiyon olmak üzere,

$$E[\exp(itX)] = \exp(it\mu)\psi(t^2\sigma^2) \quad (2.1)$$

olarak ifade edilebilirse bu değişkenin μ ve σ^2 parametreli tek değişkenli simetrik bir eliptik dağılıma sahip olduğu söylenir ve $X \sim E(\mu, \sigma^2, \psi)$ olarak gösterilir. μ ve σ sırasıyla dağılımın konum ve ölçek parametreleri olup $\psi(\cdot)$ fonksiyonu ise eliptik dağılımın “karakteristik üretici” olarak adlandırılır (Fang vd. 1990). X rasgele değişkeninin beklenen değeri,

$$E(X) = \mu \quad (2.2)$$

ve varyansı,

$$V(X) = -2\psi'(0) \sigma^2 \quad (2.3)$$

olmak üzere burada ψ' , karakteristik fonksiyonun ilk türevini göstermektedir. Varyansın mevcut olabilmesi için $|\psi'(0)| < \infty$ şartının sağlanması gereklidir (Cambanis vd. 1981).

$\mu=0$ ve $\sigma^2=1$ olması durumunda X rasgele değişkeni yerine Z standart rasgele değişkeni kullanılır ve bu değişken $Z \sim E(0,1,\psi)$ şeklinde standart eliptik (küresel) dağılıma sahiptir. $E(0,1,\psi)$ için $S(\psi)$ ifadesi de alternatif olarak kullanılmaktadır. Z küresel rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu ise

$$E[\exp(itZ)] = \psi(t^2) \quad (2.4)$$

olarak ifade edilir.

Bazı eliptik dağılımlar, yoğunluk fonksiyonlarının mevcut olması durumunda bu fonksiyonlara göre de tanımlanabilir. Tek değişkenli simetrik bir eliptik dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.y.f),

$$f(x) = C\sigma^{-1}g\left(\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right) \quad (2.5)$$

olup daha kısa gösterimle $u = ((x - \mu)/\sigma)^2$ olmak üzere $f(x) = C\sigma^{-1}g(u)$ formunda ifade edilebilir. Burada negatif olmayan $g(\cdot)$ fonksiyonu, $0 < \int_0^\infty u^{-1/2}g(u)du < \infty$ koşulunu sağlayan bir fonksiyon olup “yoğunluk üretici” olarak adlandırılmaktadır. C ise normalleştirme sabiti olup $C = \left[\int_0^\infty u^{-1/2}g(u)du \right]^{-1}$ eşitliği ile elde edilir.

X rasgele değişkeninin eliptik dağılım ailesine ait olduğunu belirlemenin alternatif yolu, karakteristik fonksiyonları yerine yoğunluk üreticini kullanmaktır. (2.5) eşitliğinde belirtilen forma uygun yoğunluk fonksiyonuna sahip herhangi bir rasgele değişkenin tek değişkenli simetrik bir eliptik dağılıma sahip olduğu söylenir ve $X \sim E(\mu, \sigma^2, g)$ olarak ifade edilir. Özel bir durum olarak, X yerine Z , standart rasgele değişkeninin kullanılması durumunda ise bu değişken, $f(z) = Cg(z^2)$ yoğunluğuyla standart eliptik (küresel) dağılıma sahip olup $Z \sim E(0,1, g)$ veya $Z \sim S(g)$ olarak gösterilir (Valdez 2005).

Eliptik dağılım ailesine ait olan tek değişkenli simetrik eliptik dağılımlardan bazıları aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir (Passarin 2004, Valdez 2005).

Çizelge 2.1 Tek değişkenli simetrik bazı eliptik dağılımlar

Dağılım	Yoğunluk Üretici ($g(u)$)
Normal	$g(u) = \exp(-u/2)$
t	$g(u) = (1 + u/v)^{-\frac{(v+1)}{2}}, v > 0, v \text{ bir tamsayı}$
Laplace	$g(u) = \exp(- u)$
Ramsay-Novick (RN)	$g(u) = \exp\left(- (ba^{2/b})^{-1} \int_0^{a(u)^b} t^{\frac{2}{b}-1} \exp(-t) dt\right); a > 0, b > 0$
Cauchy	$g(u) = (1 + u)^{-1}$
Lojistik	$g(u) = \exp(-u) / [1 + \exp(-u)]^2$
Genelleştirilmiş Normal	$g(u) = \exp[-r(u)^s]; r, s > 0$
Bessel	$g(u) = (u/b)^{a/2} K_a[(u/b)^{1/2}]; a > -1/2, b > 0$ $K_a(\cdot)$, üçüncü dereceden uyarlanmış Bessel fonksiyonu

2.1.2 Çok değişkenli simetrik eliptik dağılımlar

$\mathbf{X}$, $(n \times 1)$ boyutlu sürekli rasgele bir vektör olmak üzere bu vektörün karakteristik fonksiyonu,

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \exp(it'\boldsymbol{\mu})\psi(\mathbf{t}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{t}) \quad (2.6)$$

formuna sahip ise $\mathbf{X}$ vektörü, çok değişkenli simetrik bir eliptik dağılıma sahiptir ve $\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$ olarak gösterilir. Burada $\boldsymbol{\mu}$, $(n \times 1)$ boyutlu bir sütun vektörü, $\boldsymbol{\Sigma}$, $(n \times n)$ boyutlu pozitif tanımlı simetrik bir matris, $\mathbf{t}$, $(n \times 1)$ boyutlu gerçel sayı vektörü olup $\psi(\mathbf{t})$ fonksiyonu ise “karakteristik üreteç” olarak adlandırılmaktadır.

$\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \psi)$ iken $\mathbf{X}$ ’in ortalama vektörü

$$E(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\mu} \quad (2.7)$$

olup kovaryansı ise $\boldsymbol{\Sigma}$ matrisinin var olması durumunda

$$\text{Cov}(\mathbf{X}) = -\psi'(0)\boldsymbol{\Sigma} \quad (2.8)$$

şeklinde elde edilir. Kovaryansın mevcut olabilmesi için $|\psi'(0)| < \infty$ şartının sağlanması gereklidir. $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$ olarak tanımlanan $\mathbf{Z}$ standart rasgele vektörü ise küresel dağılıma sahip olup $\mathbf{Z} \sim E_n(0, \mathbf{I}, \psi)$ olarak gösterilir. Bu değişkenin karakteristik fonksiyonu $\varphi_{\mathbf{Z}}(\mathbf{t}) = \psi(\mathbf{t}'\mathbf{t})$ eşitliği kullanılarak belirlenir (Bilodeau ve Brenner 1999, Valdez 2005).

$g_n(\cdot)$, negatif olmayan Lebesgue ölçülebilir fonksiyonu olmak üzere $\mathbf{X}$ ’in o.y.f’nu,

$$f(\mathbf{x}) = c_n |\boldsymbol{\Sigma}|^{-1/2} g_n\left((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right) \quad (2.9)$$

olup bu fonksiyon daha kısa gösterimle, $u = (x - \mu)' \Sigma^{-1} (x - \mu)$ olmak üzere $f(x) = c_n |\Sigma|^{-1/2} g_n(u)$ şeklinde ifade edilebilir. Bu eşitlikte; normalleştirme sabiti,

$$c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(\pi)^{n/2}} \left[\int_0^\infty t^{n/2-1} g_n(t) dt \right]^{-1} \text{ kullanılarak bulunur.}$$

Eğer X vektörü, tanımlanan bu yoğunluğa sahipse $X \sim E_n(\mu, \Sigma, g_n)$ şeklinde çok değişkenli simetrik eliptik dağıldığı söylenebilir. $n=1$ olması durumunda bu dağılım, tek değişkenli simetrik eliptik dağılıma dönüşmektedir. Özel olarak μ , n boyutlu "0" vektörü ve Σ , birim matris olarak alınırsa Z vektörü " n " boyutlu küresel dağılıma sahip olur ve $X \sim E_n(0, I, g_n)$ veya $X \sim S_n(g)$ şeklinde ifade edilir (Bilodeau ve Brenner 1999, Gomez-Sanchez-Manzano vd. 2006).

Eliptik dağılım ailesine ait bazı çok değişkenli simetrik eliptik dağılımlar aşağıdaki çizelgede verilmiştir (Galea vd. 2000, Passarin 2004).

Çizelge 2.2 Çok değişkenli simetrik bazı eliptik dağılımlar

Dağılım	Yoğunluk Üretici ($g(u)$)
Normal	$g_n(u) = \exp(-u/2)$
t	$g_n(u) = (1+u/v)^{-\frac{(v+n)}{2}}, v > 0, v \text{ bir tamsayı}$
Laplace	$g_n(u) = \exp(- u)$
Ramsay-Novick (RN)	$g_n(u) = \exp(-(ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, au^b))$ $= \exp\left(- (ba^{2/b})^{-1} \int_0^{a(u)^b} t^{\frac{2}{b}-1} \exp(-t) dt\right); a > 0, b > 0$
Cauchy	$g_n(u) = (1+u)^{-\frac{(n+1)}{2}}$
Lojistik	$g_n(u) = \exp(-u) / [1 + \exp(-u)]^2$
Genelleştirilmiş Normal	$g_n(u) = \exp[-u^s/2]; s > 0$

2.2 Eliptik Dağılımların Normal Dağılımın Ölçek Karması Olarak Gösterimi

X , μ konum ve σ ölçekli sürekli bir rasgele değişken olsun. Bu değişken,

$$X = \mu + \kappa(\lambda)^{1/2} Y \quad (2.10)$$

eşitliği şeklinde stokastik olarak ifade edilebilir. Burada $Y \sim N(0, \sigma^2)$ ve $X | \lambda \sim N(\mu, \kappa(\lambda) \sigma^2)$ olup λ , ölçek parametresi, $\kappa(\lambda)$ ise λ 'nın pozitif bir fonksiyonudur (Ehlers 2012). X 'in ortalama ve varyansı,

$$\begin{aligned} E(X) &= E(E(X | \lambda)) = \mu \\ V(X) &= E(\text{Var}(X | \lambda)) = \sigma^2 E(\kappa(\lambda)) \end{aligned} \quad (2.11)$$

olup bu değişkenin o.y.f'nu, Normal dağılımın ölçek karması biçiminde ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} f(x | \mu, \sigma) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} N(x | \mu, \kappa(\lambda) \sigma^2) \pi(\lambda) d\lambda \\ &= \int_{\lambda=0}^{\infty} (2\pi \kappa(\lambda) \sigma^2)^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2\kappa(\lambda) \sigma^2} (x - \mu)^2 \right] dH(\lambda) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Bu eşitlikte; $N(x | \cdot, \cdot)$, Normal yoğunluk fonksiyonu, $\pi(\cdot)$, R^+ 'da tanımlı yoğunluk fonksiyonu ve $H(\lambda)$, karma dağılım fonksiyonu olarak adlandırılmaktadır (Choy ve Chan 2008).

Eğer $\mathbf{X}$, n boyutlu bir vektör ise ve

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{VZ} \quad (2.13)$$

olarak ifade edilebiliyorsa bu vektörün dağılımının n boyutlu Normal dağılımların ölçek karması olduğu söylenebilir ve $\mathbf{X} \sim SMN_n(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, H)$ şeklinde gösterilir (Gomez-Sanchez-

Manzano v.d. 2006). Ayrıca bu eşitlikte $\mathbf{Z} \sim N_n(0, \Sigma)$ olup V karma değişkeni, $\mathbf{Z}$ 'den bağımsız rasgele bir değişkendir.

$\mathbf{X}$ vektörünün yoğunluğu,

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, \Sigma, H) &= \int_{v=0}^{\infty} N_n(\mathbf{X}; \boldsymbol{\mu}, v^2 \Sigma) dH(v) \quad , \quad v \in (0, \infty) \\ &= (2\pi)^{-n/2} |\Sigma|^{-1/2} \int_{v=0}^{\infty} v^{-n} \exp\left[-\frac{1}{2} v^{-2} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})\right] dH(v) \quad (2.14) \end{aligned}$$

eşitliğinde görüldüğü gibi Normal yoğunlukların bir ölçek karması olarak elde edilir. Burada, $\boldsymbol{\mu}$; n boyutlu bir vektör, Σ ; $n \times n$ boyutlu pozitif tanımlı simetrik bir matristir.

2.2.1 t dağılımının Normal dağılımın ölçek karması olarak ifade edilmesi

Eliptik dağılımlardan biri olan t dağılımı, ölçeği ters Gamma (Inverse Gamma, IGa) dağılımına sahip bir Normal dağılımın ölçek karması olarak ifade edilebilir.

$X \sim N(\mu, \sigma^2 \lambda)$ ve $\lambda \sim IGa(\frac{v}{2}, \frac{v}{2})$ olmak üzere μ konum, σ ölçek parametrelili ve v serbestlik dereceli t dağılımı için yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x|\mu, \sigma^2, v) = \int_{\lambda=0}^{\infty} f_N(x|\mu, \sigma^2 \lambda) f_{IGa}(\lambda|v/2, v/2) d\lambda \quad (2.15)$$

integralinde görüldüğü gibi Normal ve ters Gamma dağılımı yoğunluklarının karması yapılarak aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\begin{aligned} f(x|\mu, \sigma^2, v) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\sqrt{\lambda}}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\lambda}(x-\mu)^2\right) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{v/2}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \lambda^{-\frac{v}{2}-1} \exp\left(-\frac{\left(\frac{v}{2}\right)}{\lambda}\right) \right) d\lambda \end{aligned}$$

$$= \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{v}{2}}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\lambda=0}^{\infty} \lambda^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)-1} \exp\left(-\frac{1}{\lambda}\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{v}{2}\right)\right) d\lambda \quad (2.16)$$

olup bu eşitliğin integralli kısmı, $\frac{(v+1)}{2}$ şekil ve $\frac{(x-\mu)^2 + v\sigma^2}{2\sigma^2}$ ölçek parametrelili ters Gamma dağılımı kerneline (çekirdeğine) benzemekte olup ters Gamma dağılımı yoğunluğunun o.y.f'nu olabilme şartı gereği, $\frac{\Gamma((v+1)/2)}{\left(\frac{(x-\mu)^2 + v\sigma^2}{2\sigma^2}\right)^{(v+1)/2}}$ oranına eşittir.

Bu oranın (2.16) eşitliğinde yerine yazılması durumunda t dağılımının o.y.f'nu,

$$f(x|\mu, \sigma^2, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v\pi}\sigma} \left[1 + \frac{(x-\mu)^2}{v\sigma^2}\right]^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \quad (2.17)$$

olarak elde edilir.

t dağılımı, Normal (N) ve Gamma (Ga) dağılımları karması olarak da ifade edilebilir.

Bu durumda o.y.f.'nu,

$$\begin{aligned} f(x|\mu, \sigma^2, v) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} f_N(x|\mu, \frac{\sigma^2}{\lambda}) f_{Ga}(\lambda|v/2, v/2) d\lambda \\ &= \frac{\left(\frac{v}{2}\right)^{v/2}}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\lambda=0}^{\infty} \lambda^{\left(\frac{v+1}{2}\right)-1} \exp\left[-\lambda\left(\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} + \frac{v}{2}\right)\right] d\lambda \end{aligned} \quad (2.18)$$

olmak üzere bu eşitlikteki integralli ifade, $\frac{(v+1)}{2}$ şekil ve $\frac{(x-\mu)^2 + v\sigma^2}{2\sigma^2}$ ölçek parametrelili Gamma dağılımı kerneline benzemekte olup Gamma dağılımı yoğunluğunun

o.y.f' nu olabilme şartı gereği, $\frac{\Gamma((v+1)/2)}{(((x-\mu)^2 + v\sigma^2)/2\sigma^2)^{(v+1)/2}}$ oranına eşittir. Bu oran, (2.18)

eşitliğinde yerine yazıldığında t dağılımının o.y.f' nu,

$$f(x|\mu, \sigma^2, v) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{v\pi}\sigma} \left[1 + \frac{(x-\mu)^2}{v\sigma^2}\right]^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)} \quad (2.19)$$

eşitliği şeklinde bulunur.

2.2.2 Laplace dağılımının Normal dağılımın ölçek karması olarak ifade edilmesi

Eliptik dağılımlardan biri olan Laplace dağılımı, ölçeği Üstel dağılıma sahip bir Normal dağılımın ölçek karması olarak ifade edilebilir.

$X \sim N(\mu, \lambda)$ ve $\lambda \sim \text{Üstel}(1/2\sigma^2)$ olmak üzere μ konum, σ ölçek parametrelili Laplace dağılımının o.y.f' nu,

$$\begin{aligned} f(x|\mu, \sigma) &= \int_{\lambda=0}^{\infty} f_N(x|\mu, \lambda) f_{\text{Üstel}}(\lambda|(1/2\sigma^2)) d\lambda \\ &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda}(x-\mu)^2\right) \right] \left[\frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right] d\lambda \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}2\sigma^2} \int_{\lambda=0}^{\infty} \lambda^{\frac{1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{\sigma^2}\right)\right) d\lambda \end{aligned} \quad (2.20)$$

eşitliğinde yer alan integralin çözümü ile elde edilir. Bu integral, genelleştirilmiş ters Normal (generalized inverse gaussian, GIG) dağılımının kerneline benzemektedir.

$\lambda \sim GIG(p^* = 1/2, a^{**} = 1/\sigma^2, b^{**} = (x-\mu)^2)$ olmak üzere bu değişkenin o.y.f' nu,

$$f(\lambda) = \frac{\left(\frac{1}{\sigma^2(x-\mu)^2}\right)^{1/4}}{2\kappa_{1/2}\left(\sqrt{\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\right)} \lambda^{\frac{1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu)^2}{\lambda} + \frac{\lambda}{\sigma^2}\right)\right) \quad (2.21)$$

olup burada $\kappa_p^*(z)$, ikinci tür uyarlanmış Bessel fonksiyonudur ve $p^* = 1/2$ değeri için

bu fonksiyonun değeri, $\kappa_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp(-z) z^{-1/2}$, $z > 0$ eşitliği kullanılarak elde edilir

(Abramowitz ve Stegun 1972). Genelleştirilmiş ters Normal dağılımın yoğunluğunun

o.y.f'nu olabilme şartı gereği (2.20) eşitliğindeki integral, $\frac{2\kappa_{1/2}\left(\sqrt{(x-\mu)^2/\sigma^2}\right)}{\left(1/\sigma^2(x-\mu)^2\right)^{1/4}}$ oranına

eşit olup bu durumda Laplace dağılımının o.y.f'nu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} f(x|\mu, \sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2\sigma^2} \frac{2\kappa_{1/2}\left(\sqrt{\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}\right)}{\left(\frac{1}{\sigma^2(x-\mu)^2}\right)^{1/4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} 2\sigma^2} \frac{2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right) \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{-1/2}}{\frac{1}{\sigma^{1/2}(x-\mu)^{1/2}}} \\ &= \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.3 t Dağılımına Dayalı Doğrusal Regresyon Modelinde Robust Parametre Tahmini

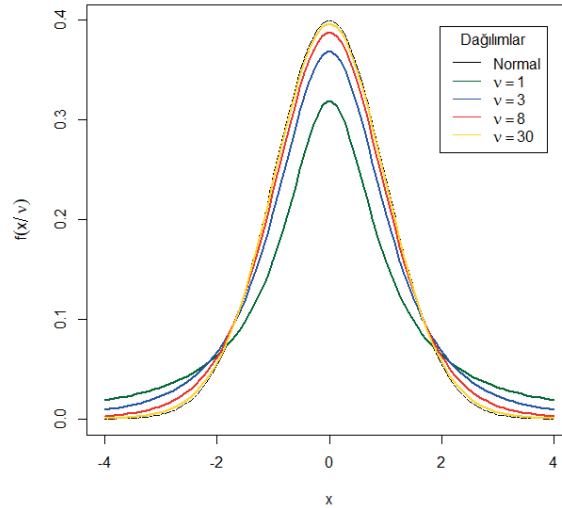
t dağılımı, eliptik dağılım ailesinde yer alan dağılımlardan biri olup Normal dağılıma kıyasla daha kalın kuyruklu sürekli bir olasılık dağılımıdır. Bu dağılım gibi kalın kuyruklu dağılımlar kullanılarak yapılan en çok olabilirlik tahminleri, parametrelerin robust tahminlerinin elde edilmesini sağlamaktadır (Lange vd. 1989).

“1” serbestlik dereceli t dağılımı, son derece kalın kuyruklu bir dağılım olup “Cauchy” dağılımı olarak da adlandırılmaktadır. t dağılımı, $x = \mu + \sigma T$ ya da $T = (x - \mu)/\sigma$ ilişkisiyle konum parametresi μ ve ölçek parametresi σ ’yı içeren üç parametrelili bir konum-ölçek ailesine genelleştirilebilir. Bu durumda elde edilen standart olmayan t dağılımı,

$$f(x|\mu, \sigma^2, \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu\sigma^2}} \left[\frac{1}{\nu} \left[\nu + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \right] \right]^{-\left(\frac{\nu+1}{2}\right)} \quad (2.23)$$

olarak tanımlanan bir yoğunluğa sahiptir (Jackman 2009). Bu yoğunluğa sahip herhangi bir X rasgele değişkeninin beklenen değeri, $\nu > 1$ için $E(X) = \mu$ ve varyansı ise $\nu > 2$ için $V(X) = \sigma^2 \left(\nu / (\nu - 2) \right)$ eşitliği kullanılarak elde edilir. Burada ν , serbestlik derecesi olup dağılımın basıklığını kontrol etmektedir.

Farklı serbestlik derecelerine göre t dağılımının o.y.f’nun şekli aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.1 Farklı serbestlik dereceli t dağılımlarının Normal dağılım ile kıyaslanması ($\mu = 0, \sigma^2 = 1$)

Parametre Tahmini

(1.2) regresyon modelinde yer alan hata terimlerinin t dağıldığı $(\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, \nu))$ varsayalım. Bu doğrultuda, model parametrelerini tahmin etmek için EÇO yöntemi kullanılmış olup aşağıda verilen log-olabilirlik fonksiyonunun parametrelere göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenerek β ve σ 'nın ağırlıklandırılmış tahmin edicileri elde edilmiştir.

Log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln P(y|x, \beta, \sigma^2, \nu) = \left[n \ln \left(\Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \right) \right] - \left\{ \left[n \ln \left(\Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right) \right) + \frac{n}{2} \ln(\pi \nu) + \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) \right] - \frac{\nu+1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{1}{\nu} \left[\nu + \frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2} \right] \right) \right] \right\} \quad (2.24)$$

olup bu fonksiyonun her parametreye göre ayrı ayrı türevi alınarak sıfıra eşitlenmiştir.

$$\frac{\partial \ln P(y|x, \beta, \sigma^2, \nu)}{\partial \beta} \bigg|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_t \\ \sigma = \hat{\sigma}_t}} = 0$$

$$-\frac{(\nu+1)}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\frac{1}{\nu} \frac{1}{\sigma} 2(y_i - x_i' \beta)(-x_i')}{\frac{1}{\nu} \left[\nu + \frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2} \right]} \right] \bigg|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_t \\ \sigma = \hat{\sigma}_t}} = 0$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_t^2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(v+1)(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_t) \mathbf{x}_i'}{v + \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_t)^2}{\hat{\sigma}_t^2}} \right] = 0 \quad (2.25)$$

Burada $\hat{w}_{i(t)} = \frac{v+1}{v + \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_t)^2}{\hat{\sigma}_t^2}}$ olarak tanımlanırsa bu eşitlik,

$$\frac{1}{\hat{\sigma}_t^2} \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(t)} \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_t) = 0 \quad (2.26)$$

şeklinde ifade edilir. Bu eşitliğin çözümü sonucunda bilinmeyen $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin robust tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t = \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(t)} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(t)} \mathbf{x}_i y_i \right) \quad (2.27)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu tahmin edicinin matris formatında gösterimi ise,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_t = (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y}) \quad (2.28)$$

biçiminde tanımlanır. Burada, $\mathbf{W}$, $\hat{w}_{i(t)}$ ağırlık değerleri tahminlerini içerisinde barındıran köşegen bir matristir. Bu matrisin içerisinde $\hat{\boldsymbol{\beta}}_t$ yer aldığından bu eşitliğin açık çözümü olmayıp çözümün yapılabilmesi için nümerik yöntemlerin kullanılması gerekmektedir.

Bilinmeyen σ^2 parametresinin EÇO tahmin edicisi de benzer şekilde aşağıdaki işlemler sonucu elde edilmiştir.

$$\left. \frac{\partial \ln P(y|x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, v)}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_t \\ \sigma=\hat{\sigma}_t}} = 0$$

$$-\frac{n}{\hat{\sigma}_t^2} + \frac{1}{\hat{\sigma}_t^3} \sum_{i=1}^n \frac{(v+1)(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_t)^2}{\left(v + \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_t)^2}{\hat{\sigma}_t^2} \right)} = 0$$

$$-n\hat{\sigma}_t^2 + \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(t)} (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_t)^2 = 0 \quad (2.29)$$

eşitliğin çözümü sonucunda σ^2 parametresinin robust tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(t)} (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_t)^2 \quad (2.30)$$

olarak bulunur. Bu eşitliğin $\hat{\sigma}_t^2$ 'yi içermesi sebebiyle σ^2 parametresinin tahmininde nümerik yöntemler kullanılmalıdır.

2.4 Laplace Dağılımına Dayalı Doğrusal Regresyon Modelinde Robust Parametre Tahmini

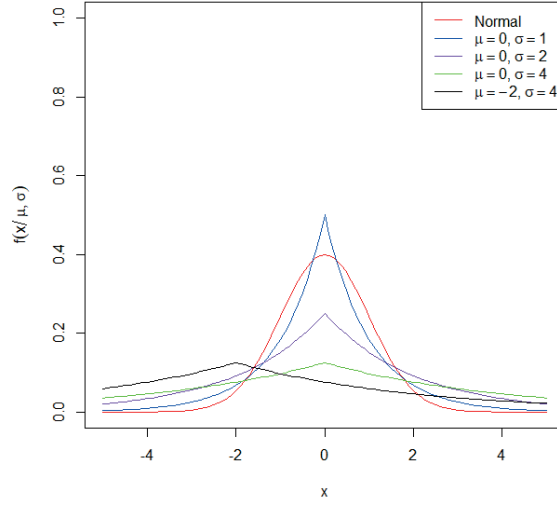
Laplace dağılımı, t dağılımı gibi eliptik dağılım ailesine ait dağılımlardan biri olup iki üstel dağılımın konum parametresi de dahil edilerek birleştirilmesinden oluşmaktadır. Bu nedenle çift üstel dağılımı olarak da adlandırılmaktadır. Dağılımın Normal dağılım gibi iki parametresi vardır ve Normal dağılıma kıyasla daha kalın kuyruklu bir dağılımdır (Abramowitz ve Stegun 1972).

$X \sim L(\mu, \sigma)$ olmak üzere X rasgele değişkeninin o.y.f'nu,

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{2\sigma} \exp\left(-\frac{|x - \mu|}{\sigma}\right) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \quad (2.31)$$

olup burada μ , konum parametresi ve σ , ölçek parametresidir.

Bu yoğunluğa sahip X rasgele değişkeninin beklenen değeri, $E(X) = \mu$ ve varyansı ise $V(X) = 2\sigma^2$ eşitlikleri kullanılarak elde edilir (Kotz vd. 2001, Aryal 2006). Dağılımın şekli, dağılım parametreleri μ ve σ 'nın aldığı değerlere göre değişmektedir.



Şekil 2.2 Farklı parametre değerli Laplace dağılımlarının Normal dağılım ile kıyaslanması

Parametre Tahmini

(1.2) regresyon modelinde $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} L(0, \sigma)$ olduğu varsayalım. Bu varsayım altında model parametrelerinin EÇÖ tahmin edicisini bulmak için log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln P(y|x, \beta, \sigma) = -n \ln(2\sigma) - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |y_i - x_i' \beta| \quad (2.32)$$

olup bu fonksiyonun maximum (veya mutlak değerli ifadenin minimum) yapılmasıyla elde edilen tahmin edici, LAD tahmin edicisi olarak adlandırılır. Model parametrelerinin LAD tahmin edicileri aşağıdaki işlemler sonucu elde edilmiştir.

$$\left. \frac{\partial \ln P(y|x, \beta, \sigma)}{\partial \beta} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{LAD} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{LAD}}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \operatorname{sgn}(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD})}{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD}|} = 0$$

Burada, $\hat{w}_{i(L)} = \frac{1}{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD}|}$, $y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD} \neq 0$ olarak tanımlandığında,

$$\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(L)} \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD}) = 0 \quad (2.33)$$

olup $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin robust tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD} = \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(L)} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(L)} \mathbf{x}_i y_i \right) \quad (2.34)$$

şeklinde elde edilir. Elde edilen bu tahmin edicinin matris formatında gösterimi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD} = (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y}) \quad (2.35)$$

olarak ifade edilebilir. Bu eşitlikte; $\mathbf{W}$, $\hat{w}_{i(L)}$ ağırlık değerleri tahminlerini içerisinde barındıran köşegen bir matristir. Bu köşegen matrisin içinde $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD}$ tahmin edicisi olduğundan elde edilen bu eşitliğin açık çözümü yoktur ve çözümün gerçekleştirilebilmesi için nümerik yöntemlerin kullanılması gereklidir.

σ parametresinin LAD tahmin edicisi de benzer işlemler uygulanarak aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\left. \frac{\partial \ln P(y|x, \boldsymbol{\beta}, \sigma)}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{LAD}}} = 0$$

$$\left(-n\sigma + \sum_{i=1}^n |y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}| \right) \bigg|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{LAD}}} = 0 \quad (2.36)$$

olup σ parametresinin robust tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{LAD} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LAD}| \quad (2.37)$$

olarak elde edilir.

t ve Laplace dağılımlarına dayalı doğrusal regresyon modeli parametrelerinin tahmin edicilerinin elde edilmesine yönelik literatürde pek çok çalışma mevcuttur (Wesolowsky 1971, Barrodale ve Roberts 1973, Schlossmacher 1973, Lange vd. 1989, Bolfarine ve Valle 1994, Li ve Arce 2004, Pfeil 2006). Bu nedenle bundan sonraki alt bölümde t ve Laplace dağılımlarına alternatif olarak RN dağılımına dayalı regresyon modeli parametreleri için robust tahmin ediciler önerilmiştir.

2.5 RN Dağılımına Dayalı Doğrusal Regresyon Modelinde Robust Parametre Tahmini

Ramsay ve Novick (1980) tarafından robust olmayan bir yoğunluğun etki fonksiyonunun işlevi değiştirilerek uyarlanmış robust yoğunluk fonksiyonu geliştirilmiştir. Bu uyarlama süreci; Normal, çok değişkenli Normal, log-Normal, ters Normal, log-odds yoğunlukları ve diğer yoğunlukların ailesi kullanılarak uygulanabilir. Bu yoğunlukların genel bir ifadesi aşağıda verilmiştir.

$$f(x | v) = r(x)s(v) \exp\left[-\frac{1}{2} d^2(v, x)\right] \quad (2.38)$$

Burada v dağılımın konum parametresi, $d(v, x)$ ise x değişkeninin v 'den uzaklığının bir ölçüsüdür. x ve v vektör olarak da kullanılabilir. Bu eşitlikte verilen forma uyan yoğunluklar, robust olmayan ve sınırsız etki fonksiyonuna sahip yoğunluk fonksiyonlarıdır.

Bu fonksiyonların gözlem ve parametre değerlerine göre duyarlılığı, fonksiyonun logaritmasının bu değerlere göre birinci kısmi türevleri alınarak belirlenebilir(Ramsay ve Novick 1980).

Sözü edilen bu robust olmayan yoğunluk fonksiyonunun logaritmasının x 'e göre türevi alınarak,

$$IF(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \log f(x|v) = d(v, x) \frac{\partial}{\partial x} d(v, x) - \frac{\partial}{\partial x} \log r(x) \quad (2.39)$$

eşitliği ile x 'in etki fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon, gözlemlerin ortalamaları üzerindeki etkisinin doğrusal olması sebebiyle sınırsız bir fonksiyondur. Etki fonksiyonu üzerindeki sınır, yoğunluk fonksiyonunun sıfıra yaklaştığı hıza göre değişmektedir. Normal dağılımın da içerisinde yer aldığı ve (2.38) eşitliğinde verilen forma uyan belirli simetrik dağılım aileleri, aykırı gözlemlerin etkisini sınırlandıramayan sınırsız etki fonksiyonuna sahiptir.

Ramsay ve Novick (1980), aykırı gözlemlerin parametre tahminleri üzerindeki etkisini sınırlandırmak amacıyla (2.39) eşitliğinde tanımlanan etki fonksiyonunun işlevini değiştirerek uyarlanmış robust fonksiyonunu elde etmiştir. Bu amaç doğrultusunda x 'in uyarlanmış etki fonksiyonunu,

$$MIF(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \log f(x|v) = d(v, x) \frac{\partial}{\partial x} d(v, x) \exp(-a d(v, x)^b) - \frac{\partial}{\partial x} \log r(x) \quad (2.40)$$

olarak tanımlamıştır. Bu ifadede yer alan $\exp(-a d(v, x)^b)$ terimi, $d(v, x)$ 'in küçük değerleri için etki fonksiyonu üzerinde çok az bir etkiye sahip olup sonuç olarak etkinin sınırlandırılmasını ve sonunda sıfıra yaklaşmasını sağlamaktadır. Bu nedenle burada tanımlanan uyarlanmış fonksiyon, sınırlı bir etki fonksiyonudur. a ve b parametreleri ise Huber'in ρ fonksiyonundaki ' k ' sabitine benzer anlamda robust olmayı ayarlama sabitleri olarak varsayılır ve bu sabitler etki fonksiyonunu sınırlandıracak şekilde seçilir(Ramsay ve Novick 1980).

Ramsay ve Novick (1980) tarafından geliştirilen sınırlı etki fonksiyonlu dağılım ailesinin o.y.f'nun genel formu,

$$f(x|v, a, b) = r(x)A(v)s(v)\exp(-\eta_{ab}(d(v, x))) \quad ; \quad a > 0, b > 0 \quad (2.41)$$

olup burada $\eta_{ab}(d(v, x)) = (ba^{2/b})^{-1}\gamma(2/b, ad(v, x)^b)$, $\gamma(\cdot)$, alt tamamlanmamış gamma (lower incomplete gamma) fonksiyonu ve $A(v)$, x 'e bağlı olmayan normalleştirme sabitidir.

Uyarılama sürecinin Normal dağılım kullanılarak uygulanması durumunda, x değişkeninin, σ ölçek parametresi tarafından ölçeklendirilen, $v = \mu$ konumundan uzaklığının ölçüsü $d(v, x) = \frac{|x - \mu|}{\sigma}$ olarak ele alınır ve bu durumda uyarlanmış etki fonksiyonu orantısal olarak (sabit terimler ihmal edilerek),

$$MIF(x) = -\frac{\partial}{\partial x} \log f(x|\mu, \sigma, a, b) \propto \frac{|x - \mu|}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\exp\left(-a\left(\frac{|x - \mu|}{\sigma}\right)^b\right)}{\sigma} \quad (2.42)$$

şeklinde elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı $(-)$ ile çarpılıp $|x|\text{sgn}(x) = x$ yerine yazıldığında fonksiyon,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \log f(x|\mu, \sigma, a, b) &\propto -\frac{|x - \mu|}{\sigma} \frac{1}{\sigma} \text{sgn}(x - \mu) \exp\left(-a\left(\frac{|x - \mu|}{\sigma}\right)^b\right) \\ &\propto -\frac{(x - \mu)}{\sigma^2} \exp\left(-a\left(\frac{|x - \mu|}{\sigma}\right)^b\right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

olarak tanımlanır. Bu fonksiyonun integralinin alınması durumunda RN dağılımının o.y.f'nu orantısal olarak,

$$\begin{aligned}
\log f(x|\mu, \sigma, a, b) &\propto - \int_{x=-\infty}^{\infty} \frac{(x-\mu)}{\sigma^2} \exp\left(-a\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^b\right) dx \\
\exp(\log f(x|\mu, \sigma, a, b)) &\propto \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \int_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu) \exp\left(-a\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^b\right) dx\right) \\
f(x|\mu, \sigma, a, b) &\propto \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \int_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu) \exp\left(-a\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^b\right) dx\right) \quad (2.44)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Burada üstel ifadede yer alan integral; $u = a\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^b$ olmak üzere,

$$\int_{u=0}^{a\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^b} -\left(\frac{u\sigma^b}{a}\right)^{1/b} \exp(-u) \left(-\frac{1}{b}\right) \left(\frac{u\sigma^b}{a}\right)^{\frac{1}{b}-1} \frac{\sigma^b}{a} du = \frac{1}{b} \frac{\sigma^2}{a^{2/b}} \int_{u=0}^{a\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^b} u^{\frac{2}{b}-1} \exp(-u) du \quad (2.45)$$

biçiminde tanımlanır. Tanımlanan bu integral, alt tamamlanmamış gamma fonksiyonu,

$$\gamma(s, x) = \int_{t=0}^x t^{s-1} \exp(-t) dt \quad (2.46)$$

olmak üzere

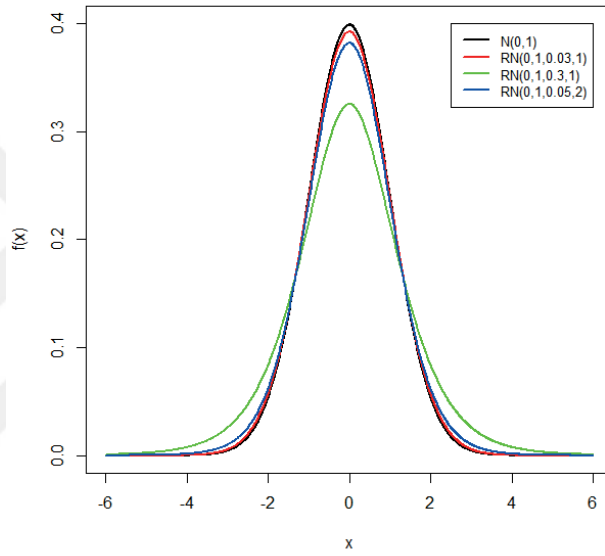
$$\int_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu) \exp\left(-a\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^b\right) dx = \frac{1}{b} \frac{\sigma^2}{a^{2/b}} \gamma\left(\frac{2}{b}, a\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^b\right) \quad (2.47)$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda (2.44) eşitliğindeki o.y.f'nu ,

$$f(x|\mu, \sigma, a, b) \propto \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{b} \frac{\sigma^2}{a^{2/b}} \gamma\left(\frac{2}{b}, a\left(\frac{|x-\mu|}{\sigma}\right)^b\right)\right)\right]$$

$$\propto \exp \left[- \underbrace{\left(ba^{2/b} \right)^{-1} \gamma \left(\frac{2}{b}, a \left(\frac{|x-\mu|}{\sigma} \right)^b \right)}_{\eta_{ab} \left(\frac{|x-\mu|}{\sigma} \right)} \right] \quad (2.48)$$

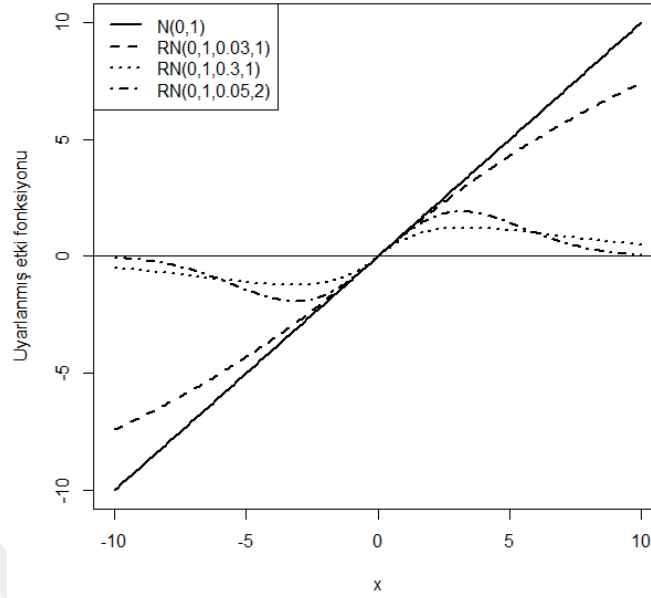
olarak tanımlanıp X rasgele değişkeninin $X \sim RN(\mu, \sigma, a, b)$ şeklinde RN dağılımına sahip olduğu söylenebilir. Eliptik dağılımlardan biri olan bu dağılımın o.y.f'nun şekli, parametrelerin aldığı farklı değerlere göre aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.3 Farklı parametre değerli standart RN dağılımlarının standart Normal dağılım ile kıyaslanması

Şekil 2.3, kuyruk kalınlığını etkileyen farklı robust parametrelili standart RN dağılımının dağılımsal formunu standart Normal dağılım ile kıyaslayarak örneklendirmektedir. Görüldüğü gibi RN dağılımı, Normal dağılıma kıyasla daha kalın kuyruklu bir dağılımdır.

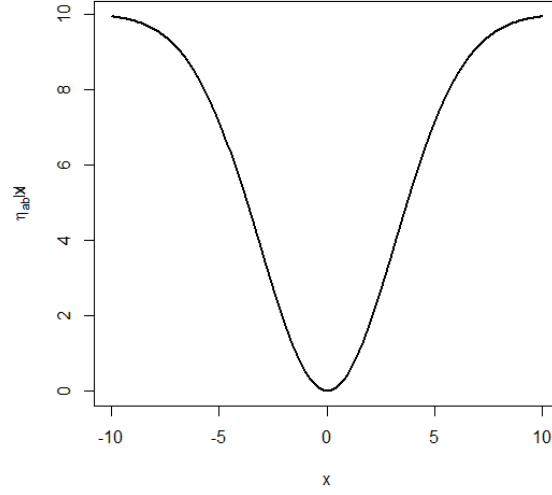
Aykırı gözlemlerin parametre tahminleri üzerinde oluşturacağı etki, etki fonksiyonu grafikleri incelenerek belirlenebilir.



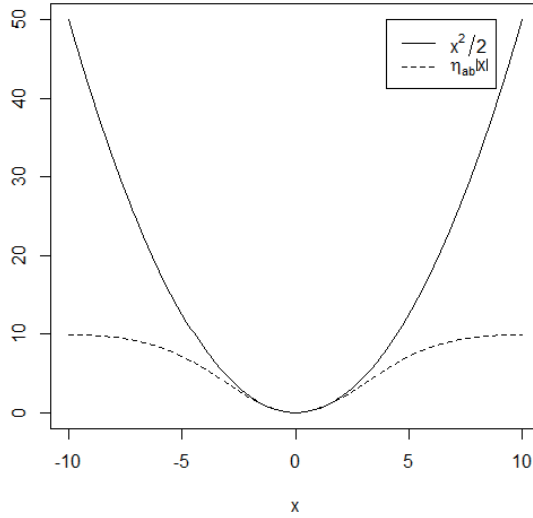
Şekil 2.4 $d(v, x) = \frac{|x - \mu|}{\sigma}$ ifadesine dayalı uyarlanmış etki fonksiyonları grafiği

Bu şekilden; (2.42) eşitliğinde yer alan modifikasyonun Normal yoğunluktan elde edilen sınırsız etki fonksiyonu üzerindeki etkisi gözlenmekte olup tek bir aykırı gözlemin bile tahmin edici üzerinde olumsuz etki oluşturacağı söylenebilir. Ancak böyle bir etkinin, RN durumlarına ait etki fonksiyonları incelendiğinde sınırlı hale geldiği gözlenmiştir. Etki fonksiyonunun sıfıra yaklaşma hızı, “b” parametresinin aldığı değere göre değişmektedir. RN dağılımı için parametre değerlerinin seçimi, Ramsay ve Novick (1980)’in çalışmasında kullanılan değerlerle aynı olacak şekilde seçilmiş olup standart $RN(0,1,0.05,2)$ dağılımının diğerlerine kıyasla aykırı gözlemlerin etkisini daha hızlı sınırlandırdığı görülmüştür.

Uyarlanmış etki fonksiyonları grafiğine ek olarak (2.48) eşitliğinde yer alan ve M tahmin edicisinin ρ fonksiyonuna benzeyen $\eta_{ab}(|x - \mu|/\sigma)$ teriminin işlevi, EKK tahmini için kullanılan $\rho = x^2/2$ fonksiyonu ile kıyaslanarak aşağıdaki grafiklerde görüldüğü gibi incelenmiştir.



Şekil 2.5 $a = 0.05$ ve $b = 2$ değerli $\rho = \eta_{ab}(|x|)$ fonksiyonunun grafiği



Şekil 2.6 $\rho = x^2/2$ ve $\rho = \eta_{ab}(|x|)$ fonksiyonlarının grafiği

Grafikler incelendiğinde; RN dağılımında kullanılan $\rho = \eta_{ab}(|x|)$ fonksiyonunun, $\rho = x^2/2$ fonksiyonuna kıyasla sifıra daha hızlı yaklaştığı görülmekte olup aykırı gözlemlerin etkisini sınırlandıran sınırlı bir fonksiyon olduğu söylenebilir.

Parametre Tahmini

(1.2) regresyon modelindeki hata terimlerinin t ve Laplace dağılımlarına alternatif olarak RN dağıldığı ($\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, a, b)$) varsayılın. Bu varsayım doğrultusunda, $\varepsilon_i = y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}$ olmak üzere y_i 'nin o.y.f'nu orantısal olarak,

$$f(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b) \propto (A_i)^{-1} \exp(-\eta_{ab}(d_i)) \quad , \quad i=1, 2, \dots, n \quad (2.49)$$

olup burada $A_i = \int_{u_1}^{u_2} \exp[-\eta_{ab}(d_i(u))] du$, $\eta_{ab}(d_i) = (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, ad_i^b)$ ve

$d_i = |y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}| / \sigma$ 'dır (Ramsay ve Novick 1980). Robust olmayı sağlayan a ve b parametrelerinin biliniyor olduğu varsayılmıştır.

RN dağılımına dayalı regresyon modeli parametrelerinin EÇÖ tahmin edicilerini bulmak için kullanılacak log-olabilirlik fonksiyonu,

$$\ln P(y | \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b) = \prod_{i=1}^n f(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b) \propto \left[-\ln\left(\prod_{i=1}^n A_i\right) - \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma\left(\frac{2}{b}, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}\right) \right] \quad (2.50)$$

olmak üzere burada $(ba^{2/b})^{-1} \gamma\left(\frac{2}{b}, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}\right)$ terimi, M tahmin edicisinin ρ

fonksiyonuna benzer bir ifadedir.

Log-olabilirlik fonksiyonunun $\boldsymbol{\beta}$ parametresine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi durumunda $\boldsymbol{\beta}$ 'nin ağırlıklandırılmış tahmin edicisi aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \ln P(y|x, \beta, \sigma, a, b)}{\partial \beta} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{RN} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{RN}}} &= \left(- \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \beta) / A_i \right) \\
&\quad - \left(ba^{2/b} \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \gamma \left(\frac{2}{b}, ad_i^b \right)}{\partial (ad_i^b) \partial \beta} \bigg|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{RN} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{RN}}} = 0
\end{aligned} \tag{2.51}$$

olmak üzere bu eşitlikte yer alan alt tamamlanmamış gamma fonksiyonunun türevi,

$$\frac{\partial \gamma(a, x)}{\partial x} = - \frac{\partial \Gamma(a, x)}{\partial x} = x^{a-1} \exp(-x) \quad , \quad a > 0, \quad x \geq 0 \quad (\text{Jameson 2016})$$

(2.52)

eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \gamma \left(\frac{2}{b}, ad_i^b \right)}{\partial (ad_i^b) \partial \beta} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{RN} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{RN}}} &= \left(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta|^b}{\sigma^b} \right)^{\frac{2}{b}-1} \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta|^b}{\sigma^b} \right) \\
&\quad \times \left(a \frac{1}{\sigma^b} b |y_i - \mathbf{x}_i' \beta|^{b-1} \operatorname{sgn}(y_i - \mathbf{x}_i' \beta) (-\mathbf{x}_i') \right) \bigg|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{RN} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{RN}}} \\
&= a^{2/b} (\hat{\sigma}_{RN}^{-b})^{2/b} b |y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN}| \operatorname{sgn}(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN}) (-\mathbf{x}_i') \\
&\quad \times \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN}|^b}{\hat{\sigma}_{RN}^b} \right)
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Bu eşitlikte, $\hat{w}_{i(RN)} = \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN}|^b}{\hat{\sigma}_{RN}^b} \right)$ olarak tanımlandığında ifade,

$$\left. \frac{\partial^2 \gamma\left(\frac{2}{b}, ad_i^b\right)}{\partial(ad_i^b)\partial\boldsymbol{\beta}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \\ \sigma=\hat{\sigma}_{RN}}} = a^{2/b} b (\hat{\sigma}_{RN}^{-2}) \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) \left(-\mathbf{x}_i' \right) \hat{w}_{i(RN)} \quad (2.54)$$

şeklinde belirtilebilir. Elde edilen bu ifade (2.51) eşitliğinde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \ln P(y|x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\beta}=\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \\ \sigma=\hat{\sigma}_{RN}}} &= \left(-\sum_{i=1}^n \left(\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) / A_i \right) - (ba^{2/b})^{-1} \\ &\times \sum_{i=1}^n \left[a^{2/b} b (\hat{\sigma}_{RN}^{-2}) \hat{w}_{i(RN)} \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) \left(-\mathbf{x}_i' \right) \right] = 0 \\ &= (\hat{\sigma}_{RN}^{-2}) \sum_{i=1}^n \left[\hat{w}_{i(RN)} \mathbf{x}_i \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) \right] = \sum_{i=1}^n \left(\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) / A_i \\ &= \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN)} \mathbf{x}_i \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) = (\hat{\sigma}_{RN}^2) \left(\sum_{i=1}^n \left(\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) / A_i \right) \end{aligned} \quad (2.55)$$

olarak bulunmuş olup $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin robust tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} = \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN)} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN)} \mathbf{x}_i y_i - \hat{\sigma}_{RN}^2 \sum_{i=1}^n \left(\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) / A_i \right) \quad (2.56)$$

eşitliği şeklinde elde edilir. Bu eşitlik, matris formatında,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} = (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y} - (\hat{\sigma}_{RN}^2) \sum_{i=1}^n \left(\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) / A_i) \quad (2.57)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $\left(\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} \right) / A_i$ ifadesinin limiti sıfıra yaklaşmaktadır

(bkz. Ramsay ve Novick 1980). Bu durumda, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{RN} = (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y})$ olarak elde edilir.

$\mathbf{W}$ ise $\hat{w}_{i(RN)}$ ağırlık değerleri tahminini içinde barındıran köşegen bir matristir.

Benzer şekilde σ^2 'nin ağırlıklandırılmış tahmin edicisi ise

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \ln P(y|x, \beta, \sigma, a, b)}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{RN} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{RN}}} &= \left(-\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \sigma_{RN}) / A_i \right) + (ba^{2/b})^{-1} \\
&\times \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial^2 \gamma\left(\frac{2}{b}, ad_i^b\right)}{\partial (ad_i^b) \partial \sigma} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{RN} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{RN}}} = 0
\end{aligned} \tag{2.58}$$

eşitliği kullanılarak elde edilir. Bu eşitlikte yer alan alt tamamlanmamış gamma fonksiyonunun σ parametresine göre türevi,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 \gamma\left(\frac{2}{b}, ad_i^b\right)}{\partial (ad_i^b) \partial \sigma} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{RN} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{RN}}} &= \left(a \left| \frac{y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN}}{\hat{\sigma}_{RN}} \right|^b \right)^{\frac{2}{b}-1} \exp \left(-a \left| \frac{y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN}}{\hat{\sigma}_{RN}} \right|^b \right) \\
&\times \left(a \left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN} \right|^b (-b) (\hat{\sigma}_{RN})^{-b-1} \text{sgn}(\sigma) \right) \\
&= a^{2/b} (\hat{\sigma}_{RN}^{-3}) (-b) \hat{w}_{i(RN)} \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN} \right)^2
\end{aligned} \tag{2.59}$$

olmak üzere σ^2 parametresinin robust tahmin edicisi,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial \ln P(y|x, \beta, \sigma, a, b)}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{RN} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{RN}}} &= \left(-\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{RN}) / A_i \right) + (ba^{2/b})^{-1} \\
&\times \sum_{i=1}^n \left[a^{2/b} (\hat{\sigma}_{RN}^{-3}) b \hat{w}_{i(RN)} \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN} \right)^2 \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\hat{\sigma}_{RN}^2 = \hat{\sigma}_{RN}^{-1} \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{RN}) / A_i \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN)} \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{RN} \right)^2 \tag{2.60}$$

olarak bulunur. Burada $(\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{RN}) / A_i$ ifadesinin limiti i 'ye bağlı olmayan bir değere yaklaşmaktadır (bkz. Ramsay ve Novick 1980). (2.57) ve (2.60) eşitliklerinin hem $\hat{\beta}_{RN}$ hem de $\hat{\sigma}_{RN}$ 'yi içermesi sebebiyle bu eşitliklerin açık çözümü olmayıp tahmin edicilerin elde edilmesinde nümerik yöntemlerin kullanılması gerekmektedir.

2.6 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, hata terimlerinin Normal dağılıma ek olarak t, Laplace ve RN dağılımlarından herhangi birine sahip olduğu varsayılmış olup bu varsayıma yönelik oluşturulan regresyon modellerinin robust ve robust olmayan parametre tahminleri, simülasyon çalışması yapılarak elde edilmiştir. Ayrıca her bir model parametresi için hata kareler ortalamasının karekök değerleri (root mean square error, RMSE) hesaplanmış ve bu değerler incelenerek aykırı gözlemlerli bir simülasyon verisinin hangi model ile modellenmesinin uygun olacağına karar verilmiştir.

Herhangi bir θ parametresi için RMSE değeri aşağıdaki formül kullanılarak hesaplanır :

$$RMSE = \sqrt{E(\hat{\theta} - \theta)^2} = \sqrt{V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2} \quad (2.61)$$

burada θ , gerçek parametre değerini, $\hat{\theta}$ ise simülasyon sonrasında elde edilen tahmin değerini göstermektedir (Wackerly vd. 2008).

Bu simülasyon çalışmasında kullanılan çoklu doğrusal regresyon modeli,

$$\begin{aligned} y_i &= \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i \\ &= \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.62)$$

olup bu modelde yer alan hata terimlerinin (ε_i) dağılımı için aşağıdaki durumlar ele alınmıştır.

- (i) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, Normal dağılım
- (ii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} t(0, \sigma^2, 3)$, 3 serbestlik dereceli t dağılımı
- (iii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} L(0, \sigma)$, Laplace dağılımı
- (iv) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, 0.05, 2)$, RN dağılımı

Bu durumlar dikkate alınarak kurulan regresyon modellerinin katsayıları ve hata terimleri varyansının (σ^2) gerçek değerinin $\beta_0 = 1$, $j = 1, 2, 3$ için $\beta_j = 1$, $\sigma^2 = 1$ olduğu varsayılmıştır. Örneklem genişliği, $n = 30, 50$ ve 100 olarak seçilmiş ve simülasyon sırasında tüm bağımsız değişkenler (x_j), $U(-5,5)$ şeklinde Uniform dağılımından üretilmiştir. Çalışma, veri setinde aykırı gözlem olması ve olmaması durumları göz önüne alınarak gerçekleştirilmiştir. Aykırı gözlem olması durumunda bu gözlemlerin etkisini ölçmek amacıyla değişkenlere, $x-$, $y-$ ve $x-y$ yönlerinde ($n \cdot r\%$) sayıda aykırı gözlem eklenmiştir. Burada “r” yüzdesi, % 2, % 5 ve % 10 olarak seçilmiştir. Aykırı gözlemler, üretilen x ve y değişkenlerinin ilk değerlerine “100” sabiti eklenerek elde edilmiştir. Bu simülasyon çalışmasının uygulanmasında Rv.3.4.4 yazılım programı kullanılmış olup simülasyon 100 kez tekrarlanarak parametre tahminlerinin ortalamaları ve RMSE değerleri elde edilmiştir.

Çizelge 2.3 Aykırı gözlemsiz bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

Örneklem genişliği (n)	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Regresyon modeli parametre tahminleri				
		$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$
		RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	$N(0, \sigma^2)$	1.013 (0.19)	1.009 (0.07)	1.003 (0.07)	0.981 (0.07)	0.900 (0.16)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	1.006 (0.25)	0.997 (0.08)	1.002 (0.09)	1.002 (0.09)	1.540 (0.78)
	$L(0, \sigma)$	1.006 (0.26)	0.999 (0.09)	0.998 (0.09)	0.998 (0.09)	0.950 (0.20)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	0.978 (0.21)	1.003 (0.07)	0.999 (0.07)	0.997 (0.07)	0.900 (0.16)
50	$N(0, \sigma^2)$	0.989 (0.14)	1.000 (0.05)	1.005 (0.05)	1.006 (0.05)	0.960 (0.11)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	1.005 (0.19)	0.999 (0.07)	1.000 (0.06)	1.000 (0.06)	1.590 (0.74)
	$L(0, \sigma)$	1.009 (0.19)	1.002 (0.06)	1.002 (0.06)	0.997 (0.06)	0.969 (0.15)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	0.994 (0.16)	1.002 (0.06)	1.000 (0.06)	0.997 (0.06)	0.950 (0.12)
100	$N(0, \sigma^2)$	1.006 (0.10)	0.997 (0.10)	1.006 (0.10)	1.002 (0.10)	0.976 (0.07)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	1.001 (0.12)	1.007 (0.12)	1.000 (0.12)	0.999 (0.13)	0.970 (0.10)
	$L(0, \sigma)$	1.000 (0.16)	0.996 (0.16)	0.993 (0.17)	1.000 (0.17)	1.380 (0.40)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	1.024 (0.11)	0.997 (0.11)	0.994 (0.11)	1.002 (0.11)	0.965 (0.08)

Simülasyon verisinde aykırı gözlem olmaması durumunda, verinin Normal dağılıma dayalı regresyon modelinin yanı sıra t, Laplace ve RN dağılımlarından herhangi birine dayalı modeller kullanılarak da modellenebileceği **çizelge 2.3**'den görülmektedir. Bu çizelge incelendiğinde, RN dağılımına dayalı modelin RMSE değerlerinin Normal dağılıma dayalı modelden biraz daha büyük olduğu ve bu farkın örneklem genişliği arttıkça azaldığı söylenebilir. Ayrıca t ve Laplace dağılımlarında dayalı modellere kıyasla daha küçük RMSE değerli parametre tahminlerine sahip olan RN dağılımına dayalı modelin kullanımının, Normal dağılıma dayalı modele ek olarak verinin modellenmesinde tercih edilebileceği önerilmektedir.

Aykırı gözlem varlığında ise farklı hata dağılımına dayalı regresyon modeli parametrelerinin tahminleri, **çizelge 2.4-2.6**'da görüldüğü gibi elde edilmiştir.

Çizelge 2.4 $n = 30$ genişliğinde aykırı gözlemlili bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı modellerin robust / robust olmayan parametre tahminleri ve RMSE değerleri

Aykırı gözlem sayısı	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
1	$N(0, \sigma^2)$	$x -$	1.019 (1.03)	0.007 (1.01)	0.022 (1.00)	-0.007 (1.04)	4.780 (3.83)
		$y -$	4.519 (3.74)	1.078 (1.30)	0.775 (1.32)	1.069 (1.19)	16.970 (15.9)
		$x - y$	4.569 (3.85)	0.119 (1.29)	-0.119 (1.57)	-0.014 (1.54)	18.090 (17.1)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	$x -$	0.816 (1.15)	0.005 (1.03)	0.025 (1.01)	0.027 (1.01)	4.910 (3.98)
		$y -$	1.019 (0.26)	1.004 (0.09)	1.009 (0.09)	0.999 (0.09)	9.260 (8.26)
		$x - y$	0.922 (1.13)	0.016 (1.02)	0.014 (1.02)	0.028 (1.01)	10.360 (9.41)
	$L(0, \sigma)$	$x -$	0.887 (1.35)	-0.003 (1.05)	0.006 (1.05)	0.008 (1.04)	3.580 (2.71)
		$y -$	1.053 (0.27)	0.996 (0.09)	1.004 (0.10)	1.006 (0.10)	6.490 (5.50)
		$x - y$	1.068 (1.34)	-0.004 (1.06)	-0.005 (1.06)	0.022 (1.04)	7.350 (6.39)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$x -$	0.849 (0.95)	0.134 (0.95)	0.138 (0.95)	0.155 (0.93)	3.990 (3.24)
		$y -$	1.003 (0.21)	0.999 (0.07)	0.995 (0.07)	1.001 (0.07)	0.880 (0.18)
		$x - y$	0.818 (0.98)	0.149 (0.94)	0.154 (0.94)	0.155 (0.93)	3.870 (3.14)

Çizelge 2.4 $n = 30$ genişliğinde aykırı gözlemlili bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı modellerin robust / robust olmayan parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

Aykırı gözlem sayısı	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
3	$N(0, \sigma^2)$	$x -$	1.147 (0.99)	- 0.001 (1.02)	0.008 (1.02)	- 0.002 (1.03)	4.810 (3.85)
		$y -$	7.489 (6.71)	0.978 (1.82)	0.962 (1.69)	0.779 (1.75)	23.650 (22.66)
		$x - y$	8.028 (7.27)	- 0.091 (1.75)	0.009 (1.86)	0.027 (1.65)	24.400 (23.43)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	$x -$	0.857 (1.13)	0.012 (1.02)	0.026 (1.01)	0.008 (1.03)	4.920 (3.97)
		$y -$	1.016 (0.27)	0.999 (0.09)	1.003 (0.09)	1.009 (0.09)	13.030 (12.03)
		$x - y$	0.846 (1.19)	0.015 (1.02)	0.022 (1.02)	0.022 (1.02)	10.410 (9.46)
	$L(0, \sigma)$	$x -$	0.788 (1.35)	0.022 (1.03)	0.022 (1.03)	0.011 (1.04)	3.510 (2.55)
		$y -$	1.099 (0.30)	0.998 (0.10)	0.997 (0.10)	1.000 (0.10)	9.140 (8.14)
		$x - y$	1.376 (1.48)	0.003 (1.06)	0.033 (1.03)	0.011 (1.05)	9.670 (8.70)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$x -$	0.849 (1.05)	0.038 (0.99)	0.018 (1.01)	0.028 (1.01)	4.330 (3.40)
		$y -$	0.989 (0.21)	0.998 (0.08)	0.998 (0.07)	1.002 (0.08)	0.850 (0.20)
		$x - y$	0.872 (0.96)	0.153 (0.94)	0.133 (0.95)	0.158 (0.94)	3.891 (3.16)

Çizelge 2.4’den görüldüğü gibi $n = 30$ örneklemlili bir veri setinde sadece “1” aykırı gözlem olması durumunda Normal dağılıma dayalı modelin parametre tahminleri tüm yönlerde bu gözlemden etkilenmiştir. Aykırı gözlem sayısının “3” olması durumunda ise bu etkilenme, büyük RMSE’li tahminlerin elde edilmesi ile daha açık şekilde ortaya çıkmıştır. Bu nedenle hem “1” hem de “3” aykırı gözlemlili simülasyon verisinin modellenmesinde Normal dağılıma dayalı modeli kullanmak yerine $y -$ yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust tahminler veren t, Laplace ve RN dağılıma dayalı modellerin kullanımının tercih edilebileceği söylenebilir. Bu modeller içerisinde RN dağılımına dayalı model, diğerlerine kıyasla en küçük RMSE’li robust tahminleri vermiş olup σ parametresinin tahmininde ise $y -$ yönündeki aykırı gözlemlerden hiç etkilenmeyen robust tahminler elde edilmesini sağlamıştır.

Çizelge 2.5 $n=50$ genişliğinde aykırı gözlemlili bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı modellerin robust / robust olmayan parametre tahminleri ve RMSE değerleri

Aykırı gözlem sayısı	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
1	$N(0, \sigma^2)$	$x-$	0.911 (0.77)	-0.006 (1.02)	0.007 (1.01)	0.034 (0.98)	4.790 (3.82)
		$y-$	2.923 (2.00)	0.933 (0.72)	1.094 (0.73)	1.155 (0.69)	13.640 (12.64)
		$x-y$	2.891 (2.06)	-0.081 (1.24)	0.069 (1.09)	0.035 (1.15)	14.570 (13.59)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	$x-$	0.916 (0.59)	0.558 (0.61)	0.568 (0.60)	0.568 (0.60)	13.350 (14.09)
		$y-$	1.017 (0.18)	0.999 (0.06)	0.996 (0.06)	1.001 (0.06)	7.250 (6.26)
		$x-y$	0.949 (0.60)	0.473 (0.69)	0.478 (0.68)	0.478 (0.68)	14.360 (14.62)
	$L(0, \sigma)$	$x-$	0.920 (0.49)	0.622 (0.45)	0.622 (0.45)	0.617 (0.46)	9.630 (9.07)
		$y-$	1.020 (0.19)	0.999 (0.06)	1.002 (0.07)	1.000 (0.06)	5.090 (4.09)
		$x-y$	0.997 (0.51)	0.585 (0.49)	0.576 (0.51)	0.582 (0.51)	10.570 (9.93)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$x-$	0.899 (0.67)	0.253 (0.86)	0.249 (0.86)	0.256 (0.85)	3.712 (3.10)
		$y-$	1.005 (0.17)	0.998 (0.05)	0.999 (0.05)	0.999 (0.05)	0.913 (0.14)
		$x-y$	0.835 (0.68)	0.246 (0.86)	0.242 (0.86)	0.243 (0.86)	3.710 (3.09)
3	$N(0, \sigma^2)$	$x-$	0.810 (0.77)	0.002 (1.01)	0.002 (1.01)	0.006 (1.00)	4.930 (3.96)
		$y-$	7.063 (6.13)	0.834 (1.23)	0.949 (1.18)	0.879 (1.32)	22.990 (22.01)
		$x-y$	5.024 (4.12)	0.029 (1.30)	-0.114 (1.43)	0.050 (1.29)	19.710 (18.73)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	$x-$	0.838 (0.90)	0.029 (0.99)	0.020 (0.99)	0.009 (1.01)	5.050 (4.09)
		$y-$	1.015 (0.19)	0.999 (0.07)	0.999 (0.07)	0.995 (0.07)	12.360 (11.37)
		$x-y$	0.929 (0.87)	0.021 (0.99)	0.024 (0.99)	0.029 (0.99)	11.180 (10.20)
	$L(0, \sigma)$	$x-$	0.836 (0.99)	0.040 (0.99)	0.022 (1.00)	0.021 (1.00)	3.590 (2.61)
		$y-$	1.091 (0.21)	0.999 (0.07)	1.002 (0.07)	0.997 (0.07)	8.690 (7.70)
		$x-y$	1.300 (1.08)	0.031 (0.99)	0.004 (1.02)	0.031 (1.00)	9.290 (8.31)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$x-$	0.886 (0.80)	0.020 (0.99)	0.018 (0.99)	0.019 (0.99)	4.520 (3.55)
		$y-$	1.000 (0.17)	1.000 (0.05)	1.000 (0.06)	0.999 (0.06)	0.890 (0.15)
		$x-y$	0.854 (0.754)	0.042 (0.98)	0.038 (0.98)	0.042 (0.98)	4.390 (3.46)

Çizelge 2.5 $n=50$ genişliğinde aykırı gözlemlili bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı modellerin robust / robust olmayan parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

Aykırı gözlem sayısı	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
5	$N(0, \sigma^2)$	$x-$	0.853 (0.79)	0.018 (0.99)	0.004 (1.01)	-0.019 (1.03)	4.930 (3.96)
		$y-$	11.086 (10.16)	1.039 (1.54)	1.099 (1.71)	1.157 (1.68)	28.950 (27.96)
		$x-y$	7.264 (6.35)	0.093 (1.34)	-0.117 (1.50)	-0.027 (1.49)	23.720 (22.74)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	$x-$	0.786 (0.89)	0.026 (0.99)	0.008 (1.01)	0.004 (1.01)	5.080 (4.13)
		$y-$	1.024 (0.21)	1.002 (0.07)	1.000 (0.07)	1.001 (0.07)	15.880 (14.88)
		$x-y$	0.961 (0.89)	0.031 (0.99)	-0.001 (1.02)	0.019 (1.00)	13.210 (12.23)
	$L(0, \sigma)$	$x-$	0.804 (1.06)	0.022 (1.00)	0.018 (1.01)	0.012 (1.02)	3.590 (2.62)
		$y-$	1.153 (0.25)	1.002 (0.08)	0.999 (0.08)	1.001 (0.08)	11.180 (10.18)
		$x-y$	1.705 (1.29)	0.020 (1.02)	0.000 (1.03)	0.003 (1.03)	11.530 (10.55)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$x-$	0.833 (0.80)	0.015 (1.00)	0.018 (0.99)	0.002 (1.02)	4.550 (3.58)
		$y-$	1.013 (0.16)	1.001 (0.06)	0.998 (0.06)	0.998 (0.06)	0.870 (0.16)
		$x-y$	0.879 (0.83)	0.025 (0.99)	0.023 (0.99)	0.003 (1.01)	4.430 (3.47)

Çizelge 2.5 incelendiğinde ise, içerisinde “1” aykırı gözlem bulunan $n=50$ örneklemli bir veri setinin modellenmesi, Normal dağılıma dayalı model kullanılarak yapıldığında tüm yönlerde bu aykırı gözlemden etkilenen tahminler verdiği gözlenmiştir. Aykırı gözlem sayısının artması halinde daha büyük RMSE’li tahminlerin bulunması ile etkilenmenin bariz şekilde ortaya çıktığı görülmüştür. t, Laplace ve RN dağılımına dayalı modellerin tercih edilmesi durumunda ise $y-$ yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust tahminler elde edilmiştir. Bu modeller kıyaslandığında, t ve Laplace dağılımına dayalı modellerin σ ’nın tahmininde robust tahminler vermediği ancak RN dağılımına dayalı modelin tüm parametreler için $y-$ yönündeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen en küçük RMSE’li robust tahminler verdiği ortaya çıkmıştır.

Çizelge 2.6 $n=100$ genişliğinde aykırı gözlemlili bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı modellerin robust / robust olmayan parametre tahminleri ve RMSE değerleri

Aykırı gözlem sayısı	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
2	$N(0, \sigma^2)$	$x-$	0.896 (0.51)	0.001 (1.00)	0.041 (0.97)	-0.004 (1.01)	4.970 (3.99)
		$y-$	3.019 (2.03)	1.001 (0.51)	0.997 (0.46)	0.884 (0.45)	13.860 (12.86)
		$x-y$	2.075 (1.21)	-0.028 (1.07)	0.086 (0.98)	0.009 (1.05)	10.990 (9.99)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	$x-$	0.970 (0.22)	0.785 (0.32)	0.792 (0.31)	0.788 (0.32)	17.080 (16.57)
		$y-$	1.001 (0.13)	0.997 (0.04)	1.003 (0.04)	0.999 (0.05)	7.260 (6.26)
		$x-y$	1.002 (0.13)	0.991 (0.05)	0.988 (0.05)	0.988 (0.05)	15.740 (14.75)
	$L(0, \sigma)$	$x-$	0.938 (0.30)	0.674 (0.36)	0.672 (0.37)	0.674 (0.37)	10.260 (9.48)
		$y-$	1.021 (0.12)	1.002 (0.04)	1.001 (0.04)	0.899 (0.04)	5.090 (4.09)
		$x-y$	0.990 (0.31)	0.646 (0.39)	0.648 (0.39)	0.648 (0.39)	11.120 (10.30)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$x-$	0.836 (0.52)	0.114 (0.92)	0.119 (0.92)	0.117 (0.92)	4.310 (3.43)
		$y-$	1.019 (0.11)	0.999 (0.04)	1.000 (0.04)	1.001 (0.04)	0.920 (0.11)
		$x-y$	0.985 (0.11)	1.001 (0.04)	0.999 (0.04)	1.001 (0.04)	0.950 (0.09)
5	$N(0, \sigma^2)$	$x-$	0.926 (0.56)	0.002 (1.00)	0.002 (1.00)	0.013 (0.99)	4.960 (3.97)
		$y-$	6.005 (5.02)	0.967 (0.83)	1.062 (0.76)	1.010 (0.78)	21.470 (20.48)
		$x-y$	4.059 (3.11)	0.047 (1.08)	0.025 (1.09)	-0.077 (1.20)	17.580 (16.59)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	$x-$	0.809 (0.62)	0.024 (0.98)	0.031 (0.98)	0.019 (0.99)	5.130 (4.15)
		$y-$	1.012 (0.13)	0.997 (0.04)	0.999 (0.05)	0.999 (0.05)	11.310 (10.31)
		$x-y$	0.876 (0.59)	0.046 (0.96)	0.033 (0.98)	0.039 (0.97)	10.060 (9.08)
	$L(0, \sigma)$	$x-$	0.814 (0.70)	0.017 (0.99)	0.013 (0.99)	0.025 (0.99)	3.620 (2.63)
		$y-$	1.065 (0.14)	1.000 (0.04)	1.002 (0.05)	1.000 (0.04)	7.950 (6.95)
		$x-y$	1.177 (0.71)	0.015 (0.99)	0.015 (1.00)	0.019 (0.99)	8.640 (7.64)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$x-$	0.826 (0.56)	0.018 (0.99)	0.023 (0.98)	0.028 (0.98)	4.600 (3.62)
		$y-$	0.996 (0.11)	1.003 (0.04)	1.000 (0.04)	1.002 (0.04)	0.920 (0.11)
		$x-y$	0.833 (0.56)	0.046 (0.96)	0.041 (0.97)	0.039 (0.97)	4.510 (3.55)

Çizelge 2.6 $n=100$ genişliğinde aykırı gözlemlili bir veri seti kullanılarak farklı hata dağılımına dayalı modellerin robust / robust olmayan parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

Aykırı gözlem sayısı	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
10	$N(0, \sigma^2)$	$x-$	0.829 (0.59)	0.008 (1.00)	-0.003 (1.01)	0.004 (1.00)	5.020 (4.03)
		$y-$	10.994 (10.01)	1.009 (1.08)	1.072 (1.01)	1.094 (1.06)	29.570 (28.58)
		$x-y$	6.183 (5.22)	-0.176 (1.31)	0.038 (1.18)	0.096 (1.13)	22.170 (21.17)
	$t(0, \sigma^2, 3)$	$x-$	0.812 (0.65)	0.009 (0.99)	0.008 (1.00)	0.021 (0.99)	5.160 (4.18)
		$y-$	1.023 (0.14)	0.999 (0.05)	1.002 (0.05)	0.998 (0.05)	15.890 (14.89)
		$x-y$	0.955 (0.63)	0.022 (0.99)	0.015 (0.99)	0.027 (0.98)	12.330 (11.34)
	$L(0, \sigma)$	$x-$	0.814 (0.72)	0.005 (1.01)	0.022 (0.99)	0.017 (0.99)	3.620 (2.63)
		$y-$	1.137 (0.19)	0.999 (0.05)	1.001 (0.05)	1.000 (0.05)	11.190 (10.19)
		$x-y$	1.652 (1.00)	-0.002 (1.02)	0.018 (0.99)	0.003 (1.01)	11.600 (10.61)
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$x-$	0.857 (0.56)	0.009 (0.99)	0.019 (0.99)	0.008 (0.99)	4.620 (3.64)
		$y-$	1.001 (0.12)	0.999 (0.04)	0.999 (0.04)	1.003 (0.04)	0.910 (0.12)
		$x-y$	0.856 (0.57)	0.019 (0.99)	0.024 (0.98)	0.023 (0.98)	4.520 (3.54)

Çizelge 2.6'den görüldüğü gibi Normal dağılıma dayalı modelin çizelge 2.4 ve çizelge 2.5'deki veri setlerine kıyasla β_1 , β_2 ve β_3 parametreleri açısından sadece $y-$ yönündeki aykırı gözlemlerden daha az etkilenmiştir. Ancak aykırı gözlem sayısının artması durumunda bu parametreler için büyük RMSE'li tahminler elde edilmiştir. Bu nedenle örneklem genişliği artsa bile verinin Normal dağılıma dayalı model ile modellenmesinin uygun olmayacağı söylenebilir. t , Laplace ve RN dağılımına dayalı modellerin tercih edilmesi durumunda ise $y-$ yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust tahminler bulunmuştur. Ancak t ve Laplace dağılımına dayalı modeller σ parametresinin tahmininde tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenen tahminler vermiştir. Bu modellerin yanı sıra RN dağılımına dayalı model, diğerlerine kıyasla tüm parametreler için daha küçük RMSE'li robust tahminler vermiştir. Aykırı gözlem sayısının artması durumunda ise bir değişiklik olmamıştır.

Özet olarak, Normal dağılıma dayalı modelin parametre tahminlerinin veri setinde yer alan tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilendiği ancak t , Laplace ve RN dağılımına dayalı modellerin parametre tahminlerinin ise y - yönündeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust tahminler olduğu söylenebilir. Bu modeller içerisinde RN dağılımına dayalı modelin diğerlerine kıyasla tüm parametreler için daha küçük RMSE'li robust tahminler verdiği ortaya çıkmıştır.



3. DOĞRUSAL REGRESYON MODELLERİNDE BAYESYEN PARAMETRE TAHMİNİ

Bu bölümde, öncelikle doğrusal regresyonun Bayesyen yaklaşım kapsamında uygulanmasını sağlayan Bayesyen regresyon analizinin aşamaları gösterilmiş olup bu doğrultuda oluşturulan regresyon modeli parametrelerinin Bayesyen tahmin edicileri elde edilmiştir. Sonrasında ise sözü edilen modelin Bayesyen parametre tahminleri, simülasyon çalışması ile bulunmuş olup bu tahminlerin veri setinde aykırı gözlem olması durumunda bu tür gözlemlerden etkilenip etkilenmediği incelenmiştir.

Hata terimlerinin Normal veya başka dağılımlara sahip olması ya da robust yöntemlerin kullanılması durumunda, (1.2) regresyon modelinde yer alan tahmin edilecek model parametreleri $(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k)$ ile varyansın (σ^2) bilinmeyen birer parametre ve sabit olduğu varsayılır. Bayesyen regresyon analizinde ise bu değerler birer rasgele değişkendir ve doğal olarak bir olasılık dağılımına sahiptir.

Bayesyen yaklaşımın en temel özelliği, analize önsel bilginin ilave edilmesidir. Önsel bilgi; geçmişteki çalışmalardan elde edilen veya veriyi gözlemlemeden önce parametre hakkında araştırmacının kişisel fikirlerini içeren öznal (subjektif) bir bilgidir. Bu bilgi, uygun dağılımlar kullanılarak önsel dağılım şeklinde analize dahil edilir. Önsel dağılım ile örneklemden elde edilen objektif bilgiyi temsil eden olabilirlik fonksiyonunun birleştirilmesi sonucunda sonsal dağılım ortaya çıkmaktadır. Sonuç olarak elde edilen sonsal dağılım, bilinmeyen parametre hakkında çıkarsama yapmak amacıyla kullanılmaktadır.

Çoklu doğrusal regresyon modelinin Bayesyen analizinde kullanılacak olan model, (1.3) eşitliğinde yer alan

$$y = X\beta + \varepsilon$$

regresyon modeli olup analizin temelini oluşturan süreç, aşağıdaki gibi tanımlanır.

Parametrelerin		Parametrelerin		
Sonsal Dağılımı	$\propto$	Önsel Dağılımı	$\times$	Olabilirlik Fonksiyonu
$P(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \sigma^2 y, X)$	$\propto$	$P(\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \sigma^2)$	$\times$	$P(y X, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k, \sigma^2)$

Bayesyen regresyon analizi, bilgi içermeyen ve bilgi içeren önsel dağılım kullanılarak iki şekilde gerçekleştirilir.

3.1 Bilgi İçermeyen Önsel Dağılım

Analizlerde bilgi içermeyen önsel dağılımın kullanılması, araştırmacının ilgili parametre hakkında fazla bilgiye sahip olmadığı anlamına gelmektedir. Bu tür önsel dağılımlar; belirsiz dağılım olarak adlandırılmaktadır. Böyle dağılımların kullanılması durumunda sonsal dağılımın belirlenmesinde örneklemden elde edilen bilgiler önemli oranda geçerli olur. Bu nedenle bilgi içermeyen önsel dağılımlı Bayesyen analizden elde edilen tahminler ile klasik analizden elde edilen tahminler arasında önemli bir fark olmadığı söylenebilir.

3.1.1 Varyansın bilindiğinin varsayılması

ε rasgele hata terimleri vektörünün n boyutlu Normal dağılıma sahip olduğu varsayılın.

$$(\varepsilon \sim N_n(\mathbf{0}_n, \sigma^2 \mathbf{I}_n))$$

$\mathbf{X}$, $\boldsymbol{\beta}$ ve σ^2 'nin bilinmesi durumunda olabilirlik fonksiyonu orantısal olarak,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \right)^n \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right] \\ &\propto \left(\frac{1}{\sigma^2} \right)^{\frac{n}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. $\boldsymbol{\beta}$ 'nin EKK tahmin edicisi, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} = (\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$ olmak üzere bu fonksiyonunda yer alan $(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$ ifadesine $\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ 'nin eklenip çıkarılarak düzenlenmesi sonucunda,

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) &= [(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}]' [(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} + \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}] \\ &= [(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) - \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})]' [(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) - \mathbf{X}(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' - \mathbf{X}' \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \right] \left[\left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) - \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \right] \\
&= \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) + \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \mathbf{X}' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \\
&\quad + \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) + \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \mathbf{X}' \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadenin son iki teriminin “0” olduğu aşağıdaki işlemler sonucunda gösterilmiştir.

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) &= \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \left(\mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \\
&= \left(\mathbf{y}' - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}' \mathbf{X}' \right) \left(\mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \\
&= \mathbf{y}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \mathbf{y}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \\
&= \mathbf{y}' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \\
&= \mathbf{y}' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) - \left(\left(\mathbf{X}' \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y} \right)' \mathbf{X}' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \\
&= \mathbf{y}' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) - \mathbf{y}' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \mathbf{X}' \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) &= \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \left(\mathbf{X}' \mathbf{y} - \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \\
&= \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \left(\mathbf{X}' \mathbf{y} - \underbrace{\mathbf{X}' \mathbf{X} \left(\mathbf{X}' \mathbf{X} \right)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{y}}_I \right) \\
&= \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \left(\underbrace{\mathbf{X}' \mathbf{y} - \mathbf{X}' \mathbf{y}}_0 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Bu durumda (3.2) eşitliği,

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) = \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \left(\mathbf{y} - \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) + \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right)' \mathbf{X}' \mathbf{X} \left(\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \right) \quad (3.3)$$

biçiminde tanımlanabilir. Tanımlanan bu ifade, (3.1) eşitliğinde yerine yazıldığında örneklem varyansı, $S^2 = \hat{\sigma}_{LS}^2 = \frac{1}{n-p} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})$ olmak üzere olabilirlik fonksiyonu,

$$P(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(n-p)S^2 + (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' \mathbf{X}'\mathbf{X} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) \right]\right] \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edilir.

Birbirinden bağımsız $\boldsymbol{\beta}$ ve σ^2 'nin bileşik önsel dağılımının bilgi içermeyen tekdüze dağılım olduğu varsayıldığında bileşik önsel yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \propto P(\boldsymbol{\beta}) P(\sigma^2) \quad \left\{ P(\boldsymbol{\beta}) \propto 1, \quad P(\log(\sigma^2)) \propto 1 \right\} \\ \propto \frac{1}{\sigma^2} \quad (3.5)$$

biçiminde kullanılır (Gelman vd. 2003). Bu yoğunluğun (3.4) ifadesinde yer alan olabilirlik fonksiyonu ile birleştirilmesi sonucunda $\boldsymbol{\beta}$ ve σ^2 'nin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}) \propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) P(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \\ \propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(n-p)S^2 + (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' \mathbf{X}'\mathbf{X} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) \right]\right] \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir. σ 'nın değerinin bilinmesi durumunda $\boldsymbol{\beta}$ 'nin koşullu sonsal dağılımı, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılımdır. $\boldsymbol{\beta}$ 'nin Bayesyen tahmin edicisi ise bu dağılımın ortalama vektörü olup

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS} \quad (3.7)$$

olarak tanımlanır.

3.1.2 Varyansın bilinmediğinin varsayılması

σ^2 'nin değeri genellikle bilinmez. Bu gibi durumlarda β 'nin marjinal sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\beta|y, X) &\propto \int_0^\infty P(\beta, \sigma^2|y, X) d\sigma^2 \\ &\propto \int_0^\infty (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} \exp\left[-\frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{(n-p)S^2 + (\beta - \hat{\beta}_{LS})' X' X (\beta - \hat{\beta}_{LS})}{2} \right)\right] d\sigma^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

integralinin çözümü ile elde edilir. Burada σ^2 parametresi, $\frac{n}{2}$ şekil ve $\frac{(n-p)S^2 + (\beta - \hat{\beta}_{LS})' X' X (\beta - \hat{\beta}_{LS})}{2}$ ölçek parametrelili ters Gamma dağılımına sahip olup bu integralin sonucu ters Gamma'nın kerneli olan

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{n/2}}{\left[(n-p)S^2 + (\beta - \hat{\beta}_{LS})' X' X (\beta - \hat{\beta}_{LS}) \right]^{n/2}}$$

ifadesine eşittir. Sabit terimlerin ihmal edilmesi durumunda β 'nin marjinal sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\beta|y, X) &\propto \left[(n-p)S^2 + (\beta - \hat{\beta}_{LS})' (X' X) (\beta - \hat{\beta}_{LS}) \right]^{-n/2} \\ &\propto \left[1 + \frac{1}{(n-p)} \left((\beta - \hat{\beta}_{LS})' S^{-2} (X' X) (\beta - \hat{\beta}_{LS}) \right) \right]^{-n/2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu yoğunluktan görüldüğü gibi σ^2 'nin bilinmemesi durumunda β 'nin marjinal sonsal dağılımı, $(n-p)$ serbestlik dereceli, $\hat{\beta}_{LS}$ ortalama vektörlü ve $(n-p) S^2 (X' X)^{-1} / (n-p-2)$ kovaryans matrisli çok değişkenli t dağılımı olup β 'nin Bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\beta}_{bayes} = \hat{\beta}_{LS} \quad (3.10)$$

şeklinde bulunur.

σ^2 'nin marjinal sonsal yoğunluğu ise aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} P(\sigma^2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}) d\boldsymbol{\beta} \\ &\propto \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left((n-p)S^2 + (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' (\mathbf{X}\mathbf{X}) (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) \right) \right] d\boldsymbol{\beta} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (n-p)S^2 \right] \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' \mathbf{X}\mathbf{X} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) \right] d\boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Bu ifadedeki integralli kısımdan görüldüğü gibi $\boldsymbol{\beta} ; \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2 (\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılıma sahip olup bu integralin sonucu Normal'in kerneli olan $(2\pi\sigma^2)^{p/2}$ ifadesine eşittir. Bu durumda σ^2 'nin marjinal sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\sigma^2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}) &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (n-p)S^2 \right] (\sigma^2)^{p/2} \\ &\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n-p}{2}\right)-1} \exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} \frac{(n-p)S^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

biçiminde tanımlanır.

Bu yoğunluk, ters Gamma dağılımının yoğunluğuna benzemekte olup σ^2 'nin marjinal sonsal dağılımı, $\frac{(n-p)}{2}$ şekil ve $\frac{(n-p)S^2}{2}$ ölçek parametrelili ters Gamma dağılımıdır.

Bu durumda σ^2 'nin bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\sigma}_{bayes}^2 = \frac{(n-p)S^2}{(n-p-2)} \quad (3.13)$$

olarak elde edilir.

3.2 Bilgi İçeren Önsel Dağılım

İstatistiksel araştırmalarda çoğu zaman parametreye ilişkin herhangi bir bilgi mevcut olmayabilir. Araştırmacı ya daha önce yapılmış bir araştırmanın uzmanından subjektif bir bilgiye ya da teoriden gelen önsel bilgiye sahiptir. Kişisel gözlemlere ve teoriye dayalı oluşturulan dağılım, veriye dayalı olmayan önsel dağılım iken daha önceki araştırmalardan bilgi edinilmesi yoluyla oluşturulan dağılım ise veriye dayalı önsel dağılımdır. İstatistiksel sorunların Bayesyen çözümünde sıkça kullanılan bilgi içeren önsel dağılımlardan bazıları, olabilirlik fonksiyonunun şekline bağlı olarak belirli dağılımlar ailesiyle sınırlandırılan eşlenik önsel dağılımlardır. Eşlenik önsel dağılımın olabilirlik fonksiyonu ile birleştirilmesi sonucunda ortaya çıkan sonsal dağılım, önsel ile aynı dağılım ailesine ait olan bir dağılımdır(Raiffa ve Schlaifer 1968).

β ve σ^2 'nin bileşik önsel dağılımının Normal-Ters Gamma formunda eşlenik önsel dağılım olduğu varsayıldığında bileşik önsel yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\beta, \sigma^2) &\propto P(\beta | \sigma^2) P(\sigma^2) \\ &\propto N(\beta_0, \Sigma_\beta = \sigma^2 \Sigma_0) IGa\left(\frac{(n-p)}{2}, \frac{(n-p)S^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \left(|\sigma^2|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' (\sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_0)^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) \right\} \right) \\
& \quad \times \left((\sigma^2)^{-\left(\frac{n-p}{2}\right)-1} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma^2} \frac{(n-p)S^2}{2} \right\} \right) \\
& \propto (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) + (n-p)S^2 \right] \right\} \quad (3.14)
\end{aligned}$$

olup burada $\boldsymbol{\beta}_0$, $\boldsymbol{\beta}$ 'nin p boyutlu önsel ortalama vektörü ve $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}}$ ise $p \times p$ boyutlu önsel kovaryans matrisidir. Elde edilen bu yoğunluğun (3.4) eşitliğinde yer alan olabilirlik fonksiyonu ile birleştirilmesi sonucunda $\boldsymbol{\beta}$ ve σ^2 'nin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}) & \propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) P(\mathbf{y} | \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \\
& \propto \left\{ (\sigma^2)^{-n/2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(n-p)S^2 + (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) \right] \right] \right\} \\
& \quad \times \left\{ (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) + (n-p)S^2 \right] \right] \right\} \\
& \propto (\sigma^2)^{-n-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[2(n-p)S^2 + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) \right] \right] \quad (3.15)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu yoğunluğun üstel kısmında aşağıda belirtilen birtakım düzenlemeler yapılmıştır.

$$m_1 = (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) = \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\beta}_0' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}_0' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0$$

$$m_2 = (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' \mathbf{X}' \mathbf{X} (\boldsymbol{\beta} - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$$

olmak üzere bu iki ifadenin toplamı,

$$m_1 + m_2 = \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta} - 2\boldsymbol{\beta}_0' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}_0' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}' \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}$$

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{\beta'(\Sigma_0^{-1} + X'X)}_M \beta - 2 \underbrace{(\beta_0' \Sigma_0^{-1} + \hat{\beta}_{LS}' X'X)}_{m'} \beta + \beta_0' \Sigma_0^{-1} \beta_0 + \hat{\beta}_{LS}' X'X \hat{\beta}_{LS} \\
&= (\beta - \underbrace{M^{-1}m}_{\beta^*})' M (\beta - \underbrace{M^{-1}m}_{\beta^*}) - \underbrace{m' M^{-1}m}_{\beta^*} + \beta_0' \Sigma_0^{-1} \beta_0 + \hat{\beta}_{LS}' X'X \hat{\beta}_{LS} \\
&= (\beta - \beta^*)' (\Sigma_0^{-1} + X'X) (\beta - \beta^*) - m' \beta^* + \beta_0' \Sigma_0^{-1} \beta_0 + \hat{\beta}_{LS}' X'X \hat{\beta}_{LS} \quad (3.16)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\beta^* = \underbrace{(X'X + \Sigma_0^{-1})^{-1}}_{V_1 = M^{-1}} \underbrace{(X' X \hat{\beta}_{LS} + \Sigma_0^{-1} \beta_0)}_y$ olarak tanımlanır.

Elde edilen bu toplamın, (3.15) eşitliğinde yerine yazılması durumunda β ve σ^2 'nin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\beta, \sigma^2 | y, X) &\propto (\sigma^2)^{-n-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[2(n-p)S^2 + (\beta - \beta^*)' (\Sigma_0^{-1} + X'X) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times (\beta - \beta^*) - m' \beta^* + \beta_0' \Sigma_0^{-1} \beta_0 + \hat{\beta}_{LS}' X'X \hat{\beta}_{LS} \right] \right] \\
&\propto (\sigma^2)^{-n-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[2(n-p)S^2 + (\beta - \beta^*)' V_1^{-1} (\beta - \beta^*) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (\beta_0 - \hat{\beta}_{LS})' (\Sigma_0 + (X'X)^{-1})^{-1} (\beta_0 - \hat{\beta}_{LS}) \right] \right] \quad (3.17)
\end{aligned}$$

biçiminde tanımlanabilir.

3.2.1 Varyansın bilindiğinin varsayılması

σ^2 'nin değerinin bilindiği varsayıldığında β 'nin koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\beta | \sigma^2, y, X) &\propto \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \beta^*)' V_1^{-1} (\beta - \beta^*) \right] \\
&\propto \exp \left[-\frac{1}{2} (\beta - \beta^*)' (\sigma^2 V_1)^{-1} (\beta - \beta^*) \right] \quad (3.18)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu yoğunluktan görüldüğü gibi β 'nın koşullu sonsal dağılımı,

$$\beta^* = \underbrace{(X'X + \Sigma_0^{-1})^{-1}}_{V_1 = M^{-1}} \underbrace{(X'X\hat{\beta}_{LS} + \Sigma_0^{-1}\beta_0)}_y \text{ ortalama vektörlü ve } \sigma^2 V_1 \text{ kovaryans matrisli}$$

çok değişkenli Normal dağılım ve Bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\beta}_{bayes} = \beta^* \quad (3.19)$$

eşitliği şeklinde tanımlanır.

3.2.2 Varyansın bilinmediğinin varsayılması

Eğer σ^2 'nin değeri bilinmiyorsa bu durumda β 'nın marjinal sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\beta|y, X) &\propto \int_0^\infty P(\beta, \sigma^2|y, X) d\sigma^2 \\ &\propto \int_0^\infty P(\beta|\sigma^2, y, X) P(\sigma^2|y, X) d\sigma^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

integralinin hesabı sonucu elde edilir. Bu sonucun bulunabilmesi için σ^2 'nin marjinal sonsal yoğunluğunun bilinmesi gereklidir.

σ^2 'nin marjinal sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\sigma^2|y, X) &\propto \int_{-\infty}^\infty P(\beta, \sigma^2|y, X) d\beta \\ &\propto (\sigma^2)^{-n-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left[2(n-p)S^2 + (\beta_0 - \hat{\beta}_{LS})'(\Sigma_0 + (X'X)^{-1})^{-1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (\beta_0 - \hat{\beta}_{LS}) \right] \right] \underbrace{\int_{-\infty}^\infty \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\beta - \beta^*) V_1^{-1} (\beta - \beta^*) \right] d\beta}_{(\sigma^2)^{p/2}} \end{aligned}$$

$$\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{2n-p}{2}\right)-1} \exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{(n-p)S^2}{2} + \frac{1}{2} \left[(n-p)S^2 + (\boldsymbol{\beta}_0 - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times (\boldsymbol{\Sigma}_0 + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})^{-1} (\boldsymbol{\beta}_0 - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS}) \right] \right] \right] \quad (3.21)$$

olarak bulunur. Bu yoğunluktan σ^2 'nin marjinal sonsal dağılımının $a^* = \frac{(2n-p)}{2}$ şekil

ve $b^* = \frac{2(n-p)S^2 + (\boldsymbol{\beta}_0 - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' (\boldsymbol{\Sigma}_0 + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})^{-1} (\boldsymbol{\beta}_0 - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})}{2}$ ölçek parametrelili ters

Gamma dağılımı olduğu görülmektedir. σ^2 'nin bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\sigma}_{bayes}^2 = \frac{2(n-p)S^2 + (\boldsymbol{\beta}_0 - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})' (\boldsymbol{\Sigma}_0 + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1})^{-1} (\boldsymbol{\beta}_0 - \hat{\boldsymbol{\beta}}_{LS})}{2n-p-2} \quad (3.22)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Bu durumda $\boldsymbol{\beta}$ 'nin marjinal sonsal yoğunluğu, (3.18) ve (3.21) eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\beta} | \mathbf{y}, \mathbf{X}) &\propto \int_0^\infty P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \mathbf{y}, \mathbf{X}) P(\sigma^2 | \mathbf{y}, \mathbf{X}) d\sigma^2 \\ &\propto \int_0^\infty \left(\exp \left[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*)' (\sigma^2 \mathbf{V}_1)^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*) \right] \right) \\ &\quad \times \left((\sigma^2)^{-a^*-1} \exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} b^* \right] \right) d\sigma^2 \\ &\propto \int_0^\infty (\sigma^2)^{-a^*-1} \exp \left[-\frac{1}{\sigma^2} \left[b^* + \frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*)' \mathbf{V}_1^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*) \right] \right] d\sigma^2 \\ &\propto \left[1 + \frac{1}{2a^*} \left((\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*)' \left(\frac{b^*}{a^*} \mathbf{V}_1 \right)^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}^*) \right) \right]^{-\left(a^* + \frac{p}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

şeklinde elde edilmiş olup $\boldsymbol{\beta}$ 'nin marjinal sonsal dağılımı, $v^* = 2a^*$ serbestlik dereceli,

$\boldsymbol{\beta}^* = \underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1})^{-1}}_{\mathbf{V}_1 = \mathbf{M}^{-1}} \underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}\boldsymbol{\beta}_0)}_{\mathbf{y}}$ ortalama vektörlü ve $\boldsymbol{\Sigma}^* = \left(\frac{2b^*}{2a^* - 2} \right) \mathbf{V}_1$ kovaryans

matrisli çok değişkenli t dağılımıdır. β 'nın Bayesyen tahmin edicisi ise,

$$\hat{\beta}_{bayes} = \beta^* \quad (3.24)$$

olup bu tahmin edici, Σ_0 matrisi birim matris ve $\beta_0 = \mathbf{0}_p$ olması durumunda ridge tahmin edicisine dönüşür.

3.3 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde; klasik regresyon tahmin sürecine, bilgi içermeyen ve bilgi içeren önsel dağılım bilgisi ilave edilmiş ve Normal dağılıma dayalı Bayesyen regresyon modeli parametrelerinin tahminleri, simülasyon çalışması yapılarak bulunmuştur. Çalışmanın uygulanmasında, MCMC simülasyon yöntemlerinden Gibbs örnekleme algoritması kullanılmıştır. Bu simülasyon yöntemine dayalı karmaşık istatistiksel modellerin Bayesyen analizlerinin yapılmasına olanak sağlayan program, WinBUGS yazılım programı olup bu simülasyon çalışmasında R yazılım programından WinBUGS programına geçiş yapılmasını sağlayan “R2WinBUGS” paketi kullanılmıştır (Sturtz vd. 2005).

3.3.1 MCMC simülasyon yöntemi

Bilinmeyen parametrelerin marjinal sonsal dağılımlarının elde edilebilmesi için bileşik sonsal yoğunluğun diğer parametreler cinsinden integralinin alınması gereklidir. Bu analitik işlemleri tamamlamak, yüksek dereceden integraller almayı gerektirdiğinden oldukça güçtür. Bu zorluğu aşmak için karmaşık integrasyon teknikleri yerine koşullu dağılımlardan örneklem çekerek parametre tahminlerinin elde edilmesini sağlayan simülasyon yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerin tamamı MCMC olarak bilinmektedir (Gamerman, 1997, Tanner 1993, Gilks vd. 1996, Chen vd. 2000, Liu 2001, Gelman vd. 2004, Robert ve Casella 2004). MCMC simülasyon yöntemi, hedef dağılımlara yakınsayan bir Markov zinciri yapısına dayandırılır. Markov zinciri simülasyonunda ana fikir, parametre uzayında bir rasgele yürüyüş simülasyonu ile hedef olan bileşik sonsal dağılıma yakınsamaktır. En çok kullanılan MCMC yöntemleri, Gibbs ve Metropolis-Hasting örnekleme yöntemleridir.

Gibbs Örnekleme Yöntemi

Gibbs örneklemesinde, bilinmeyen parametrelerin marjinal sonsal dağılımlarının tahminleri, bir değişken dışında diğer tüm değişkenlere sabit bir değerin atandığı tam koşullu dağılımlardan örneklem çekilerek bulunmaktadır (Gelfand ve Smith., 1990, Geman ve Geman 1984).

Tahmin edilmek istenen parametre vektörü $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ ve x rasgele bir değişken olmak üzere her bir θ_i ($i=1, 2, \dots, r$) için tam koşullu sonsal yoğunluğun $P(\theta_i | \theta_1, \dots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1}, \dots, \theta_r, x)$ olduğu varsayılınsın. Gibbs örnekleme algoritmasının oluşturulma süreci, iterasyon sayısı " t " olmak üzere aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

Adım 1: ($t=0$) alınarak iterasyona başlanır ve parametreler için uygun olabilecek başlangıç değerleri $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \theta_2^{(0)}, \dots, \theta_r^{(0)})$ olarak belirlenir.

Adım 2: Parametre değerlerinin, $\theta^{(t)}$ kullanılarak aşağıda belirtilen şekilde ardışık olarak üretilmesi sonucunda yeni $\theta^{(t+1)} = (\theta_1^{(t+1)}, \theta_2^{(t+1)}, \dots, \theta_r^{(t+1)})$ parametre vektörü elde edilir.

$$\theta_1^{(t+1)} \sim P(\theta_1 / \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_r^{(t)}, x)$$

$$\theta_2^{(t+1)} \sim P(\theta_2 / \theta_1^{(t+1)}, \theta_3^{(t)}, \dots, \theta_r^{(t)}, x)$$

.

$$\theta_r^{(t+1)} \sim P(\theta_r / \theta_1^{(t+1)}, \theta_2^{(t)}, \dots, \theta_{r-1}^{(t+1)}, x)$$

Adım 3: İterasyon sayısı t 'nin değeri $t = t + 1$ olarak artırılır ve yakınsama sağlanıncaya kadar Adım 2'ye dönülerek işlemlere devam edilir (Gelfand ve Smith. 1990).

Bu süreçte t iterasyondan sonra Markov özelliğine sahip olan $\theta^{(0)}, \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(t)}$ parametre vektörleri elde edilir ve bir Markov zinciri tamamlanmış olur. Parametrelerin istenilen değere kaç iterasyon sonrasında yakınsayacağı, tayin edilen başlangıç değerlerine ve zincir sayısına bağlı olup iterasyon sayısı arttıkça zincir, dengeye ulaşacak ve yakınsama yaklaşık olarak gerçekleşecektir. İterasyonun başlaması için gerekli olan başlangıç

değerleri, maksimum sonsal olasılık bölgesinden uzakta ise sonsal tahminleri etkileyebilir. Bu etkiden sakınmak için “burn-in” periyodu olarak adlandırılan ilk belli sayıdaki iterasyonun örnekten çıkarılması işlemi uygulanır. Böylelikle parametrelerin tahminleri, geriye kalan örneklerin sonsal özetleri hesaplanarak elde edilir (Ntzoufras 2009).

Metropolis-Hasting Örnekleme Yöntemi

Bilinmeyen parametre değerlerinin üretilmesinde kullanılan tam koşullu yoğunlukların formunun bilindik bir dağılımın yoğunluğuna benzemediği durumlarda Gibbs örnekleme yerine Metropolis-Hasting örnekleme yöntemi kullanılmaktadır (Metropolis vd. 1953, Hastings 1970). Bu yöntemde parametre değerleri, tam koşullu dağılımlardan üretilmeyip bunun yerine belli bir olasılıkla öneri dağılımından üretilmektedir.

θ , bilinmeyen bir parametre olmak üzere $P(\theta|x)$ olasılık yoğunluğuna sahip tek değişkenli bir sonsal dağılımdan bu parametreye ilişkin " T " örnek elde edilmek istenildiği varsayalım. Metropolis-Hasting örnekleme algoritmasının uygulanabilmesi için θ^0 başlangıç değerine ve $q(\theta^{t+1}|\theta^t)$ öneri dağılımına sahip olunması gerekmektedir. (Albert 2009, Lynch 2007, Russell ve Norvig 2010). $(t+1)$ iterasyon için algoritma, $P(\theta|x)$ ’den alınan t . örnek θ^t ’ye dayalı $q(\cdot|\cdot)$ ‘dan bir örnek üretir ve yeni örneği kabul etme veya reddetme kararını verir. Eğer yeni örnek kabul edilirse, algoritma yeni örnekle başlayarak kendini tekrar eder. Yeni örnek reddedilirse, algoritma mevcut olan noktada başlar ve tekrar eder. Uygulamada, gereken toplam örnek sayısına önceden karar verilmesi ve birçok iterasyonun tamamlanmasından sonra örneklemenin durdurulması gereklidir.

Metropolis-Hasting örnekleme algoritmasının adımları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Adım 1: $t=0$ olarak alınır ve $P(\theta^0|x) > 0$ olacak şekilde isteğe bağlı (keyfi) bir θ^0 başlangıç noktası seçilir.

Adım 2: $q(\cdot|\theta^t)$ öneri dağılımı kullanılarak θ_{yeni} şeklinde yeni bir örnek üretilir.

Adım 3: Üretilen yeni örneğin kabul edilme olasılığı hesaplanır.

$$P(\theta_{yeni} | \theta^t) = \min \left(\frac{P(\theta_{yeni} | x) q(\theta^t | \theta_{yeni})}{P(\theta^t | x) q(\theta_{yeni} | \theta^t)}, 1 \right)$$

Adım 4: Standart tekdüze (Uniform) dağılımından ($U(0,1)$) bir “u” değeri üretilir.

Adım 5: Eğer $u < P(\theta_{yeni} | \theta^t)$ ise $\theta^{t+1} = \theta_{yeni}$ aksi halde $\theta^{t+1} = \theta^t$ olarak alınır.

Adım 6: t ’nin değeri 1 artırılır. Eğer $t < T$ ise Adım2’ye geri dönülür aksi takdirde işlem tamamlanır (Lynch 2007).

Daha yüksek boyutlu bir θ için Metropolis-Hasting algoritması genişletilebilir. Öncelikle $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$ parametre vektörü ele alınarak bu vektörde yer alan her bir parametre için başlangıç değeri seçilir ve öneri dağılımının ($q(\cdot|\cdot)$) çok değişkenli versiyonu kullanılır. Algoritmanın diğer adımlarında hiçbir değişiklik yapılmaz (Chib ve Greenberg 1995).

Simülasyon: Bu çalışmada “ $k = 3$ ” ve “ $k = 5$ ” bağımsız değişken ile oluşturulan,

$$\text{Model 1: } y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Model 2: } y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i5} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

çoklu doğrusal regresyon modelleri ele alınmıştır. Her iki model için $\beta = [\beta_0, \dots, \beta_k]'$ parametre vektörleri gerçek değerlerinin sırasıyla $\beta = (1, 1, 1, 1)'$ ve $\beta = (1, 1, 1, 1, 1, 1)'$ olduğu varsayılmış olup hata terimleri varyansı ise $\sigma^2 = 1$ olarak alınmıştır. Örneklem genişliği $n = 30, 50$ ve 100 olarak seçilmiş olup modellerde yer alan her bir bağımsız değişkene (x_j) ilişkin gözlemler birbirinden bağımsız olarak Uniform dağılımından ($U(-5, 5)$) üretilmiştir. Simülasyon çalışması, sözü edilen modellerin hata terimleri dağılımı ve parametrelerinin önsel dağılımına yönelik aşağıda verilen varsayımlar doğrultusunda gerçekleştirilmiştir.

(i) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, Normal dağılım

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, \dots, k$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(ii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, Normal dağılım

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, k$, standart Normal dağılım-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

Çalışmada her bir model için üretilen veri setlerinin (x_j, y_i) aykırı gözlem içermesi durumu dikkate alınmış ve model parametrelerinin Bayesyen tahminlerinin söz konusu bu gözlemlerden etkilenip etkilenmediği incelenmiştir. Aykırı gözlemlerin etkisini ölçmek amacıyla değişkenlere $x-$, $y-$ ve $x-y$ yönlerinde örneklem genişliğinin %2, %5 ve %10'una denk gelecek sayıda aykırı gözlem eklenmiştir. Bu aykırı gözlemler, üretilen x ve y değişkenlerinin ilk gözlemlerine "100" sabiti eklenerek oluşturulmuştur. Her iki model için de sözü edilen tüm varsayımlar dikkate alınarak 1000 yinelenmeli ve 100 burn-in periyotlu MCMC simülasyonu "100" kez tekrarlanmış ve elde edilen Bayesyen parametre tahminlerinin ampirik ortalaması ve RMSE değerleri aşağıdaki çizelgelerde görüldüğü gibi bulunmuştur.

Çizelge 3.1.a ve **çizelge 3.1.b**'de $k = 3$ ve $k = 5$ bağımsız değişken içeren Normal hata dağılımı(N) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma (Non-informative, NI) dayalı regresyon modellerinin (N-NI) Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri yer almaktadır. Her iki çizelgeden de görüldüğü gibi elde edilen Bayesyen tahminler, veri setinde yer alan tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmiştir. Bu etkilenmenin, özellikle $x-$ ve $x-y$ yönlerindeki aykırı gözlemlere karşı daha belirgin halde gözlemlenebildiği söylenebilir. Örneklem genişliğinin artması veya aykırı gözlem sayısının değişmesi durumlarında sözü edilen etkilenme devam etmiştir.

Çizelge 3.1 a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	x-	0.812 (0.98)	0.026 (1.01)	0.001 (1.03)	-0.001 (1.02)	4.866 (3.92)
		y-	4.241 (3.46)	1.107 (1.28)	0.913 (1.32)	1.215 (1.30)	18.009 (17.02)
		x-y	4.220 (3.53)	0.050 (1.42)	-0.157 (1.53)	0.113 (1.35)	19.080 (18.11)
	3	x-	0.778 (1.03)	0.014 (1.01)	-0.005 (1.03)	0.003 (1.02)	4.872 (3.93)
		y-	10.944 (10.10)	1.248 (2.29)	0.982 (2.06)	1.197 (2.07)	30.060 (29.09)
		x-y	8.057 (7.23)	0.069 (1.76)	-0.086 (1.76)	-0.045 (1.62)	26.149 (25.19)
50	1	x-	0.808 (0.74)	0.007 (1.01)	0.022 (0.99)	0.013 (1.01)	5.074 (4.10)
		y-	2.997 (2.07)	1.073 (0.69)	1.032 (0.73)	0.966 (0.73)	14.118 (13.12)
		x-y	2.860 (2.04)	0.057 (1.13)	0.032 (1.16)	-0.058 (1.21)	15.150 (14.17)
	3	x-	0.786 (0.76)	-0.002 (1.01)	0.012 (1.01)	0.007 (1.01)	5.078 (4.10)
		y-	6.991 (6.07)	1.146 (1.29)	1.217 (1.25)	0.961 (1.29)	23.867 (22.88)
		x-y	4.968 (4.09)	-0.016 (1.34)	0.164 (1.13)	-0.162 (1.42)	20.669 (19.69)
	5	x-	0.767 (0.77)	-0.006 (1.02)	0.010 (1.01)	0.009 (1.01)	5.086 (4.11)
		y-	10.839 (9.89)	1.218 (1.65)	1.235 (1.51)	1.004 (1.53)	30.200 (29.21)
		x-y	7.185 (6.28)	0.042 (1.43)	0.119 (1.30)	-0.200 (1.60)	24.799 (23.82)
100	2	x-	0.909 (0.45)	0.021 (0.98)	0.002 (1.01)	0.019 (0.99)	5.053 (4.07)
		y-	2.964 (1.98)	1.123 (0.56)	0.999 (0.47)	0.947 (0.56)	14.053 (13.06)
		x-y	1.884 (1.01)	0.084 (0.96)	-0.031 (1.07)	0.023 (1.02)	11.219 (10.23)
	5	x-	0.918 (0.46)	0.014 (0.99)	-0.009 (1.01)	0.009 (0.99)	5.082 (4.09)
		y-	5.981 (4.99)	1.143 (0.85)	0.918 (0.74)	0.861 (0.79)	21.867 (20.87)
		x-y	3.968 (3.01)	0.103 (1.04)	-0.063 (1.14)	-0.044 (1.14)	17.949 (16.96)
	10	x-	0.906 (0.49)	0.012 (0.99)	-0.010 (1.02)	0.007 (0.99)	5.089 (4.10)
		y-	11.006 (10.02)	1.129 (1.13)	0.938 (0.97)	0.932 (1.04)	30.123 (29.12)
		x-y	6.128 (5.16)	0.159 (1.09)	-0.076 (1.23)	-0.116 (1.28)	22.480 (21.49)

Çizelge 3.1 b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	$x -$	0.823 (1.24)	0.019 (1.05)	- 0.018 (1.07)	0.046 (1.05)	- 0.022 (1.09)	- 0.003 (1.06)	6.500 (5.56)
		$y -$	4.339 (3.66)	1.082 (1.26)	1.088 (1.28)	0.993 (1.26)	1.030 (1.19)	0.872 (1.25)	18.253 (17.27)
		$x - y$	4.336 (3.83)	0.045 (1.58)	0.001 (1.61)	0.098 (1.53)	- 0.009 (1.58)	- 0.143 (1.65)	19.520 (18.57)
	3	$x -$	0.868 (1.24)	0.017 (1.05)	- 0.015 (1.08)	0.045 (1.05)	- 0.039 (1.10)	- 0.005 (1.06)	6.488 (5.54)
		$y -$	10.558 (9.87)	0.856 (2.26)	1.065 (2.03)	0.956 (2.09)	0.956 (2.03)	0.974 (2.14)	30.449 (29.49)
		$x - y$	8.061 (7.44)	- 0.117 (2.04)	0.098 (1.92)	0.055 (1.87)	0.045 (1.83)	- 0.151 (2.09)	26.396 (25.45)
50	1	$x -$	0.892 (1.05)	- 0.004 (1.04)	0.024 (1.02)	0.013 (1.02)	0.011 (1.03)	- 0.001 (1.04)	6.441 (5.48)
		$y -$	3.093 (2.19)	1.036 (0.79)	1.037 (0.77)	0.999 (0.71)	1.115 (0.75)	0.938 (0.71)	14.144 (13.15)
		$x - y$	3.044 (2.34)	- 0.006 (1.26)	0.037 (1.19)	- 0.032 (1.26)	0.098 (1.16)	- 0.076 (1.28)	15.714 (14.75)
	3	$x -$	0.892 (1.06)	- 0.009 (1.04)	0.019 (1.03)	0.009 (1.03)	0.006 (1.04)	- 0.008 (1.04)	6.467 (5.51)
		$y -$	7.060 (6.16)	1.253 (1.23)	1.062 (1.31)	0.866 (1.29)	1.143 (1.34)	0.858 (1.28)	23.939 (22.95)
		$x - y$	5.151 (4.34)	0.116 (1.30)	0.032 (1.33)	- 0.101 (1.50)	0.121 (1.39)	- 0.192 (1.58)	21.019 (20.05)
	5	$x -$	0.926 (1.07)	- 0.012 (1.04)	0.025 (1.02)	0.004 (1.03)	0.001 (1.04)	- 0.011 (1.05)	6.478 (5.52)
		$y -$	11.059 (10.15)	1.108 (1.39)	0.939 (1.52)	0.776 (1.57)	1.119 (1.69)	0.854 (1.64)	30.287 (29.29)
		$x - y$	7.397 (6.54)	0.192 (1.42)	0.057 (1.52)	- 0.235 (1.75)	0.118 (1.48)	- 0.180 (1.72)	25.053 (24.08)
100	2	$x -$	0.929 (0.61)	0.005 (1.01)	0.008 (1.01)	- 0.026 (1.04)	0.036 (0.98)	0.022 (0.99)	6.502 (5.52)
		$y -$	2.931 (1.96)	0.917 (0.52)	1.025 (0.49)	1.181 (0.54)	0.993 (0.53)	0.973 (0.53)	14.031 (13.03)
		$x - y$	1.933 (1.13)	- 0.001 (1.06)	- 0.012 (1.06)	0.056 (1.01)	- 0.007 (1.07)	0.037 (1.02)	11.969 (10.99)
	5	$x -$	0.914 (0.61)	0.001 (1.02)	0.001 (1.02)	- 0.029 (0.99)	0.028 (0.99)	0.022 (0.99)	6.515 (5.54)
		$y -$	5.919 (4.94)	0.938 (0.75)	1.048 (0.81)	1.257 (0.83)	1.047 (0.80)	0.908 (0.69)	21.869 (20.87)
		$x - y$	3.979 (3.06)	- 0.037 (1.19)	0.012 (1.15)	0.164 (0.99)	- 0.026 (1.15)	- 0.111 (1.22)	18.455 (17.47)
	10	$x -$	0.888 (0.64)	- 0.007 (1.02)	0.003 (1.01)	- 0.030 (1.04)	0.028 (0.99)	0.018 (0.99)	6.522 (5.54)
		$y -$	11.021 (10.04)	0.927 (1.11)	0.961 (1.03)	1.243 (1.09)	1.194 (1.06)	1.042 (0.98)	30.111 (29.11)
		$x - y$	6.149 (5.19)	- 0.103 (1.33)	- 0.008 (1.24)	0.163 (1.08)	0.024 (1.18)	- 0.110 (1.25)	23.035 (22.04)

Çizelge 3.2.a ve **çizelge 3.2.b**'de ise $k=3$ ve $k=5$ bağımsız değişken içeren Normal hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modellerinin (N-N) Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri yer almaktadır. Bu çizelgeler incelendiğinde, elde edilen tahminlerin tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden aşırı derecede etkilendiği görülmektedir. Aykırı gözlem sayısının ve örneklem genişliğinin artması durumlarında da bu etkilenme devam etmiştir.

Çizelge 3.2 a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j=1,2,3$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	0.808 (0.97)	0.023 (1.00)	0.001 (1.02)	0.003 (1.02)	4.848 (3.90)
		y-	4.234 (3.32)	0.422 (0.77)	0.347 (0.83)	0.467 (0.73)	18.058 (17.07)
		x-y	4.222 (3.39)	0.016 (1.06)	-0.063 (1.13)	0.046 (1.03)	18.887 (17.91)
	3	x-	0.775 (1.02)	0.112 (1.01)	-0.004 (1.02)	0.004 (1.01)	4.854 (3.90)
		y-	10.851 (9.88)	0.226 (0.89)	0.187 (0.91)	0.237 (0.86)	30.206 (29.22)
		x-y	7.933 (7.01)	0.001 (1.07)	-0.041 (1.09)	-0.019 (1.07)	25.906 (24.93)
50	1	x-	0.806 (0.74)	0.007 (1.00)	0.021 (0.99)	0.013 (0.99)	5.066 (4.09)
		y-	2.957 (2.00)	0.703 (0.55)	0.682 (0.58)	0.642 (0.59)	14.113 (13.11)
		x-y	2.844 (1.99)	0.035 (1.04)	0.017 (1.06)	-0.024 (1.09)	15.068 (14.09)
	3	x-	0.784 (0.76)	-0.002 (1.01)	0.012 (1.00)	0.008 (1.00)	5.071 (4.10)
		y-	6.922 (5.95)	0.467 (0.75)	0.497 (0.71)	0.404 (0.78)	23.915 (22.92)
		x-y	4.948 (4.02)	-0.013 (1.09)	0.066 (1.00)	-0.067 (1.13)	20.542 (19.56)
	5	x-	0.765 (0.77)	-0.006 (1.02)	0.010 (1.00)	0.009 (1.00)	5.079 (4.11)
		y-	10.864 (9.88)	0.366 (0.81)	0.382 (0.77)	0.309 (0.83)	30.259 (29.26)
		x-y	7.147 (6.19)	-0.003 (1.08)	0.025 (1.04)	-0.064 (1.13)	24.659 (23.68)

Çizelge 3.2 a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j=1,2,3$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	0.909 (0.45)	0.021 (0.98)	0.002 (1.00)	0.019 (0.98)	5.051 (4.06)
		y-	2.969 (1.98)	0.901 (0.45)	0.798 (0.42)	0.758 (0.50)	14.051 (13.05)
		x-y	1.887 (1.00)	0.075 (0.95)	-0.024 (1.05)	0.023 (1.01)	11.204 (10.21)
	5	x-	0.918 (0.46)	0.014 (0.99)	-0.009 (1.01)	0.009 (0.99)	5.080 (4.09)
		y-	5.982 (4.99)	0.721 (0.59)	0.569 (0.63)	0.543 (0.67)	21.856 (20.86)
		x-y	3.973 (3.01)	0.072 (0.99)	-0.045 (1.09)	-0.030 (1.08)	17.907 (16.92)
	10	x-	0.906 (0.48)	0.012 (0.99)	-0.010 (1.02)	0.007 (0.99)	5.088 (4.10)
		y-	10.988 (9.99)	0.534 (0.70)	0.433 (0.73)	0.447 (0.74)	30.105 (29.11)
		x-y	6.131 (5.15)	0.093 (1.00)	-0.055 (1.12)	-0.070 (1.13)	22.424 (21.43)

Çizelge 3.2 b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j=1,2,3,4,5$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	0.820 (1.19)	0.017 (1.02)	-0.009 (1.04)	0.042 (1.02)	-0.022 (1.06)	-0.007 (1.05)	6.419 (5.47)
		y-	4.229 (3.34)	0.426 (0.76)	0.423 (0.75)	0.433 (0.73)	0.366 (0.78)	0.333 (0.82)	18.191 (17.20)
		x-y	4.224 (3.45)	-0.001 (1.09)	0.020 (1.08)	0.052 (1.03)	-0.023 (1.11)	-0.058 (1.15)	19.159 (18.19)
	3	x-	0.861 (1.19)	0.014 (1.03)	-0.007 (1.05)	0.041 (1.02)	-0.035 (1.08)	-0.009 (1.05)	6.408 (5.46)
		y-	10.705 (9.75)	0.179 (0.92)	0.230 (0.86)	0.209 (0.87)	0.158 (0.92)	0.179 (0.93)	30.322 (29.34)
		x-y	7.839 (6.94)	-0.046 (1.12)	0.044 (1.04)	0.015 (1.05)	-0.017 (1.08)	-0.053 (1.13)	26.002 (25.03)

Çizelge 3.2 b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j=1,2,3,4,5$) dayalı regresyon modeli Bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
50	1	x-	0.895 (1.04)	-0.003 (1.03)	0.022 (1.01)	0.013 (1.01)	0.011 (1.02)	-0.001 (1.03)	6.413 (5.46)
		y-	3.062 (2.13)	0.663 (0.60)	0.669 (0.59)	0.645 (0.58)	0.713 (0.55)	0.602 (0.59)	14.159 (13.16)
		x-y	3.023 (2.27)	-0.001 (1.10)	0.019 (1.07)	-0.007 (1.09)	0.055 (1.04)	-0.044 (1.12)	15.549 (14.58)
	3	x-	0.892 (1.05)	-0.007 (1.03)	0.017 (1.02)	0.009 (1.02)	0.006 (1.03)	-0.007 (1.04)	6.439 (5.48)
		y-	7.070 (6.11)	0.495 (0.68)	0.429 (0.77)	0.359 (0.79)	0.439 (0.75)	0.337 (0.83)	23.992 (22.99)
		x-y	5.149 (4.28)	0.056 (1.04)	0.005 (1.08)	-0.026 (1.12)	0.036 (1.08)	-0.093 (1.19)	20.808 (19.83)
	5	x-	0.925 (1.07)	-0.010 (1.04)	0.021 (1.01)	0.004 (1.02)	0.002 (1.03)	-0.010 (1.04)	6.450 (5.49)
		y-	11.097 (10.13)	0.322 (0.79)	0.292 (0.84)	0.257 (0.86)	0.313 (0.84)	0.247 (0.89)	30.259 (29.26)
		x-y	7.400 (6.49)	0.064 (1.03)	0.007 (1.08)	-0.065 (1.15)	0.022 (1.07)	-0.079 (1.17)	24.830 (23.85)
100	2	x-	0.929 (0.61)	0.005 (1.01)	0.009 (1.01)	-0.024 (1.04)	0.034 (0.98)	0.020 (0.99)	6.495 (5.52)
		y-	2.953 (1.97)	0.724 (0.49)	0.818 (0.42)	0.936 (0.41)	0.798 (0.48)	0.782 (0.47)	14.040 (13.04)
		x-y	1.936 (1.12)	-0.001 (1.04)	-0.006 (1.04)	0.048 (0.99)	-0.002 (1.05)	0.034 (1.00)	11.935 (10.96)
	5	x-	0.914 (0.61)	0.001 (1.01)	0.001 (1.01)	-0.028 (1.04)	0.027 (0.99)	0.020 (0.99)	6.508 (5.53)
		y-	5.971 (4.98)	0.567 (0.64)	0.646 (0.61)	0.780 (0.53)	0.662 (0.60)	0.569 (0.60)	21.892 (20.89)
		x-y	3.999 (3.06)	-0.026 (1.10)	0.007 (1.07)	0.118 (0.96)	-0.019 (1.08)	-0.080 (1.13)	18.372 (17.39)
	10	x-	0.887 (0.64)	-0.006 (1.02)	0.003 (1.01)	-0.029 (1.04)	0.027 (0.99)	0.017 (0.99)	6.516 (5.54)
		y-	11.049 (10.06)	0.419 (0.78)	0.444 (0.73)	0.578 (0.65)	0.569 (0.65)	0.486 (0.68)	30.152 (29.15)
		x-y	6.179 (5.22)	-0.066 (1.15)	-0.012 (1.09)	0.102 (0.98)	0.016 (1.06)	-0.074 (1.13)	22.912 (21.93)

Özet olarak, N-NI ve N-N modellerine yönelik elde edilen Bayesyen parametre tahminlerinin veri setinde aykırı gözlem olması durumunda bu gözlemlerden oldukça etkilendiği görülmüştür. Diğer bir deyişle, aykırı gözlemlili bir veri seti modellenmek istenildiğinde sözü edilen Bayesyen regresyon modelleri ile modellenmesinin uygun olmayacağı söylenebilir. Dolayısıyla robust parametre tahmin yöntemlerinin Bayesyen yöntemlerle birleştirilmesinin gerekli olduğu görülmüştür.

4. DOĞRUSAL REGRESYON MODELLERİNDE ROBUST BAYESYEN PARAMETRE TAHMİNİ

Bayesyen regresyon modellemesinde elde edilen parametre tahminleri, tıpkı klasik doğrusal regresyon analizinde olduğu gibi model varsayımlarındaki sapmalardan ve aykırı gözlemlerin varlığından oldukça etkilenmektedir. Böyle durumlarda veri setine uygun olan modellemenin yapılması mümkün değildir. Bu nedenle, söz konusu problemlerden mümkün olduğunca etkilenmeyen parametre tahminlerinin elde edilmesi amaçlanır. Bu tahminleri elde etmenin bir yolu; sadece örnekleme dağılımının veya hem örnekleme hem de önsel dağılımın kalın kuyruklu bir dağılıma sahip olduğunun varsayıldığı robust Bayesyen regresyon modellerini kullanmaktır.

Bu bölümde, sözü edilen bu modeller üzerinde durularak tez çalışmasının literatüre olan katkısından bahsedilmiştir. Öncelikle kalın kuyruklu hata dağılımına (t, Laplace ve RN) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri oluşturulmuş ve model parametrelerinin robust Bayesyen tahmin edicileri elde edilmiştir. Buna ek olarak, kalın kuyruklu (t, Laplace ve RN) veya Normal hata dağılımına ve bilgi içeren önsel dağılıma (Normal, t, Laplace ve RN) dayalı regresyon modelleri incelenmiş ve bu modellerin parametrelerine ilişkin Bayesyen ve Robust bayesyen tahmin ediciler bulunmuştur.

Söz konusu tüm tahmin edicilerin bulunmasında model parametrelerinin tam koşullu sonsal dağılımları kullanılmıştır. Bu tür dağılımlar, Bayesyen analizlerde karmaşık integrasyon teknikleri yerine kullanılmakta olan genellikle Normal, Gamma veya ters ki-kare gibi bilinen dağılımlardır. Parametrelerin tahmin edicileri böyle dağılımlar kullanılarak daha kolay elde edilebilir. Tam koşullu sonsal dağılımların belirlenemediği bazı durumlarda ise ek olarak iteratif çözüm yolu kullanılmıştır. Yapılan tüm işlemlerde kolaylık sağlaması açısından t ve Laplace dağılımlarının Bölüm 2’de açıklanan Normal dağılımın ölçek karması şeklinde gösterimleri kullanılmıştır. Bölüm sonunda simülasyon çalışması yapılarak aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahmin edicilerinin performansları incelenmiştir. Bu simülasyon sonucunda RN hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modeli kullanılarak en iyi parametre tahminlerinin elde edilebileceği ortaya çıkmıştır.

4.1 Bilgi İçermeyen Önsel Dağılım

Bu alt bölümde, kalın kuyruklu hata dağılımı (t, Laplace ve RN) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modeli parametrelerinin robust Bayesyen tahmin edicileri elde edilmiştir.

4.1.1 t hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini

(1.2) regresyon modelindeki hata terimlerinin Normal ve ters Gamma dağılımının karması olarak da ifade edilebilen t dağılımına sahip olduğu varsayalım. ($\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} t(0, \sigma^2, \nu)$)

Bu durumda olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
 P(y|x, \beta, \sigma^2, \lambda, \nu) &= \prod_{i=1}^n f_N(y_i | x_i' \beta, \sigma^2 \lambda_i) f_{IGa}(\lambda_i | \nu/2, \nu/2) \\
 &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}\sqrt{\lambda_i}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2\lambda_i} (y_i - x_i' \beta)^2\right) \right) \\
 &\quad \times \left(\frac{\left(\frac{\nu}{2}\right)^{\nu/2}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \lambda_i^{-\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{\nu}{2\lambda_i}\right) \right) \\
 &\propto \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^{\left(\frac{-\nu-3}{2}\right)} \right) \sigma^{-n} \exp\left(\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \left[\frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2 \lambda_i} + \frac{\nu}{\lambda_i} \right] \right) \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır. Bu yoğunluğun (3.5) eşitliğinde yer alan bilgi içermeyen bileşik önsel yoğunluğu ile birleştirilmesi sonucunda model parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
 P(\beta, \sigma^2, \lambda | y, x, \nu) &\propto P(\beta, \sigma^2) P(y|x, \beta, \sigma^2, \lambda, \nu) \\
 &\propto (\sigma^2)^{-1} \left(\left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^{\left(\frac{-\nu-3}{2}\right)} \right) \sigma^{-n} \exp\left(\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \left[\frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2 \lambda_i} + \frac{\nu}{\lambda_i} \right] \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\propto \sigma^{-(n+2)} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{-v-3}{2}} \right) \exp \left(\sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \left(\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 \lambda_i} + \frac{v}{\lambda_i} \right) \right) \quad (4.2)$$

olarak elde edilir.

Bilinmeyen parametrelerin marjinal sonsal dağılımlarının bulunabilmesi için bu bileşik sonsal yoğunluğun diğer parametreler cinsinden integralinin alınması gereklidir. Bu tür analitik işlemleri gerçekleştirmek parametre sayısının da artması durumunda yüksek dereceden integraller hesaplamayı gerektirdiğinden oldukça güçtür. Böyle durumlarla karşılaşıldığında karmaşık integrasyon tekniklerini kullanmak yerine parametrelerin tam koşullu sonsal dağılımlarının kullanımı tercih edilebilir. Her parametre için tam koşullu sonsal yoğunluklar, parametreye göre sabit olan tüm terimlerin görmezden gelinmesi ile elde edilmektedir. Bu durumda $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \lambda, y, x, v) &\propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\lambda_i} \right) \\ &\propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} ((y - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_\lambda^{-1} (y - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{D}_\lambda$, köşegen elemanları λ_i olan köşegen bir matris olup tanımlanan bu yoğunlukta yer alan parantezin içi aşağıdaki gibi düzenlenir.

$$\begin{aligned} (y - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_\lambda^{-1} (y - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \\ &= \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} - 2\mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \underbrace{\boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}}_A \\ &= \boldsymbol{\beta}' \mathbf{A} \boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} \\ &= (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y})' \mathbf{A} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y}) \\ &\quad + \mathbf{y}' (\mathbf{D}_\lambda^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1})) \mathbf{y} \end{aligned}$$

Düzenlenen bu ifade, (4.3) eşitliğinde yerine yazıldığında β 'nın tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\beta | \sigma^2, \lambda, y, X) \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\beta - A^{-1}X'D_{\lambda}^{-1}y)' A (\beta - A^{-1}X'D_{\lambda}^{-1}y) + y' (D_{\lambda}^{-1}(I - XA^{-1}X'D_{\lambda}^{-1})) y \right] \right) \quad (4.4)$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu yoğunluktan görüldüğü gibi β 'nın tam koşullu sonsal dağılımı, $A^{-1}X'D_{\lambda}^{-1}y$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2 A^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılım olup β 'nın robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{rbayes} = (X'D_{\lambda}^{-1}X)^{-1} X'D_{\lambda}^{-1}y \quad (4.5)$$

eşitliği şeklinde bulunur.

σ^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu ise,

$$P(\sigma^2 | \beta, \lambda, y, x) \propto \sigma^{-(n+2)} \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2 \lambda_i} \right) \propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} [(y - X\beta)' D_{\lambda}^{-1} (y - X\beta)] \right) \quad (4.6)$$

olup σ^2 'nin tam koşullu sonsal dağılımının, n serbestlik dereceli ve $\left(\frac{(y - X\beta)' D_{\lambda}^{-1} (y - X\beta)}{n} \right)$ ölçek parametrelili, ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımı olduğu belirlenmiştir. σ^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \frac{(y - X\hat{\beta}_{rbayes})' D_{\lambda}^{-1} (y - X\hat{\beta}_{rbayes})}{n - 2} \quad (4.7)$$

eşitliği şeklinde elde edilir.

$i = 1, 2, \dots, n$ için λ_i 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\lambda_i | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, y_i, \mathbf{x}_i, \nu) \propto \left(\lambda_i^{\frac{\nu-3}{2}} \right) \exp \left(-\frac{1}{\lambda_i} \left(\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{2\sigma^2} + \frac{\nu}{2} \right) \right) \quad (4.8)$$

olup λ_i 'nin tam koşullu sonsal dağılımı, $\frac{(\nu+1)}{2}$ şekil ve $\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 + \nu\sigma^2}{2\sigma^2}$ ölçek parametrelili ters Gamma dağılımı olup λ_i 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda}_{i_{rbayes}} = \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})^2 + \nu \hat{\sigma}_{rbayes}^2}{2 \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \left(\frac{\nu-1}{2} \right)} \quad (4.9)$$

olarak elde edilir.

4.1.2 Laplace hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini

(1.2) regresyon modelinde yer alan hata terimlerinin Normal ve Üstel dağılımın karması olarak da ifade edilebilen Laplace dağılımına sahip olduğu varsayılınsı $(\varepsilon_i \sim^{iid} L(0, \sigma))$. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} P(y | \mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h) &= \prod_{i=1}^n f_N(y_i | \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, h_i) f_{Üstel}(h_i | (1/2\sigma^2)) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{h_i}} \exp \left[-\frac{1}{2h_i} (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 \right] \right) \left(\frac{1}{2\sigma^2} \exp \left[-\frac{h_i}{2\sigma^2} \right] \right) \\ &\propto (\sigma^2)^{-n} \left(\prod_{i=1}^n h_i^{-1/2} \right) \left(\exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(h_i + \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 \sigma^2}{h_i} \right) \right] \right) \quad (4.10) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun (3.5) eşitliğinde yer alan bilgi içermeyen bileşik önsel yoğunluk ile birleştirilmesi sonucunda $\boldsymbol{\beta}$ ve σ^2 'nin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h | y, x) &\propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h) \\
&\propto (\sigma^2)^{-1} (\sigma^2)^{-n} \left(\prod_{i=1}^n h_i^{-1/2} \right) \left(\exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(h_i + \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 \sigma^2}{h_i} \right) \right] \right) \\
&\propto (\sigma^2)^{-n-1} \left(\prod_{i=1}^n h_i^{-1/2} \right) \left(\exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 \sigma^2}{h_i} + h_i \right) \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu yoğunluk kullanılarak $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, y, x, h) &\propto \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} \right) \\
&\propto \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\mathbf{D}_h$, köşegen elemanları h_i olan köşegen bir matris olup parantez içindeki ifadenin,

$$\begin{aligned}
(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) &= \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \\
&= \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \underbrace{\boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{A}^*} \\
&= \boldsymbol{\beta}' \mathbf{A}^* \boldsymbol{\beta} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} \\
&= (\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y})' \mathbf{A}^* (\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y}) \\
&\quad + \mathbf{y}' (\mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1})) \mathbf{y}
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenmesi sonucunda bu yoğunluk, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, y, \mathbf{X}, h) &\propto \exp \left(-\frac{1}{2} \left[(\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y})' \mathbf{A}^* (\boldsymbol{\beta} - (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{y}' (\mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X} (\mathbf{A}^*)^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1})) \mathbf{y} \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Elde edilen bu yoğunluktan görüldüğü gibi, β 'nin tam koşullu sonsal dağılımı, $(A^*)^{-1} X' D_h^{-1} y$ ortalama vektörlü ve $(A^*)^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılım olup robust Bayesyen tahmin edicisi ise,

$$\hat{\beta}_{rbayes} = (X' D_h^{-1} X)^{-1} X' D_h^{-1} y \quad (4.14)$$

olarak bulunur.

σ^2 'nin tam koşullu sonsal dağılımı ise,

$$P(\sigma^2 | \beta, y, x, h) \propto (\sigma^2)^{-n-1} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n h_i\right) \quad (4.15)$$

yoğunluğu ile $(2n)$ serbestlik dereceli ve $\frac{\sum_{i=1}^n h_i}{2n}$ ölçek parametrelili, ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımıdır. Bu bilgilere dayanarak σ^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \hat{h}_{i,rbayes}}{2n-2} \quad (4.16)$$

olarak elde edilir.

$i = 1, 2, \dots, n$ için h_i 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(h_i | \beta, \sigma^2, y_i, x_i) &\propto h_i^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[h_i + \frac{(y_i - x_i' \beta)^2 \sigma^2}{h_i}\right]\right) \\ &\propto h_i^{\frac{1}{2}-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2} h_i + \frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{h_i}\right]\right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

olup bu yoğunluk $p^* = \frac{1}{2}$, $a^{**} = \sigma^{-2}$ ve $b^{**} = (y_i - x_i' \beta)^2$ parametrelili genelleştirilmiş ters Normal dağılımı yoğunluğuna benzemektedir.

h_i 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi ise,

$$\hat{h}_{i_{rbayes}} = \frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right| \hat{\sigma}_{rbayes} \kappa_{3/2} \left(\frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}} \right)}{\kappa_{1/2} \left(\frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}} \right)} \quad (4.18)$$

eşitliği şeklinde bulunur. Burada $\kappa_p(\cdot)$, ikinci tür uyarlanmış bessel fonksiyonudur (Abramowitz ve Stegun 1972).

4.1.3 RN hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini

(1.2) regresyon modelindeki hata terimlerinin RN dağıldığı ($\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} \text{RN}(0, \sigma, a, b)$) varsayalım. Bu durumda olabilirlik fonksiyonu,

$$\begin{aligned} P(y|x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b) &= \prod_{i=1}^n f(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b) \\ &\propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left[- \sum_{i=1}^n \eta_{ab}(d_i) \right] \\ &\propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left(- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma \left(\frac{2}{b}, a \frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta} \right|^b}{\sigma^b} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

olup bu fonksiyonun, $P(\boldsymbol{\beta}, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma}$ bilgi içermeyen bileşik önsel yoğunluğu ile birleştirilmesi sonucunda parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, a, b) \propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma) P(y|x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b)$$

$$\propto \sigma^{-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left(- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma \left(\frac{2}{b}, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right) \right) \quad (4.20)$$

olarak bulunur. Bu yoğunluk, $\gamma \left(\frac{2}{b}, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right)$ fonksiyonunun seri açılımı kullanılarak aşağıdaki gibi düzenlenmiştir.

"n" tamsayı olmak üzere, $\gamma(n, x)$ 'in seri açılımı,

$$\gamma(n, x) = (n-1)! \left(1 - \exp(-x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) \quad (\text{Arfken 1985}) \quad (4.21)$$

kullanılarak $\gamma \left(\frac{2}{b}, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right)$ fonksiyonu,

$$\gamma \left(\frac{2}{b}, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right) = \left(\frac{2}{b} - 1 \right)! \left[1 - \left(\exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{\left(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right)^k}{k!} \right) \right] \quad (4.22)$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, a, b) \propto \sigma^{-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left(- \left(ba^{2/b} \right)^{-1} \left(\frac{2}{b} - 1 \right)! \right. \\ \left. \times \left[n - \sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{\left(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right)^k}{k!} \right] \right) \quad (4.23)$$

biçiminde elde edilir.

Bu yoğunluk kullanılarak β ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları,

$$P(\beta|\sigma, y, x, a, b) \propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp(- (ba^{2/b})^{-1} (\frac{2}{b}-1)!) \\ \times [n - \sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta|^b}{\sigma^b} \right) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{\left(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta|^b}{\sigma^b} \right)^k}{k!}] \quad (4.24)$$

$$P(\sigma|\beta, y, x, a, b) \propto \sigma^{-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp(- (ba^{2/b})^{-1} (\frac{2}{b}-1)!) \\ \times [n - \sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta|^b}{\sigma^b} \right) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{\left(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta|^b}{\sigma^b} \right)^k}{k!}] \quad (4.25)$$

olup RN dağılımı robust parametrelerinden biri olan " b " parametresinin "1" ve "2" değerli özel durumları, bu yoğunluklar üzerinde aşağıdaki gibi uygulanmıştır.

1.durum : $b=1$

Parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\beta, \sigma|y, x, a) \propto \sigma^{-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left(- (a^{-2}) \left[n - \sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta|}{\sigma} \right) \right] \right) \\ \times \left(1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \beta|}{\sigma} \right) \Bigg]$$

olarak elde edilmiş olup β ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta}|\sigma, y, x, a) &\propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left((a^{-2}) \left[\sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma} \right) \left(1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma} \right) \right] \right) \\
P(\sigma|\boldsymbol{\beta}, y, x, a) &\propto \sigma^{-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left((a^{-2}) \left[\sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left(1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma} \right) \right] \right)
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

şeklinde bulunmuştur.

2.durum : $b = 2$

Parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, a) \propto \sigma^{-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left(-(2a^2)^{-1} \left[n - \sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2}{\sigma^2} \right) \right] \right)$$

olup $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları ise

$$P(\boldsymbol{\beta}|\sigma, y, x, a) \propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left((2a^2)^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2}{\sigma^2} \right) \right] \right) \tag{4.27}$$

$$P(\sigma|\boldsymbol{\beta}, y, x, a) \propto \sigma^{-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left((2a^2)^{-1} \left[\sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2}{\sigma^2} \right) \right] \right) \tag{4.28}$$

olarak tanımlanır.

Burada, her iki özel durum da dahil olmak üzere elde edilen tam koşullu sonsal yoğunlukların belli bir dağılımın yoğunluğuna benzemediği bu nedenle de tahmin edicinin direkt elde edilemediği görülmektedir. Ancak aşağıda verilen iteratif çözüm yolu kullanılarak tahmin edicilerin ağırlıklandırılmış formda yazılması mümkündür.

İteratif çözüm

RN hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modeli parametrelerinin log-sonsal yoğunluğu; (4.20) eşitliği kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\ln P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, a, b) \propto (-\ln \sigma) - \ln \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) - \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma \left(\frac{2}{b}, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right)$$

Elde edilen bu yoğunluğun $\boldsymbol{\beta}$ 'ya göre kısmi türevi,

$$\left. \frac{\partial \ln P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, a, b)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0$$

$$- \sum_{i=1}^n \left(\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right) / A_i - (ba^{2/b})^{-1} \sum_{i=1}^n a^{2/b} b (\hat{\sigma}_{rbayes}^{-2}) (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) (-\mathbf{x}_i') \times \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b} \right) = 0 \quad (4.29)$$

olmak üzere burada $\hat{w}_{i(RN_{bayes})} = \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b} \right)$ yerine yazıldığında bu eşitlik,

$$\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i = (\hat{\sigma}_{rbayes}^{-2}) \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})$$

$$(\hat{\sigma}_{rbayes}^2) \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i = \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i y_i - \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{rbayes}$$

olarak bulunur. Bu durumda β 'nın robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{rbayes} = \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i y_i - (\hat{\sigma}_{rbayes}^2) \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i \right)$$

eşitliği şeklinde elde edilir. Bu eşitlik, matris formatında,

$$\hat{\beta}_{rbayes} = (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} \left(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y} - (\hat{\sigma}_{rbayes}^2) \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i \right) \quad (4.30)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada $(\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i$ ifadesi limit durumunda sıfıra yaklaşmaktadır (Ramsay ve Novick 1980). Bu durumda $\hat{\beta}_{rbayes} = (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y})$ olarak elde edilir. β 'nın bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğunun varsayılması durumunda elde edilen bu tahmin edicinin, (2.57) eşitliğindeki robust tahmin edici ($\hat{\beta}_{RN}$) ile aynı olduğu görülmektedir. $\mathbf{W}$ matrisi ise $\hat{w}_{i(RN_{bayes})}$ ağırlık değerleri tahminini içinde barındıran köşegen bir matristir.

Benzer şekilde σ^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi, log-sonsalın σ 'ya göre kısmi türevi alınarak aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \ln P(\beta, \sigma | y, x, a, b)}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0 \\ & - \frac{1}{\hat{\sigma}_{rbayes}} - \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i - (b a^{2/b})^{-1} \\ & \times \sum_{i=1}^n a^{2/b} (\hat{\sigma}_{rbayes}^{-3}) (-b) \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b} \right) (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{rbayes})^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right)^2 = \left(\hat{\sigma}_{rbayes}^2 \right) \left(\hat{\sigma}_{rbayes} \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i \right) + 1 \right)$$

$$\hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \left(\hat{\sigma}_{rbayes} \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i \right) + 1 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \left(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right)^2$$
(4.31)

$\boldsymbol{\beta}$ 'nın bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğunun varsayılması durumunda elde edilen bu tahmin edicinin (2.60) eşitliğinde verilen klasik tahmin edici ($\hat{\sigma}_{RN}^2$) ile benzer olduğu görülmektedir. Ayrıca, (4.30) ve (4.31) eşitliklerinin $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}$ ve $\hat{\sigma}_{rbayes}^2$ 'i içermesi sebebiyle açık çözümleri olmayıp tahmin edicilerin elde edilmesinde nümerik yöntemlerin kullanılması gerektiği söylenebilir.

4.2 Bilgi İçeren Önsel Dağılım

Bu bölümde, kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma, Normal hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma son olarak da hem hata dağılımı hem de önsel dağılımı kalın kuyruklu dağılıma dayalı olan regresyon modelleri oluşturulmuş ve her bir modele ilişkin parametrelerin bayesyen ve robust bayesyen tahmin edicileri elde edilmiştir. Modellerin oluşturulmasında $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörü elemanlarının birbirleriyle ilişkisiz olduğu varsayılmış ve σ^2 'nin bilinmesi koşulu altında $\boldsymbol{\beta}$ 'nın önsel dağılımının kovaryans matrisi, $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 \mathbf{I}_p$ olarak kullanılmıştır. Burada $\mathbf{I}_p$, p boyutlu bir birim matristir.

4.2.1 Kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini

Bu alt bölümde (1.2) modelindeki hata terimleri dağılımının t, Laplace veya RN dağılımlarından herhangi birine ve $\boldsymbol{\beta}$ 'nın önselinin ise Normal dağılıma sahip olduğunun varsayılması durumunda elde edilen regresyon modelleri ele alınmıştır.

Hata terimlerinin t ve β 'nın önselinin Normal dağıldığı durum:

Hata terimlerinin t dağılımına, β parametre vektörü önselinin p boyutlu Normal dağılıma ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayalım. Bu varsayımlar doğrultusunda oluşturulan t hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modelinin hiyerarşik gösterimi;

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &\stackrel{iid}{\sim} t(0, \sigma^2, \nu) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu \stackrel{iid}{\sim} t(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu), i = 1, 2, \dots, n \right) \\ &\Downarrow \\ y_i | \mathbf{x}_i', \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \lambda_i &\sim N(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \lambda_i) \\ \lambda_i | \nu &\sim IGa\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \\ \boldsymbol{\beta} | \sigma^2 &\sim N_p(0_p, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 I_p) \\ \sigma^2 &\sim P(\sigma^2) \propto \sigma^{-2} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir. Model parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \lambda | y, x) &\propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu, \lambda) \\ &\propto \left(P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2) P(\sigma^2) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu, \lambda) \\ &\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2) \right) P(\sigma^2) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu, \lambda) \\ &\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2) \right) (\sigma^{-2}) \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^n f_N(y_i | \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \lambda_i) f_{IGa}(\lambda_i | \nu/2, \nu/2) \right) \\ &\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta_j^2}{\sigma^2}\right) \right) (\sigma^{-2}) \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{\lambda_i}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 \lambda_i}\right) \right] \left[\lambda_i^{-\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{\nu/2}{\lambda_i}\right) \right] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \sigma^{-n-p-2} \times \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i^{\frac{-v-3}{2}} \right) \times \left(\exp \left(-\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 \lambda_i} + \frac{v}{\lambda_i} \right] \right) \right) \\
& \times \left(\prod_{j=1}^p \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{\beta_j^2}{\sigma^2} \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

olarak bulunur. Bu yoğunluk kullanılarak $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, y, \mathbf{X}, \lambda) & \propto \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 \lambda_i} \right] \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\sigma^2} \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right] \right)
\end{aligned}$$

olup burada $\mathbf{D}_\lambda$, elemanları λ_i olan köşegen bir matris olmak üzere $\boldsymbol{\beta}$ 'yı içeren parantezin içi;

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right] &= \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_\lambda^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) \right] + [\boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta}] \\
&= \left[\mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta} \right] \\
&= \left[\mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta} \right] \\
&= \left[\boldsymbol{\beta}' \underbrace{(\mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} + \mathbf{I})}_C \boldsymbol{\beta} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} \right]
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlendiğinde bu yoğunluk,

$$P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, y, \mathbf{X}, \lambda) \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\boldsymbol{\beta}' \mathbf{C} \boldsymbol{\beta} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} \right] \right)$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{D}_\lambda^{-1}\mathbf{y})'\mathbf{C}(\boldsymbol{\beta}-\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{D}_\lambda^{-1}\mathbf{y}) + \mathbf{y}'(\mathbf{D}_\lambda^{-1}(\mathbf{I}-\mathbf{X}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{D}_\lambda^{-1}))\mathbf{y}\right]\right) \quad (4.33)$$

biçiminde tanımlanır. Buradan görüldüğü gibi $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal dağılımı, $\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{D}_\lambda^{-1}\mathbf{y}$ ortalamalı ve $\sigma^2\mathbf{C}^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılım olup robust Bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} = (\mathbf{X}'\mathbf{D}_\lambda^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{D}_\lambda^{-1}\mathbf{y} \quad (4.34)$$

olarak elde edilir. σ^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\sigma^2 | \boldsymbol{\beta}, y, x, \lambda) &\propto \sigma^{-n-p-2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\lambda_i}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2\right) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n+p}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{D}_\lambda^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}\right]\right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

olup bu yoğunluğun $(n+p)$ serbestlik dereceli ve $\left(\frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'\mathbf{D}_\lambda^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}}{n+p}\right)$ ölçek parametrelili ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımının yoğunluğuna benzediği görülmektedir. σ^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi ise aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \frac{(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})'\mathbf{D}_\lambda^{-1}(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) + (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}}{n+p-2} \quad (4.36)$$

$i=1,2,...,n$ için λ_i 'nin tam koşullu sonsal dağılımı,

$$P(\lambda_i | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, y_i, \mathbf{x}_i, v) \propto (\lambda_i)^{\frac{-v-3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 \lambda_i} + \frac{v}{\lambda_i}\right)\right)$$

$$\propto (\lambda_i)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)-1} \exp \left(- \frac{\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 + v\sigma^2}{2\sigma^2}}{\lambda_i} \right) \quad (4.37)$$

yoğunluğu ile $\frac{(v+1)}{2}$ şekil ve $\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 + v\sigma^2}{2\sigma^2}$ ölçek parametrelili ters Gamma dağılımı olup λ_i 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda}_{i_{rbayes}} = \frac{v\hat{\sigma}_{rbayes}^2 + (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})^2}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2 (v-1)} \quad (4.38)$$

olarak elde edilir.

Hata terimlerinin Laplace ve $\boldsymbol{\beta}$ 'nin önselinin Normal dağıldığı durum:

Hata terimlerinin Laplace dağılımına, $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörü önselinin p boyutlu Normal dağılıma ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayalım. Bu varsayımlar kullanılarak oluşturulan Laplace hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modelinin hiyerarşik gösterimi;

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} L(0, \sigma) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} L(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma), \quad i = 1, 2, \dots, n \right)$$

$\Downarrow$

$$y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h_i \sim N(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 h_i)$$

$$h_i | \sigma^2 \sim \text{Üstel} \left(\frac{1}{2\sigma^2} \right)$$

$$\boldsymbol{\beta} | \sigma^2 \sim N_p(0_p, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 I_p)$$

$$\sigma^2 \sim P(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$$

olup model parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h | y, x) &\propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h) \\
&\propto \left(P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2) P(\sigma^2) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h) \\
&\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2) P(\sigma^2) \right) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h) \\
&\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2) \right) (\sigma^{-2}) \right) \left(\prod_{i=1}^n f_N(y_i | \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 h_i) f_{\ddot{U}_{stel}}(h_i | (1/2\sigma^2)) \right) \\
&\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\beta_j^2}{\sigma^2}\right) \right) (\sigma^{-2}) \right) \\
&\quad \times \left(\prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{h_i}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 h_i} (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2\right) \right] \left[\frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{h_i}{2\sigma^2}\right) \right] \right) \\
&\propto \sigma^{-3n-p-2} \left(\prod_{i=1}^n h_i^{-1/2} \right) \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} + h_i \right) \right) \right] \\
&\quad \times \left(\exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.39}$$

şeklinde tanımlanır. Burada Burada $\mathbf{D}_h$, elemanları h_i olan bir köşegen matris olmak üzere $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal dağılımı,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, y, x, h) &\propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} + \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right] \right) \\
&\propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta} \right] \right) \\
&\propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X} \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta} \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\underbrace{\boldsymbol{\beta}'(X'D_h^{-1}X + I)}_E \boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{y}'D_h^{-1}X\boldsymbol{\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{y}'D_h^{-1}\mathbf{y} \right] \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\boldsymbol{\beta} - E^{-1}X'D_h^{-1}\mathbf{y})' E (\boldsymbol{\beta} - E^{-1}X'D_h^{-1}\mathbf{y}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{y}'(D_h^{-1}(I - XE^{-1}X'D_h^{-1}))\mathbf{y} \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.40}$$

yoğunluğu ile, $E^{-1}X'D_h^{-1}\mathbf{y}$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2 E^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılımdır. $\boldsymbol{\beta}$ 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} = (X'D_h^{-1}X + I)^{-1} X'D_h^{-1}\mathbf{y} \tag{4.41}$$

olarak elde edilir. σ^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\sigma^2 | \boldsymbol{\beta}, y, x, h) & \propto (\sigma^2)^{\frac{-3n-p-2}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} + h_i \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right) \right) \\
& \propto (\sigma^2)^{\frac{-3n-p-2}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left((\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta})' D_h^{-1} (\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}) + \sum_{i=1}^n h_i + \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

olup $(3n + p)$ serbestlik dereceli ve $\frac{((\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta})' D_h^{-1} (\mathbf{y} - X\boldsymbol{\beta}) + \sum_{i=1}^n h_i + \boldsymbol{\beta}' \boldsymbol{\beta})}{3n + p}$ ölçek

parametrelidir, ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımına sahiptir. σ^2 'nin robust bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \frac{(\mathbf{y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})' D_h^{-1} (\mathbf{y} - X\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) + \sum_{i=1}^n \hat{h}_{i_{rbayes}} + (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}}{3n + p - 2} \tag{4.43}$$

eşitliği ile tanımlanır.

$i=1,2,...,n$ için h_i 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(h_i | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, y_i, \mathbf{x}_i) \propto h_i^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[h_i + \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} \right] \right)$$

$$\propto h_i^{\frac{1}{2}-1} \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sigma^2} h_i + \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} \right] \right) \quad (4.44)$$

olmak üzere tam koşullu sonsal dağılımı, $p^* = \frac{1}{2}$, $a^{**} = \sigma^{-2}$ ve $b^{**} = \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2}$ parametrelili genelleştirilmiş ters Normal dağılımdır. h_i 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi ise,

$$\hat{h}_{i_{rbayes}} = \frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right| \kappa_{3/2} \left(\frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2} \right)}{\kappa_{1/2} \left(\frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2} \right)} \quad (4.45)$$

şeklinde bulunur. Burada, $\kappa_p^*(.)$, ikinci tür uyarlanmış Bessel fonksiyonudur.

Hata terimlerinin RN ve $\boldsymbol{\beta}$ 'nın önselinin Normal dağıldığı durum:

Hata terimlerinin RN dağılımına, $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörü önselinin p boyutlu Normal dağılıma ve σ 'nın ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayalım. Bu durumda oluşturulan RN hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modeli hiyerarşik olarak,

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, a, b) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b \stackrel{iid}{\sim} RN(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b), \quad i = 1, 2, \dots, n \right)$$

$$\boldsymbol{\beta} | \sigma \sim N_p(0_p, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 \mathbf{I}_p)$$

$$\sigma \sim P(\sigma) \propto \sigma^{-1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu modelin parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, a, b) &\propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b) \\ &\propto (P(\boldsymbol{\beta} | \sigma) P(\sigma)) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b) \\ &\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma) \right) P(\sigma) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b) \\ &\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma) \right) (\sigma^{-1}) \right) \\ &\quad \times \left(\left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left[- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \right] \right) \\ &\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p \frac{1}{\sigma} \exp \left[- \frac{1}{2} \frac{\beta_j^2}{\sigma^2} \right] \right) (\sigma^{-1}) \right) \\ &\quad \times \left(\left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left[- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \right] \right) \\ &\propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left(- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Burada $\gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})$ fonksiyonunun yerine (4.22) eşitliğindeki seri açılımının kullanılması durumunda elde edilen bu bileşik sonsal yoğunluk,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, a, b) \propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[-(ba^{2/b})^{-1} \left(\frac{2}{b} - 1 \right)!]$$

$$\times \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp\left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}\right) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})^k}{k!} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \Big]$$

(4.46)

biçiminde tanımlanır. Bu yoğunluk kullanılarak $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta} | \sigma, y, x, a, b) \propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[-(ba^{2/b})^{-1} \left(\frac{2}{b} - 1 \right)!]$$

$$\times \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp\left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}\right) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})^k}{k!} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \Big]$$

(4.47)

olup σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunluğu ise

$$P(\sigma | \boldsymbol{\beta}, y, x, a, b) \propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[-(ba^{2/b})^{-1} \left(\frac{2}{b} - 1 \right)!]$$

$$\times \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp\left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}\right) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})^k}{k!} \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2 \Big]$$

(4.48)

olarak elde edilir. "b" parametresinin "1" ve "2" değerli özel durumları için $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

1.durum : $b=1$

Parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, a) \propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[-(a^{-2})n + (a^{-2}) \sum_{i=1}^n \left(\exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) (1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) \right) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2] \quad (4.49)$$

olup $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları,

$$P(\boldsymbol{\beta} | \sigma, y, x, a) \propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(a^{-2}) \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) (1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2]$$

$$P(\sigma | \boldsymbol{\beta}, y, x, a) \propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(a^{-2}) \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) (1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2] \quad (4.50)$$

şeklinde bulunmuştur.

2.durum : $b=2$

Parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, a) \propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[-(2a)^{-1}n + (2a)^{-1} \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2] \quad (4.51)$$

olup sırasıyla $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta}|\sigma, y, x, a) &\propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(2a)^{-1} \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2] \\
P(\sigma|\boldsymbol{\beta}, y, x, a) &\propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(2a)^{-1} \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \beta_j^2]
\end{aligned}
\tag{4.52}$$

olarak bulunur.

Görüldüğü gibi RN hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modeli parametrelerine yönelik bulunan tam koşullu sonsal yoğunlukların formu belli bir dağılımın yoğunluğuna benzememektedir. Bu sebeple, parametrelerin tahmin edicilerinin bu yoğunluklar kullanılarak doğrudan elde edilemeyeceği ancak aşağıda verilen iteratif çözüm yolu kullanılarak ağırlıklandırılmış formatta yazılabileceği söylenebilir.

İteratif çözüm:

$\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörü önselinin p boyutlu Normal dağılıma ve σ 'nın bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayalım. Bu doğrultuda $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın bileşik önsel yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta}, \sigma) &\propto P(\boldsymbol{\beta}|\sigma) P(\sigma) \\
&\propto N(\boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_\beta = \sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_0) (\sigma^{-1}) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_\beta^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)\right) (\sigma^{-1}) \\
&\propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' (\sigma^2 \boldsymbol{\Sigma}_0)^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)\right) (\sigma^{-1})
\end{aligned}
\tag{4.53}$$

olarak elde edilir. Burada σ 'nın bilinmesi koşulu altında $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörü önsel dağılımı için Bölüm (4.2)'deki gösterimin genel formu kullanılmış olup $\boldsymbol{\beta}_0$, $\boldsymbol{\beta}$ 'nin p

boyutlu önsel ortalama vektörü, Σ_{β} ise $p \times p$ boyutlu önsel kovaryans matrisidir. Elde edilen bu bileşik önsel yoğunluğun (4.19) ifadesindeki olabilirlik fonksiyonu ile birleştirilmesi sonucunda β ve σ 'nın bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\beta, \sigma | y, x, \beta_0, \Sigma_0, a, b) &\propto P(\beta, \sigma) P(y | x, \beta, \sigma, a, b) \\
&\propto \left(\exp \left(-\frac{1}{2} (\beta - \beta_0)' (\sigma^2 \Sigma_0)^{-1} (\beta - \beta_0) \right) (\sigma^{-1}) \right) \\
&\quad \times \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left[-\sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - x_i' \beta|^b}{\sigma^b}) \right] \\
&\propto (\sigma^{-1}) \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left[-\sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - x_i' \beta|^b}{\sigma^b}) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)' (\sigma^2 \Sigma_0)^{-1} (\beta - \beta_0)]
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu durumda parametrelerin log-sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
\ln P(\beta, \sigma | y, x, \beta_0, \Sigma_0, a, b) &\propto (-\ln \sigma) - \ln \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) - \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \\
&\quad \times \gamma(2/b, a \frac{|y_i - x_i' \beta|^b}{\sigma^b}) - \frac{1}{2} (\beta - \beta_0)' \sigma^{-2} \Sigma_0^{-1} (\beta - \beta_0)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

biçiminde tanımlanır. Bu yoğunluğun β 'ya göre kısmi türevi,

$$\left. \frac{\partial \ln P(\beta, \sigma | y, x, \beta_0, \Sigma_0, a, b)}{\partial \beta} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0$$

$$\left(-\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \boldsymbol{\beta}) / A_i \right) - (ba^{2/b})^{-1} \sum_{i=1}^n [a^{2/b} b(\sigma^{-2}) (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}) (-\mathbf{x}_i') \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \times -\sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) \Big|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b} \right) \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) = \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0) + \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i$$

olup burada ağırlık değerleri tahmini, $\hat{w}_{i(RN_{bayes})} = \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b} \right)$ olarak

tanımlandığında bu eşitlik,

$$\sum_{i=1}^n \hat{w}_i \mathbf{x}_i y_i + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 - \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \left[\sum_{i=1}^n \hat{w}_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right]$$

olarak ifade edilir ve $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin robust bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} = \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_i \mathbf{x}_i y_i + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 - \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \right)$$

şeklinde bulunur. Bu tahmin edici matris formatında,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} = \left(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y} + \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 - \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \right) \quad (4.55)$$

olarak ifade edilebilir. Burada $(\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i$ ifadesi limit durumunda sıfıra yaklaşmaktadır (Ramsay ve Novick 1980).

Bu durumda, tahmin edici, $\hat{\beta}_{rbayes} = (X'WX + \Sigma_0^{-1})^{-1} (X'Wy + \Sigma_0^{-1}\beta_0)$ şeklinde elde edilir. W matrisi ise $\hat{w}_{i(RN_{bayes})}$ değerlerini içinde barındıran köşegen bir matrisidir. Bu matrisin elemanlarının $\hat{\beta}_{rbayes}$ tahmin edicisini içermesi nedeniyle elde edilen eşitliğin açık çözümü olmayıp tahminlerin bulunmasında nümerik yöntemlerin kullanılması gerekmektedir.

σ^2 'nin robust bayesyen tahmin edicisi ise (4.54) eşitliğinde yer alan log-sonsalın σ 'ya göre kısmi türevi alınarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial \ln P(\beta, \sigma | y, x, \beta_0, \Sigma_0, a, b)}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0 \\
& \left(-\frac{1}{\sigma} \right) - \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \sigma) / A_i \right) - (ba^{2/b})^{-1} \sum_{i=1}^n (a^{2/b} \sigma^{-3} (-b)(y_i - x_i' \beta)^2 \\
& \times \exp \left(-a \frac{|y_i - x_i' \beta|^b}{\sigma^b} \right) - \frac{(\beta - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\beta - \beta_0)}{2} (-2) \sigma^{-3} \Big|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0 \\
& \underbrace{\hat{w}_{i(RN_{bayes})}}_{\hat{w}_{i(RN_{bayes})}} \\
& \hat{\sigma}_{rbayes}^{-3} \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} (y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes})^2 + (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0) \hat{\sigma}_{rbayes}^{-3} = \hat{\sigma}_{rbayes}^{-1} \\
& + \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i \\
& \hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \left(\hat{\sigma}_{rbayes} \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i \right) + 1 \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_i (y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes})^2 \right. \\
& \left. + (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0) \right)
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Burada $(\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i$ ifadesinin limiti, i 'ye bağlı olmayan bir değere yakınsamaktadır (Ramsay ve Novick 1980).

Elde edilen bu eşitliğin $\hat{\sigma}_{rbayes}$ 'i içermesi sebebiyle tahmin edicinin açık şekilde çözümü yoktur. Bu nedenle tahminler, nümerik yöntemlerin kullanımıyla elde edilebilir.

4.2.2 Normal hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde bayesyen parametre tahmini

Bu alt bölümde (1.2) modelindeki hata terimleri dağılımının Normal dağılıma ve β 'nın önselinin ise t, Laplace veya RN dağılımlarından herhangi birine sahip olduğunun varsayılması durumunda elde edilen regresyon modelleri ele alınmıştır.

Hata terimlerinin Normal ve β 'nın önselinin t dağıldığı durum:

Hata terimlerinin Normal dağılıma, β parametre vektörü önselinin p boyutlu t dağılımına ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayılın. Bu doğrultuda oluşturulan Normal hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modelinin hiyerarşik gösterimi,

$$\begin{aligned} \varepsilon_i | \sigma^2 &\stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \beta, \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} N(\mathbf{x}_i' \beta, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n \right) \\ \beta &\sim t_p(\mathbf{0}_p, \Sigma_\beta = \sigma^2 \mathbf{I}_p, \nu) \\ &\Downarrow \\ \beta | \tau_j^2, \sigma^2 &\sim N_p(\mathbf{0}_p, \sigma^2 \mathbf{D}_\tau), \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad \mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_p^2) \\ \tau_j^2 | \nu &\sim IGa(\nu/2, \nu/2) \quad , \quad \tau_j^2 > 0 \quad , \quad \nu > 0 \\ \sigma^2 &\sim P(\sigma^2) \propto \sigma^{-2} \end{aligned}$$

olup model parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\beta, \sigma^2, \tau^2 | y, x) &\propto P(\beta, \sigma^2) P(y | x, \beta, \sigma^2) \\ &\propto \left(P(\beta | \sigma^2) P(\sigma^2) \right) P(y | x, \beta, \sigma^2) \\ &\propto \left(\left(\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \tau_j^2, \sigma^2) P(\tau_j^2 | \nu) \right) P(\sigma^2) \right) P(y | x, \beta, \sigma^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \left(\left(\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \tau_j^2, \sigma^2) P(\tau_j^2 | \nu) \right) (\sigma^{-2}) \right) \\
& \quad \times \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2}\right) \right) \\
& \propto \left(\left(\prod_{j=1}^p f_N(\beta_j | 0, \sigma^2 \tau_j^2) f_{IGa}(\tau_j^2 | \nu/2, \nu/2) \right) (\sigma^{-2}) \right) \\
& \quad \times \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2}\right) \right) \\
& \propto \left(\prod_{j=1}^p \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{\tau_j^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 \tau_j^2} \beta_j^2\right) (\tau_j^2)^{-\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(-\frac{\nu/2}{\tau_j^2}\right) \right] \right) \\
& \quad \times \sigma^{-n-2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2\right) \\
& \propto \sigma^{-n-p-2} \left(\prod_{j=1}^p \tau_j^2 \right)^{\frac{-\nu-3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 \right] \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + \frac{\nu}{\tau_j^2} \right) \right] \right)
\end{aligned}$$

olup $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal dağılımı,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \tau^2, y, x) & \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} \right] \right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1} \boldsymbol{\beta} \right] \right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\mathbf{y}' \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1} \boldsymbol{\beta} \right] \right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\boldsymbol{\beta}' \underbrace{(\mathbf{X}' \mathbf{X} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1})}_{\mathbf{F}} \boldsymbol{\beta} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{y}' \mathbf{y} \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y})'\mathbf{F}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{F}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}) + \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{F}^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{y}\right]\right) \quad (4.57)$$

yoğunluğu ile $\mathbf{F}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2\mathbf{F}^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılımdır. $\boldsymbol{\beta}$ 'nın Bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (4.58)$$

olarak elde edilir.

σ^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu ise

$$\begin{aligned} P(\sigma^2 | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}^2, \mathbf{y}, \mathbf{x}) &\propto \sigma^{-n-p-2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})^2 + \sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2}\right)\right]\right) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n+p}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\boldsymbol{\beta}\right]\right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

olup bu yoğunluk $(n+p)$ serbestlik dereceli ve $\left(\frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\boldsymbol{\beta}}{n+p}\right)$ ölçek parametrelili ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımı yoğunluğuna benzemektedir. σ^2 'nin Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{bayes}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes}) + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes}'\mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes}}{n+p-2} \quad (4.60)$$

eşitliği şeklinde bulunur.

$j = 1, 2, \dots, p$ için τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\tau_j^2 | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \mathbf{y}, \mathbf{x}) \propto (\tau_j^2)^{\frac{-v-3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2\tau_j^2} + \frac{v}{\tau_j^2}\right)\right)$$

$$\propto (\tau_j^2)^{-\left(\frac{v+1}{2}\right)-1} \exp\left(-\frac{1}{\tau_j^2} \left(\frac{\beta_j^2 + v\sigma^2}{2\sigma^2}\right)\right) \quad (4.61)$$

olarak tanımlanır. Bu yoğunluktan görüldüğü gibi τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal dağılımı, $\left(\frac{v+1}{2}\right)$ şekil ve $\frac{(v\sigma^2 + \beta_j^2)}{2\sigma^2}$ ölçek parametrelili ters gamma dağılımı olup Bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\tau}_{j_{bayes}}^2 = \frac{v\hat{\sigma}_{bayes}^2 + \hat{\beta}_{j_{bayes}}^2}{(v-1)\hat{\sigma}_{bayes}^2} \quad (4.62)$$

şeklinde elde edilir.

Hata terimlerinin Normal ve β 'nın önselinin Laplace dağıldığı durum:

Hata terimlerinin Normal dağılıma, β parametre vektörü önselinin p boyutlu Laplace dağılımına ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayalım. Bu varsayımlar kullanılarak oluşturulan Normal hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeli,

$$\varepsilon_i | \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2) \quad \left(y_i | x_i, \beta, \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} N(x_i' \beta, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \dots, n \right)$$

$$\beta \sim L_p(\mathbf{0}_p, \Sigma_\beta = \sigma \mathbf{I}_p)$$

$$\Downarrow$$

$$\beta | \sigma^2, \tau_j^2 \sim N_p(\mathbf{0}_p, \sigma^2 \mathbf{D}_\tau) \quad , \quad j = 1, 2, \dots, p \quad , \quad \mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_p^2)$$

$$\tau_j^2 | \sigma \sim \text{Üstel}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad \tau_j^2 > 0$$

$$\sigma^2 \sim P(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$$

şeklinde hiyerarşik olarak ifade edilebilir. Bu modelin parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\beta, \sigma^2, \tau^2 | y, x) \propto P(\beta, \sigma^2) P(y | x, \beta, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}
& \propto \left(P(\boldsymbol{\beta}|\sigma^2) P(\sigma^2) \right) P(y|x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \\
& \propto \left(\left[\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2, \tau_j^2) P(\tau_j^2 | \sigma) \right] P(\sigma^2) \right) P(y|x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) \\
& \propto \left(\left[\prod_{j=1}^p f_N(\beta_j | 0, \sigma^2 \tau_j^2) f_{\ddot{U}_{stel}}(\tau_j^2 | (1/2\sigma^2)) \right] (\sigma^{-2}) \right) \\
& \quad \times \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2} \right) \right) \\
& \propto \left(\prod_{j=1}^p \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{\tau_j^2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2 \tau_j^2} \beta_j^2 \right) \right] \left[\frac{1}{\sigma^2} \exp \left(-\frac{\tau_j^2}{2\sigma^2} \right) \right] \right) \\
& \quad \times \sigma^{-n-2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 \right) \\
& \propto \sigma^{-n-3p-2} \left(\prod_{j=1}^p \tau_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 \right) \\
& \quad \times \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \left[\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2 \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.63}$$

olup $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal dağılımı,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \tau^2, y, x) & \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} \right] \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})' (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1} \boldsymbol{\beta} \right] \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\mathbf{y}' \mathbf{y} - \mathbf{y}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1} \boldsymbol{\beta} \right] \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\underbrace{\boldsymbol{\beta}' (\mathbf{X} \mathbf{X} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}) \boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{H}} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{y}' \mathbf{y} \right] \right)
\end{aligned}$$

$$\propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y})'\mathbf{H}(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}) + \mathbf{y}'(\mathbf{I} - \mathbf{X}\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}')\mathbf{y}\right]\right) \quad (4.64)$$

yoğunluğu ile $\mathbf{H}^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2\mathbf{H}^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılımdır. $\boldsymbol{\beta}$ 'nın Bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes} = (\mathbf{X}'\mathbf{X} + \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (4.65)$$

olarak elde edilir.

σ^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\sigma^2 | \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\tau}^2, \mathbf{y}, \mathbf{X}) &\propto \sigma^{-n-3p-2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (y_i - \mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta})^2 + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2\right]\right) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\left(\frac{n+3p}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\boldsymbol{\beta} + \sum_{j=1}^p \tau_j^2\right]\right) \end{aligned} \quad (4.66)$$

olup tam koşullu sonsal dağılımı, $\left(\frac{n+3p}{2}\right)$ şekil ve

$\frac{1}{2}((\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\boldsymbol{\beta} + \sum_{j=1}^p \tau_j^2)$ ölçek parametrelili ters gamma dağılımıdır.

σ^2 'nin Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{bayes}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes}) + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes}'\mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{bayes} + \sum_{j=1}^p \hat{\tau}_{j,bayes}^2}{n+3p-2} \quad (4.67)$$

şeklinde bulunur.

$j = 1, 2, \dots, p$ için τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal dağılımı,

$$\begin{aligned}
P(\tau_j^2 | \beta, \sigma^2, y, x) &\propto (\tau_j^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \left[\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2\right]\right) \\
&\propto (\tau_j^2)^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + \frac{1}{\sigma^2} \tau_j^2\right)\right]\right)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

yoğunluğu ile $p^* = \frac{1}{2}$, $a^{**} = \sigma^{-2}$ ve $b^{**} = \frac{\beta_j^2}{\sigma^2}$ parametrelili genelleştirilmiş ters Normal dağılımı olup τ_j^2 'nin Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\tau}_{j\text{bayes}}^2 = \frac{\left| \hat{\beta}_{j\text{bayes}} \right| \kappa_{3/2} \left(\frac{\left| \hat{\beta}_{j\text{bayes}} \right|}{\hat{\sigma}_{j\text{bayes}}^2} \right)}{\kappa_{1/2} \left(\frac{\left| \hat{\beta}_{j\text{bayes}} \right|}{\hat{\sigma}_{j\text{bayes}}^2} \right)} \tag{4.69}$$

olarak elde edilir. Burada $\kappa_p^*(.)$, ikinci tür uyarlanmış bessel fonksiyonudur.

4.2.3 Kalın kuyruklu hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı doğrusal regresyon modelinde robust bayesyen parametre tahmini

Bu alt bölümde, hem hata terimleri dağılımının hem de önsel dağılımın kalın kuyruklu bir dağılıma sahip olduğu varsayılarak regresyon modelleri kurulmuş ve bu modellere ilişkin parametrelerin robust Bayesyen tahmin edicileri elde edilmiştir.

Hata terimlerinin t ve β 'nın önselinin t dağıldığı durum:

Hata terimlerinin t dağılımına, β parametre vektörü önselinin p boyutlu t dağılımına ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayılın. Bu durumda oluşturulan t hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı robust Bayesyen regresyon modeli hiyerarşik olarak,

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} t(0, \sigma^2, v_1) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, v_1 \stackrel{iid}{\sim} t(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, v_1) \quad , \quad i=1,2,...,n \right)$$

$\Downarrow$

$$y_i | \sigma^2, \lambda_i \sim N(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \lambda_i) \quad , \quad \lambda_i > 0$$

$$\lambda_i | v_1 \sim IGa\left(\frac{v_1}{2}, \frac{v_1}{2}\right) \quad , \quad v_1 > 0$$

$$\boldsymbol{\beta} \sim t_p(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 \mathbf{I}_p, v_2)$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \tau_j^2 \sim N_p(\mathbf{0}_p, \sigma^2 \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}) \quad , \quad j=1,2,...,p \quad , \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}} = diag(\tau_1^2, \tau_2^2, ..., \tau_p^2)$$

$$\tau_j^2 | v_2 \sim IGa\left(\frac{v_2}{2}, \frac{v_2}{2}\right) \quad , \quad \tau_j^2 > 0 \quad , \quad v_2 > 0$$

$$\sigma^2 \sim P(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu modelin parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \lambda, \tau^2 | y, x) &\propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \lambda) \\ &\propto \left(P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2) P(\sigma^2) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \lambda) \\ &\propto \left(\left[\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \tau_j^2, \sigma^2) P(\tau_j^2 | v_2) \right] P(\sigma^2) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \lambda) \\ &\propto \left(\left[\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \tau_j^2, \sigma^2) P(\tau_j^2 | v_2) \right] (\sigma^{-2}) \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^n f_N(y_i | \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \lambda_i) f_{IGa}(\lambda_i | v_1/2, v_1/2) \right) \\ &\propto \left(\prod_{j=1}^p f_N(\beta_j | 0, \sigma^2 \tau_j^2) f_{IGa}(\tau_j^2 | v_2/2, v_2/2) \right) (\sigma^{-2}) \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^n f_N(y_i | \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \lambda_i) f_{IGa}(\lambda_i | v_1/2, v_1/2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \left(\prod_{j=1}^p \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{\tau_j^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 \tau_j^2} \beta_j^2\right) \right] (\tau_j^2)^{-\frac{v_2}{2}-1} \exp\left(-\frac{v_2/2}{\tau_j^2}\right) \right) \\
& \quad \times (\sigma^{-2}) \left(\prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{\lambda_i}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 \lambda_i}\right) \right] (\lambda_i)^{-\frac{v_1}{2}-1} \right. \\
& \quad \left. \times \exp\left(-\frac{v_1/2}{\lambda_i}\right) \right] \\
& \propto \sigma^{-n-p-2} \left(\left[\prod_{i=1}^n \lambda_i \right] \right)^{\frac{-v_1-3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 \lambda_i} + \frac{v_1}{\lambda_i} \right] \right) \\
& \quad \times \left(\left[\prod_{j=1}^p \tau_j^2 \right] \right)^{\frac{-v_2-3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left[\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + \frac{v_2}{\tau_j^2} \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.70}$$

olup $\mathbf{D}_\lambda$ ve $\mathbf{D}_\tau$ sırasıyla köşegen elemanları λ_i ve τ_j^2 olan köşegen bir matris olmak üzere $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal dağılımı,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \lambda, \tau^2, y, x) & \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} \right] \right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_\lambda^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) - \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} \right] \right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} \right] \right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\boldsymbol{\beta}' \underbrace{(\mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} + \mathbf{D}_\tau^{-1})}_{\mathbf{K}} \boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} \right] \right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y})' \mathbf{K} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{y}' (\mathbf{D}_\lambda^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1})) \mathbf{y} \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.71}$$

yoğunluğu ile $K^{-1}X'D_{\lambda}^{-1}y$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2 K^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılım olup β 'nın robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{rbayes} = (X'D_{\lambda}^{-1}X + D_{\tau}^{-1})^{-1} X'D_{\lambda}^{-1}y \quad (4.72)$$

olarak elde edilir.

σ^2 'nin tam koşullu sonsal dağılımı ise

$$\begin{aligned} P(\sigma^2 | \beta, \lambda, \tau^2, y, x) &\propto \sigma^{-n-p-2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} \right) \right) \\ &\propto (\sigma^2)^{-\frac{n+p}{2}-1} \exp \left(-\frac{1}{\sigma^2} \left[\frac{(y - X\beta)' D_{\lambda}^{-1} (y - X\beta) + \beta' D_{\tau}^{-1} \beta}{2} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.73)$$

yoğunluğu ile $(n+p)$ serbestlik dereceli ve $\frac{(y - X\beta)' D_{\lambda}^{-1} (y - X\beta) + \beta' D_{\tau}^{-1} \beta}{n+p}$ ölçek parametrelili ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımıdır. σ^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \frac{(y - X\hat{\beta}_{rbayes})' D_{\lambda}^{-1} (y - X\hat{\beta}_{rbayes}) + (\hat{\beta}_{rbayes})' D_{\tau}^{-1} \hat{\beta}_{rbayes}}{n+p-2} \quad (4.74)$$

eşitliği ile tanımlanır.

$i=1,2,...,n$ için λ_i 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\lambda_i | \beta, \sigma^2, y_i, x_i, v_1) \propto (\lambda_i)^{-\left(\left(\frac{v_1+1}{2}\right)+1\right)} \exp \left(-\frac{1}{2\lambda_i} \left[\frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2} + v_1 \right] \right) \quad (4.75)$$

olup bu yoğunluğun, $(v_1 + 1)$ serbestlik dereceli ve $\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2 + v_1 \sigma^2}{(v_1 + 1) \sigma^2}$ ölçek parametrelili ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımı yoğunluğuna benzemesi sebebiyle λ_i 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda}_{rbayes} = \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})^2 + v_1 \hat{\sigma}_{rbayes}^2}{(v_1 + 1) \hat{\sigma}_{rbayes}^2} \quad (4.76)$$

olarak elde edilir.

$j = 1, 2, \dots, p$ için τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\tau_j^2 | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, v_2) \propto (\tau_j^2)^{-\left(\left(\frac{v_2+1}{2}\right)+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{2\tau_j^2} \left[\frac{\beta_j^2}{\sigma^2} + v_2\right]\right) \quad (4.77)$$

olup tam koşullu sonsal dağılımı, $(v_2 + 1)$ serbestlik dereceli ve $\frac{\beta_j^2 + v_2 \sigma^2}{(v_2 + 1) \sigma^2}$ ölçek parametrelili ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımıdır. τ_j^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\tau}_{rbayes}^2 = \frac{\hat{\beta}_{rbayes}^2 + v_2 \hat{\sigma}_{rbayes}^2}{(v_2 + 1) \hat{\sigma}_{rbayes}^2} \quad (4.78)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Hata terimlerinin Laplace ve β 'nin önselinin Laplace dağıldığı durum:

Hata terimlerinin Laplace dağılımına, $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörü önselinin p boyutlu Laplace dağılımına ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayılın. Bu varsayımlar kullanılarak oluşturulan Laplace hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modelinin hiyerarşik gösterimi,

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} L(0, \sigma) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h_i \stackrel{iid}{\sim} L(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma), \quad i=1, 2, \dots, n \right)$$

$\Downarrow$

$$y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h_i \sim N(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 h_i)$$

$$h_i | \sigma^2 \sim \text{Üstel} \left(\frac{1}{2\sigma^2} \right)$$

$$\boldsymbol{\beta} \sim L_p(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Sigma}_\beta = \sigma \mathbf{I}_p)$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \tau_j^2 \sim N_p(\mathbf{0}_p, \sigma^2 \mathbf{D}_\tau) \quad , \quad \mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_p^2)$$

$$\tau_j^2 | \sigma^2 \sim \text{Üstel} \left(\frac{1}{2\sigma^2} \right) \quad , \quad \tau_j^2 > 0$$

$$\sigma^2 \sim P(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$$

olup model parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h, \tau^2 | y, x) \propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h)$$

$$\propto (P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2) P(\sigma^2)) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h)$$

$$\propto \left(\left[\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2, \tau_j^2) P(\tau_j^2 | \sigma^2) \right] P(\sigma^2) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h)$$

$$\propto \left(\left[\prod_{j=1}^p f_N(\beta_j | 0, \sigma^2 \tau_j^2) f_{\text{Üstel}}(\tau_j^2 | (1/2\sigma^2)) \right] (\sigma^{-2}) \right)$$

$$\times \left[\prod_{i=1}^n f_N(y_i | \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 h_i) f_{\text{Üstel}}(h_i | (1/2\sigma^2)) \right]$$

$$\propto \left(\left[\prod_{j=1}^p \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{\tau_j^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 \tau_j^2} \beta_j^2\right) \right) \left(\frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \tau_j^2\right) \right) \right] (\sigma^{-2}) \right) \\ \times \left[\prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{\sigma \sqrt{h_i}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 h_i} (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2\right) \right) \left(\frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{h_i}{2\sigma^2}\right) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& \propto \sigma^{-3n-3p-2} \left(\prod_{i=1}^n h_i \right)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} + h_i \right) \right) \\
& \times \left(\prod_{j=1}^p \tau_j^2 \right)^{-1/2} \times \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2 \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

olarak elde edilir. Burada $\mathbf{D}_h$ ve $\mathbf{D}_\tau$ matrisleri, köşegen elemanları sırasıyla h_i ve τ_j^2 olan köşegen matrisler olmak üzere $\boldsymbol{\beta}$ 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, h, \tau^2, y, x) & \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} + \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} \right) \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} \right] \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X} \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} \right] \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\underbrace{\boldsymbol{\beta}' (\mathbf{X} \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} + \mathbf{D}_\tau^{-1}) \boldsymbol{\beta}}_L - 2 \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} \right] \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y})' \mathbf{L} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{y}' (\mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1})) \mathbf{y} \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.80}$$

olup tam koşullu sonsal dağılımı, $\mathbf{L}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y}$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2 \mathbf{L}^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılımdır. $\boldsymbol{\beta}$ 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} = (\mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} + \mathbf{D}_\tau^{-1})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} \tag{4.81}$$

şeklinde bulunur. σ^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu ise

$$\begin{aligned}
P(\sigma^2 | \boldsymbol{\beta}, h, \tau^2, y, x) &\propto (\sigma^2)^{\frac{-3n-3p-2}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})}{h_i} + \sum_{i=1}^n h_i \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \sum_{j=1}^p \tau_j^2 \right) \right] \\
&\propto (\sigma^2)^{\frac{-(3n+3p)}{2}-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} ((y - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_h^{-1} (y - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^n h_i + \sum_{j=1}^p \tau_j^2) \right]
\end{aligned} \tag{4.82}$$

olarak elde edilir. Bu yoğunluk; $\frac{(3n+3p)}{2}$ şekil ve $\frac{1}{2} ((y - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_h^{-1} (y - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^n h_i + \sum_{j=1}^p \tau_j^2)$ ölçek parametrelili ters gamma dağılımı yoğunluğuna benzemektedir. Bu durumda σ^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \frac{((y - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})' \mathbf{D}_h^{-1} (y - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} + \sum_{i=1}^n \hat{h}_{i_{rbayes}} + \sum_{j=1}^p \hat{\tau}_{j_{rbayes}}^2)}{(3n+3p-2)} \tag{4.83}$$

eşitliği şeklinde tanımlanır.

$j = 1, 2, \dots, p$ için τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\tau_j^2 | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2) &\propto (\tau_j^2)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2 \right) \right) \\
&\propto (\tau_j^2)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + \frac{\tau_j^2}{\sigma^2} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.84}$$

olup tam koşullu sonsal dağılımı; $p^* = 1/2$, $a^{**} = \sigma^{-2}$ ve $b^{**} = \frac{\beta_j^2}{\sigma^2}$ parametreli genelleştirilmiş ters Normal dağılımdır. τ_j^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi ise

$$\hat{\tau}_{jrbayes}^2 = \frac{\left| \hat{\beta}_{jrbayes} \right| \kappa_{3/2} \left(\frac{\left| \hat{\beta}_{jrbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2} \right)}{\kappa_{1/2} \left(\frac{\left| \hat{\beta}_{jrbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2} \right)} \quad (4.85)$$

olarak elde edilir. Burada $\kappa_p^*(.)$, ikinci tür uyarlanmış bessel fonksiyonudur.

$i = 1, 2, \dots, n$ için h_i 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(h_i | \beta, \sigma^2, y_i, x_i) &\propto (h_i)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{h_i} + h_i \right) \right) \\ &\propto (h_i)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2 h_i} + \frac{h_i}{\sigma^2} \right] \right) \end{aligned} \quad (4.86)$$

olmak üzere bu yoğunluk; $p^* = 1/2$, $a^{**} = \sigma^{-2}$ ve $b^{**} = \frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2}$ parametreli genelleştirilmiş ters Normal dağılımın yoğunluğuna benzemektedir. Bu durumda, h_i 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{h}_{i_{rbayes}} = \frac{\left| y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes} \right| \kappa_{3/2} \left(\frac{\left| y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2} \right)}{\kappa_{1/2} \left(\frac{\left| y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2} \right)} \quad (4.87)$$

şeklinde bulunur. Burada $\kappa_p^*(.)$, ikinci tür uyarlanmış bessel fonksiyonudur.

Hata terimlerinin RN ve β 'nın önselinin RN dağıldığı durum:

Hata terimlerinin RN dağılımına, β parametre vektörü önselinin p boyutlu RN dağılımına ve σ^2 'nin ise ölçeklendirilmiş ters ki-kare önsel dağılımına sahip olduğu varsayılın (Ramsay ve Novick 1980).

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, a, b) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \beta, \sigma, a, b \stackrel{iid}{\sim} RN(\mathbf{x}_i' \beta, \sigma, a, b) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \right)$$

$$\beta \sim RN(\beta_0, \Sigma_\beta = \sigma^2 \Sigma_0, r, s)$$

Bu doğrultuda oluşturulan RN hata dağılımı ve RN önsel dağılımına dayalı regresyon modeli parametrelerinin robust bileşik önsel yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\beta, \sigma) &\propto P(\beta | \sigma) P(\sigma) \\ &\propto [\exp(-\eta_{rs}(d_0))] \left[(\sigma^2)^{-\frac{v^{**}}{2}-1} \exp\left(-\frac{\lambda}{2\sigma^2}\right) \right] \\ &\propto \sigma^{-(v^{**}+2)} \exp\left[-\eta_{rs}(d_0) - \frac{\lambda}{2\sigma^2}\right] \end{aligned} \quad (4.88)$$

olarak elde edilir (Ramsay ve Novick 1980). Burada, $\eta_{rs}(d_0) = (sr^{2/s})^{-1} \gamma(2/s, rd_0^s)$ olmak üzere r ve s robust olmayı sağlayan parametreler olup d_0 ifadesi, $d_0 = [(\beta - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\beta - \beta_0)]^{1/2} / \sigma$ eşitliği ile tanımlanır. Bu eşitlikteki β_0 , β 'nın p boyutlu ortalama vektörü, Σ_0 , β 'nın $p \times p$ boyutlu ölçek matrisi ve v^{**} , ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımı serbestlik derecesi olup λ ise bu dağılımın parametreleri çarpımına eşittir.

Elde edilen bu önsel yoğunluğun (4.19) ifadesindeki olabilirlik fonksiyonu ile birleştirilmesi sonucunda β ve σ 'nın bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, a, b, r, s, \lambda) \propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b)$$

$$\begin{aligned} & \propto \left(\sigma^{-(v^{**}+2)} \exp[-\eta_{rs}(d_0) - \frac{\lambda}{2\sigma^2}] \right) \left(\left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \right. \\ & \quad \left. \times \exp[-\sum_{i=1}^n \eta_{ab}(d_i)] \right) \\ & \propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \sigma^{-(v^{**}+2)} \exp[-\eta_{rs}(d_0) - \sum_{i=1}^n \eta_{ab}(d_i) \\ & \quad - \frac{\lambda}{2\sigma^2}] \end{aligned}$$

olup log-sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} \ln P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, a, b, r, s, \lambda) & \propto -\ln \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) - (v^{**} + 2) \ln(\sigma) - \eta_{rs}(d_0) \\ & \quad - \sum_{i=1}^n \eta_{ab}(d_i) - \frac{\lambda}{2\sigma^2} \end{aligned} \quad (4.89)$$

olarak elde edilir. Burada $\eta_{ab}(d_i) = (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})$ olmak üzere elde edilen bu log-sonsal yoğunluğun $\boldsymbol{\beta}$ 'ya göre kısmi türevi,

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \ln P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, a, b, r, s, \lambda)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0 \\ & \left(-\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i - (s^{-1} r^{-2/s}) \left(r \left(\frac{((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0))^{1/2}}{\hat{\sigma}_{rbayes}} \right)^s \right)^{\frac{2}{s}-1} \right. \\ & \quad \times \exp \left(-r \left(\frac{((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0))^{1/2}}{\sigma} \right)^s \right) \left[\frac{-rs \hat{\sigma}_{rbayes}^{-s}}{2} \right. \\ & \quad \times ((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0))^{\frac{s}{2}-1} \left. \right] \times \left(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (2\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0 - \boldsymbol{\beta}_0') \right) - (ba^{2/b})^{-1} \\ & \quad \times \sum_{i=1}^n [a^{2/b} b \hat{\sigma}_{rbayes}^{-2} \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b} \right) \times (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})(-\mathbf{x}_i')] = 0 \end{aligned}$$

olup burada RN hata dağılımı ve RN önseline dayalı ağırlık değerleri tahminleri sırasıyla

$$\hat{w}_{i(RN_{bayes})} = \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b} \right)$$

$$\hat{w}_{0(RN)} = \exp \left(-r \left(\frac{((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0))^{1/2}}{\sigma} \right)^s \right), \quad (\sigma \text{ biliniyor})$$

şeklinde tanımlandığında bu eşitlik,

$$\begin{aligned} \hat{w}_{0(RN)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' &= \hat{w}_{0(RN)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 + \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i y_i \\ &+ \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \right) \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' + \hat{w}_{0(RN)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right) &= \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i y_i + \hat{w}_{0(RN)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 \right. \\ &\left. + \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \right) \end{aligned} \quad (4.90)$$

şeklinde ifade edilir ve $\boldsymbol{\beta}$ parametresinin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} &= \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' + \hat{w}_{0(RN)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i y_i + \hat{w}_{0(RN)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 \right. \\ &\left. + \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \right) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu tahmin edicinin matris formatında gösterimi aşağıdaki gibidir (Ramsay ve Novick 1980).

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} &= \left(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X} + \hat{w}_{0(RN)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y} + \hat{w}_{0(RN)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0 \right. \\ &\left. + \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \right) \end{aligned} \quad (4.91)$$

Burada $(\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i$ ifadesi limit durumunda sıfıra yaklaşmaktadır (Ramsay ve Novick 1980). Bu durumda β 'nın robust Bayesyen tahmin edicisi, $\hat{\beta}_{rbayes} = (X'WX + \hat{w}_{0(RN)}\Sigma_0^{-1})^{-1} (X'Wy + \hat{w}_{0(RN)}\Sigma_0^{-1}\beta_0)$ olarak tanımlanır. W matrisi ise $\hat{w}_{i(RN_{bayes})}$ değerlerini içinde barındıran köşegen bir matris olup bu matrisin elemanlarının $\hat{\beta}_{rbayes}$ tahmin edicisini içermesi sebebiyle eşitliğin açık çözümü yoktur. Bu nedenle tahminlerin nümerik yöntemler kullanılarak elde edilmesi gerekmektedir.

σ^2 parametresinin robust Bayesyen tahmin edicisi ise (4.89) eşitliğinde yer alan log-sonsalsın σ 'ya göre kısmi türevi alınarak aşağıdaki gibi elde edilir (Ramsay ve Novick 1980).

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial \ln P(\beta, \sigma | y, x, \beta_0, \Sigma_0, a, b, r, s, \lambda)}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0 \\
& \left(- \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \sigma) / A_i - (v^{**} + 2) \frac{1}{\sigma} - \left[((\beta - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\beta - \beta_0)) \sigma^{-3} \right. \right. \\
& \times \exp(-r \left(\frac{((\beta - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\beta - \beta_0))^{1/2}}{\sigma} \right)^s)] - (ba^{2/b})^{-1} \sum_{i=1}^n \left(a^{2/b} \sigma^{-3} (-b) (y_i - x_i' \beta)^2 \right. \\
& \times \exp(-a \frac{|y_i - x_i' \beta|^b}{\sigma^b}) \left. \left. \right) + \lambda \sigma^{-3} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0 \\
& \frac{\hat{\sigma}_{rbayes} \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i + (v^{**} + 2) \right)}{\hat{\sigma}_{rbayes}} = \frac{1}{\hat{\sigma}_{rbayes}^3} [\lambda + (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0) \\
& \times \hat{w}_{0(RN)} + \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} (y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes})^2] \\
& \hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \left(\hat{\sigma}_{rbayes} \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i + (v^{**} + 2) \right) \right)^{-1} \left(\lambda + (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} \right. \\
& \times (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0) \hat{w}_{0(RN)} + \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} (y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes})^2 \left. \right)
\end{aligned} \tag{4.92}$$

Bu eşitlikte yer alan $(\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i$ ifadesi limit durumunda i 'ye bağlı olmayan bir değere yaklaşmaktadır (Ramsay ve Novick 1980). Elde edilen bu eşitliğin $\hat{\sigma}_{rbayes}$ 'i içermesi sebebiyle tahmin edicinin açık şekilde çözümü yoktur. Bu nedenle tahminlerin nümerik yöntemler kullanılarak bulunması gerekir.

Hata terimlerinin t ve β 'nin önselinin Laplace dağıldığı durum:

Hata terimlerinin t dağılımına, β parametre vektörü önselinin p boyutlu Laplace dağılımına ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayılın. . Bu varsayımlar kullanılarak oluşturulan t hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modelinin hiyerarşik gösterimi,

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} t(0, \sigma^2, \nu) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu \stackrel{iid}{\sim} t(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu), i = 1, 2, \dots, n \right)$$

$\Downarrow$

$$y_i | \sigma^2, \lambda_i \sim N(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \lambda_i)$$

$$\lambda_i | \nu \sim IGa\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{\beta} \sim L_p(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Sigma}_\beta = \sigma \mathbf{I}_p)$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \tau_j^2 \sim N_p(\mathbf{0}_p, \sigma^2 \mathbf{D}_\tau) \quad , \quad \mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_p^2)$$

$$\tau_j^2 | \sigma^2 \sim \text{Üstel}\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) \quad , \quad \tau_j^2 > 0$$

$$\sigma^2 \sim P(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$$

olup model parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \lambda, \tau^2 | y, x, \nu) \propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu)$$

$$\propto \left(P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2) P(\sigma^2) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu)$$

$$\begin{aligned}
& \propto \left(\left[\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2, \tau_j^2) P(\tau_j^2 | \sigma^2) \right] P(\sigma^2) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, v) \\
& \propto \left(\left[\prod_{j=1}^p f_N(\beta_j | 0, \sigma^2 \tau_j^2) f_{\text{Üstel}}(\tau_j^2 | (1/2\sigma^2)) \right] (\sigma^{-2}) \right) \\
& \quad \times \left[\prod_{i=1}^n f_N(y_i | \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \lambda_i) f_{IGa}(\lambda_i | v/2, v/2) \right] \\
& \propto \left(\prod_{j=1}^p \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{\tau_j^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 \tau_j^2} \beta_j^2\right) \right] \left[\frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \tau_j^2\right) \right] \right) (\sigma^{-2}) \\
& \quad \times \left(\prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{\lambda_i}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 \lambda_i}\right) \right] \left[\lambda_i^{-\frac{v}{2}-1} \exp\left(-\frac{v/2}{\lambda_i}\right) \right] \right) \\
& \propto \sigma^{-n-3p-2} \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{\frac{-v-3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 \lambda_i} + \frac{v}{\lambda_i} \right)\right) \\
& \quad \times \left(\prod_{j=1}^p \tau_j^2 \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + \frac{\tau_j^2}{\sigma^2} \right)\right)
\end{aligned} \tag{4.93}$$

olmak üzere $\mathbf{D}_\lambda$ ve $\mathbf{D}_\tau$ matrisleri, köşegen elemanları sırasıyla λ_i ve τ_j^2 olan köşegen matrisler olup $\boldsymbol{\beta}$ 'nın tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \lambda, \tau^2, y, x) & \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} \right]\right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_\lambda^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X} \boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} \right]\right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{y} - 2 \mathbf{y}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_\lambda^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} \right]\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\underbrace{\beta' (X' D_{\lambda}^{-1} X + D_{\tau}^{-1}) \beta}_N \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2y' D_{\lambda}^{-1} X \beta + y' D_{\lambda}^{-1} y \right] \right) \\
& \propto \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\beta - N^{-1} X' D_{\lambda}^{-1} y)' N (\beta - N^{-1} X' D_{\lambda}^{-1} y) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + y' (D_{\lambda}^{-1} (I - X N^{-1} X' D_{\lambda}^{-1})) y \right] \right)
\end{aligned} \tag{4.94}$$

olarak elde edilir. Bu yoğunluk, $N^{-1} X' D_{\lambda}^{-1} y$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2 N^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılımın yoğunluğuna benzemekte olup β 'nın robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{rbayes} = (X' D_{\lambda}^{-1} X + D_{\tau}^{-1})^{-1} X' D_{\lambda}^{-1} y \tag{4.95}$$

eşitliği şeklinde tanımlanır.

σ^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\sigma^2 | \beta, \lambda, \tau^2, y, x) \propto (\sigma^2)^{\frac{-n-3p-2}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\lambda_i} + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2 \right] \right)$$

..(4.96)

olup tam koşullu sonsal dağılımı, $(n+3p)$ serbestlik dereceli ve

$\frac{1}{n+3p} ((y - X \beta)' D_{\lambda}^{-1} (y - X \beta) + \beta' D_{\tau}^{-1} \beta + \sum_{j=1}^p \tau_j^2)$ ölçek parametrelili ölçeklendirilmiş

ters ki-kare dağılımıdır. σ^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \frac{(y - X \hat{\beta}_{rbayes})' D_{\lambda}^{-1} (y - X \hat{\beta}_{rbayes}) + \beta'_{rbayes} D_{\tau}^{-1} \beta_{rbayes} + \sum_{j=1}^p \hat{\tau}_{rbayes}^2}{n+3p-2} \tag{4.97}$$

olarak elde edilir.

$i = 1, 2, \dots, n$ için λ_i 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\lambda_i | \beta, \sigma^2, y_i, x_i, \nu) \propto (\lambda_i)^{-\left(\frac{\nu+1}{2}+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{2\lambda_i} \left[\frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2} + \nu \right]\right) \quad (4.98)$$

olmak üzere bu yoğunluk, $(\nu+1)$ serbestlik dereceli ve $\frac{(y_i - x_i' \beta)^2 + \sigma^2 \nu}{(\nu+1)\sigma^2}$ ölçek parametrelili ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımı yoğunluğuna benzemektedir. Bu durumda λ_i 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\lambda}_{i_{rbayes}} = \frac{(y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes})^2 + (\hat{\sigma}_{rbayes}^2 \nu)}{(\nu-1)\hat{\sigma}_{rbayes}^2} \quad (4.99)$$

şeklinde bulunur.

$j = 1, 2, \dots, p$ için τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\tau_j^2 | \beta, \sigma^2) = (\tau_j^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + \frac{\tau_j^2}{\sigma^2} \right)\right) \quad (4.100)$$

olup tam koşullu sonsal dağılımı, $p^* = 1/2$ ve $a^{**} = \sigma^{-2}$ ve $b^{**} = \frac{\beta_j^2}{\sigma^2}$ parametrelili genelleştirilmiş ters Normal dağılımdır. τ_j^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\tau}_{j_{rbayes}}^2 = \frac{\left| \hat{\beta}_{j_{rbayes}} \right| \hat{\sigma}_{rbayes} \kappa_{3/2} \left(\frac{\left| \hat{\beta}_{j_{rbayes}} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}} \right)}{\kappa_{1/2} \left(\frac{\left| \hat{\beta}_{j_{rbayes}} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}} \right)} \quad (4.101)$$

olarak tanımlanır. Burada $\kappa_p^*(.)$, ikinci tür uyarlanmış bessel fonksiyonudur.

Hata terimlerinin Laplace ve β 'nın önselinin t dağıldığı durum:

Hata terimlerinin Laplace dağılımına, β parametre vektörü önselinin p boyutlu t dağılımına ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayalım. Bu durumda Laplace hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modeli hiyerarşik olarak,

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} L(0, \sigma) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 \stackrel{iid}{\sim} L(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma), \quad i=1, 2, \dots, n \right)$$

$\Downarrow$

$$y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h_i \sim N(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 h_i)$$

$$h_i | \sigma^2 \sim \text{Üstel} \left(\frac{1}{2\sigma^2} \right)$$

$$\boldsymbol{\beta} \sim t_p(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 \mathbf{I}_p, \nu)$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \tau_j^2 \sim N_p(\mathbf{0}_p, \sigma^2 \mathbf{D}_{\tau}) \quad , \quad \mathbf{D}_{\tau} = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_p^2)$$

$$\tau_j^2 | \nu \sim \text{IGa} \left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2} \right) \quad , \quad \tau_j^2 > 0 \quad , \quad \nu > 0$$

$$\sigma^2 \sim P(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu modelin parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h, \tau^2 | y, x) &\propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h) \\ &\propto (P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2) P(\sigma^2)) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h) \\ &\propto \left(\left[\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2, \tau_j^2) P(\tau_j^2 | \nu) \right] P(\sigma^2) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, h) \\ &\propto \left(\left[\prod_{j=1}^p f_N(\beta_j | 0, \sigma^2 \tau_j^2) f_{\text{IGa}}(\tau_j^2 | \nu/2, \nu/2) \right] (\sigma^{-2}) \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{i=1}^n f_N(y_i | \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma^2 h_i) f_{\text{Üstel}}(h_i | (1/2\sigma^2)) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \propto \left(\prod_{j=1}^p \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{\tau_j^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 \tau_j^2} \beta_j^2\right) \right] \left[(\tau_j^2)^{-\frac{v}{2}-1} \exp\left(-\frac{v/2}{\tau_j^2}\right) \right] \right) \\
& \times (\sigma^{-2}) \left(\prod_{i=1}^n \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{h_i}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 h_i} (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2\right) \right] \left[\frac{1}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{h_i}{2\sigma^2}\right) \right] \right) \\
& \propto \sigma^{-3n-p-2} \left(\prod_{i=1}^n h_i \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} + h_i \right)\right) \\
& \times \left(\prod_{j=1}^p \tau_j^2 \right)^{-\frac{v-3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + \frac{v}{\tau_j^2} \right)\right)
\end{aligned} \tag{4.102}$$

olarak elde edilir. $D_h = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ olmak üzere, $\boldsymbol{\beta}$ 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, h, \tau^2, y, x) & \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} \right]\right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} \right]\right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} - 2\mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} \right]\right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\boldsymbol{\beta}' \underbrace{(\mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} + \mathbf{D}_\tau^{-1})}_{\mathbf{R}} \boldsymbol{\beta} - 2\mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{y}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y} \right]\right) \\
& \propto \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\boldsymbol{\beta} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y})' \mathbf{R} (\boldsymbol{\beta} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1} \mathbf{y}) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mathbf{y}' (\mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{X} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{D}_h^{-1})) \mathbf{y} \right]\right)
\end{aligned} \tag{4.103}$$

olup tam koşullu sonsal dağılımı, $\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X}\mathbf{D}_h^{-1}\mathbf{y}$ ortalama vektörlü ve $\sigma^2\mathbf{R}^{-1}$ kovaryans matrisli çok değişkenli Normal dağılımdır. Bu durumda, $\boldsymbol{\beta}$ 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} = (\mathbf{X}\mathbf{D}_h^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{D}_\tau^{-1})^{-1} \mathbf{X}\mathbf{D}_h^{-1}\mathbf{y} \quad (4.104)$$

eşitliği ile tanımlanır. σ^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu ise

$$\begin{aligned} P(\sigma^2 | \boldsymbol{\beta}, h, \tau^2, y, x) &\propto \sigma^{-3n-p-2} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{i=1}^n \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{h_i} + \sum_{i=1}^n h_i + \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} \right] \right) \\ &\propto (\sigma^2)^{\frac{-3n-p-2}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left[(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^n h_i \right] \right) \end{aligned} \quad (4.105)$$

biçiminde ifade edilir. Buradan görüldüğü gibi σ^2 'nin tam koşullu sonsal dağılımı, $(3n+p)$ serbestlik dereceli ve $\frac{1}{(3n+p)} \left((\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})' \mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \boldsymbol{\beta} + \sum_{i=1}^n h_i \right)$ ölçek parametrelili ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımı olup robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})' \mathbf{D}_h^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) + \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}' \mathbf{D}_\tau^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} + \sum_{i=1}^n \hat{h}_{i_{rbayes}}}{3n+p-2} \quad (4.106)$$

şeklinde bulunur.

$i = 1, 2, \dots, n$ için h_i 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(h_i | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, y_i, \mathbf{x}_i) \propto (h_i)^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} \left[\frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2 h_i} + \frac{h_i}{\sigma^2} \right] \right) \quad (4.107)$$

olup tam koşullu sonsal dağılımı; $p^* = 1/2$, $a^{**} = \sigma^{-2}$ ve $b^{**} = \frac{(y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta})^2}{\sigma^2}$ parametrelili genelleştirilmiş ters Normal dağılımdır. Bu durumda h_i 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{h}_{i_{rbayes}} = \frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right| \kappa_{3/2} \left(\frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2} \right)}{\kappa_{1/2} \left(\frac{\left| y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2} \right)} \quad (4.108)$$

olarak elde edilir. Burada $\kappa_p(\cdot)$, ikinci tür uyarlanmış bessel fonksiyonudur.

$j = 1, 2, \dots, p$ için τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu,

$$P(\tau_j^2 | \boldsymbol{\beta}, \sigma^2, \nu) \propto (\tau_j^2)^{\frac{-\nu-3}{2}} \exp \left(-\frac{1}{2\tau_j^2} \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2} + \nu \right) \right) \quad (4.109)$$

olmak üzere bu yoğunluk, $(\nu+1)$ serbestlik dereceli ve $\frac{1}{(\nu+1)\sigma^2} (\beta_j^2 + \nu\sigma^2)$ ölçek parametrelili ölçeklendirilmiş ters ki-kare dağılımı yoğunluğuna benzemektedir. τ_j^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\tau}_{j_{rbayes}}^2 = \frac{(\hat{\beta}_{j_{rbayes}} + \nu \hat{\sigma}_{rbayes}^2)}{\hat{\sigma}_{rbayes}^2 (\nu - 1)} \quad (4.110)$$

eşitliği şeklinde tanımlanır.

Hata terimlerinin RN ve $\boldsymbol{\beta}$ 'nin önselinin t dağıldığı durum:

Hata terimlerinin RN dağılımına, $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörü önselinin p boyutlu t dağılımına ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayalım. Bu varsayımlar

kullanılarak oluşturulan RN hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modeli hiyerarşik olarak,

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, a, b) \quad \left(y_i | \mathbf{x}_i, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b \stackrel{iid}{\sim} RN(\mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \right)$$

$$\boldsymbol{\beta} \sim t_p(\mathbf{0}_p, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{\beta}} = \sigma^2 \mathbf{I}_p, \nu)$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\beta} | \tau_j^2, \sigma^2 \sim N_p(\mathbf{0}_p, \sigma^2 \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}}) \quad , \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{\tau}} = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_p^2)$$

$$\tau_j^2 | \nu \sim IGa\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right) \quad , \quad \tau_j^2 > 0 \quad , \quad \nu_2 > 0$$

$$\sigma \sim P(\sigma) \propto \sigma^{-1}$$

şeklinde tanımlanabilir. Model parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \tau^2 | y, x, a, b, \nu) \propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b)$$

$$\propto (P(\boldsymbol{\beta} | \sigma) P(\sigma)) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b)$$

$$\propto \left(\left[\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2, \tau_j^2) P(\tau_j^2 | \nu) \right] P(\sigma) \right) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b)$$

$$\propto \left(\left[\prod_{j=1}^p f_N(\beta_j | 0, \sigma^2 \tau_j^2) f_{IGa}(\tau_j^2 | \nu/2, \nu/2) \right] (\sigma^{-1}) \right)$$

$$\times \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp\left(- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})\right)$$

$$\propto \left(\prod_{j=1}^p \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{\tau_j^2}} \exp\left(- \frac{1}{2\sigma^2 \tau_j^2} \beta_j^2\right) \right] \left[(\tau_j^2)^{-\frac{\nu}{2}-1} \exp\left(- \frac{\nu}{2\tau_j^2}\right) \right] \right)$$

$$\times (\sigma^{-1}) \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp\left(- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})\right)$$

olup burada yer alan $\gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})$ fonksiyonunun (4.22) eşitliğindeki seri açılımının kullanılması durumunda bu yoğunluk aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$\begin{aligned}
 P(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \tau^2 | y, x, a, b, v) \propto & \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[-(ba^{2/b})^{-1} (\frac{2}{b} - 1)!] \\
 & \times \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \right) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})^k}{k!} \\
 & - \sum_{j=1}^p \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + v \tau_j^2 \right) \left(\prod_{j=1}^p (\tau_j^2)^{\frac{(-v-3)}{2}} \right)
 \end{aligned} \tag{4.111}$$

Elde edilen bu yoğunluk kullanılarak $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları,

$$\begin{aligned}
 P(\boldsymbol{\beta} | \sigma, \tau^2, y, x, a, b) \propto & \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(ba^{2/b})^{-1} (\frac{2}{b} - 1)! \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \\
 & \times \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})^k}{k!} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2}]
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

$$\begin{aligned}
 P(\sigma | \boldsymbol{\beta}, \tau^2, y, x, a, b) \propto & \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(ba^{2/b})^{-1} (\frac{2}{b} - 1)! \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \\
 & \times \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})^k}{k!} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2}]
 \end{aligned} \tag{4.113}$$

olarak ifade edilir. "b" parametresinin özel durumları için ise bu yoğunluklar aşağıdaki gibi tanımlanır.

1.durum : b = 1

Parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \tau^2 | y, x, a) \propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[-(a^{-2})n + (a^{-2}) \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma})] \\ \times (1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) - \sum_{j=1}^p \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + v \tau_j^2 \right) \left(\prod_{j=1}^p (\tau_j^2)^{\frac{(-v-3)}{2}} \right)$$

olup $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları sırasıyla,

$$P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \tau^2, y, x, a) \propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(a^{-2}) \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma})] (1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) \\ - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2}]$$

$$P(\sigma | \boldsymbol{\beta}, \tau^2, y, x, a) \propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(a^{-2}) \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma})] \\ \times (1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2}]$$

(4.114)

şeklinde bulunur.

2.durum : $b = 2$

Parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \tau^2 | y, x, a) \propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[-(2a)^{-1}n \\ + (2a)^{-1} \sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{a}{\sigma^2} |y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2\right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + v \tau_j^2 \right)] \\ \times \left(\prod_{j=1}^p (\tau_j^2)^{\frac{(-v-3)}{2}} \right)$$

olup $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları sırasıyla,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \tau^2, y, x, a) &\propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(2a)^{-1} \sum_{i=1}^n \exp(-\frac{a}{\sigma^2} |y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2}] \\
P(\sigma | \boldsymbol{\beta}, \tau^2, y, x, a) &\propto \sigma^{-p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(2a)^{-1} \sum_{i=1}^n \exp(-\frac{a}{\sigma^2} |y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2}]
\end{aligned} \tag{4.115}$$

olarak elde edilir.

$j = 1, 2, \dots, p$ için τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu ise

$$P(\tau_j^2 | \boldsymbol{\beta}, \sigma, y, x, a, b, v) \propto (\tau_j^2)^{\frac{(-v-3)}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + v \tau_j^2 \right)\right) \tag{4.116}$$

olmak üzere tam koşullu sonsal dağılımı, $p^* = \frac{(-v-1)}{2}$, $a^{**} = v$ ve $b^{**} = \frac{\beta_j^2}{\sigma^2}$ parametrelili genelleştirilmiş ters Normal dağılımdır. Bu durumda τ_j^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\tau}_{jrbayes}^2 = \frac{\left| \hat{\beta}_{jrbayes} \right| \kappa_{\frac{(-v+1)}{2}} \left(\frac{\sqrt{v} \left| \hat{\beta}_{jrbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}} \right)}{\sqrt{v} \hat{\sigma}_{rbayes} \kappa_{\frac{(-v-1)}{2}} \left(\frac{\sqrt{v} \left| \hat{\beta}_{jrbayes} \right|}{\hat{\sigma}_{rbayes}} \right)} \tag{4.117}$$

olarak elde edilir.

τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğunun bilindik bir dağılımın yoğunluğuna benzemesi sebebiyle robust Bayesyen tahmin edicisinin elde edilebildiği görülmektedir. $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunluklarının ise belli bir dağılımın yoğunluğuna benzememesi nedeniyle tahmin edicilerin direkt elde edilemeyeceği ancak aşağıda belirtildiği gibi iteratif çözüm yolu kullanılarak ağırlıklandırılmış formda yazılabileceği söylenebilir.

İteratif çözüm:

β parametre vektörü önsel dağılımının p boyutlu t dağılımına ve σ 'nın bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayılınsın. Bu durumda β ve σ 'nın robust bileşik önsel yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
 P(\beta, \sigma) &\propto P(\beta|\sigma) P(\sigma) \\
 &\propto t(\beta_0, \Sigma_\beta, \nu) (\sigma^{-1}) \\
 &\propto \left(1 + \frac{1}{\nu} (\beta - \beta_0)' (\sigma^2 \Sigma_0)^{-1} (\beta - \beta_0)\right)^{-\frac{(\nu+p)}{2}} (\sigma^{-1}) \\
 &\propto \left(\nu + (\beta - \beta_0)' \sigma^{-2} \Sigma_0^{-1} (\beta - \beta_0)\right)^{-\frac{(\nu+p)}{2}} (\sigma^{-1})
 \end{aligned} \tag{4.118}$$

şeklinde elde edilir. Burada β_0 ve Σ_0 sırasıyla β 'nın p boyutlu önsel ortalama vektörü ve $p \times p$ boyutlu önsel ölçek matrisi olup ν ise t dağılımının serbestlik derecesidir. Elde edilen bu bileşik önsel yoğunluğun (4.19) ifadesindeki olabilirlik fonksiyonu ile birleştirilmesi sonucunda parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
 P(\beta, \sigma | y, x, \beta_0, \Sigma_0, a, b, \nu) &\propto \sigma^{-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \left(\nu + (\beta - \beta_0)' \sigma^{-2} \Sigma_0^{-1} (\beta - \beta_0) \right)^{-\frac{(\nu+p)}{2}} \\
 &\times \exp \left[- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - x_i' \beta|^b}{\sigma^b}) \right]
 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda parametrelerin log-sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
 \ln P(\beta, \sigma | y, x, \beta_0, \Sigma_0, a, b, \nu) &\propto (-\ln \sigma) - \ln \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) - \frac{(\nu+p)}{2} \ln \left[\nu + (\beta - \beta_0)' \sigma^{-2} \right. \\
 &\times \Sigma_0^{-1} (\beta - \beta_0) \left. \right] - \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - x_i' \beta|^b}{\sigma^b})
 \end{aligned} \tag{4.119}$$

biçiminde tanımlanır. Bu yoğunluğun β 'ya göre kısmi türevi,

$$\left. \frac{\partial \ln P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, a, b, v)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \right|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0$$

$$\left(-\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \boldsymbol{\beta}) / A_i \right) - \frac{(v+p)\sigma^{-2}\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)}{v + (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' \sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)} + \sigma^{-2} \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \times \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}) \Big|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b}) \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) = (\hat{\sigma}_{rbayes}^2) \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \right) + \frac{(v+p)\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)}{v + (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)' \sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)}$$

olup bu ifadede $s = (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)' \sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)$ (σ biliniyor) ve RN hata dağılımına

dayalı ağırlık değerleri tahmini, $\hat{w}_{i(RN_{bayes})} = \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b})$ yerine yazıldığında

eşitlik,

$$\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) = \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \right) + \left(\frac{(v+p)}{v+s} \left(\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0) \right) \right)$$

şeklinde ifade edilir. Burada t önseline dayalı ağırlık değerleri tahmini, $\hat{w}_{0(t)} = \frac{(v+p)}{(v+s)}$

olarak tanımlandığında bu eşitlik,

$$\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i y_i - \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} = \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \right) + \hat{w}_{0(t)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \hat{w}_{0(t)} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} \boldsymbol{\beta}_0$$

biçiminde elde edilir ve β 'nın robust bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{rbayes} = \left(X'WX + \hat{w}_{0(t)}\Sigma_0^{-1} \right)^{-1} (X'Wy + \hat{w}_{0(t)}\Sigma_0^{-1}\beta_0 - \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i) \quad (4.120)$$

Burada $(\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i$ ifadesi limit durumunda sıfıra yaklaşmaktadır (Ramsay ve Novick 1980). Bu durumda β 'nın robust Bayesyen tahmin edicisi,

$\hat{\beta}_{rbayes} = \left(X'WX + \hat{w}_{0(t)}\Sigma_0^{-1} \right)^{-1} (X'Wy + \hat{w}_{0(t)}\Sigma_0^{-1}\beta_0)$ olarak tanımlanır. W matrisi ise köşegen elemanları $\hat{w}_{i(RN_{bayes})}$ olan köşegen bir matris olup bu matrisin elemanlarının $\hat{\beta}_{rbayes}$ tahmin edicisini içermesi nedeniyle eşitliğin açık çözümü olmayıp tahminlerin elde edilebilmesi için nümerik yöntemlerin kullanılması gerekmektedir.

Benzer şekilde σ^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi ise (4.119) eşitliğinde yer alan log-sonsalm σ 'ya göre kısmi türevi alınarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \ln P(\beta, \sigma | y, x, \beta_0, \Sigma_0, a, b, v)}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\beta = \hat{\beta}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0 \\ & - (\hat{\sigma}_{rbayes})^{-1} - \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i \right) + \hat{w}_{0(t)} \hat{\sigma}_{rbayes}^{-3} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0) \\ & + \hat{\sigma}_{rbayes}^{-3} \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} (y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes})^2 = 0 \\ & \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \left(\hat{\sigma}_{rbayes} \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i \right) + 1 \right) = \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} (y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes})^2 \\ & + \hat{w}_{0(t)} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0) \\ & \hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \left(\hat{\sigma}_{rbayes} \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i \right) + 1 \right)^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} (y_i - x_i' \hat{\beta}_{rbayes})^2 \\ & + \hat{w}_{0(t)} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0)' \Sigma_0^{-1} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0) \end{aligned} \quad (4.121)$$

Burada $(\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i$ ifadesi, limit durumunda i 'ye bağılı olmayan bir değere yakınsamaktadır (Ramsay ve Novick 1980). Elde edilen bu eşitliğin $\hat{\sigma}_{rbayes}$ 'i içermesi sebebiyle σ^2 'nin robust bayesyen tahminlerinin bulunabilmesi için nümerik yöntemler kullanılmalıdır.

Hata terimlerinin RN ve β 'nin önselinin Laplace dağıldığı durum:

Hata terimlerinin RN dağılımına, β parametre vektörü önselinin p boyutlu Laplace dağılımına ve σ^2 'nin ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayalım. Bu varsayım altında oluşturulan RN hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeli hiyerarşik olarak,

$$\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, a, b) \quad \left(y_i | x_i, \beta, \sigma, a, b \stackrel{iid}{\sim} RN(x_i' \beta, \sigma, a, b) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \right)$$

$$\beta \sim L_p(\mathbf{0}_p, \sigma \mathbf{I}_p)$$

$\Downarrow$

$$\beta | \sigma^2, \tau_j^2 \sim N_p(\mathbf{0}_p, \sigma^2 \mathbf{D}_\tau) \quad , \quad \mathbf{D}_\tau = \text{diag}(\tau_1^2, \tau_2^2, \dots, \tau_p^2)$$

$$\tau_j^2 | \sigma^2 \sim \text{Üstel} \left(\frac{1}{2\sigma^2} \right) \quad , \quad \tau_j^2 > 0$$

$$\sigma \sim P(\sigma) \propto \sigma^{-1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Model parametrelerinin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\beta, \sigma, \tau^2 | y, x, a, b) \propto P(\beta, \sigma) P(y | x, \beta, \sigma, a, b)$$

$$\propto (P(\beta | \sigma) P(\sigma)) P(y | x, \beta, \sigma, a, b)$$

$$\propto \left(\prod_{j=1}^p P(\beta_j | \sigma^2, \tau_j^2) P(\tau_j^2 | \sigma^2) \right) P(\sigma) P(y | x, \beta, \sigma, a, b)$$

$$\begin{aligned}
& \propto \left(\left[\prod_{j=1}^p f_N(\beta_j | 0, \sigma^2 \tau_j^2) f_{\text{Üstel}}(\tau_j^2 | (1/2\sigma^2)) \right] (\sigma^{-1}) \right) \\
& \times \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left(- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \right) \\
& \propto \left(\prod_{j=1}^p \frac{1}{\sigma \sqrt{\tau_j^2}} \exp \left(- \frac{1}{2\sigma^2 \tau_j^2} \beta_j^2 \right) \frac{1}{\sigma^2} \exp \left(- \frac{1}{2\sigma^2} \tau_j^2 \right) \right) (\sigma^{-1}) \\
& \times \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left(- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \right)
\end{aligned} \tag{4.122}$$

olup $\gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})$ fonksiyonunun (4.22) eşitliğindeki seri açılımının kullanılması durumunda bu yoğunluk ,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \tau^2 | y, x, a, b) & \propto \sigma^{-3p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left[- (ba^{2/b})^{-1} \left(\frac{2}{b} - 1 \right)! \right. \\
& \times \sum_{i=1}^n \left(1 - \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})^k}{k!} \right) \left. \right] \\
& \times \left(\prod_{j=1}^p \tau_j^2 \right)^{-1/2} \exp \left(- \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \left(\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2 \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.123}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları sırasıyla,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma, \tau^2, y, x, a, b) & \propto \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left[(ba^{2/b})^{-1} \left(\frac{2}{b} - 1 \right)! \sum_{i=1}^n \exp \left(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b} \right) \right. \\
& \times \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})^k}{k!} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} \left. \right]
\end{aligned} \tag{4.124}$$

$$\begin{aligned}
P(\sigma|\boldsymbol{\beta}, \tau^2, y, x, a, b) &\propto \sigma^{-3p-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp[(ba^{2/b})^{-1} (\frac{2}{b}-1)! \\
&\times \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \sum_{k=0}^{\frac{2}{b}-1} \frac{(a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b})^k}{k!} \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2 \Big]
\end{aligned}
\tag{4.125}$$

şeklinde elde edilmiştir. Elde edilen bu yoğunluklar, “b” parametresinin özel durumları için aşağıdaki gibi tanımlanır.

1.durum : $b=1$

Parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \tau^2 | y, x, a) &\propto \sigma^{-3p-1} \exp[-a^{-2}n + (a^{-2}) \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) \\
&\times (1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) - \sum_{j=1}^p \frac{1}{2\sigma^2} (\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2)] (\prod_{j=1}^p \tau_j^2)^{-1/2}
\end{aligned}$$

olup $\boldsymbol{\beta}$ ve σ ’nın tam koşullu sonsal yoğunlukları sırasıyla,

$$\begin{aligned}
P(\boldsymbol{\beta} | \sigma^2, \tau^2, y, x, a) &\propto \exp[(a^{-2}) \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) (1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2}]
\end{aligned}
\tag{4.126}$$

$$\begin{aligned}
P(\sigma | \boldsymbol{\beta}, \tau^2, y, x, a) &\propto \sigma^{-3p-1} \exp[(a^{-2}) \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) (1 + a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|}{\sigma}) \\
&\quad - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2]
\end{aligned}
\tag{4.127}$$

olarak ifade edilir.

2.durum : $b = 2$

Parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu,

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma, \tau^2 | y, x, a) \propto \sigma^{-3p-1} \exp[-(2a)^{-1}n + (2a)^{-1} \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2}{\sigma^2}) - \sum_{j=1}^p \frac{1}{2\sigma^2} (\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2)] (\prod_{j=1}^p \tau_j^2)^{-1/2}$$

olup $\boldsymbol{\beta}$ ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları sırasıyla,

$$P(\boldsymbol{\beta} | \sigma, \tau^2, y, x, a) \propto \exp[(2a)^{-1} \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2}{\sigma^2}) - \sum_{j=1}^p \frac{1}{2\sigma^2} (\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2})] \quad (4.128)$$

$$P(\sigma | \boldsymbol{\beta}, \tau^2, y, x, a) \propto \sigma^{-3p-1} \exp[(2a)^{-1} \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^2}{\sigma^2}) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^p \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2] \quad (4.129)$$

şeklinde tanımlanır.

$j = 1, 2, \dots, p$ için τ_j^2 'nin tam koşullu sonsal yoğunluğu ise,

$$P(\tau_j^2 | \boldsymbol{\beta}, \sigma, y, x, a, b) \propto (\tau_j^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\frac{\beta_j^2}{\tau_j^2} + \tau_j^2\right)\right) \quad (4.130)$$

$$\propto (\tau_j^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_j^2}{\sigma^2 \tau_j^2} + \frac{\tau_j^2}{\sigma^2}\right)\right)$$

olup bu yoğunluğun formu $p^* = \frac{1}{2}$, $a^{**} = \sigma^{-2}$ ve $b^{**} = \frac{\beta_j^2}{\tau_j^2}$ parametrelili genelleştirilmiş

ters Normal dağılımı yoğunluğuna benzemektedir. Bu durumda τ_j^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\tau}_{jrbayes}^2 = \frac{\left| \hat{\beta}_{jrbayes} \right| \hat{\sigma}_{rbayes} \kappa_{3/2} \left(\frac{\left| \beta_j \right|}{\tau_j^2 \sigma} \right)}{\kappa_{1/2} \left(\frac{\left| \beta_j \right|}{\tau_j^2 \sigma} \right)} \quad (4.131)$$

olarak elde edilir. Burada $\kappa_p(.)$, ikinci türden uyarlanmış Bessel fonksiyonudur.

Görüldüğü gibi RN hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeli parametrelerinden β ve σ 'nın tam koşullu sonsal yoğunlukları belli bir dağılımın yoğunluğuna benzememektedir. Bu nedenle tahmin edicilerin açık şekilde ifade edilemeyeceği ancak aşağıdaki işlemlerin yapılması durumunda ağırlıklandırılmış formatta yazılabileceği söylenebilir.

İteratif çözüm:

β parametre vektörü önselinin p boyutlu Laplace dağılımına, σ 'nın ise bilgi içermeyen önsel dağılıma sahip olduğu varsayalım. Bu varsayım altında β ve σ 'nın robust bileşik önsel yoğunluğu,

$$\begin{aligned} P(\beta, \sigma) &\propto P(\beta|\sigma) P(\sigma) \\ &\propto L(\beta_0, \Sigma_\beta) (\sigma^{-1}) \\ &\propto \left[\exp \left(- \left((\beta - \beta_0)' (\Sigma_\beta^{-1}) (\beta - \beta_0) \right)^{1/2} \right) \right] \sigma^{-1} \\ &\propto \left[\exp \left(- \left((\beta - \beta_0)' (\sigma^2 \Sigma_0)^{-1} (\beta - \beta_0) \right)^{1/2} \right) \right] \sigma^{-1} \end{aligned} \quad (4.132)$$

olarak elde edilir. Burada β_0 , β 'nin “ p ” boyutlu önsel ortalama vektörü olup Σ_0 ise $p \times p$ boyutlu önsel ölçek matrisidir. Elde edilen bu bileşik önsel yoğunluk, (4.19) ifadesindeki olabilirlik fonksiyonu ile birleştirilir ve parametrelerin bileşik sonsal yoğunluğu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, a, b) \propto P(\boldsymbol{\beta}, \sigma) P(y | x, \boldsymbol{\beta}, \sigma, a, b)$$

$$\propto \sigma^{-1} \left(\prod_{i=1}^n A_i^{-1} \right) \exp \left[- \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) - \left((\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' \sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) \right)^{1/2} \right]$$

Parametrelerin log-sonsal yoğunluğu ise,

$$\begin{aligned} \ln P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, a, b) &\propto (-\ln(\sigma)) - \ln \left(\prod_{i=1}^n A_i \right) - \sum_{i=1}^n (ba^{2/b})^{-1} \\ &\quad \times \gamma(2/b, a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) - \left((\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' \sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (4.133)$$

olarak bulunur. Bu yoğunluğun $\boldsymbol{\beta}$ 'ya göre kısmi türevi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, a, b)}{\partial \boldsymbol{\beta}} \bigg|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} &= 0 \\ \left(- \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \boldsymbol{\beta}) / A_i \right) + \sigma^{-2} \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}|^b}{\sigma^b}) \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \boldsymbol{\beta}) - \sigma^{-2} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{2} \left((\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0)' \sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) \right)^{-1/2} 2 \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_0) \right) \bigg|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b}) \mathbf{x}_i (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) - \left((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)' \sigma^{-2} \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0) \right)^{-1/2} \\ &\quad \times \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0) = \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}) / A_i \end{aligned}$$

olup burada RN hata dağılımına ve Laplace önseline dayalı ağırlık değerleri tahminleri

$$\hat{w}_{i(RN_{bayes})} = \exp(-a \frac{|y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes}|^b}{\hat{\sigma}_{rbayes}^b})$$

$$\hat{w}_{0(L)} = \left((\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0)' \sigma^{-2} \Sigma_0^{-1} (\hat{\beta}_{rbayes} - \beta_0) \right)^{-1/2} \quad (\sigma \text{ biliniyor})$$

yerine yazıldığında eşitlik,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^n \hat{w}_i \mathbf{x}_i y_i - \sum_{i=1}^n \hat{w}_i \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' \hat{\beta}_{rbayes} \right] &= \hat{w}_{0(L)} \Sigma_0^{-1} \hat{\beta}_{rbayes} - \hat{w}_{0(L)} \Sigma_0^{-1} \beta_0 \\ &+ \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i \end{aligned}$$

olarak tanımlanır ve β 'nın robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{rbayes} &= \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i' + \hat{w}_{0(L)} \Sigma_0^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} \mathbf{x}_i y_i + \hat{w}_{0(L)} \Sigma_0^{-1} \beta_0 \right. \\ &\quad \left. - \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i \right) \right) \end{aligned}$$

eşitliği şeklinde elde edilir. $\mathbf{W}$, köşegen elemanları $\hat{w}_{i(RN_{bayes})}$ olan köşegen bir matris olmak üzere elde edilen bu tahmin edici matris formatında,

$$\hat{\beta}_{rbayes} = \left(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X} + \hat{w}_{0(L)} \Sigma_0^{-1} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y} + \hat{w}_{0(L)} \Sigma_0^{-1} \beta_0 - \hat{\sigma}_{rbayes}^2 \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i \right) \right) \quad (4.134)$$

olarak ifade edilebilir. $\mathbf{W}$ matrisinin elemanlarında $\hat{\beta}_{rbayes}$ yer aldığından bu eşitliğin açık şekilde çözümü olmayıp tahminlerin bulunmasında nümerik yöntemler kullanılmalıdır.

Bu eşitlikte yer alan $\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\beta}_{rbayes}) / A_i$ ifadesinin limiti sıfıra yaklaşmaktadır (Ramsay ve Novick 1980). Bu durumda β 'nın robust Bayesyen tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{rbayes} = \left(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{X} + \hat{w}_{0(L)} \Sigma_0^{-1} \right)^{-1} \left(\mathbf{X}' \mathbf{W} \mathbf{y} + \hat{w}_{0(L)} \Sigma_0^{-1} \beta_0 \right) \text{ olarak elde edilir.}$$

σ^2 'nin robust Bayesyen tahmin edicisi ise benzer şekilde (4.133) eşitliğindeki log-sonsallın σ 'ya göre kısmi türevi alınarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial \ln P(\boldsymbol{\beta}, \sigma | y, x, \boldsymbol{\beta}_0, \boldsymbol{\Sigma}_0, a, b)}{\partial \sigma} \right|_{\substack{\boldsymbol{\beta} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} \\ \sigma = \hat{\sigma}_{rbayes}}} = 0 \\
& - (\hat{\sigma}_{rbayes})^{-1} - \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i \right) + \hat{\sigma}_{rbayes}^{-3} \sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})^2 + \hat{\sigma}_{rbayes}^{-2} \\
& \times \left((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0) \right)^{1/2} = 0 \\
& \hat{\sigma}_{rbayes}^2 = \left(\hat{\sigma}_{rbayes} \left(\sum_{i=1}^n (\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i \right) + 1 \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \hat{w}_{i(RN_{bayes})} (y_i - \mathbf{x}_i' \hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes})^2 \right. \\
& \quad \left. + \hat{w}_{0(L)} \left((\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0)' \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\hat{\boldsymbol{\beta}}_{rbayes} - \boldsymbol{\beta}_0) \right) \right) \quad (4.135)
\end{aligned}$$

Bu eşitlikte yer alan $(\partial A_i / \partial \hat{\sigma}_{rbayes}) / A_i$ ifadesinin limiti i 'ye bağlı olmayan bir değere yaklaşmaktadır (Ramsay ve Novick 1980). Elde edilen bu eşitliğin $\hat{\sigma}_{rbayes}$ 'i içermesi nedeniyle σ^2 'nin robust bayesyen tahminleri nümerik yöntemler kullanılarak bulunabilir.

4.3 Simülasyon Çalışması

Bu bölümde, hata terimleri dağılımı ve $\boldsymbol{\beta}$ parametre vektörü önseli için Bölüm 4'te farklı dağılım varsayımları altında oluşturulan regresyon modellerine ilişkin robust bayesyen parametre tahminleri ve RMSE değerleri simülasyon çalışması yapılarak elde edilmiştir. Çalışma, MCMC simülasyon yöntemlerinden Gibbs ve Metropolis-Hasting örnekleme algoritmaları kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Simülasyon, R ve WinBUGS yazılım programları üzerinden R2WinBUGS paketi kullanılarak yürütülmüştür.

Çalışmada, Bölüm 3'de yer alan simülasyon çalışmasında olduğu gibi $k=3$ ve $k=5$ bağımsız değişkenli

$$\text{Model 1: } y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Model 2: } y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i5} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

çoklu doğrusal regresyon modelleri kullanılmıştır.

Her iki model için de örneklem genişliği $n = 30, 50$ ve 100 olarak alınmış ve modellerde yer alan bağımsız değişkenlere ilişkin gözlemler (x_{ij}) birbirinden bağımsız olarak Uniform dağılımından $(U(-5,5))$ üretilmiştir. Ele alınan her model için parametre vektörleri ve hata terimleri varyansı gerçek değerlerinin sırasıyla $\beta = (1,1,1,1)'$, $\beta = (1,1,1,1,1,1)'$ ve $\sigma^2 = 1$ olduğu varsayılmıştır.

Bu çalışmada, söz konusu modellerin hata terimleri ve β parametre vektörü önsel dağılımlarına ilişkin aşağıda belirtilen dört durum ele alınmıştır.

Durum I: (Hata terimleri: kalın kuyruklu dağılım ve önsel: bilgi içermeyen dağılım)

(i) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} t(0, \sigma^2, 3)$, 3 serbestlik dereceli t dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, \dots, k$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(ii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} L(0, \sigma)$, Laplace dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, \dots, k$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(iii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, 0.05, 2)$, RN dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, \dots, k$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

Durum II: (Hata terimleri: kalın kuyruklu dağılım ve önsel: Normal dağılım)

(i) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} t(0, \sigma^2, 3)$, 3 serbestlik dereceli t dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, k$, standart Normal dağılım-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(ii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} L(0, \sigma)$, Laplace dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, k$, standart Normal dağılım-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(iii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, 0.05, 2)$, RN dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} N(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, k$, standart Normal dağılım-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

Durum III: (Hata terimleri: Normal dağılım ve önsel: kalın kuyruklu dağılım)

(i) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, Normal dağılım

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, \dots, k$, 3 serbestlik dereceli t dağılımı-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(ii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$, Normal dağılım

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} L(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, k$, standart Laplace dağılımı-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

Durum IV: (Hata terimleri ve önsel : kalın kuyruklu dağılım)

(i) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} t(0, \sigma^2, 3)$, 3 serbestlik dereceli t dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, \dots, k$, 3 serbestlik dereceli t dağılımı-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(ii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} L(0, \sigma)$, Laplace dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} L(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, k$, standart Laplace dağılımı-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(iii) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} t(0, \sigma^2, 3)$, 3 serbestlik dereceli t dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} L(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, k$, standart Laplace dağılımı-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(iv) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} L(0, \sigma)$, Laplace dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, \dots, k$, “3” serbestlik dereceli t dağılımı-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(v) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, 0.05, 2)$, RN dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, \dots, k$, “3” serbestlik dereceli t dağılımı-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

(vi) $\varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} RN(0, \sigma, 0.05, 2)$, RN dağılımı

$\beta_j \stackrel{iid}{\sim} L(0, 1)$, $j = 1, 2, \dots, k$, standart Laplace dağılımı-bilgi içeren önsel

$\beta_0 \sim N(0, 10^4)$ ve $P(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2} \sim Ga(0.001, 0.001)$, bilgi içermeyen önsel

Sözü edilen durumlar ve varsayımlar dikkate alınarak çalışmada ele alınan $k = 3$ ve $k = 5$ bağımsız değişken içeren regresyon modellerinden (x_j, y_i) veri setleri üretilmiştir. Sonrasında model değişkenlerine ilişkin üretilen bu veri setlerine $x-$, $y-$ ve $x-y$ yönlerinde örneklem genişliğinin %2, %5 ve %10’una denk gelecek sayıda aykırı gözlem eklenmiş ve söz konusu regresyon modellerine yönelik elde edilen parametre tahminlerinin bu gözlemlerden etkilenip etkilenmediği araştırılmıştır. Aykırı gözlemler, değişkenlerin ilk değerlerine “100” sabiti eklenerek oluşturulmuştur.

Bu çalışmada, 1000 yinelemeli ve 100 burn-in periyotlu MCMC simülasyonu “100” kez tekrarlanmış ve yukarıda ifade edilen tüm durumlardaki regresyon modelleri için bayesyen ve robust Bayesyen parametre tahminlerinin ampirik ortalaması ve RMSE değerleri aşağıdaki çizelgelerde görüldüğü gibi elde edilmiştir.

Durum I için simülasyon sonuçları:

t, Laplace ve RN hata terimleri dağılımlarından herhangi birine ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı $k = 3$ ve $k = 5$ bağımsız değişken içeren regresyon modellerine ilişkin elde edilen parametre tahmin sonuçları, **çizelge 4.1.a-4.3.b**’de yer almaktadır.

Çizelge 4.1.a ve çizelge 4.1.b'de t hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine (t-NI) yönelik parametre tahminleri verilmiştir. Bu tahminlerin veri setinde “1” ve “2” aykırı gözlem olması durumunda tüm yönlerde bu gözlemlerden fazla etkilenmediği söylenebilir. Ancak aykırı gözlem sayısının artması durumunda ise $x-$ ve $x-y$ yönlerindeki aykırı gözlemlerden oldukça etkilenen ancak $y-$ yönündeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahminler elde edilmiştir. Örneklem genişliğinin arttırılması durumunda ise daha küçük RMSE değerli $y-$ yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust olan Bayesyen tahminler bulunmuştur.

Çizelge 4.1 a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	$x-$	0.972 (0.303)	0.861 (0.204)	0.876 (0.202)	0.862 (0.207)	1.188 (0.317)
		$y-$	0.987 (0.223)	0.991 (0.093)	1.025 (0.096)	1.003 (0.085)	1.098 (0.245)
		$x-y$	0.988 (0.230)	0.973 (0.096)	1.013 (0.098)	0.985 (0.092)	1.273 (0.383)
	3	$x-$	0.820 (1.119)	0.019 (1.019)	-0.002 (1.047)	-0.011 (1.045)	4.179 (3.244)
		$y-$	1.001 (0.225)	0.991 (0.092)	1.033 (0.107)	1.005 (0.088)	1.512 (0.608)
		$x-y$	0.958 (1.087)	0.013 (1.022)	0.011 (1.039)	-0.014 (1.049)	5.320 (4.401)

Çizelge 4.1 a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
50	1	x-	0.990 (0.192)	0.991 (0.067)	0.979 (0.068)	0.990 (0.069)	1.064 (0.145)
		y-	0.993 (0.191)	0.998 (0.067)	0.987 (0.066)	0.997 (0.069)	1.063 (0.144)
		x-y	0.989 (0.196)	0.985 (0.068)	0.976 (0.070)	0.986 (0.070)	1.1499 (0.209)
	3	x-	0.982 (0.927)	0.010 (1.006)	-0.033 (1.054)	0.032 (0.987)	4.146 (3.187)
		y-	0.994 (0.199)	0.996 (0.068)	0.988 (0.067)	0.996 (0.069)	1.234 (0.284)
		x-y	1.052 (0.919)	0.016 (1.002)	-0.005 (1.030)	0.044 (0.979)	4.639 (3.714)
	5	x-	0.985 (0.954)	0.004 (1.012)	-0.033 (1.055)	0.034 (0.986)	4.146 (3.188)
		y-	1.000 (0.205)	0.996 (0.069)	0.985 (0.067)	0.997 (0.075)	1.477 (0.519)
		x-y	1.107 (0.938)	0.005 (1.012)	-0.022 (1.044)	0.026 (0.993)	5.063 (4.110)
100	2	x-	1.010 (0.148)	0.941 (0.106)	0.947 (0.106)	0.941 (0.112)	1.096 (0.169)
		y-	1.016 (0.124)	0.999 (0.045)	1.006 (0.046)	0.998 (0.040)	1.063 (0.132)
		x-y	1.015 (0.124)	0.996 (0.045)	1.003 (0.045)	0.996 (0.040)	1.063 (0.132)
	5	x-	0.867 (0.646)	0.002 (1.005)	0.008 (0.999)	0.012 (0.995)	4.193 (3.209)
		y-	1.014 (0.126)	0.998 (0.045)	1.006 (0.048)	0.997 (0.041)	1.183 (0.226)
		x-y	0.942 (0.437)	0.320 (0.695)	0.323 (0.697)	0.326 (0.692)	2.208 (1.426)
	10	x-	0.857 (0.648)	0.001 (1.006)	-0.001 (1.008)	0.011 (0.996)	4.196 (3.214)
		y-	1.024 (0.131)	0.998 (0.046)	1.006 (0.050)	0.998 (0.044)	1.482 (0.513)
		x-y	0.948 (0.624)	0.002 (1.006)	0.004 (1.004)	0.011 (0.996)	4.875 (3.894)

Çizelge 4.1 b) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	x-	0.980 (0.373)	0.841 (0.217)	0.833 (0.229)	0.856 (0.198)	0.840 (0.209)	0.861 (0.196)	1.252 (0.368)
		y-	0.985 (0.256)	0.998 (0.095)	0.986 (0.099)	1.013 (0.102)	0.994 (0.099)	1.014 (0.089)	1.148 (0.275)
		x-y	1.035 (0.597)	0.759 (0.392)	0.744 (0.421)	0.774 (0.363)	0.747 (0.436)	0.780 (0.387)	1.730 (1.160)
	3	x-	0.996 (1.431)	-0.029 (1.117)	-0.040 (1.132)	0.030 (1.042)	0.025 (1.062)	0.017 (1.068)	5.104 (4.188)
		y-	1.018 (0.284)	1.001 (0.106)	0.983 (0.109)	1.019 (0.105)	0.994 (0.102)	1.013 (0.099)	1.639 (0.732)
		x-y	1.279 (1.488)	-0.031 (1.133)	-0.048 (1.139)	0.032 (1.057)	0.010 (1.078)	0.044 (1.060)	6.550 (5.639)
50	1	x-	1.010 (0.191)	0.991 (0.067)	0.997 (0.071)	0.979 (0.068)	0.981 (0.069)	1.001 (0.064)	1.060 (0.156)
		y-	1.010 (0.189)	0.999 (0.063)	1.004 (0.069)	0.988 (0.064)	0.989 (0.066)	1.009 (0.063)	1.057 (0.154)
		x-y	1.007 (0.192)	0.994 (0.063)	0.999 (0.070)	0.983 (0.066)	0.984 (0.067)	1.004 (0.064)	1.133 (0.209)
	3	x-	0.873 (1.123)	-0.043 (1.095)	0.022 (1.026)	0.031 (1.024)	-0.018 (1.061)	0.032 (1.027)	5.114 (4.154)
		y-	1.005 (0.194)	0.998 (0.069)	1.004 (0.068)	0.987 (0.067)	0.990 (0.068)	1.010 (0.066)	1.223 (0.287)
		x-y	0.996 (1.101)	-0.035 (1.084)	0.043 (1.011)	0.023 (1.034)	-0.025 (1.068)	0.023 (1.037)	5.814 (4.850)
	5	x-	0.885 (1.161)	-0.039 (1.089)	0.023 (1.027)	0.028 (1.026)	-0.028 (1.071)	0.029 (1.028)	5.112 (4.149)
		y-	1.008 (0.197)	0.998 (0.073)	1.004 (0.073)	0.989 (0.070)	0.988 (0.072)	1.010 (0.068)	1.498 (0.557)
		x-y	1.055 (1.157)	-0.046 (1.099)	0.037 (1.016)	0.012 (1.040)	-0.015 (1.058)	0.025 (1.030)	6.258 (5.295)
100	2	x-	0.996 (0.143)	0.988 (0.117)	0.985 (0.095)	0.989 (0.096)	0.978 (0.128)	0.981 (0.113)	1.088 (0.374)
		y-	1.005 (0.121)	1.002 (0.048)	0.998 (0.040)	1.002 (0.044)	0.994 (0.046)	0.996 (0.049)	1.054 (0.122)
		x-y	1.004 (0.121)	1.001 (0.047)	0.996 (0.041)	1.000 (0.044)	0.992 (0.046)	0.994 (0.049)	1.054 (0.122)
	5	x-	1.012 (0.656)	0.038 (0.984)	-0.001 (1.020)	0.024 (1.000)	-0.030 (1.047)	-0.020 (1.039)	5.186 (4.204)
		y-	1.006 (0.122)	1.003 (0.049)	0.996 (0.043)	1.002 (0.044)	0.995 (0.049)	0.996 (0.050)	1.177 (0.217)
		x-y	1.082 (0.665)	0.032 (0.993)	-0.001 (1.020)	0.027 (0.998)	-0.023 (1.041)	-0.015 (1.034)	5.663 (4.682)
	10	x-	1.030 (0.687)	0.036 (0.987)	-0.003 (1.024)	0.024 (0.999)	-0.031 (1.048)	-0.022 (1.042)	5.196 (4.214)
		y-	1.012 (0.122)	1.003 (0.052)	0.997 (0.045)	1.003 (0.045)	0.995 (0.051)	0.998 (0.054)	1.474 (0.503)
		x-y	1.177 (0.694)	0.029 (0.994)	-0.001 (1.022)	0.032 (0.993)	-0.024 (1.042)	-0.023 (1.043)	6.058 (5.079)

Çizelge 4.2.a ve **çizelge 4.2.b**'de ise Laplace hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine (L-NI) yönelik parametre tahminleri yer almaktadır. Bu çizelgeler incelendiğinde, β_0 ve σ parametrelerine ilişkin elde edilen tahminlerin tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilendiği görülmektedir. Diğer model parametrelerinin tahminleri ise sadece y - yönündeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahminlerdir. Örneklem genişliği arttıkça bu tahminlerin RMSE değerlerinde azalma olduğu gözlenmiştir. Aykırı gözlem sayısının artması durumunda ise sözü edilen durumlarda bir değişiklik olmamıştır.

Çizelge 4.2 a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	x-	1.001 (1.384)	-0.014 (1.052)	0.011 (1.030)	0.032 (1.007)	2.090 (1.102)
		y-	1.080 (0.369)	1.003 (0.127)	1.011 (0.150)	0.996 (0.134)	2.240 (1.242)
		x-y	1.331 (1.416)	0.003 (1.044)	0.038 (1.013)	0.014 (1.032)	2.806 (1.810)
	3	x-	1.004 (1.378)	-0.054 (1.096)	-0.006 (1.047)	0.065 (0.980)	2.073 (1.085)
		y-	1.578 (0.739)	1.006 (0.229)	1.024 (0.208)	0.968 (0.219)	3.507 (2.507)
		x-y	1.847 (1.718)	-0.036 (1.105)	0.038 (1.035)	0.005 (1.062)	3.365 (2.368)
50	1	x-	1.012 (0.836)	0.020 (1.003)	0.038 (0.982)	0.016 (1.014)	2.063 (1.068)
		y-	1.073 (0.269)	0.973 (0.091)	1.003 (0.085)	0.996 (0.095)	1.854 (0.855)
		x-y	1.206 (0.898)	0.049 (0.978)	0.041 (0.984)	0.004 (1.025)	2.504 (1.507)
	3	x-	1.059 (0.944)	0.001 (1.026)	0.009 (1.015)	-0.005 (1.034)	2.057 (1.062)
		y-	1.207 (0.341)	0.960 (0.100)	1.005 (0.099)	0.997 (0.103)	2.752 (1.753)
		x-y	1.435 (1.056)	0.021 (1.010)	0.025 (1.006)	-0.026 (1.058)	2.868 (1.870)
	5	x-	1.101 (0.949)	-0.004 (1.030)	0.015 (1.009)	-0.012 (1.038)	2.055 (1.060)
		y-	1.418 (0.505)	0.956 (0.117)	1.003 (0.114)	0.982 (0.126)	3.427 (2.427)
		x-y	1.643 (1.145)	-0.015 (1.048)	0.029 (1.008)	-0.006 (1.045)	3.193 (2.194)

Çizelge 4.2 a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	0.772 (0.720)	0.027 (0.984)	0.009 (1.003)	0.029 (0.984)	2.064 (1.066)
		y-	1.043 (0.145)	0.996 (0.060)	0.992 (0.056)	1.005 (0.059)	1.844 (0.845)
		x-y	0.936 (0.386)	0.477 (0.554)	0.479 (0.543)	0.487 (0.542)	2.226 (1.227)
	5	x-	0.761 (0.732)	0.008 (1.004)	0.001 (1.013)	0.013 (1.000)	2.065 (1.068)
		y-	1.120 (0.192)	0.996 (0.065)	0.995 (0.058)	1.001 (0.065)	2.534 (1.534)
		x-y	0.999 (0.698)	0.023 (0.989)	0.004 (1.008)	0.003 (1.009)	2.687 (1.688)
	10	x-	0.752 (0.076)	0.002 (1.012)	-0.013 (1.026)	0.023 (0.991)	2.067 (1.069)
		y-	1.293 (0.334)	0.999 (0.074)	0.997 (0.071)	1.002 (0.068)	3.385 (2.386)
		x-y	1.162 (0.719)	0.005 (1.009)	0.003 (1.009)	0.009 (1.005)	3.024 (2.025)

Çizelge 4.2 b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	1.036 (1.594)	0.065 (1.033)	0.044 (1.055)	-0.039 (1.121)	-0.053 (1.131)	0.006 (1.097)	2.306 (1.320)
		y-	1.146 (0.421)	0.989 (0.136)	1.023 (0.142)	1.010 (0.162)	0.990 (0.133)	1.004 (0.142)	2.276 (1.277)
		x-y	1.474 (1.692)	0.043 (1.056)	0.042 (1.078)	-0.008 (1.105)	-0.033 (1.129)	-0.008 (1.129)	2.989 (1.995)
	3	x-	1.044 (1.739)	0.091 (1.006)	0.025 (1.066)	-0.023 (1.111)	-0.069 (1.155)	-0.020 (1.134)	2.304 (1.318)
		y-	1.957 (1.113)	0.979 (0.260)	0.999 (0.299)	1.016 (0.279)	0.939 (0.286)	1.028 (0.287)	3.612 (2.613)
		x-y	2.108 (2.059)	0.077 (1.124)	0.056 (1.114)	-0.035 (1.182)	-0.119 (1.230)	0.021 (1.162)	3.539 (2.542)

Çizelge 4.2 b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
50	1	x-	0.981 (1.181)	0.035 (1.015)	0.044 (1.003)	0.024 (1.029)	-0.013 (1.073)	-0.032 (1.080)	2.288 (1.294)
		y-	1.034 (0.262)	0.994 (0.098)	0.979 (0.086)	0.989 (0.089)	0.979 (0.076)	0.988 (0.095)	1.881 (0.883)
		x-y	1.176 (1.174)	0.023 (1.024)	0.060 (0.989)	0.023 (1.033)	-0.014 (1.067)	-0.026 (1.073)	2.699 (1.702)
	3	x-	0.991 (1.181)	0.034 (1.020)	0.028 (1.028)	0.001 (1.058)	-0.028 (1.088)	-0.025 (1.079)	2.284 (1.290)
		y-	1.215 (0.341)	0.992 (0.112)	0.986 (0.095)	0.984 (0.110)	0.981 (0.100)	0.980 (0.107)	2.797 (1.798)
		x-y	1.443 (1.307)	0.059 (1.001)	0.067 (0.999)	-0.027 (1.089)	-0.029 (1.087)	-0.043 (1.089)	3.042 (2.044)
	5	x-	0.994 (1.230)	0.069 (0.991)	0.058 (1.003)	-0.020 (1.076)	-0.055 (1.108)	-0.047 (1.096)	2.287 (1.293)
		y-	1.515 (0.595)	0.984 (0.134)	0.988 (0.116)	0.979 (0.149)	0.984 (0.138)	0.975 (0.124)	3.486 (2.487)
		x-y	1.757 (1.529)	0.038 (1.037)	0.052 (1.031)	0.031 (1.053)	-0.067 (1.137)	-0.047 (1.101)	3.363 (2.365)
100	2	x-	0.827 (0.930)	0.033 (0.990)	-0.015 (1.035)	-0.003 (1.025)	0.025 (1.002)	0.011 (1.009)	2.289 (1.292)
		y-	1.032 (0.172)	0.992 (0.064)	0.990 (0.059)	0.993 (0.055)	0.994 (0.057)	0.996 (0.063)	1.860 (0.861)
		x-y	0.930 (0.806)	0.131 (0.891)	0.096 (0.923)	0.107 (0.918)	0.134 (0.892)	0.112 (0.907)	2.491 (1.492)
	5	x-	0.815 (0.976)	0.030 (0.994)	-0.019 (1.040)	-0.012 (1.039)	0.011 (1.017)	0.008 (1.014)	2.292 (1.294)
		y-	1.115 (0.218)	0.991 (0.069)	0.989 (0.065)	0.992 (0.061)	0.995 (0.063)	0.990 (0.070)	2.554 (1.555)
		x-y	1.110 (0.947)	0.029 (0.995)	-0.021 (1.043)	-0.017 (1.040)	0.032 (0.993)	0.006 (1.013)	2.863 (1.864)
	10	x-	0.802 (0.988)	0.022 (1.009)	-0.024 (1.044)	-0.025 (1.049)	0.027 (1.001)	0.009 (1.013)	2.291 (1.293)
		y-	1.317 (0.375)	0.990 (0.084)	0.993 (0.082)	0.986 (0.077)	0.996 (0.074)	0.998 (0.079)	3.414 (2.415)
		x-y	1.327 (0.990)	0.035 (0.995)	-0.044 (1.066)	-0.010 (1.038)	0.018 (1.010)	0.017 (1.009)	3.181 (2.182)

Bu çizelgelere ek olarak **çizelge 4.3.a** ve **çizelge 4.3.b**'de RN hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine (RN-NI) ilişkin parametre tahminleri ele alınmıştır. Bu tahminlerin tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahminler olduğu görülmüştür. Aykırı gözlem sayısında meydana gelen artış, bu tahminlerin elde edilmesinde herhangi bir etkiye sebep olmamıştır. Örneklem genişliğinin arttırılması durumunda ise daha küçük RMSE'li robust Bayesyen parametre tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 4.3 a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	x-	1.017 (0.139)	0.995 (0.073)	1.001 (0.073)	0.998 (0.068)	0.926 (0.151)
		y-	1.035 (0.168)	0.989 (0.077)	1.001 (0.065)	0.998 (0.076)	0.940 (0.159)
		x-y	1.038 (0.155)	1.003 (0.078)	0.986 (0.078)	0.996 (0.079)	0.914 (0.156)
	3	x-	0.991 (0.129)	1.002 (0.076)	0.995 (0.076)	0.998 (0.074)	0.865 (0.191)
		y-	1.025 (0.154)	1.002 (0.078)	0.983 (0.076)	0.993 (0.085)	0.882 (0.170)
		x-y	0.957 (0.159)	1.001 (0.078)	1.002 (0.076)	1.003 (0.084)	0.856 (0.199)
50	1	x-	1.004 (0.139)	0.979 (0.061)	0.989 (0.054)	0.998 (0.056)	0.943 (0.128)
		y-	1.009 (0.131)	0.990 (0.056)	0.989 (0.060)	1.002 (0.055)	0.959 (0.107)
		x-y	1.019 (0.137)	0.999 (0.053)	0.988 (0.054)	1.009 (0.052)	0.930 (0.122)
	3	x-	1.003 (0.125)	0.992 (0.056)	0.998 (0.062)	0.999 (0.053)	0.930 (0.115)
		y-	0.997 (0.119)	0.989 (0.060)	1.001 (0.055)	0.996 (0.055)	0.908 (0.144)
		x-y	0.988 (0.126)	0.998 (0.053)	0.984 (0.062)	1.006 (0.067)	0.926 (0.137)
	5	x-	0.998 (0.125)	1.004 (0.053)	0.992 (0.059)	1.001 (0.053)	0.906 (0.140)
		y-	1.000 (0.126)	0.995 (0.054)	0.997 (0.058)	1.0029 (0.052)	0.896 (0.156)
		x-y	0.984 (0.138)	0.994 (0.057)	0.989 (0.064)	1.010 (0.062)	0.884 (0.151)

Çizelge 4.3 a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	0.998 (0.110)	0.988 (0.042)	1.001 (0.039)	1.000 (0.040)	0.963 (0.082)
		y-	1.015 (0.106)	0.999 (0.038)	1.002 (0.039)	1.005 (0.038)	0.929 (0.100)
		x-y	1.017 (0.125)	1.003 (0.040)	1.000 (0.041)	1.000 (0.037)	0.969 (0.077)
	5	x-	1.019 (0.108)	0.990 (0.041)	1.000 (0.039)	1.000 (0.043)	0.936 (0.092)
		y-	0.995 (0.112)	0.987 (0.040)	0.993 (0.039)	1.005 (0.036)	0.942 (0.093)
		x-y	1.005 (0.110)	0.998 (0.042)	0.996 (0.033)	0.998 (0.039)	0.919 (0.106)
	10	x-	0.967 (0.114)	0.996 (0.043)	1.001 (0.042)	1.002 (0.045)	0.927 (0.099)
		y-	0.992 (0.117)	1.004 (0.039)	0.993 (0.044)	0.995 (0.042)	0.917 (0.108)
		x-y	0.989 (0.094)	1.003 (0.044)	0.999 (0.038)	1.002 (0.042)	0.934 (0.103)

Çizelge 4.3 b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$, $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	0.945 (0.155)	0.975 (0.084)	1.009 (0.072)	0.978 (0.079)	1.003 (0.075)	0.977 (0.076)	0.958 (0.151)
		y-	0.929 (0.168)	0.992 (0.079)	0.988 (0.075)	0.957 (0.088)	1.004 (0.074)	0.973 (0.078)	0.956 (0.161)
		x-y	0.914 (0.184)	0.987 (0.075)	0.990 (0.077)	0.966 (0.097)	0.987 (0.074)	0.982 (0.092)	0.923 (0.170)
	3	x-	0.927 (0.172)	0.991 (0.074)	0.996 (0.067)	0.955 (0.086)	0.985 (0.082)	0.977 (0.084)	0.860 (0.197)
		y-	0.909 (0.174)	0.982 (0.074)	0.991 (0.073)	0.968 (0.083)	1.018 (0.077)	0.998 (0.079)	0.881 (0.187)
		x-y	0.904 (0.190)	0.986 (0.071)	1.002 (0.082)	0.975 (0.087)	1.007 (0.085)	0.976 (0.086)	0.903 (0.195)

Çizelge 4.3 b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 10^4)$), $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
50	1	x–	0.925 (0.162)	0.991 (0.051)	1.003 (0.053)	0.982 (0.057)	1.001 (0.063)	0.985 (0.056)	0.947 (0.120)
		y–	0.907 (0.167)	0.997 (0.063)	0.996 (0.059)	0.981 (0.063)	0.994 (0.060)	0.987 (0.054)	0.988 (0.106)
		x–y	0.937 (0.155)	0.994 (0.063)	0.992 (0.062)	0.985 (0.060)	1.004 (0.058)	0.988 (0.056)	0.925 (0.134)
	3	x–	0.914 (0.156)	0.989 (0.064)	0.995 (0.055)	0.975 (0.066)	1.012 (0.051)	0.987 (0.056)	0.929 (0.126)
		y–	0.911 (0.171)	0.989 (0.063)	1.006 (0.061)	0.983 (0.069)	0.995 (0.065)	0.984 (0.062)	0.921 (0.137)
		x–y	0.902 (0.170)	0.984 (0.062)	1.005 (0.063)	0.978 (0.065)	0.991 (0.065)	0.997 (0.067)	0.916 (0.125)
	5	x–	0.921 (0.175)	0.992 (0.064)	1.006 (0.063)	0.974 (0.073)	0.996 (0.060)	0.991 (0.064)	0.916 (0.143)
		y–	0.926 (0.168)	0.993 (0.063)	0.999 (0.051)	0.994 (0.058)	1.001 (0.057)	0.988 (0.064)	0.870 (0.167)
		x–y	0.930 (0.147)	0.995 (0.062)	1.002 (0.064)	0.976 (0.067)	1.009 (0.057)	0.993 (0.062)	0.883 (0.153)
100	2	x–	0.934 (0.133)	0.988 (0.039)	1.001 (0.040)	0.992 (0.042)	1.010 (0.038)	0.988 (0.037)	0.959 (0.082)
		y–	0.935 (0.127)	0.995 (0.042)	1.001 (0.037)	0.995 (0.039)	1.005 (0.041)	0.988 (0.039)	0.976 (0.089)
		x–y	0.950 (0.113)	0.998 (0.041)	1.005 (0.044)	0.992 (0.039)	1.002 (0.034)	0.991 (0.048)	0.955 (0.096)
	5	x–	0.962 (0.124)	0.994 (0.045)	1.006 (0.042)	0.995 (0.038)	0.998 (0.037)	1.001 (0.038)	0.936 (0.095)
		y–	0.947 (0.134)	1.001 (0.040)	0.999 (0.043)	0.989 (0.042)	0.996 (0.042)	0.995 (0.043)	0.926 (0.106)
		x–y	0.967 (0.118)	0.998 (0.039)	1.001 (0.039)	0.992 (0.045)	0.999 (0.040)	0.989 (0.042)	0.942 (0.091)
	10	x–	0.980 (0.127)	0.997 (0.039)	0.999 (0.045)	0.989 (0.046)	0.991 (0.046)	0.993 (0.043)	0.911 (0.118)
		y–	0.959 (0.122)	0.998 (0.040)	0.994 (0.043)	0.992 (0.041)	1.004 (0.037)	0.987 (0.042)	0.910 (0.119)
		x–y	0.971 (0.118)	0.997 (0.039)	1.004 (0.045)	0.992 (0.039)	0.999 (0.044)	0.995 (0.043)	0.890 (0.129)

Özet olarak; t-NI ve L-NI regresyon modelleri, sadece y– yönündeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen parametre tahminlerine sahiptir. Bu modellerin aksine RN-NI modeli ise tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahminler elde edilmesini sağlamıştır.

Ayrıca bu tahminlerin, diğer iki modelden elde edilen tahminlere göre daha küçük RMSE değerlerine sahip olduğu görülmüştür. Bu nedenle aykırı gözlemlili bir veri setinin modellenmesinde RN-NI modelinin tercih edilmesinin daha uygun olacağı söylenebilir.

Durum II için simülasyon sonuçları:

t, Laplace ve RN hata dağılımlarından herhangi birine ve Normal önsel dağılıma dayalı $k = 3$ ve $k = 5$ bağımsız değişkenli regresyon modellerine yönelik elde edilen parametre tahminleri, **çizelge 4.4.a-4.6.b**'de verilmiştir.

Çizelge 4.4.a-4.6.b'de yer alan t hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine (t-N) ilişkin parametre tahminleri incelendiğinde, bu tahminlerin veri setinde aykırı gözlem sayısının az olması durumunda tüm yönlerde bu gözlemlerden fazla etkilenmediği görülmüştür. Aykırı gözlem sayısının artması durumunda ise tahminlerin $x -$ ve $x - y$ yönündeki gözlemlerden etkilendiği ortaya çıkmıştır. Örneklem genişliği arttırıldığında bu etkilenme devam etmiş olup sadece $y -$ yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust olan daha küçük RMSE değerli Bayesyen tahminler elde edilmiştir.

Çizelge 4.4 a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modeli parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	$x -$	0.974 (0.317)	0.846 (0.215)	0.859 (0.214)	0.843 (0.223)	1.196 (0.320)
		$y -$	0.986 (0.225)	0.982 (0.093)	1.014 (0.092)	0.993 (0.085)	1.098 (0.245)
		$x - y$	0.986 (0.234)	0.960 (0.100)	0.999 (0.095)	0.972 (0.095)	1.279 (0.389)
	3	$x -$	0.823 (1.116)	0.019 (1.008)	-0.004 (1.039)	-0.009 (1.034)	4.164 (3.228)
		$y -$	0.999 (0.228)	0.974 (0.093)	1.015 (0.099)	0.988 (0.088)	1.513 (0.609)
		$x - y$	0.953 (1.075)	0.015 (1.008)	0.005 (1.028)	-0.010 (1.032)	5.276 (4.354)

Çizelge 4.4 a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
50	1	x-	0.989 (0.193)	0.986 (0.068)	0.975 (0.069)	0.985 (0.070)	1.066 (0.146)
		y-	0.993 (0.192)	0.993 (0.067)	0.982 (0.067)	0.992 (0.069)	1.063 (0.144)
		x-y	0.988 (0.197)	0.979 (0.069)	0.970 (0.073)	0.980 (0.071)	1.151 (0.210)
	3	x-	0.981 (0.925)	0.009 (1.005)	-0.030 (1.049)	0.030 (0.986)	4.141 (3.182)
		y-	0.993 (0.199)	0.989 (0.068)	0.982 (0.068)	0.990 (0.069)	1.235 (0.284)
		x-y	1.049 (0.916)	0.016 (1.000)	-0.003 (1.025)	0.041 (0.978)	4.632 (3.706)
	5	x-	0.985 (0.953)	0.004 (1.010)	-0.031 (1.050)	0.031 (0.986)	4.141 (3.183)
		y-	1.001 (0.206)	0.987 (0.069)	0.977 (0.069)	0.988 (0.075)	1.479 (0.520)
		x-y	1.105 (0.934)	0.005 (1.010)	-0.019 (1.038)	0.024 (0.991)	5.051 (4.098)
100	2	x-	1.010 (0.149)	0.938 (0.108)	0.944 (0.107)	0.939 (0.113)	1.097 (0.169)
		y-	1.016 (0.124)	0.996 (0.045)	1.004 (0.046)	0.996 (0.040)	1.063 (0.132)
		x-y	1.015 (0.124)	0.994 (0.046)	1.001 (0.045)	0.993 (0.040)	1.063 (0.133)
	5	x-	0.867 (0.646)	0.002 (1.004)	0.008 (0.999)	0.012 (0.995)	4.191 (3.209)
		y-	1.014 (0.126)	0.996 (0.045)	1.004 (0.047)	0.995 (0.041)	1.183 (0.226)
		x-y	0.942 (0.437)	0.319 (0.696)	0.322 (0.698)	0.325 (0.693)	2.209 (1.427)
	10	x-	0.856 (0.648)	0.002 (1.006)	-0.001 (1.007)	0.011 (0.996)	4.195 (3.212)
		y-	1.024 (0.132)	0.994 (0.046)	1.002 (0.050)	0.994 (0.044)	1.482 (0.513)
		x-y	0.948 (0.624)	0.002 (1.005)	0.004 (1.003)	0.010 (0.995)	4.873 (3.892)

Çizelge 4.4 b) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j=1,2,3,4,5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	$x -$	0.982 (0.380)	0.829 (0.222)	0.821 (0.232)	0.844 (0.203)	0.827 (0.218)	0.849 (0.200)	1.256 (0.373)
		$y -$	0.988 (0.260)	0.985 (0.097)	0.974 (0.101)	1.001 (0.099)	0.980 (0.098)	1.001 (0.086)	1.147 (0.274)
		$x - y$	1.036 (0.549)	0.761 (0.386)	0.756 (0.383)	0.775 (0.359)	0.754 (0.398)	0.785 (0.340)	1.705 (1.148)
	3	$x -$	0.979 (1.394)	- 0.021 (1.075)	- 0.032 (1.091)	0.026 (1.019)	0.017 (1.037)	0.013 (1.039)	5.050 (4.131)
		$y -$	1.023 (0.289)	0.975 (0.108)	0.958 (0.113)	0.994 (0.096)	0.969 (0.104)	0.987 (0.095)	1.637 (0.729)
		$x - y$	1.226 (1.418)	- 0.020 (1.072)	- 0.036 (1.085)	0.028 (1.015)	0.006 (1.039)	0.032 (1.021)	6.391 (5.474)
50	1	$x -$	1.010 (0.192)	0.986 (0.068)	0.991 (0.072)	0.974 (0.070)	0.976 (0.070)	0.997 (0.064)	1.061 (0.157)
		$y -$	1.011 (0.190)	0.994 (0.064)	0.999 (0.069)	0.983 (0.065)	0.984 (0.067)	1.004 (0.063)	1.057 (0.154)
		$x - y$	1.007 (0.193)	0.988 (0.068)	0.993 (0.071)	0.977 (0.068)	0.978 (0.069)	0.999 (0.064)	1.134 (0.210)
	3	$x -$	0.883 (1.107)	- 0.038 (1.079)	0.019 (1.018)	0.029 (1.013)	- 0.015 (1.049)	0.028 (1.016)	5.098 (4.137)
		$y -$	1.005 (0.195)	0.990 (0.069)	0.997 (0.069)	0.980 (0.069)	0.983 (0.068)	1.004 (0.065)	1.223 (0.287)
		$x - y$	1.003 (1.083)	- 0.029 (1.066)	0.036 (1.002)	0.022 (1.019)	- 0.020 (1.053)	0.020 (1.023)	5.784 (4.819)
	5	$x -$	0.895 (1.143)	- 0.035 (1.074)	0.021 (1.018)	0.026 (1.016)	- 0.024 (1.058)	0.025 (1.019)	5.096 (4.133)
		$y -$	1.008 (0.197)	0.988 (0.074)	0.994 (0.073)	0.979 (0.073)	0.978 (0.074)	1.001 (0.067)	1.498 (0.557)
		$x - y$	1.060 (1.138)	- 0.039 (1.077)	0.031 (1.006)	0.013 (1.024)	- 0.012 (1.043)	0.020 (1.017)	6.215 (5.252)
100	2	$x -$	0.997 (0.143)	0.986 (0.117)	0.983 (0.096)	0.987 (0.096)	0.976 (0.127)	0.979 (0.113)	1.089 (0.374)
		$y -$	1.005 (0.121)	1.001 (0.047)	0.995 (0.040)	0.999 (0.044)	0.992 (0.046)	0.993 (0.050)	1.054 (0.122)
		$x - y$	1.005 (0.121)	0.998 (0.047)	0.993 (0.041)	0.998 (0.044)	0.989 (0.047)	0.992 (0.050)	1.055 (0.123)
	5	$x -$	1.011 (0.655)	0.036 (0.984)	- 0.001 (1.018)	0.023 (0.990)	- 0.028 (1.044)	- 0.019 (1.036)	5.182 (4.200)
		$y -$	1.007 (0.122)	1.001 (0.049)	0.993 (0.043)	0.999 (0.044)	0.993 (0.049)	0.994 (0.050)	1.177 (0.217)
		$x - y$	1.080 (0.663)	0.029 (0.992)	- 0.001 (1.018)	0.026 (0.996)	- 0.021 (1.037)	- 0.013 (1.031)	5.657 (4.676)
	10	$x -$	1.029 (0.685)	0.033 (0.987)	- 0.003 (1.022)	0.023 (0.998)	- 0.029 (1.044)	- 0.020 (1.039)	5.192 (4.210)
		$y -$	1.012 (0.122)	0.999 (0.052)	0.993 (0.045)	0.999 (0.045)	0.990 (0.051)	0.994 (0.054)	1.475 (0.503)
		$x - y$	1.174 (0.691)	0.027 (0.993)	- 0.001 (1.019)	0.030 (0.991)	- 0.022 (1.038)	- 0.021 (1.038)	6.050 (5.071)

Çizelge 4.5.a-4.5.b''de Laplace hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine (L-N) ilişkin parametre tahminleri bulunmaktadır. Bu tahminler, $x-$ ve $x-y$ yönündeki aykırı gözlemlerden oldukça etkilenmektedir. Veri setinde az sayıda aykırı gözlem olması durumunda bile bu etkilenme bariz şekilde görülmektedir. Örneklem genişliğinin artması durumunda ise söz konusu etkilenme devam etmiştir.

Bu çizelgelerdeki parametre tahminlerinin $y-$ yönündeki aykırı gözlemlerden etkilenip etkilenmediği incelendiğinde ise örneklem genişliği arttıkça daha küçük RMSE değerli robust Bayesyen tahminlerin elde edildiği görülmüştür. Ancak σ parametresinin tahmini için böyle bir durum söz konusu değildir. σ parametresinin tahmini tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmiştir. Örneklem genişliği artsa bile bu durum değişmemiştir. β_0 'ın tahmininin ise aykırı gözlem sayısının artması durumunda $y-$ yönündeki aykırı gözlemlerden az miktarda etkilendiği görülmüştür.

Çizelge 4.5 a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	$x-$	1.003 (1.390)	-0.005 (1.036)	0.019 (1.015)	0.014 (1.016)	2.086 (1.097)
		$y-$	1.087 (0.381)	0.933 (0.138)	0.943 (0.155)	0.935 (0.139)	2.237 (1.239)
		$x-y$	1.321 (1.394)	0.001 (1.023)	0.038 (0.989)	0.016 (1.009)	2.793 (1.796)
	3	$x-$	1.041 (1.449)	-0.083 (1.111)	-0.005 (1.036)	0.093 (0.947)	2.075 (1.087)
		$y-$	1.579 (0.783)	0.780 (0.285)	0.796 (0.260)	0.760 (0.283)	3.493 (2.494)
		$x-y$	1.733 (1.616)	-0.012 (1.035)	0.036 (0.996)	-0.014 (1.037)	3.343 (2.345)

Çizelge 4.5 a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
50	1	x-	0.999 (0.844)	0.025 (0.996)	0.039 (0.978)	0.010 (1.016)	2.061 (1.066)
		y-	1.075 (0.270)	0.954 (0.097)	0.981 (0.085)	0.975 (0.096)	1.854 (0.856)
		x-y	1.193 (0.889)	0.044 (0.978)	0.040 (0.979)	0.010 (1.014)	2.502 (1.505)
	3	x-	1.075 (0.922)	-0.004 (1.027)	0.001 (1.023)	0.008 (1.019)	2.056 (1.061)
		y-	1.222 (0.357)	0.908 (0.129)	0.946 (0.107)	0.937 (0.118)	2.752 (1.753)
		x-y	1.419 (1.028)	0.019 (1.004)	0.022 (0.999)	-0.021 (1.043)	2.863 (1.865)
	5	x-	1.108 (0.950)	-0.018 (1.040)	-0.015 (1.035)	0.032 (0.996)	2.058 (1.063)
		y-	1.428 (0.528)	0.855 (0.176)	0.898 (0.145)	0.873 (0.172)	3.425 (2.426)
		x-y	1.620 (1.143)	-0.009 (1.025)	0.030 (0.997)	-0.020 (1.045)	3.188 (2.189)
100	2	x-	0.774 (0.711)	0.028 (0.982)	0.009 (1.003)	0.028 (0.984)	2.063 (1.066)
		y-	1.040 (0.143)	0.987 (0.061)	0.984 (0.057)	0.997 (0.058)	1.845 (0.846)
		x-y	0.929 (0.399)	0.452 (0.576)	0.455 (0.566)	0.461 (0.566)	2.226 (1.227)
	5	x-	0.764 (0.727)	0.004 (1.007)	-0.001 (1.013)	0.018 (0.995)	2.065 (1.067)
		y-	1.116 (0.190)	0.977 (0.067)	0.976 (0.061)	0.983 (0.065)	2.533 (1.533)
		x-y	0.994 (0.698)	0.020 (0.991)	0.008 (1.003)	0.004 (1.008)	2.686 (1.687)
	10	x-	0.755 (0.777)	-0.030 (1.041)	-0.039 (1.050)	0.080 (0.936)	2.071 (1.074)
		y-	1.285 (0.329)	0.957 (0.083)	0.958 (0.079)	0.962 (0.075)	3.386 (2.386)
		x-y	1.163 (0.721)	0.014 (0.997)	-0.008 (1.020)	0.012 (1.002)	3.023 (2.024)

Çizelge 4.5 b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0,1), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	$x -$	1.033 (1.532)	0.042 (1.015)	0.016 (1.042)	- 0.006 (1.057)	- 0.015 (1.072)	- 0.012 (1.073)	2.290 (1.304)
		$y -$	1.151 (0.419)	0.909 (0.160)	0.935 (0.147)	0.920 (0.163)	0.905 (0.157)	0.917 (0.155)	2.272 (1.274)
		$x - y$	1.476 (1.632)	0.032 (1.014)	0.029 (1.017)	0.016 (1.024)	- 0.025 (1.068)	- 0.015 (1.065)	2.955 (1.959)
	3	$x -$	1.086 (1.809)	0.089 (0.979)	- 0.082 (1.145)	- 0.101 (1.152)	- 0.043 (1.116)	0.139 (0.945)	2.315 (1.328)
		$y -$	1.789 (1.010)	0.708 (0.344)	0.718 (0.344)	0.719 (0.329)	0.675 (0.372)	0.731 (0.328)	3.577 (2.577)
		$x - y$	1.943 (1.914)	0.040 (1.015)	0.031 (1.020)	- 0.023 (1.063)	- 0.037 (1.073)	- 0.009 (1.054)	3.478 (2.481)
50	1	$x -$	0.972 (1.166)	0.022 (1.018)	0.049 (0.989)	0.023 (1.020)	- 0.009 (1.057)	- 0.027 (1.065)	2.282 (1.288)
		$y -$	1.033 (0.270)	0.970 (0.100)	0.957 (0.094)	0.965 (0.034)	0.953 (0.088)	0.963 (0.100)	1.880 (0.882)
		$x - y$	1.200 (1.160)	0.022 (1.012)	0.055 (0.980)	0.020 (1.020)	- 0.008 (1.047)	- 0.022 (1.054)	2.689 (1.693)
	3	$x -$	1.017 (1.146)	0.058 (0.985)	0.009 (1.027)	- 0.041 (1.083)	- 0.034 (1.082)	0.017 (1.023)	2.287 (1.293)
		$y -$	1.220 (0.360)	0.921 (0.133)	0.920 (0.124)	0.913 (0.135)	0.906 (0.132)	0.906 (0.139)	2.797 (1.798)
		$x - y$	1.431 (1.239)	0.061 (0.979)	0.045 (0.994)	- 0.012 (1.049)	- 0.030 (1.069)	- 0.035 (1.066)	3.032 (2.034)
	5	$x -$	1.025 (1.169)	0.040 (1.000)	- 0.056 (1.097)	- 0.107 (1.147)	- 0.030 (1.075)	0.157 (0.890)	2.315 (1.320)
		$y -$	1.502 (0.606)	0.852 (0.192)	0.856 (0.182)	0.847 (0.203)	0.847 (0.193)	0.838 (0.203)	3.482 (2.482)
		$x - y$	1.769 (1.446)	0.053 (0.988)	0.051 (0.988)	- 0.022 (1.057)	- 0.072 (1.111)	- 0.002 (1.035)	3.348 (2.349)
100	2	$x -$	0.834 (0.932)	0.029 (0.990)	- 0.017 (1.037)	0.002 (1.019)	0.024 (1.000)	0.011 (1.006)	2.288 (1.290)
		$y -$	1.034 (0.173)	0.983 (0.065)	0.981 (0.060)	0.983 (0.056)	0.984 (0.057)	0.985 (0.063)	1.860 (0.861)
		$x - y$	0.932 (0.811)	0.124 (0.897)	0.085 (0.932)	0.100 (0.921)	0.125 (0.898)	0.106 (0.910)	2.489 (1.490)
	5	$x -$	0.823 (0.959)	0.043 (0.979)	- 0.036 (1.055)	- 0.038 (1.059)	0.017 (1.007)	0.034 (0.985)	2.295 (1.298)
		$y -$	1.119 (0.220)	0.971 (0.074)	0.967 (0.071)	0.969 (0.068)	0.972 (0.068)	0.969 (0.074)	2.553 (1.554)
		$x - y$	1.102 (0.936)	0.036 (0.983)	- 0.024 (1.042)	- 0.017 (1.035)	0.035 (0.987)	- 0.001 (1.016)	2.860 (1.862)
	10	$x -$	0.837 (0.964)	0.035 (0.988)	- 0.124 (1.142)	- 0.079 (1.100)	0.034 (0.992)	0.144 (0.884)	2.319 (1.322)
		$y -$	1.310 (0.374)	0.945 (0.093)	0.942 (0.097)	0.936 (0.098)	0.946 (0.088)	0.947 (0.089)	3.414 (2.414)
		$x - y$	1.319 (0.988)	0.053 (0.968)	- 0.038 (1.057)	- 0.036 (1.057)	0.006 (1.020)	0.031 (0.991)	3.181 (2.182)

t-N ve L-N modellerinin yanı sıra RN hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri (RN-N) de ele alınmış olup bu modellere ilişkin elde edilen parametre tahminleri, **çizelge 4.6.a-4.6.b**'de özetlenmiştir. Bu çizelgeler incelendiğinde, tahminlerin tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahminler olduğu görülmüştür. Örneklem genişliği arttırıldığında, daha küçük RMSE değerine sahip parametre tahminleri elde edilmiştir.

Çizelge 4.6 a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	0.986 (0.150)	1.000 (0.077)	0.997 (0.069)	1.001 (0.081)	0.944 (0.135)
		y-	1.033 (0.138)	0.991 (0.075)	0.986 (0.079)	0.994 (0.075)	0.929 (0.154)
		x-y	1.000 (0.134)	0.988 (0.079)	1.001 (0.076)	1.008 (0.073)	0.910 (0.164)
	3	x-	1.006 (0.147)	0.973 (0.070)	0.999 (0.085)	1.012 (0.082)	0.878 (0.180)
		y-	1.008 (0.152)	1.003 (0.077)	0.989 (0.080)	0.993 (0.084)	0.895 (0.169)
		x-y	1.010 (0.144)	0.983 (0.076)	0.984 (0.086)	0.993 (0.079)	0.853 (0.201)
50	1	x-	1.000 (0.132)	0.992 (0.059)	0.998 (0.056)	1.002 (0.057)	0.951 (0.109)
		y-	0.989 (0.123)	0.994 (0.052)	0.990 (0.054)	0.995 (0.046)	0.939 (0.116)
		x-y	1.005 (0.132)	0.980 (0.063)	0.994 (0.053)	0.991 (0.055)	0.943 (0.121)
	3	x-	1.023 (0.131)	0.988 (0.060)	0.992 (0.063)	0.994 (0.059)	0.949 (0.116)
		y-	1.007 (0.137)	1.002 (0.061)	0.994 (0.063)	0.998 (0.062)	0.993 (0.139)
		x-y	0.990 (0.144)	1.001 (0.055)	0.986 (0.060)	0.995 (0.050)	0.905 (0.138)
	5	x-	1.016 (0.143)	0.994 (0.062)	0.998 (0.057)	1.003 (0.054)	0.932 (0.120)
		y-	0.984 (0.121)	0.980 (0.059)	0.984 (0.060)	0.993 (0.056)	0.912 (0.134)
		x-y	0.991 (0.138)	0.985 (0.061)	0.991 (0.065)	0.992 (0.059)	0.883 (0.167)

Çizelge 4.6 a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	0.996 (0.101)	0.999 (0.037)	0.996 (0.039)	0.995 (0.043)	0.968 (0.077)
		y-	1.003 (0.102)	0.997 (0.036)	0.995 (0.039)	0.998 (0.043)	0.970 (0.074)
		x-y	0.997 (0.093)	0.998 (0.038)	0.998 (0.040)	1.010 (0.039)	0.974 (0.074)
	5	x-	0.998 (0.110)	0.997 (0.041)	0.995 (0.038)	0.994 (0.043)	0.947 (0.097)
		y-	0.974 (0.101)	0.998 (0.037)	0.994 (0.041)	1.008 (0.036)	0.944 (0.099)
		x-y	0.998 (0.099)	0.995 (0.040)	1.002 (0.043)	1.000 (0.037)	0.932 (0.100)
	10	x-	0.998 (0.100)	1.001 (0.041)	1.003 (0.043)	1.003 (0.046)	0.915 (0.119)
		y-	0.997 (0.109)	0.991 (0.042)	0.996 (0.039)	0.987 (0.047)	0.883 (0.137)
		x-y	1.021 (0.106)	0.993 (0.037)	0.996 (0.040)	1.001 (0.042)	0.917 (0.116)

Çizelge 4.6 b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	0.924 (0.182)	0.979 (0.074)	1.004 (0.072)	0.969 (0.080)	0.990 (0.084)	0.968 (0.084)	0.961 (0.155)
		y-	0.934 (0.158)	0.985 (0.076)	0.985 (0.077)	0.952 (0.090)	0.998 (0.077)	0.974 (0.078)	0.956 (0.156)
		x-y	0.909 (0.189)	0.982 (0.074)	0.985 (0.076)	0.961 (0.096)	0.985 (0.079)	0.975 (0.090)	0.926 (0.167)
	3	x-	0.941 (0.164)	0.989 (0.072)	0.992 (0.064)	0.952 (0.090)	0.977 (0.085)	0.967 (0.089)	0.864 (0.200)
		y-	0.901 (0.193)	0.981 (0.081)	0.984 (0.075)	0.954 (0.085)	1.001 (0.071)	1.002 (0.081)	0.887 (0.182)
		x-y	0.903 (0.193)	0.977 (0.080)	0.994 (0.083)	0.973 (0.090)	1.001 (0.082)	0.977 (0.075)	0.905 (0.188)

Çizelge 4.6 b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Normal önsel dağılıma ($\beta_j \sim N(0, 1), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
50	1	x-	0.925 (0.162)	0.991 (0.051)	1.003 (0.053)	0.982 (0.057)	1.001 (0.063)	0.985 (0.056)	0.947 (0.120)
		y-	0.907 (0.167)	0.997 (0.063)	0.996 (0.059)	0.981 (0.063)	0.994 (0.060)	0.987 (0.054)	0.988 (0.106)
		x-y	0.937 (0.155)	0.994 (0.063)	0.992 (0.062)	0.985 (0.060)	1.004 (0.058)	0.988 (0.056)	0.925 (0.134)
	3	x-	0.914 (0.156)	0.989 (0.064)	0.995 (0.055)	0.975 (0.066)	1.012 (0.051)	0.987 (0.056)	0.929 (0.126)
		y-	0.911 (0.171)	0.989 (0.063)	1.006 (0.061)	0.983 (0.069)	0.995 (0.065)	0.984 (0.062)	0.921 (0.137)
		x-y	0.902 (0.170)	0.984 (0.062)	1.005 (0.063)	0.978 (0.065)	0.991 (0.065)	0.997 (0.067)	0.916 (0.125)
	5	x-	0.921 (0.175)	0.992 (0.064)	1.006 (0.063)	0.974 (0.073)	0.996 (0.060)	0.991 (0.064)	0.916 (0.143)
		y-	0.926 (0.168)	0.993 (0.063)	0.999 (0.051)	0.994 (0.058)	1.001 (0.057)	0.988 (0.064)	0.870 (0.167)
		x-y	0.930 (0.147)	0.995 (0.062)	1.002 (0.064)	0.976 (0.067)	1.009 (0.057)	0.993 (0.062)	0.883 (0.153)
100	2	x-	0.934 (0.133)	0.988 (0.039)	1.001 (0.040)	0.992 (0.042)	1.010 (0.038)	0.988 (0.037)	0.959 (0.082)
		y-	0.935 (0.127)	0.995 (0.042)	1.001 (0.037)	0.995 (0.039)	1.005 (0.041)	0.988 (0.039)	0.976 (0.089)
		x-y	0.950 (0.113)	0.998 (0.041)	1.005 (0.044)	0.992 (0.039)	1.002 (0.034)	0.991 (0.048)	0.955 (0.096)
	5	x-	0.962 (0.124)	0.994 (0.045)	1.006 (0.042)	0.995 (0.038)	0.998 (0.037)	1.001 (0.038)	0.936 (0.095)
		y-	0.947 (0.134)	1.001 (0.040)	0.999 (0.043)	0.989 (0.042)	0.996 (0.042)	0.995 (0.043)	0.926 (0.106)
		x-y	0.967 (0.118)	0.998 (0.039)	1.001 (0.039)	0.992 (0.045)	0.999 (0.040)	0.989 (0.042)	0.942 (0.091)
	10	x-	0.980 (0.127)	0.997 (0.039)	0.999 (0.045)	0.989 (0.046)	0.991 (0.046)	0.993 (0.043)	0.911 (0.118)
		y-	0.959 (0.122)	0.998 (0.040)	0.994 (0.043)	0.992 (0.041)	1.004 (0.037)	0.987 (0.042)	0.910 (0.119)
		x-y	0.971 (0.118)	0.997 (0.039)	1.004 (0.045)	0.992 (0.039)	0.999 (0.044)	0.995 (0.043)	0.890 (0.129)

Sonuç olarak, RN-N modelinin bütün parametreleri açısından diğer iki modele kıyasla tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahminler verdiği ortaya çıkmıştır. t-N ve L-N modelleri kendi aralarında kıyaslandığında ise t-N modelinin tüm parametrelerinin y- yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahminler verdiği görülmüştür.

Durum III için simülasyon sonuçları:

Normal hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma (t ve Laplace) dayalı $k=3$ ve $k=5$ bağımsız değişken içeren regresyon modellerine yönelik elde edilen parametre tahminleri **çizelge 4.7.a-4.8.b**'de yer almaktadır. Normal hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri (N-t) parametre tahminleri incelendiğinde, bu tahminlerin veri setinde yer alan tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilendiği görülmüştür. Bu etkilene özellikle σ parametresinin tahmininde daha belirgin olarak ortaya çıkmıştır (**Çizelge 4.7.a-4.7.b**). Örneklem genişliğinin artması durumunda ise herhangi bir değişiklik olmamıştır.

Çizelge 4.7 a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$
30	1	x-	0.825 (0.958)	0.122 (0.905)	-0.064 (1.083)	-0.031 (1.049)	4.934 (3.991)
		y-	4.294 (3.383)	0.598 (0.764)	0.448 (0.841)	0.548 (0.785)	18.154 (17.163)
		x-y	4.276 (3.441)	0.224 (0.895)	-0.181 (1.262)	-0.044 (1.131)	19.117 (18.147)
	3	x-	0.802 (1.005)	0.168 (0.860)	-0.144 (1.161)	-0.013 (1.031)	4.981 (4.035)
		y-	10.955 (9.990)	0.474 (0.982)	0.324 (0.976)	0.303 (0.923)	30.274 (29.289)
		x-y	8.015 (7.090)	0.277 (0.860)	-0.210 (1.284)	-0.127 (1.189)	26.205 (25.234)
50	1	x-	0.812 (0.735)	0.062 (0.949)	-0.027 (1.040)	0.006 (1.006)	5.053 (4.080)
		y-	2.965 (2.019)	0.794 (0.566)	0.723 (0.616)	0.669 (0.634)	14.063 (13.066)
		x-y	2.854 (2.005)	0.163 (0.926)	-0.078 (1.148)	-0.056 (1.120)	15.028 (14.050)
	3	x-	0.792 (0.758)	0.076 (0.937)	-0.079 (1.091)	0.020 (0.990)	5.082 (4.111)
		y-	6.932 (5.964)	0.659 (0.797)	0.616 (0.785)	0.474 (0.853)	23.768 (22.774)
		x-y	4.966 (4.046)	0.172 (0.939)	-0.073 (1.134)	-0.113 (1.188)	20.504 (19.521)
	5	x-	0.771 (0.770)	0.052 (0.959)	-0.104 (1.115)	0.064 (0.947)	5.128 (4.157)
		y-	10.855 (9.876)	0.588 (0.842)	0.511 (0.850)	0.388 (0.893)	30.064 (29.071)
		x-y	7.171 (6.224)	0.223 (0.904)	-0.149 (1.218)	-0.116 (1.205)	24.606 (23.625)

Çizelge 4.7 a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0,1,3)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	0.915 (0.448)	0.070 (0.935)	-0.033 (1.038)	0.004 (1.002)	5.057 (4.071)
		y-	2.975 (1.989)	0.954 (0.477)	0.799 (0.447)	0.756 (0.533)	14.068 (13.070)
		x-y	1.898 (1.010)	0.146 (0.886)	-0.071 (1.098)	-0.002 (1.031)	11.210 (10.221)
	5	x-	0.928 (0.460)	0.090 (0.915)	-0.074 (1.079)	-0.002 (1.008)	5.097 (4.111)
		y-	5.993 (5.003)	0.832 (0.650)	0.589 (0.657)	0.556 (0.705)	21.871 (20.873)
		x-y	3.994 (3.033)	0.231 (0.852)	-0.155 (1.193)	-0.081 (1.131)	17.927 (16.938)
	10	x-	0.921 (0.487)	0.075 (0.930)	-0.114 (1.119)	0.046 (0.959)	5.153 (4.166)
		y-	11.005 (10.011)	0.701 (0.766)	0.478 (0.767)	0.490 (0.784)	30.109 (29.111)
		x-y	6.158 (5.183)	0.323 (0.813)	-0.221 (1.278)	-0.136 (1.201)	22.453 (21.461)

Çizelge 4.7 b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0,1,3)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri					
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE
30	1	x-	0.915 (1.170)	0.075 (0.969)	0.048 (0.991)	0.019 (1.043)	-0.100 (1.136)	-0.023 (1.063)
		y-	4.456 (3.580)	0.525 (0.823)	0.489 (0.795)	0.485 (0.791)	0.458 (0.796)	0.409 (0.834)
		x-y	4.499 (3.721)	0.079 (1.062)	0.093 (1.047)	0.007 (1.108)	-0.089 (1.198)	-0.108 (1.216)
	3	x-	0.989 (1.175)	0.124 (0.926)	0.124 (0.922)	-0.017 (1.076)	-0.232 (1.259)	0.002 (1.040)
		y-	11.006 (10.055)	0.238 (1.009)	0.292 (0.916)	0.253 (0.947)	0.255 (0.952)	0.296 (0.987)
		x-y	8.238 (7.349)	0.064 (1.064)	0.160 (0.984)	-0.044 (1.145)	-0.135 (1.229)	-0.114 (1.219)

Çizelge 4.7 b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
50	1	x-	0.886 (1.039)	-0.007 (1.033)	0.077 (0.962)	-0.007 (1.035)	0.012 (1.020)	-0.031 (1.060)	6.407 (5.451)
		y-	3.042 (2.113)	0.717 (0.635)	0.747 (0.607)	0.642 (0.626)	0.788 (0.584)	0.644 (0.612)	14.122 (13.127)
		x-y	2.999 (2.248)	-0.011 (1.116)	0.110 (0.993)	-0.049 (1.143)	0.071 (1.034)	-0.099 (1.176)	15.559 (14.592)
	3	x-	0.888 (1.045)	-0.001 (1.026)	0.119 (0.923)	-0.022 (1.049)	-0.032 (1.065)	-0.048 (1.076)	6.403 (5.447)
		y-	7.029 (6.076)	0.620 (0.748)	0.573 (0.817)	0.369 (0.880)	0.579 (0.796)	0.417 (0.859)	23.854 (22.863)
		x-y	5.118 (4.251)	0.049 (1.064)	0.143 (0.971)	-0.068 (1.182)	0.041 (1.102)	-0.188 (1.299)	20.771 (19.796)
	5	x-	0.930 (1.066)	0.007 (1.019)	0.153 (0.889)	-0.055 (1.080)	-0.071 (1.101)	-0.027 (1.058)	6.427 (5.468)
		y-	11.039 (10.072)	0.420 (0.811)	0.433 (0.867)	0.266 (0.960)	0.471 (0.889)	0.346 (0.943)	30.097 (29.103)
		x-y	7.364 (6.454)	0.066 (1.056)	0.183 (0.963)	-0.112 (1.217)	0.004 (1.119)	-0.194 (1.312)	24.751 (23.775)
100	2	x-	0.909 (0.611)	-0.022 (1.037)	0.046 (0.971)	-0.029 (1.042)	0.044 (0.971)	0.009 (1.006)	6.508 (5.529)
		y-	2.918 (1.944)	0.749 (0.502)	0.864 (0.433)	0.950 (0.443)	0.821 (0.495)	0.799 (0.497)	14.094 (13.096)
		x-y	1.904 (1.092)	-0.033 (1.073)	0.039 (0.998)	0.035 (1.010)	0.017 (1.032)	0.019 (1.019)	11.979 (11.001)
	5	x-	0.895 (0.614)	-0.030 (1.045)	0.053 (0.964)	-0.049 (1.062)	0.025 (0.991)	0.024 (0.991)	6.519 (5.542)
		y-	5.914 (4.928)	0.629 (0.656)	0.750 (0.633)	0.834 (0.592)	0.725 (0.641)	0.607 (0.620)	21.955 (20.958)
		x-y	3.944 (3.010)	-0.100 (1.174)	0.096 (0.990)	0.107 (0.966)	0.010 (1.054)	-0.109 (1.162)	18.417 (17.435)
	10	x-	0.874 (0.646)	-0.065 (1.079)	0.047 (0.970)	-0.088 (1.099)	0.029 (0.987)	0.089 (0.927)	6.562 (5.583)
		y-	10.978 (9.988)	0.517 (0.811)	0.581 (0.765)	0.667 (0.729)	0.674 (0.699)	0.568 (0.701)	30.210 (29.213)
		x-y	6.106 (5.148)	-0.167 (1.251)	0.111 (0.988)	0.088 (1.004)	0.041 (1.039)	-0.106 (1.158)	22.962 (21.975)

N-t modelinin yanı sıra Normal hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeli (N-L) parametre tahminleri de aynı şekilde tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenen robust olmayan tahminlerdir (**Çizelge 4.8.a-4.8.b**). Örneklem genişliğinin artması durumunda da bu etkilenme devam etmiştir.

Çizelge 4.8 a) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	$x-$	0.828 (0.965)	-0.002 (1.020)	0.033 (0.983)	-0.006 (1.020)	4.868 (3.924)
		$y-$	4.251 (3.346)	0.506 (0.801)	0.475 (0.820)	0.574 (0.779)	18.095 (17.105)
		$x-y$	4.278 (3.444)	-0.003 (1.080)	-0.005 (1.089)	0.004 (1.062)	19.024 (18.053)
	3	$x-$	0.799 (1.023)	-0.020 (1.039)	0.003 (1.015)	0.029 (0.990)	4.886 (3.941)
		$y-$	10.892 (9.931)	0.334 (0.998)	0.354 (0.928)	0.334 (0.894)	30.226 (29.241)
		$x-y$	8.062 (7.139)	-0.018 (1.095)	0.034 (1.035)	-0.077 (1.128)	26.098 (25.127)
50	1	$x-$	0.810 (0.741)	-0.001 (1.010)	0.037 (0.975)	0.005 (1.005)	5.055 (4.083)
		$y-$	2.965 (2.022)	0.726 (0.602)	0.731 (0.623)	0.652 (0.644)	14.108 (13.112)
		$x-y$	2.875 (2.022)	0.026 (1.035)	0.046 (1.017)	-0.047 (1.099)	15.055 (14.077)
	3	$x-$	0.786 (0.754)	-0.027 (1.036)	0.035 (0.978)	0.009 (1.001)	5.054 (4.083)
		$y-$	6.920 (5.954)	0.564 (0.833)	0.642 (0.767)	0.474 (0.851)	23.821 (22.827)
		$x-y$	4.972 (4.053)	-0.012 (1.085)	0.105 (0.958)	-0.108 (1.171)	20.533 (19.550)
	5	$x-$	0.774 (0.771)	-0.032 (1.040)	0.002 (1.010)	0.041 (0.970)	5.086 (4.115)
		$y-$	10.806 (9.827)	0.474 (0.889)	0.536 (0.820)	0.392 (0.890)	30.135 (29.142)
		$x-y$	7.196 (6.257)	-0.037 (1.134)	0.097 (0.979)	-0.102 (1.196)	24.638 (23.657)
100	2	$x-$	0.916 (0.447)	0.012 (0.991)	0.013 (0.992)	0.015 (0.989)	5.044 (4.058)
		$y-$	2.985 (2.002)	0.903 (0.502)	0.795 (0.459)	0.744 (0.551)	14.063 (13.065)
		$x-y$	1.9050 (1.019)	0.059 (0.965)	-0.005 (1.027)	0.017 (1.006)	11.185 (10.196)
	5	$x-$	0.924 (0.459)	0.001 (1.004)	0.002 (1.003)	0.012 (0.994)	5.076 (4.089)
		$y-$	5.988 (4.999)	0.759 (0.683)	0.602 (0.650)	0.551 (0.712)	21.850 (20.853)
		$x-y$	4.009 (3.047)	0.042 (1.012)	-0.010 (1.043)	-0.038 (1.078)	17.899 (16.910)
	10	$x-$	0.913 (0.490)	-0.023 (1.027)	-0.017 (1.022)	0.047 (0.958)	5.098 (4.112)
		$y-$	10.987 (9.994)	0.617 (0.801)	0.505 (0.747)	0.499 (0.778)	30.085 (29.086)
		$x-y$	6.194 (5.219)	0.050 (1.038)	-0.020 (1.076)	-0.065 (1.132)	22.409 (21.417)

Çizelge 4.8 b) Normal hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j=1,2,3,4,5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	x-	0.895 (1.173)	0.038 (1.001)	0.004 (1.026)	0.025 (1.023)	-0.044 (1.078)	-0.002 (1.038)	6.414 (5.468)
		y-	4.404 (3.530)	0.508 (0.813)	0.492 (0.791)	0.508 (0.773)	0.468 (0.782)	0.427 (0.818)	18.113 (17.126)
		x-y	4.422 (3.634)	0.009 (1.109)	0.001 (1.109)	0.054 (1.057)	-0.037 (1.148)	-0.042 (1.175)	19.219 (18.254)
	3	x-	0.929 (1.204)	0.042 (1.005)	-0.071 (1.110)	-0.043 (1.097)	-0.038 (1.084)	0.112 (0.947)	6.470 (5.522)
		y-	10.929 (9.974)	0.234 (0.990)	0.292 (0.915)	0.287 (0.923)	0.256 (0.938)	0.314 (0.965)	30.107 (29.126)
		x-y	8.157 (7.278)	-0.041 (1.152)	0.030 (1.091)	-0.002 (1.099)	-0.005 (1.114)	-0.048 (1.169)	26.047 (25.082)
50	1	x-	0.892 (1.043)	-0.002 (1.026)	0.029 (1.003)	-0.002 (1.026)	0.009 (1.018)	0.009 (1.018)	6.402 (5.446)
		y-	3.020 (2.095)	0.703 (0.645)	0.718 (0.621)	0.642 (0.629)	0.768 (0.596)	0.659 (0.611)	14.161 (13.167)
		x-y	2.999 (2.257)	0.002 (1.089)	0.033 (1.049)	-0.039 (1.118)	0.048 (1.042)	-0.023 (1.096)	15.565 (14.597)
	3	x-	0.888 (1.049)	0.015 (1.005)	0.022 (1.012)	-0.055 (1.076)	-0.001 (1.034)	0.035 (0.996)	6.469 (5.512)
		y-	7.010 (6.058)	0.609 (0.749)	0.538 (0.825)	0.387 (0.858)	0.564 (0.794)	0.450 (0.839)	23.879 (22.887)
		x-y	5.132 (4.277)	0.068 (1.042)	0.045 (1.059)	-0.070 (1.192)	0.039 (1.096)	-0.105 (1.206)	20.836 (19.859)
	5	x-	0.948 (1.090)	0.001 (1.024)	-0.049 (1.079)	-0.081 (1.111)	0.005 (1.026)	0.131 (0.907)	6.554 (5.595)
		y-	11.026 (10.059)	0.412 (0.807)	0.396 (0.880)	0.289 (0.938)	0.454 (0.886)	0.386 (0.909)	30.106 (29.113)
		x-y	7.371 (6.462)	0.084 (1.047)	0.042 (1.090)	-0.117 (1.225)	0.007 (1.139)	-0.068 (1.201)	24.804 (23.829)
100	2	x-	0.915 (0.611)	0.012 (1.001)	0.019 (0.996)	-0.029 (1.040)	0.026 (0.987)	0.018 (0.995)	6.503 (5.525)
		y-	2.924 (1.952)	0.736 (0.521)	0.842 (0.454)	0.941 (0.460)	0.798 (0.517)	0.796 (0.514)	14.080 (13.083)
		x-y	1.916 (1.098)	0.001 (1.035)	0.013 (1.018)	0.027 (1.008)	-0.004 (1.045)	0.042 (0.988)	11.949 (10.970)
	5	x-	0.891 (0.610)	0.020 (0.995)	0.006 (1.007)	-0.059 (1.069)	0.006 (1.009)	0.048 (0.967)	6.535 (5.558)
		y-	5.919 (4.933)	0.619 (0.662)	0.725 (0.652)	0.831 (0.599)	0.705 (0.659)	0.610 (0.626)	21.914 (20.916)
		x-y	3.967 (3.033)	-0.015 (1.082)	0.039 (1.035)	0.089 (0.970)	-0.042 (1.096)	-0.066 (1.115)	18.403 (17.421)
	10	x-	0.887 (0.638)	-0.015 (1.029)	-0.068 (1.081)	-0.106 (1.116)	0.047 (0.973)	0.155 (0.863)	6.642 (5.662)
		y-	10.989 (10.000)	0.524 (0.804)	0.549 (0.779)	0.672 (0.721)	0.652 (0.704)	0.579 (0.698)	30.146 (29.149)
		x-y	6.120 (5.162)	-0.077 (1.159)	0.032 (1.053)	0.078 (1.020)	0.002 (1.075)	-0.066 (1.118)	22.952 (21.965)

Durum IV için simülasyon sonuçları:

Hem hata terimleri hem de β 'nın önselinin kalın kuyruklu bir dağılıma sahip olduğunun varsayılması durumunda oluşturulan regresyon modellerine ilişkin elde edilen parametre tahminleri **çizelge 4.9.a-4.14.b**'de verilmiştir.

Çizelge 4.9.a-4.9.b incelendiğinde, simülasyon verisinde yer alan aykırı gözlem sayısının en az ("1" ve "2") olması durumunda t hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modeli (t-t) parametre tahminleri tüm yönlerde bu aykırı gözlem ya da gözlemlerden mümkün olduğunca etkilenmemiştir. Örneklem genişliğinin artması durumunda bu tahminlerin RMSE değerlerinde azalma meydana geldiği gözlenmiştir. Yani içerisinde az sayıda aykırı gözlem bulunan bir veri seti modellenmek istenildiğinde; t-t modelinin kullanımı, örneklem genişliği arttıkça tüm yönlerdeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahminler vermesi sebebiyle tercih edilebilir. Ancak veri setinde örneklem genişliğinin %10'una denk gelecek sayıda aykırı gözlem olması durumunda ise t-t modeli tahminleri, sadece y –yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahminlerdir. Örneklem genişliğinin artması durumunda tahminlerde sadece x – yönündeki aykırı gözlemlerden dolayı bozulma meydana gelmiştir. σ parametresinin tahmini ise x – ve $x-y$ yönündeki aykırı gözlemlerden oldukça etkilenmiş fakat y – yönündekilerden diğer yönlerle göre fazla etkilenmemiştir.

Çizelge 4.9 a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	$x-$	0.973 (0.240)	0.956 (0.107)	0.980 (0.105)	0.962 (0.100)	1.101 (0.250)
		$y-$	0.994 (0.225)	0.982 (0.094)	1.011 (0.092)	0.987 (0.086)	1.087 (0.239)
		$x-y$	0.993 (0.240)	0.951 (0.135)	0.981 (0.153)	0.950 (0.144)	1.279 (0.441)
	3	$x-$	0.821 (1.110)	0.056 (0.970)	-0.115 (1.142)	0.064 (0.964)	4.190 (3.253)
		$y-$	1.010 (0.228)	0.974 (0.094)	1.011 (0.100)	0.980 (0.090)	1.474 (0.571)
		$x-y$	0.959 (1.010)	0.051 (0.994)	0.073 (0.987)	0.072 (0.978)	4.875 (4.044)

Çizelge 4.9 a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
50	1	x-	0.964 (0.195)	0.995 (0.066)	0.982 (0.068)	0.988 (0.070)	1.054 (0.139)
		y-	0.967 (0.194)	1.002 (0.066)	0.988 (0.066)	0.994 (0.069)	1.053 (0.138)
		x-y	0.962 (0.198)	0.993 (0.066)	0.982 (0.067)	0.987 (0.070)	1.131 (0.194)
	3	x-	0.931 (0.322)	0.964 (0.123)	0.953 (0.134)	0.958 (0.117)	1.250 (0.359)
		y-	0.964 (0.202)	0.999 (0.067)	0.989 (0.067)	0.992 (0.069)	1.222 (0.272)
		x-y	0.955 (0.212)	0.978 (0.071)	0.967 (0.075)	0.972 (0.079)	1.339 (0.384)
	5	x-	0.722 (0.778)	0.371 (0.767)	0.318 (0.842)	0.355 (0.790)	3.016 (2.381)
		y-	0.966 (0.208)	0.998 (0.068)	0.985 (0.067)	0.990 (0.075)	1.460 (0.502)
		x-y	0.739 (0.596)	0.607 (0.603)	0.592 (0.626)	0.588 (0.625)	2.793 (2.349)
100	2	x-	1.004 (0.123)	0.993 (0.046)	0.996 (0.045)	0.992 (0.041)	1.060 (0.131)
		y-	1.006 (0.122)	0.998 (0.045)	1.002 (0.045)	0.997 (0.040)	1.059 (0.130)
		x-y	1.005 (0.122)	0.996 (0.045)	0.999 (0.045)	0.995 (0.040)	1.060 (0.131)
	5	x-	0.859 (0.407)	0.796 (0.425)	0.776 (0.479)	0.789 (0.444)	1.765 (1.401)
		y-	1.003 (0.125)	0.998 (0.045)	1.002 (0.047)	0.996 (0.041)	1.178 (0.222)
		x-y	0.999 (0.127)	0.986 (0.046)	0.990 (0.049)	0.984 (0.045)	1.232 (0.272)
	10	x-	0.809 (0.662)	0.006 (1.001)	-0.066 (1.073)	0.073 (0.935)	4.167 (3.185)
		y-	1.010 (0.130)	0.996 (0.046)	1.000 (0.050)	0.996 (0.044)	1.466 (0.498)
		x-y	0.992 (0.158)	0.959 (0.114)	0.964 (0.103)	0.957 (0.127)	1.509 (0.621)

Çizelge 4.9 b) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	$x -$	0.969 (0.429)	0.852 (0.358)	0.837 (0.379)	0.874 (0.327)	0.819 (0.410)	0.853 (0.390)	1.419 (0.869)
		$y -$	0.992 (0.262)	0.979 (0.100)	0.976 (0.101)	0.996 (0.098)	0.970 (0.101)	0.999 (0.087)	1.154 (0.278)
		$x - y$	1.039 (0.399)	0.920 (0.246)	0.933 (0.174)	0.949 (0.199)	0.909 (0.232)	0.940 (0.219)	1.435 (0.702)
	3	$x -$	0.994 (1.356)	-0.220 (1.264)	0.058 (1.004)	0.199 (0.868)	-0.063 (1.112)	0.030 (1.022)	4.981 (4.061)
		$y -$	1.028 (0.292)	0.968 (0.113)	0.961 (0.113)	0.989 (0.097)	0.955 (0.109)	0.984 (0.097)	1.628 (0.722)
		$x - y$	1.258 (1.418)	-0.143 (1.186)	0.013 (1.037)	0.119 (0.933)	-0.084 (1.125)	0.103 (0.958)	6.340 (5.425)
50	1	$x -$	1.001 (0.190)	0.985 (0.067)	0.989 (0.070)	0.980 (0.066)	0.987 (0.066)	0.999 (0.064)	1.058 (0.154)
		$y -$	1.003 (0.189)	0.989 (0.065)	0.994 (0.069)	0.985 (0.064)	0.992 (0.066)	1.004 (0.063)	1.057 (0.153)
		$x - y$	0.999 (0.192)	0.984 (0.069)	0.987 (0.072)	0.979 (0.067)	0.987 (0.067)	0.998 (0.065)	1.134 (0.210)
	3	$x -$	0.987 (0.199)	0.967 (0.081)	0.973 (0.078)	0.965 (0.077)	0.974 (0.073)	0.987 (0.069)	1.232 (0.298)
		$y -$	0.997 (0.194)	0.986 (0.070)	0.991 (0.069)	0.983 (0.068)	0.992 (0.067)	1.004 (0.065)	1.222 (0.286)
		$x - y$	0.989 (0.197)	0.970 (0.080)	0.975 (0.080)	0.970 (0.077)	0.976 (0.073)	0.990 (0.071)	1.350 (0.413)
	5	$x -$	0.649 (0.898)	0.286 (0.927)	0.320 (0.886)	0.489 (0.683)	0.508 (0.660)	0.432 (0.773)	3.459 (3.015)
		$y -$	0.998 (0.196)	0.983 (0.076)	0.987 (0.075)	0.983 (0.072)	0.988 (0.072)	1.001 (0.068)	1.491 (0.550)
		$x - y$	0.768 (0.627)	0.661 (0.604)	0.666 (0.595)	0.732 (0.472)	0.738 (0.461)	0.711 (0.553)	2.874 (2.709)
100	2	$x -$	0.994 (0.121)	1.001 (0.048)	0.993 (0.041)	0.990 (0.045)	0.988 (0.047)	0.991 (0.050)	1.072 (0.133)
		$y -$	0.996 (0.121)	1.004 (0.048)	0.997 (0.040)	0.994 (0.044)	0.992 (0.046)	0.995 (0.049)	1.071 (0.132)
		$x - y$	0.995 (0.121)	1.003 (0.048)	0.995 (0.041)	0.992 (0.044)	0.990 (0.046)	0.993 (0.049)	1.072 (0.132)
	5	$x -$	0.886 (0.344)	0.772 (0.459)	0.738 (0.507)	0.722 (0.544)	0.715 (0.549)	0.748 (0.487)	2.216 (2.195)
		$y -$	0.997 (0.121)	1.005 (0.050)	0.995 (0.043)	0.993 (0.044)	0.993 (0.049)	0.995 (0.050)	1.197 (0.235)
		$x - y$	0.993 (0.121)	0.997 (0.050)	0.988 (0.046)	0.986 (0.046)	0.985 (0.051)	0.988 (0.052)	1.249 (0.283)
	10	$x -$	0.942 (0.701)	0.199 (0.825)	-0.121 (1.138)	-0.309 (1.326)	0.001 (1.018)	0.235 (0.791)	5.513 (4.532)
		$y -$	1.001 (0.122)	1.004 (0.052)	0.996 (0.045)	0.992 (0.046)	0.990 (0.051)	0.996 (0.053)	1.498 (0.526)
		$x - y$	0.908 (0.314)	0.766 (0.468)	0.747 (0.491)	0.728 (0.535)	0.730 (0.519)	0.749 (0.487)	2.606 (2.560)

Laplace hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeline (L-L) ilişkin elde edilen parametre tahminleri incelendiğinde (Çizelge 4.10.a-4.10.b), örneklem genişliğinin artması ve veri setindeki aykırı gözlem sayısının az olması durumunda β_1 , β_2 ve β_3 tahminlerinin sadece $y-$ yönündeki aykırı gözlemlerden etkilenmediği görülmüştür. Ancak β_0 ve σ parametrelerinin tahminleri ise aykırı gözlem sayısının artması halinde tüm yönlerdeki aykırı gözlemlere karşı bozulma göstermişlerdir.

Çizelge 4.10 a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	$x-$	0.995 (1.403)	-0.006 (1.029)	0.015 (1.010)	0.019 (1.004)	2.082 (1.093)
		$y-$	1.100 (0.384)	0.925 (0.152)	0.937 (0.167)	0.926 (0.151)	2.244 (1.246)
		$x-y$	1.288 (1.407)	0.004 (1.016)	0.033 (0.988)	0.019 (0.998)	2.787 (1.791)
	3	$x-$	0.993 (1.464)	-0.059 (1.084)	-0.009 (1.034)	0.074 (0.958)	2.071 (1.084)
		$y-$	1.615 (0.829)	0.753 (0.324)	0.770 (0.294)	0.733 (0.317)	3.510 (2.511)
		$x-y$	1.692 (1.571)	-0.021 (1.038)	0.017 (1.007)	0.015 (1.003)	3.335 (2.338)
50	1	$x-$	0.996 (0.832)	0.022 (0.995)	0.039 (0.974)	0.012 (1.009)	2.060 (1.065)
		$y-$	1.075 (0.272)	0.952 (0.099)	0.981 (0.088)	0.976 (0.098)	1.854 (0.856)
		$x-y$	1.193 (0.891)	0.039 (0.977)	0.040 (0.974)	0.012 (1.007)	2.498 (1.501)
	3	$x-$	1.054 (0.913)	0.002 (1.015)	-0.002 (1.019)	0.005 (1.014)	2.055 (1.060)
		$y-$	1.227 (0.363)	0.901 (0.138)	0.942 (0.116)	0.932 (0.128)	2.756 (1.756)
		$x-y$	1.423 (1.036)	0.022 (0.997)	0.019 (0.998)	-0.020 (1.038)	2.861 (1.863)
	5	$x-$	1.087 (0.941)	-0.029 (1.045)	-0.009 (1.026)	0.036 (0.986)	2.057 (1.063)
		$y-$	1.462 (0.556)	0.834 (0.203)	0.882 (0.169)	0.857 (0.196)	3.433 (2.434)
		$x-y$	1.601 (1.128)	-0.002 (1.020)	0.024 (0.993)	-0.013 (1.031)	3.183 (2.184)

Çizelge 4.10 a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	0.772 (0.712)	0.022 (0.986)	0.013 (0.997)	0.030 (0.979)	2.062 (1.065)
		y-	1.041 (0.146)	0.988 (0.061)	0.983 (0.058)	0.996 (0.058)	1.844 (0.845)
		x-y	0.925 (0.419)	0.421 (0.606)	0.423 (0.598)	0.430 (0.597)	2.228 (1.229)
	5	x-	0.774 (0.723)	0.007 (1.003)	-0.013 (1.022)	0.027 (0.985)	2.064 (1.067)
		y-	1.116 (0.191)	0.976 (0.069)	0.976 (0.064)	0.982 (0.066)	2.534 (1.534)
		x-y	0.991 (0.693)	0.023 (0.986)	0.004 (1.005)	0.003 (1.006)	2.685 (1.686)
	10	x-	0.732 (0.778)	-0.025 (1.035)	-0.026 (1.036)	0.064 (0.950)	2.069 (1.072)
		y-	1.293 (0.338)	0.956 (0.087)	0.953 (0.085)	0.959 (0.078)	3.387 (2.388)
		x-y	1.162 (0.707)	0.011 (0.997)	-0.004 (1.013)	0.010 (0.999)	3.020 (2.021)

Çizelge 4.10 b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	1.059 (1.508)	0.032 (1.012)	0.022 (1.027)	-0.010 (1.047)	-0.021 (1.063)	0.003 (1.044)	2.288 (1.302)
		y-	1.164 (0.442)	0.898 (0.178)	0.922 (0.168)	0.908 (0.188)	0.888 (0.176)	0.905 (0.173)	2.288 (1.290)
		x-y	1.470 (1.625)	0.022 (1.010)	0.010 (1.028)	0.006 (1.024)	-0.014 (1.046)	0.015 (1.031)	2.949 (1.955)
	3	x-	1.070 (1.719)	0.056 (1.005)	-0.078 (1.125)	-0.091 (1.144)	-0.026 (1.087)	0.139 (0.951)	2.307 (1.320)
		y-	1.865 (1.095)	0.672 (0.393)	0.689 (0.382)	0.689 (0.367)	0.638 (0.419)	0.705 (0.369)	3.604 (2.605)
		x-y	1.939 (1.919)	0.048 (0.998)	0.037 (1.008)	-0.017 (1.055)	-0.053 (1.081)	-0.012 (1.044)	3.468 (2.470)

Çizelge 4.10 b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
50	1	x-	0.989 (1.151)	0.025 (1.008)	0.038 (0.992)	0.019 (1.016)	0.005 (1.036)	-0.029 (1.059)	2.280 (1.286)
		y-	1.035 (0.271)	0.969 (0.105)	0.955 (0.097)	0.965 (0.096)	0.953 (0.088)	0.961 (0.102)	1.882 (0.883)
		x-y	1.196 (1.150)	0.019 (1.008)	0.045 (0.980)	0.020 (1.011)	-0.003 (1.033)	-0.014 (1.040)	2.686 (1.689)
	3	x-	1.038 (1.174)	0.056 (0.979)	0.025 (1.009)	-0.043 (1.085)	-0.047 (1.084)	0.018 (1.018)	2.287 (1.293)
		y-	1.234 (0.382)	0.909 (0.148)	0.909 (0.138)	0.900 (0.153)	0.896 (0.148)	0.896 (0.154)	2.806 (1.807)
		x-y	1.416 (1.225)	0.037 (0.994)	0.055 (0.975)	-0.022 (1.052)	-0.029 (1.055)	-0.013 (1.037)	3.026 (2.028)
	5	x-	1.043 (1.186)	0.023 (1.012)	-0.048 (1.089)	-0.074 (1.114)	-0.018 (1.066)	0.123 (0.926)	2.309 (1.315)
		y-	1.542 (0.654)	0.825 (0.226)	0.830 (0.216)	0.820 (0.239)	0.819 (0.225)	0.809 (0.236)	3.499 (2.499)
		x-y	1.712 (1.397)	0.045 (0.989)	0.043 (0.988)	-0.021 (1.055)	-0.065 (1.095)	0.007 (1.020)	3.342 (2.343)
100	2	x-	0.832 (0.934)	0.032 (0.986)	-0.018 (1.034)	-0.003 (1.020)	0.024 (0.995)	0.014 (0.999)	2.287 (1.289)
		y-	1.032 (0.174)	0.982 (0.066)	0.980 (0.060)	0.982 (0.057)	0.984 (0.059)	0.985 (0.064)	1.860 (0.861)
		x-y	0.923 (0.827)	0.115 (0.902)	0.075 (0.939)	0.090 (0.927)	0.112 (0.906)	0.093 (0.921)	2.487 (1.489)
	5	x-	0.817 (0.954)	0.058 (0.959)	-0.033 (1.049)	-0.043 (1.060)	0.010 (1.011)	0.027 (0.988)	2.294 (1.296)
		y-	1.117 (0.220)	0.970 (0.074)	0.966 (0.073)	0.968 (0.069)	0.972 (0.067)	0.969 (0.076)	2.555 (1.556)
		x-y	1.098 (0.946)	0.029 (0.986)	-0.018 (1.034)	-0.010 (1.026)	0.025 (0.991)	0.005 (1.008)	2.858 (1.859)
	10	x-	0.812 (0.977)	0.023 (0.998)	-0.119 (1.133)	-0.105 (1.125)	0.059 (0.967)	0.150 (0.873)	2.319 (1.321)
		y-	1.320 (0.389)	0.939 (0.102)	0.938 (0.103)	0.930 (0.107)	0.943 (0.094)	0.942 (0.096)	3.417 (2.418)
		x-y	1.319 (0.979)	0.039 (0.979)	-0.024 (1.038)	-0.024 (1.039)	0.010 (1.009)	0.013 (1.003)	3.177 (2.179)

Çizelge 4.11.a-4.11.b''de ise t hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri (t-L) ele alınmıştır. Veri setinin az sayıda aykırı gözlem içermesi durumunda tıpkı t-t modeli gibi t-L modeli parametre tahminleri de tüm yönlerde bu gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahminlerdir.

Aykırı gözlem sayısının artması durumunda σ parametresi dışında diğer parametreler için sadece $y-$ yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahminler verdiği görülmüştür. Örneklem genişliğinin artması durumunda bu durum değişmemiş ancak daha küçük RMSE'li robust Bayesyen tahminler elde edilmiştir.

Çizelge 4.11 a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	x-	0.976 (0.303)	0.916 (0.175)	0.935 (0.176)	0.913 (0.176)	1.137 (0.289)
		y-	0.993 (0.225)	0.987 (0.093)	1.015 (0.095)	0.993 (0.085)	1.091 (0.240)
		x-y	0.972 (0.351)	0.859 (0.259)	0.887 (0.253)	0.866 (0.256)	1.378 (0.552)
	3	x-	0.803 (1.099)	-0.007 (1.031)	-0.028 (1.059)	0.043 (0.986)	4.135 (3.197)
		y-	1.005 (0.230)	0.980 (0.094)	1.016 (0.102)	0.988 (0.089)	1.486 (0.583)
		x-y	0.963 (1.067)	0.017 (1.002)	-0.017 (1.043)	0.011 (1.010)	5.187 (4.265)
50	1	x-	0.973 (0.196)	0.991 (0.067)	0.977 (0.069)	0.985 (0.071)	1.060 (0.143)
		y-	0.976 (0.193)	0.997 (0.066)	0.984 (0.067)	0.993 (0.069)	1.057 (0.140)
		x-y	0.968 (0.198)	0.988 (0.068)	0.977 (0.070)	0.983 (0.071)	1.141 (0.205)
	3	x-	0.880 (0.937)	0.015 (1.000)	-0.035 (1.051)	0.032 (0.985)	4.123 (3.164)
		y-	0.972 (0.201)	0.995 (0.068)	0.986 (0.068)	0.990 (0.069)	1.231 (0.280)
		x-y	0.9775 (0.917)	0.080 (0.956)	0.065 (0.974)	0.095 (0.945)	4.307 (3.476)
	5	x-	0.876 (0.982)	-0.019 (1.035)	-0.070 (1.089)	0.096 (0.925)	4.143 (3.184)
		y-	0.978 (0.207)	0.994 (0.068)	0.979 (0.069)	0.988 (0.076)	1.477 (0.518)
		x-y	0.991 (0.929)	0.003 (1.009)	-0.025 (1.044)	0.033 (0.980)	5.003 (4.049)

Çizelge 4.11 a) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	0.995 (0.125)	0.972 (0.074)	0.978 (0.069)	0.971 (0.068)	1.075 (0.147)
		y-	1.003 (0.122)	0.997 (0.046)	1.003 (0.046)	0.996 (0.040)	1.063 (0.132)
		x-y	1.003 (0.124)	0.994 (0.046)	1.000 (0.045)	0.993 (0.040)	1.064 (0.133)
	5	x-	0.813 (0.656)	0.009 (0.996)	-0.015 (1.020)	0.029 (0.977)	4.189 (3.206)
		y-	1.001 (0.125)	0.996 (0.045)	1.003 (0.047)	0.994 (0.041)	1.183 (0.226)
		x-y	0.849 (0.619)	0.058 (0.965)	0.054 (0.969)	0.060 (0.961)	4.313 (3.417)
	10	x-	0.805 (0.659)	-0.028 (1.035)	-0.028 (1.035)	0.068 (0.939)	4.225 (3.243)
		y-	1.010 (0.130)	0.994 (0.046)	1.001 (0.050)	0.993 (0.045)	1.476 (0.508)
		x-y	0.895 (0.626)	0.004 (1.002)	0.002 (1.003)	0.010 (0.996)	4.870 (3.889)

Çizelge 4.11 b) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	1.014 (0.575)	0.762 (0.372)	0.746 (0.397)	0.779 (0.351)	0.757 (0.380)	0.778 (0.359)	1.415 (0.749)
		y-	0.993 (0.264)	0.985 (0.099)	0.973 (0.103)	0.996 (0.101)	0.977 (0.102)	1.002 (0.087)	1.145 (0.272)
		x-y	1.047 (0.801)	0.630 (0.521)	0.626 (0.514)	0.641 (0.497)	0.630 (0.508)	0.647 (0.493)	1.975 (1.517)
	3	x-	0.972 (1.456)	-0.056 (1.112)	-0.167 (1.231)	-0.069 (1.113)	0.056 (1.002)	0.237 (0.870)	5.187 (4.258)
		y-	1.035 (0.300)	0.974 (0.115)	0.958 (0.116)	0.987 (0.101)	0.964 (0.110)	0.986 (0.098)	1.632 (0.730)
		x-y	1.265 (1.372)	-0.030 (1.077)	-0.044 (1.083)	-0.013 (1.054)	0.008 (1.040)	0.088 (0.973)	6.331 (5.416)

Çizelge 4.11 b) t hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim t(0, \sigma^2, 3)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0,1), j=1,2,3,4,5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
50	1	x-	1.003 (0.194)	0.977 (0.070)	0.984 (0.075)	0.972 (0.073)	0.974 (0.077)	0.995 (0.067)	1.072 (0.161)
		y-	1.006 (0.189)	0.991 (0.065)	0.995 (0.069)	0.984 (0.065)	0.988 (0.066)	1.005 (0.063)	1.067 (0.158)
		x-y	1.005 (0.205)	0.975 (0.080)	0.983 (0.079)	0.969 (0.079)	0.974 (0.082)	0.992 (0.074)	1.150 (0.227)
	3	x-	0.854 (1.128)	-0.041 (1.080)	-0.048 (1.079)	-0.033 (1.063)	0.019 (1.016)	0.124 (0.925)	5.188 (4.226)
		y-	1.001 (0.194)	0.987 (0.071)	0.994 (0.069)	0.981 (0.069)	0.989 (0.069)	1.007 (0.066)	1.237 (0.298)
		x-y	0.985 (1.052)	-0.010 (1.043)	0.029 (1.006)	0.020 (1.018)	-0.009 (1.037)	0.045 (0.992)	5.715 (4.783)
	5	x-	0.878 (1.186)	-0.096 (1.125)	-0.154 (1.189)	-0.040 (1.079)	0.036 (1.002)	0.265 (0.811)	5.333 (4.367)
		y-	1.002 (0.198)	0.985 (0.078)	0.989 (0.075)	0.980 (0.072)	0.983 (0.074)	1.003 (0.069)	1.521 (0.582)
		x-y	1.035 (1.148)	-0.033 (1.069)	-0.027 (1.055)	-0.027 (1.060)	-0.006 (1.032)	0.104 (0.941)	6.312 (5.349)
100	2	x-	0.977 (0.246)	0.741 (0.393)	0.727 (0.414)	0.727 (0.408)	0.716 (0.422)	0.707 (0.435)	1.520 (1.099)
		y-	1.006 (0.123)	1.002 (0.048)	0.997 (0.041)	0.996 (0.043)	0.992 (0.046)	0.994 (0.050)	1.069 (0.131)
		x-y	1.005 (0.122)	1.001 (0.048)	0.994 (0.041)	0.995 (0.044)	0.990 (0.047)	0.992 (0.049)	1.069 (0.131)
	5	x-	1.008 (0.646)	0.053 (0.966)	-0.034 (1.049)	-0.039 (1.059)	-0.019 (1.036)	0.050 (0.969)	5.296 (4.315)
		y-	1.005 (0.122)	1.003 (0.050)	0.995 (0.043)	0.996 (0.044)	0.993 (0.049)	0.993 (0.050)	1.194 (0.233)
		x-y	1.069 (0.655)	0.039 (0.979)	0.008 (1.007)	0.004 (1.014)	-0.020 (1.035)	-0.007 (1.023)	5.733 (4.752)
	10	x-	1.035 (0.680)	-0.017 (1.036)	-0.175 (1.191)	-0.083 (1.104)	0.053 (0.968)	0.226 (0.807)	5.507 (4.523)
		y-	1.012 (0.121)	1.001 (0.052)	0.996 (0.045)	0.996 (0.046)	0.991 (0.051)	0.994 (0.054)	1.497 (0.525)
		x-y	1.164 (0.698)	0.049 (0.969)	-0.033 (1.049)	-0.022 (1.039)	-0.016 (1.031)	0.033 (0.987)	6.163 (5.183)

Laplace hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modeli (L-t) parametre tahminleri incelendiğinde (çizelge 4.12.a-4.12.b), aykırı gözlem sayısının az olması durumunda β_1, β_2 ve β_3 parametrelerinin sadece $y-$ yönünde robust tahminler verdiği görülmüştür. Aykırı gözlem sayısının artması durumunda parametre tahminleri, $x-$ ve $x-y$ yönündeki aykırı gözlemlere ek olarak $y-$ yönündekilerden de etkilenmiştir. Örneklem genişliğinin artması halinde ise bu etkilenmenin devam ettiği görülmüştür. σ parametresinin tahmini ise tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmiştir.

Çizelge 4.12 a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	$x-$	1.049 (1.393)	-0.023 (1.053)	0.005 (1.027)	0.046 (0.984)	2.088 (1.099)
		$y-$	1.113 (0.375)	0.931 (0.143)	0.939 (0.158)	0.934 (0.141)	2.246 (1.248)
		$x-y$	1.375 (1.416)	-0.013 (1.038)	0.023 (1.004)	0.045 (0.977)	2.794 (1.798)
	3	$x-$	1.059 (1.413)	-0.108 (1.133)	0.003 (1.034)	0.109 (0.936)	2.081 (1.093)
		$y-$	1.634 (0.824)	0.780 (0.296)	0.798 (0.266)	0.762 (0.290)	3.512 (2.513)
		$x-y$	1.797 (1.649)	-0.038 (1.061)	0.013 (1.013)	0.034 (0.991)	3.349 (2.351)
50	1	$x-$	1.040 (0.842)	0.020 (1.000)	0.033 (0.984)	0.020 (1.006)	2.064 (1.069)
		$y-$	1.083 (0.274)	0.953 (0.098)	0.979 (0.087)	0.976 (0.097)	1.858 (0.860)
		$x-y$	1.251 (0.906)	0.039 (0.982)	0.038 (0.981)	0.016 (1.008)	2.504 (1.507)
	3	$x-$	1.091 (0.918)	-0.005 (1.025)	0.006 (1.013)	0.002 (1.024)	2.060 (1.065)
		$y-$	1.239 (0.369)	0.908 (0.131)	0.943 (0.113)	0.934 (0.122)	2.761 (1.762)
		$x-y$	1.464 (1.056)	0.004 (1.016)	0.030 (0.989)	-0.015 (1.036)	2.867 (1.869)
	5	$x-$	1.127 (0.974)	-0.030 (1.051)	-0.015 (1.033)	0.043 (0.980)	2.064 (1.069)
		$y-$	1.474 (0.559)	0.849 (0.185)	0.891 (0.156)	0.869 (0.180)	3.438 (2.439)
		$x-y$	1.670 (1.180)	-0.016 (1.036)	0.030 (0.992)	-0.006 (1.029)	3.192 (2.193)

Çizelge 4.12 a) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	0.789 (0.706)	0.027 (0.983)	0.009 (1.002)	0.029 (0.983)	2.064 (1.067)
		y-	1.046 (0.147)	0.987 (0.061)	0.983 (0.058)	0.997 (0.058)	1.846 (0.847)
		x-y	0.943 (0.401)	0.442 (0.586)	0.444 (0.576)	0.452 (0.575)	2.229 (1.230)
	5	x-	0.787 (0.723)	0.007 (1.003)	-0.007 (1.018)	0.020 (0.993)	2.068 (1.070)
		y-	1.121 (0.193)	0.976 (0.069)	0.975 (0.063)	0.982 (0.066)	2.537 (1.537)
		x-y	1.022 (0.694)	0.021 (0.989)	0.010 (1.001)	-0.001 (1.013)	2.689 (1.690)
	10	x-	0.765 (0.763)	-0.013 (1.024)	-0.042 (1.053)	0.067 (0.948)	2.074 (1.076)
		y-	1.295 (0.339)	0.955 (0.086)	0.955 (0.080)	0.961 (0.076)	3.391 (2.391)
		x-y	1.192 (0.723)	0.009 (1.003)	0.016 (0.998)	-0.007 (1.020)	3.026 (2.027)

Çizelge 4.12 b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	1.079 (1.523)	0.011 (1.041)	0.030 (1.028)	0.006 (1.045)	-0.012 (1.065)	-0.011 (1.077)	2.296 (1.309)
		y-	1.165 (0.434)	0.910 (0.163)	0.929 (0.154)	0.918 (0.173)	0.904 (0.158)	0.915 (0.159)	2.279 (1.280)
		x-y	1.478 (1.637)	-0.029 (1.068)	0.035 (1.017)	0.023 (1.016)	0.001 (1.041)	0.008 (1.049)	2.956 (1.962)
	3	x-	1.126 (1.707)	0.023 (1.036)	-0.063 (1.127)	-0.067 (1.129)	-0.010 (1.064)	0.116 (0.963)	2.315 (1.329)
		y-	1.869 (1.083)	0.714 (0.350)	0.720 (0.353)	0.726 (0.330)	0.676 (0.383)	0.742 (0.329)	3.589 (2.589)
		x-y	1.992 (1.965)	-0.043 (1.097)	0.049 (0.996)	0.011 (1.027)	-0.019 (1.062)	0.004 (1.040)	3.483 (2.486)

Çizelge 4.12 b) Laplace hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim L(0, \sigma)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
50	1	x-	0.971 (1.163)	0.015 (1.023)	0.050 (0.987)	0.018 (1.024)	-0.004 (1.050)	-0.021 (1.058)	2.283 (1.289)
		y-	1.035 (0.270)	0.969 (0.103)	0.954 (0.097)	0.965 (0.094)	0.953 (0.087)	0.962 (0.102)	1.882 (0.884)
		x-y	1.201 (1.153)	0.018 (1.014)	0.046 (0.988)	0.018 (1.020)	-0.001 (1.035)	-0.015 (1.049)	2.690 (1.694)
	3	x-	1.034 (1.171)	0.023 (1.013)	0.012 (1.023)	-0.026 (1.068)	-0.036 (1.082)	0.037 (1.005)	2.289 (1.295)
		y-	1.237 (0.375)	0.921 (0.136)	0.915 (0.129)	0.909 (0.141)	0.904 (0.137)	0.905 (0.142)	2.800 (1.801)
		x-y	1.400 (1.216)	0.011 (1.022)	0.067 (0.967)	-0.004 (1.046)	-0.012 (1.047)	-0.035 (1.067)	3.033 (2.035)
	5	x-	1.006 (1.134)	-0.024 (1.063)	-0.059 (1.102)	-0.065 (1.110)	-0.007 (1.058)	0.160 (0.892)	2.313 (1.318)
		y-	1.534 (0.636)	0.854 (0.194)	0.856 (0.187)	0.845 (0.210)	0.844 (0.200)	0.834 (0.209)	3.488 (2.488)
		x-y	1.733 (1.431)	0.012 (1.026)	0.042 (0.995)	-0.019 (1.057)	-0.036 (1.074)	0.009 (1.020)	3.353 (2.355)
100	2	x-	0.847 (0.925)	0.020 (0.999)	-0.013 (1.032)	-0.002 (1.023)	0.029 (0.995)	0.014 (1.003)	2.288 (1.290)
		y-	1.034 (0.172)	0.982 (0.066)	0.979 (0.061)	0.981 (0.058)	0.983 (0.059)	0.985 (0.064)	1.859 (0.860)
		x-y	0.936 (0.819)	0.122 (0.897)	0.083 (0.933)	0.096 (0.925)	0.120 (0.901)	0.102 (0.914)	2.488 (1.489)
	5	x-	0.830 (0.964)	0.022 (0.998)	-0.029 (1.047)	-0.040 (1.060)	0.027 (0.997)	0.039 (0.981)	2.296 (1.298)
		y-	1.123 (0.225)	0.970 (0.074)	0.965 (0.073)	0.967 (0.068)	0.973 (0.066)	0.968 (0.075)	2.554 (1.555)
		x-y	1.112 (0.946)	0.017 (1.003)	-0.029 (1.046)	-0.011 (1.030)	0.032 (0.989)	0.020 (0.995)	2.862 (1.863)
	10	x-	0.850 (0.956)	0.002 (1.020)	-0.122 (1.139)	-0.079 (1.098)	0.047 (0.982)	0.160 (0.865)	2.323 (1.325)
		y-	1.328 (0.389)	0.944 (0.097)	0.941 (0.099)	0.935 (0.100)	0.947 (0.088)	0.945 (0.092)	3.413 (2.413)
		x-y	1.360 (0.995)	0.024 (0.997)	-0.031 (1.051)	-0.041 (1.062)	0.031 (0.992)	0.032 (0.988)	3.183 (2.184)

RN hata dağılımı ve t önsel dağılıma dayalı regresyon modeline (RN-t) ilişkin elde edilen parametre tahminleri (**çizelge 4.13.a-4.13.b**) incelendiğinde ise bu tahminlerin tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahminler olduğu görülmüştür. Aykırı gözlem sayısında artış olması durumunda bile parametre tahminlerinde tüm yönlerdeki bu gözlemlere karşı bozulma olmamıştır. Örneklem genişliği arttırıldığında daha küçük RMSE değerli robust Bayesyen tahminler elde edilmiştir.

Çizelge 4.13 a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	0.975 (0.144)	0.984 (0.080)	0.970 (0.083)	0.983 (0.074)	0.944 (0.156)
		y-	0.992 (0.144)	0.977 (0.079)	0.991 (0.078)	1.009 (0.072)	0.925 (0.157)
		x-y	0.982 (0.159)	0.993 (0.070)	0.970 (0.074)	1.000 (0.069)	0.915 (0.169)
	3	x-	0.989 (0.177)	0.981 (0.082)	0.976 (0.091)	0.994 (0.083)	0.869 (0.192)
		y-	0.997 (0.152)	0.968 (0.083)	0.978 (0.082)	1.003 (0.081)	0.926 (0.156)
		x-y	0.994 (0.156)	0.976 (0.080)	0.988 (0.089)	0.986 (0.092)	0.860 (0.188)
50	1	x-	0.995 (0.126)	0.996 (0.054)	0.997 (0.059)	0.994 (0.066)	0.962 (0.108)
		y-	1.021 (0.142)	0.986 (0.065)	0.992 (0.056)	0.997 (0.063)	0.967 (0.113)
		x-y	1.002 (0.135)	0.993 (0.048)	0.985 (0.060)	0.995 (0.058)	0.919 (0.130)
	3	x-	0.979 (0.132)	0.989 (0.055)	0.998 (0.059)	0.997 (0.052)	0.927 (0.129)
		y-	0.983 (0.123)	0.975 (0.063)	0.996 (0.060)	0.992 (0.056)	0.912 (0.138)
		x-y	1.007 (0.133)	0.987 (0.061)	0.997 (0.056)	0.991 (0.063)	0.905 (0.143)
	5	x-	1.009 (0.135)	0.979 (0.056)	0.982 (0.060)	0.994 (0.050)	0.901 (0.147)
		y-	1.019 (0.126)	0.976 (0.061)	0.992 (0.059)	1.000 (0.057)	0.925 (0.123)
		x-y	1.006 (0.147)	0.989 (0.061)	0.997 (0.058)	0.990 (0.059)	0.897 (0.143)

Çizelge 4.13 a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	1.011 (0.117)	0.994 (0.043)	0.995 (0.042)	0.996 (0.040)	0.944 (0.094)
		y-	0.988 (0.111)	0.992 (0.038)	0.996 (0.041)	0.997 (0.038)	0.965 (0.083)
		x-y	1.018 (0.100)	0.997 (0.045)	0.996 (0.037)	1.006 (0.038)	0.937 (0.104)
	5	x-	1.017 (0.099)	0.992 (0.037)	0.990 (0.045)	1.001 (0.037)	0.952 (0.089)
		y-	1.017 (0.114)	0.989 (0.043)	0.989 (0.038)	0.998 (0.044)	0.917 (0.107)
		x-y	0.970 (0.116)	0.997 (0.039)	1.001 (0.039)	1.009 (0.043)	0.946 (0.088)
	10	x-	0.997 (0.124)	1.001 (0.042)	0.999 (0.040)	0.995 (0.039)	0.901 (0.125)
		y-	0.979 (0.117)	0.993 (0.041)	0.994 (0.044)	0.998 (0.045)	0.928 (0.107)
		x-y	1.004 (0.126)	0.984 (0.047)	0.992 (0.043)	1.001 (0.042)	0.915 (0.115)

Çizelge 4.13 b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	1.033 (0.139)	0.965 (0.082)	1.020 (0.078)	1.008 (0.078)	0.978 (0.081)	0.995 (0.088)	0.960 (0.149)
		y-	0.994 (0.149)	0.978 (0.085)	1.009 (0.078)	0.999 (0.073)	0.983 (0.087)	0.989 (0.075)	0.960 (0.156)
		x-y	1.006 (0.159)	0.969 (0.084)	0.999 (0.079)	1.011 (0.077)	0.972 (0.084)	0.987 (0.092)	0.932 (0.170)
	3	x-	1.039 (0.134)	0.969 (0.082)	0.997 (0.078)	1.001 (0.076)	0.967 (0.083)	0.992 (0.083)	0.870 (0.196)
		y-	0.987 (0.164)	0.952 (0.097)	1.003 (0.078)	1.007 (0.072)	0.994 (0.076)	1.006 (0.087)	0.887 (0.189)
		x-y	0.980 (0.163)	0.964 (0.088)	0.998 (0.093)	1.015 (0.089)	0.988 (0.079)	1.003 (0.086)	0.913 (0.189)

Çizelge 4.13 b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve t önsel dağılıma ($\beta_j \sim t(0, 1, 3)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
50	1	x-	1.022 (0.147)	0.985 (0.059)	1.002 (0.057)	0.998 (0.056)	0.994 (0.059)	0.993 (0.055)	0.949 (0.117)
		y-	1.003 (0.124)	0.967 (0.066)	0.998 (0.067)	0.995 (0.059)	1.003 (0.065)	0.989 (0.066)	0.962 (0.114)
		x-y	1.027 (0.144)	0.987 (0.066)	1.016 (0.060)	1.005 (0.063)	0.988 (0.059)	1.001 (0.058)	0.953 (0.129)
	3	x-	1.012 (0.122)	0.979 (0.067)	0.995 (0.067)	1.009 (0.051)	1.002 (0.054)	0.999 (0.058)	0.947 (0.130)
		y-	0.993 (0.133)	0.988 (0.055)	0.998 (0.061)	1.005 (0.060)	0.994 (0.059)	1.005 (0.058)	0.932 (0.134)
		x-y	1.011 (0.139)	0.989 (0.065)	0.998 (0.068)	0.997 (0.061)	0.987 (0.062)	1.001 (0.060)	0.907 (0.138)
	5	x-	1.010 (0.125)	0.985 (0.063)	1.004 (0.057)	1.011 (0.062)	0.993 (0.067)	1.003 (0.056)	0.882 (0.151)
		y-	0.996 (0.146)	0.992 (0.060)	0.996 (0.059)	1.001 (0.065)	0.984 (0.065)	0.994 (0.057)	0.934 (0.114)
		x-y	1.018 (0.154)	0.985 (0.071)	0.991 (0.060)	1.009 (0.066)	0.989 (0.063)	0.995 (0.057)	0.874 (0.170)
100	2	x-	0.992 (0.093)	0.990 (0.043)	0.996 (0.039)	1.002 (0.043)	0.997 (0.043)	0.999 (0.040)	0.969 (0.083)
		y-	0.972 (0.115)	0.987 (0.038)	1.003 (0.037)	0.997 (0.040)	1.000 (0.036)	0.997 (0.038)	0.958 (0.076)
		x-y	0.995 (0.109)	0.988 (0.043)	0.996 (0.039)	0.994 (0.040)	0.997 (0.042)	0.997 (0.041)	0.968 (0.074)
	5	x-	1.019 (0.112)	0.996 (0.038)	1.002 (0.042)	0.998 (0.040)	0.992 (0.040)	0.997 (0.043)	0.939 (0.099)
		y-	1.026 (0.123)	0.995 (0.041)	1.005 (0.048)	1.006 (0.041)	0.992 (0.040)	0.996 (0.040)	0.935 (0.098)
		x-y	1.003 (0.106)	0.990 (0.046)	0.996 (0.037)	1.005 (0.041)	0.992 (0.041)	0.998 (0.036)	0.931 (0.099)
	10	x-	0.979 (0.119)	0.985 (0.040)	1.004 (0.039)	1.001 (0.049)	0.995 (0.045)	0.995 (0.042)	0.914 (0.119)
		y-	0.971 (0.115)	0.988 (0.044)	1.001 (0.040)	1.010 (0.042)	0.995 (0.045)	0.998 (0.041)	0.897 (0.122)
		x-y	1.006 (0.119)	0.996 (0.043)	0.992 (0.040)	0.994 (0.044)	0.997 (0.049)	0.996 (0.039)	0.903 (0.128)

RN hata dağılımı ve Laplace önsel dağılıma dayalı regresyon modeli (RN-L) parametre parametre tahminleri de (**çizelge 4.14.a-4.14.b**) tıpkı RN-t modeli tahminleri gibi tüm yönlerdeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahminlerdir. Önsel dağılımın t dağılımı yerine Laplace dağılımına sahip olduğunun varsayılması, RN hata dağılımına dayalı bu modeller için parametre tahminlerinde herhangi bir farklılığa sebep olmamıştır.

Çizelge 4.14 a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j=1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
30	1	x-	1.024 (0.143)	0.982 (0.074)	0.987 (0.075)	1.005 (0.071)	0.938 (0.145)
		y-	0.995 (0.139)	1.005 (0.069)	0.996 (0.071)	0.990 (0.075)	0.945 (0.144)
		x-y	1.029 (0.143)	0.983 (0.068)	0.988 (0.076)	1.005 (0.070)	0.909 (0.158)
	3	x-	1.005 (0.149)	0.992 (0.076)	0.997 (0.077)	1.004 (0.071)	0.904 (0.154)
		y-	1.036 (0.134)	0.996 (0.085)	0.984 (0.085)	0.991 (0.075)	0.911 (0.178)
		x-y	1.013 (0.144)	0.987 (0.075)	0.992 (0.072)	0.998 (0.080)	0.875 (0.178)
50	1	x-	0.988 (0.140)	0.985 (0.051)	0.995 (0.057)	0.995 (0.059)	0.954 (0.129)
		y-	0.968 (0.137)	0.982 (0.055)	0.981 (0.055)	0.996 (0.053)	0.952 (0.125)
		x-y	1.008 (0.133)	0.997 (0.056)	0.995 (0.061)	0.999 (0.064)	0.923 (0.142)
	3	x-	1.021 (0.154)	0.987 (0.055)	0.983 (0.058)	0.992 (0.056)	0.954 (0.119)
		y-	1.007 (0.141)	0.991 (0.059)	0.999 (0.057)	1.001 (0.058)	0.966 (0.103)
		x-y	0.988 (0.129)	0.979 (0.058)	0.981 (0.061)	0.990 (0.057)	0.928 (0.123)
	5	x-	0.995 (0.146)	0.985 (0.064)	0.995 (0.069)	0.999 (0.060)	0.897 (0.159)
		y-	1.002 (0.144)	0.987 (0.065)	0.998 (0.058)	0.998 (0.057)	0.911 (0.149)
		x-y	0.986 (0.133)	0.992 (0.065)	0.998 (0.062)	0.996 (0.060)	0.879 (0.154)

Çizelge 4.14 a) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j = 1, 2, 3$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri				
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
100	2	x-	0.996 (0.109)	0.998 (0.038)	0.992 (0.039)	0.999 (0.041)	0.993 (0.065)
		y-	0.997 (0.121)	0.999 (0.039)	0.998 (0.043)	1.001 (0.036)	0.957 (0.092)
		x-y	0.992 (0.092)	0.990 (0.040)	0.995 (0.035)	1.002 (0.038)	0.946 (0.096)
	5	x-	0.982 (0.103)	0.994 (0.036)	1.004 (0.037)	0.999 (0.035)	0.941 (0.105)
		y-	1.001 (0.123)	0.996 (0.042)	0.990 (0.043)	0.999 (0.040)	0.948 (0.097)
		x-y	0.978 (0.107)	0.997 (0.038)	0.998 (0.042)	1.003 (0.039)	0.908 (0.113)
	10	x-	0.996 (0.109)	0.997 (0.040)	0.987 (0.039)	1.001 (0.040)	0.894 (0.129)
		y-	1.005 (0.113)	0.997 (0.039)	1.004 (0.042)	0.994 (0.040)	0.925 (0.104)
		x-y	1.011 (0.119)	0.998 (0.040)	1.004 (0.038)	0.997 (0.034)	0.918 (0.114)

Çizelge 4.14 b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$ RMSE	$\hat{\beta}_1$ RMSE	$\hat{\beta}_2$ RMSE	$\hat{\beta}_3$ RMSE	$\hat{\beta}_4$ RMSE	$\hat{\beta}_5$ RMSE	$\hat{\sigma}$ RMSE
30	1	x-	0.932 (0.159)	0.972 (0.075)	1.006 (0.077)	0.971 (0.078)	0.989 (0.076)	0.970 (0.084)	0.959 (0.149)
		y-	0.936 (0.157)	0.990 (0.080)	0.978 (0.079)	0.949 (0.093)	1.001 (0.077)	0.971 (0.080)	0.956 (0.159)
		x-y	0.893 (0.197)	0.985 (0.074)	0.988 (0.073)	0.960 (0.101)	0.986 (0.083)	0.973 (0.087)	0.923 (0.168)
	3	x-	0.941 (0.158)	0.990 (0.073)	0.995 (0.066)	0.950 (0.095)	0.973 (0.082)	0.967 (0.086)	0.865 (0.199)
		y-	0.900 (0.190)	0.978 (0.081)	0.986 (0.079)	0.960 (0.082)	1.001 (0.074)	1.003 (0.085)	0.887 (0.184)
		x-y	0.903 (0.181)	0.976 (0.077)	0.993 (0.079)	0.969 (0.091)	1.001 (0.078)	0.973 (0.076)	0.908 (0.188)

Çizelge 4.14 b) RN hata dağılımı ($\varepsilon_i \sim RN(0, \sigma, 0.05, 2)$) ve Laplace önsel dağılıma ($\beta_j \sim L(0, 1)$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$) dayalı regresyon modelinin parametre tahminleri ve RMSE değerleri (devam)

n	Aykırı gözlem sayısı	Aykırı gözlem yönü	Regresyon modeli parametre tahminleri						
			$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$
			RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE	RMSE
50	1	x-	0.924 (0.150)	0.984 (0.053)	0.995 (0.055)	0.979 (0.058)	0.998 (0.060)	0.984 (0.057)	0.950 (0.117)
		y-	0.912 (0.166)	0.974 (0.058)	0.995 (0.062)	0.970 (0.068)	1.009 (0.063)	0.977 (0.066)	0.963 (0.115)
		x-y	0.932 (0.164)	0.990 (0.067)	1.012 (0.058)	0.980 (0.063)	0.995 (0.054)	0.989 (0.058)	0.950 (0.128)
	3	x-	0.927 (0.152)	0.981 (0.062)	0.992 (0.069)	0.983 (0.054)	1.005 (0.056)	0.986 (0.054)	0.946 (0.129)
		y-	0.912 (0.159)	0.993 (0.058)	0.995 (0.058)	0.977 (0.066)	1.005 (0.060)	0.997 (0.059)	0.929 (0.137)
		x-y	0.920 (0.159)	0.994 (0.062)	0.996 (0.074)	0.970 (0.069)	0.992 (0.061)	0.992 (0.057)	0.913 (0.136)
	5	x-	0.933 (0.134)	0.988 (0.064)	0.996 (0.059)	0.989 (0.063)	0.993 (0.064)	0.993 (0.055)	0.884 (0.151)
		y-	0.932 (0.174)	0.982 (0.064)	1.007 (0.060)	0.986 (0.068)	1.015 (0.057)	0.989 (0.063)	0.878 (0.168)
		x-y	0.913 (0.161)	0.996 (0.056)	1.002 (0.065)	0.975 (0.066)	1.006 (0.059)	0.985 (0.067)	0.893 (0.152)
100	2	x-	0.947 (0.115)	0.988 (0.042)	0.997 (0.038)	0.993 (0.040)	1.002 (0.040)	0.988 (0.045)	0.965 (0.090)
		y-	0.945 (0.110)	0.997 (0.042)	0.995 (0.040)	0.989 (0.041)	0.994 (0.038)	0.993 (0.040)	0.955 (0.086)
		x-y	0.979 (0.128)	0.987 (0.044)	0.997 (0.039)	0.985 (0.040)	0.999 (0.042)	0.991 (0.037)	0.958 (0.080)
	5	x-	0.976 (0.099)	0.992 (0.041)	1.003 (0.038)	0.990 (0.040)	0.995 (0.039)	0.994 (0.041)	0.921 (0.104)
		y-	0.991 (0.109)	0.996 (0.035)	0.997 (0.039)	0.988 (0.038)	1.007 (0.040)	0.999 (0.030)	0.910 (0.118)
		x-y	0.945 (0.122)	0.999 (0.045)	1.001 (0.043)	0.992 (0.046)	0.996 (0.040)	0.996 (0.038)	0.958 (0.084)
	10	x-	0.952 (0.126)	0.993 (0.043)	1.007 (0.037)	0.990 (0.045)	0.998 (0.041)	0.987 (0.045)	0.883 (0.141)
		y-	0.939 (0.144)	0.994 (0.044)	1.001 (0.041)	0.991 (0.042)	0.999 (0.040)	0.984 (0.047)	0.919 (0.115)
		x-y	1.005 (0.118)	0.989 (0.043)	0.995 (0.038)	0.983 (0.041)	1.001 (0.043)	0.996 (0.040)	0.897 (0.129)

Sonuç olarak, L-t ve L-L regresyon modellerine yönelik elde edilen parametre tahminlerinin tüm yönlerdeki aykırı gözlemlere karşı bozulma gösterdiği ancak t-t ve t-L modellerinin ise y - yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahminler verdiği görülmüştür. Bu nedenle hata dağılımı Laplace yerine t dağılımına sahip olduğu varsayılan regresyon modellerinin kullanımının tercih edilebileceği söylenebilir. RN-t ve RN-L modellerinin bu modellere kıyasla tüm yönlerdeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen parametre tahminleri verdiği görülmüştür. Özet olarak, aykırı gözlemlili bir veri setinin sözü edilen diğer modellere kıyasla RN-t ve RN-L modellerinden herhangi biri kullanılarak modellenilebileceği önerilmektedir.



5. GERÇEK VERİ UYGULAMASI

Bu bölümde, tezde ele alınan tüm doğrusal regresyon modellerinin parametrelerine yönelik elde edilen robust ve robust Bayesyen tahmin edicilerinin performansları, literatürde sıkça kullanılan üç gerçek veri seti ele alınarak test edilmiş ve her parametreye ilişkin parametre tahminleri, R ve WinBUGS istatistiksel paket programları kullanılarak bulunmuştur. Bayesyen tahminlerin elde edilmesinde 100000 iterasyonlu ve 1000 burn-in periyotlu MCMC simülasyon yönremi kullanılmıştır. Ayrıca tüm modellerin performansları aşağıda ifade edilen AIC ve DIC model seçim kriterleri kullanılarak karşılaştırılmıştır.

5.1 Bazı Model Seçim Kriterleri

Günümüzde artan birtakım teknolojik gelişmeler sayesinde istatistiksel problemlerin çözümünde karmaşık modellerin oluşturulması veriyle uyumlu olan birbirine rakip alternatif modellerin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Birden fazla uygun model tanımlamasının olduğu bu gibi durumlarda mevcut olan veri setine en uygun modelin seçilmesi istenir. Bu seçimde amaç, veriyi ürettiği varsayılan modelin bulunması olmayıp, veriyle uyumlu birbirine rakip alternatif modellerin karşılaştırılarak içlerinden “en iyi” olanın seçilmesidir.

İstatistiksel modellerin seçiminde, model seçim kriterlerinin kullanımı en uygun model kararının verilebilmesinde bir yol olup geleneksel hipotez testlerine bağlı yöntemlerden farklı olarak bilgi teorisine dayanmaktadır. Olabilirlik bilgisi ve Kullback-Leibler uyumsuzluğuna dayanan Akaike Bilgi Kriteri (AIC) (Akaike 1973) ile Mallow’un C_p kriteri (Mallows 1973) kullanılarak bilgi teorisi yaklaşımı ilk olarak 1970’li yılların başında popüler hale gelmiştir. Daha sonraları ise bu yaklaşım; Schwarz bilgi kriteri (BIC veya SBIC) (Schwarz 1978), yeniden örnekleme dayanan çapraz-geçerlilik, bootstrap (Efron 1979) ve Bayesyen model seçiminde kullanılan Bayes faktörü (Raftery 1986) gibi örneklerle gelişmiştir. Ancak sözü edilen bilgi kriterlerini kullanmak her modeldeki parametre sayısını belirtmeyi gerektirir (Kass ve Raftery 1995). Bu nedenle, genellikle parametreleri gözlemlerden sayıca üstün olan karmaşık hiyerarşik modellerde bu yöntemler doğrudan uygulanamaz (Gelfand ve Dey. 1994).

Ortaya çıkan bu zorluklardan kurtulmak amacıyla Spiegelhalter tarafından model karmaşıklığı ve verinin modele uygunluğu arasındaki ölçüme dayanan Sapma bilgi kriteri (DIC) (Spiegelhalter 2002) adıyla yeni bir ölçüt geliştirilmiştir. Bu ölçüt, MCMC simülasyon yöntemi ile elde edilmiş modellerin sonsal dağılımlarını kullanan Bayesyen model seçim problemlerinde özel olarak kullanışlıdır.

AIC:

En çok kullanılmakta olan model seçim kriterlerinden biri olan AIC, istatistiksel bir modelin uyum iyiliğinin bir ölçüsüdür. Uyum iyiliği, söz konusu modelin veri kümesine ne kadar uyduğunu tanımlar. AIC, hipotez testi anlamında modelin bir testi değildir. Daha çok modeller arasında model seçimi için araç olan bir bilgi kriteri olup veriyi en az bağımsız değişkenle en iyi açıklayan modeli bulmakta kullanılmaktadır.

AIC,

$$AIC = -2\ln L(\hat{\theta}) + 2k^* \quad (5.1)$$

eşitliği ile hesaplanmakta olup burada k^* , tahmin edilecek parametre sayısı, $\hat{\theta}$, bilinmeyen parametre vektörünün en çok olabilirlik tahmini olup $\ln L(\hat{\theta})$ ise tahmin modeli için olabilirlik fonksiyonunun maksimum değeri olup model uyumunun bir ölçüsüdür.

Model karşılaştırmalarında her zaman en düşük AIC değerini veren model tercih edilmektedir. Birbirine rakip modellerden AIC değerleri minimum AIC değerine göre 1-2 farka sahip olan modeller önemli desteğe sahip olup çıkarım yapmada dikkate alınmalıdır. 4-7 farka sahip olan modeller ise önemli ölçüde daha az desteğe sahip olup minimum 10'un üzerinde fark olan AIC'li modeller ise hiçbir desteğe sahip değildir (Burnham ve Anderson, 2002).

DIC:

DIC, uyum iyiliğini ölçen bir terim ve artan model karmaşıklığı için bir sınırlama (ceza) terimi şeklinde iki bileşenden oluşmaktadır.

$$\begin{array}{ccc}
DIC & = & Uyum\ iyili\gi & + & Karma\şıklık & & (5.2) \\
& & \Downarrow & & \Downarrow & & \\
& & \text{Kuramsal bir model ile} & & \text{Artan model parametre} & & \\
& & \text{örnekleme verisi arasındaki} & & \text{sayısı için bir sınırlama terimi} & & \\
& & \text{uyumun ölçüsü} & & & &
\end{array}$$

Bu eşitlikte yer alan bileşenlerin hesabı, Dempster (1974) tarafından tanımlanan klasik sapma ifadesine bağlıdır.

$$Sapma = D(\theta) = -2\log P(y/\theta) + 2\log P(y) \quad (5.3)$$

Burada, y , veriyi belirtirken θ ise modelin bilinmeyen parametrelerini gösterir. Ayrıca $P(y/\theta)$, olabilirlik fonksiyonu olup $P(y)$ ise sadece verinin bir fonksiyonunu belirten ve farklı modellerin karşılaştırıldığı tüm hesaplamalarda dengeleyici olan bir sabittir.

$$P(y) = \int_{\theta} P(\theta)P(y|\theta)d\theta$$

DIC'nin birinci bileşeni, uyumun ölçüsü olan sapmanın ($D(\theta)$) sonsal ortalamasıdır. Bu ölçü, model yeterliliğinin bir tahmini olup $\overline{D(\theta)}$ şeklinde adlandırılır.

$$Dbar = \overline{D(\theta)} = E_{\theta/y}[D(\theta)] = E_{\theta/y}[-2\log P(y/\theta)] = \frac{1}{C} \sum_{c=1}^C -2\log_e P(y/\theta_c) \quad (5.4)$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada C , burn-in periyodu çıkarılmış MCMC basamaklarının sayısı olup $\log_e P(y/\theta_c)$ ise olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritmasıdır (Spiegelhalter et al., 2002). Bu eşitlikten görüldüğü gibi $Dbar$, Gibbs örneklemesinin bir iterasyonunun sonunda hesaplanmış log-olabilirliklerin ortalamasıdır.

Modelin veriye ne kadar uyumlu olduğunun bir diğer ölçümü, θ 'nın sonsal ortalamasının sapması $D(\bar{\theta})$ 'dir. Yani θ 'nın sonsal ortalamasını kullanarak hesaplanmış log-olabilirliktir.

$$Dhat = D(\bar{\theta}) = D(E_{\theta/y}[\theta]) \quad (5.5)$$

DIC'nin ikinci bileşeni ise veriye uyan en iyi modelde yer alacak geçerli parametre sayısı (pD) olup

$$pD = Dbar - Dhat = \overline{D(\theta)} - D(\bar{\theta}) \quad (5.6)$$

eşitliği ile elde edilir. Bu değer, modeldeki parametrelerin sayısı için bir sınırlama sağlar ve yaklaşık olarak modeldeki parametrelerin sayısı ile ilgilendir. Önsel bilgi ve veri arasında önemli bir fikir ayrılığı (çelişki) olduğu zaman ya da bir parametre için sonsal dağılımın çok zayıf özet istatistiği ve çok büyük sapma vermesi durumlarında pD 'nin değeri negatif olacaktır.

İfade edilen bileşenlere göre Sapma bilgi kriteri,

$$DIC = Dbar + pD = Dhat + 2pD \quad (5.7)$$

olarak ya da

$$DIC = \overline{D(\theta)} + pD = D(\bar{\theta}) + 2pD \quad (5.8)$$

şeklinde tanımlanabilir.

Veriye uyan en iyi modelin olabilirliği daha büyük değerlidir. Bu nedenle $-2\log$ -olabilirlik ($-2\log P(y/\theta)$) yolu ile tanımlanan $\overline{D(\theta)}$, daha iyi modeller için daha küçük değerlere ulaşır. Böylece küçük DIC değerine sahip modellerin veri tarafından desteklenen en iyi modeller olduğu sonucuna varılabilir.

Kıyaslanan modellerin DIC değerleri arasındaki farklılık yaklaşık olarak 10'dan daha fazla ise daha yüksek DIC'li modelin varlığı inkar edilebilir. 5 ile 10 arasındaki farklılıklar önemlidir. Fakat DIC'deki farklılık 5'ten daha az ise ve modeller çok farklı sonuçlar çıkarıyorsa o zaman en düşük DIC'li modeli bildirmek yanıltıcı olabilir (Penttinen ve Piche 2010).

5.2 Stack Loss Bitki Verisi

Amonyakın nitrik asitle oksidasyonunu belirlemek amacıyla bir bitki 21 gün boyunca izlenmiş ve hava akımı (x_1), su sıcaklığı (x_2), asit konsantrasyonu (x_3) değişkenlerinin bitkinin amonyak kaybı yüzdesi (stack loss, y) üzerindeki etkisi incelenmek istenilmiştir (Brownlee, 1965). Bu amaç doğrultusunda elde edilen gözlemlerin ilgili değişkenlere yönelik aldığı değerler Ek-3'de görüldüğü gibi elde edilmiştir (Brownlee 1965). Bu değişkenlere ilişkin oluşturulan çoklu doğrusal regresyon modeli,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 21 \quad (5.9)$$

şeklinde olup EKK tahmin yöntemi kullanılarak elde edilen regresyon model denklemi aşağıdaki gibidir (Brownlee, 1965).

$$\hat{y}_{i_{loss}} = -39.919 + 0.7156x_{i1} + 1.2953x_{i2} - 0.1521x_{i3} \quad (5.10)$$

Stack loss verisi için literatürde tahmin edilmiş modellerden biri olan ve robust regresyon yöntemlerinden M yöntemi ile tahmin edilen

$$\hat{y}_{i_{Huber}} = -41.170 + 0.8133x_{i1} + 1.000x_{i2} - 0.1324x_{i3} \quad (5.11)$$

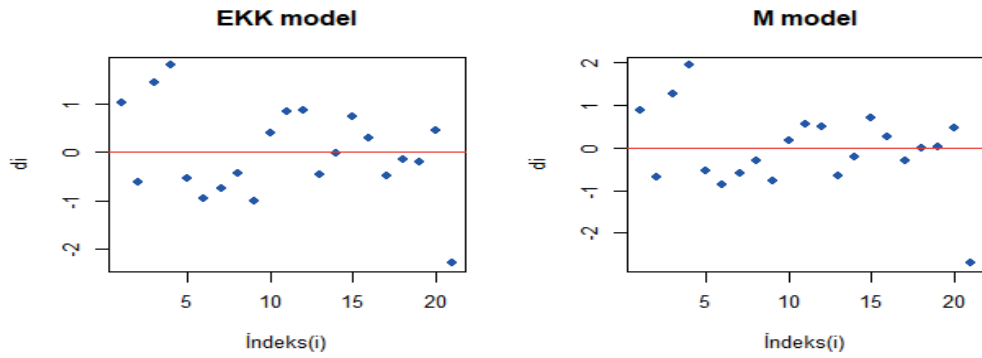
modeli, bu uygulamada referans model olarak dikkate alınmıştır (Birkes and Dodge, 1993).

Veri seti içerisinde aykırı gözlem olup olmadığını belirlemek amacıyla yukarıda sözü edilen model denklemleri kullanılarak her bir gözleme ilişkin artık değerleri incelenmiş ve 1., 3., 4. ve 21. gözlemlere ilişkin artık değerlerinin (-2,2) güven sınırından oldukça uzakta olması sebebiyle aykırı gözlem oldukları belirlenmiştir (**Çizelge 5.1**). Literatürde birçok yazar tarafından da bu gözlemler aykırı gözlem olarak belirlenmiştir (Aitkin ve Wilson 1980, Ruppert ve Carroll 1980, Antoch ve Jureckova 1985, Rey 1977, Birkes ve Dodge 1993, Osborne 1985, Hettmansperger ve McKean 1977).

Çizelge 5.1 Stackloss verisinde yer alan aykırı gözlemlere ilişkin EKK ve M regresyon modellerinden elde edilen artık ve standartlaştırılmış artık değerleri

	EKK Model		M Model	
Gözlem no (i)	Artık (e_i)	Standartlaştırılmış artık (d_i)	Artık (e_i)	Standartlaştırılmış artık (d_i)
1	3.234	1.026	2.878	0.892
3	4.555	1.445	4.075	1.263
4	5.697	1.807	6.248	1.937
21	-7.237	-2.296	-8.728	-2.706

EKK ve M modelleri kullanılarak tüm gözlemlere yönelik elde edilen standartlaştırılmış artık grafikleri ise şekil 5.1’de gösterilmiştir.



Şekil 5.1 Stack loss verisi için EKK ve M yöntemlerine göre elde edilen standartlaştırılmış artık grafiği

Bu şekilde yer alan grafikler incelendiğinde, EKK modelinden elde edilen artıkların M modeli kullanılarak bulunan artıklara kıyasla daha büyük değerli ve 0’dan uzak olduğu görülmektedir. Bu nedenle aykırı gözlem içeren stack loss verisinin EKK modeli yerine M modeli kullanılarak modellenmesinin tercih edilebileceği söylenebilir.

M modeline alternatif olarak kalın kuyruklu hata dağılımına dayalı regresyon modelleri de verinin modellenmesinde kullanılabilir. Bu doğrultuda Normal hata dağılımının yanı sıra t, Laplace ve RN gibi farklı kalın kuyruklu dağılımlara dayalı regresyon modelleri parametre tahminleri de incelenmiş olup elde edilen sonuçlar aşağıdaki çizelgede özetlenmiştir.

Çizelge 5.2 Stack loss verisi için oluşturulan farklı hata dağılımlarına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri

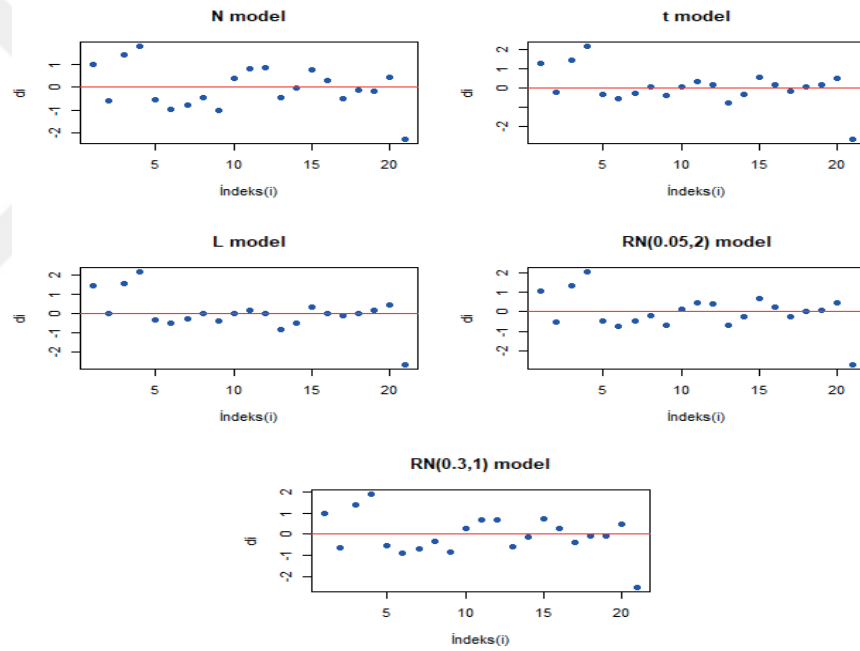
Aykırı gözlem	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Regresyon modeli parametre tahminleri					Akaike Bilgi Ölçütü
		$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\sigma}$	AIC
Aykırı gözlem yok	$N(0, \sigma^2)$	- 37.652	0.798	0.577	- 0.067	1.095	61.34
	$t(0, \sigma^2, 3)$	- 37.429	0.833	0.472	- 0.067	0.836	62.32
	$L(0, \sigma)$	- 35.941	0.822	0.438	- 0.070	0.829	71.33
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	- 37.384	0.808	0.546	- 0.069	1.008	61.50
	$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	- 37.320	0.821	0.506	- 0.069	0.797	61.65
Aykırı gözlem var	$N(0, \sigma^2)$	- 39.920	0.716	1.295	- 0.152	2.912	114.58
	$t(0, \sigma^2, 3)$	- 39.124	0.854	0.657	- 0.104	1.755	112.14
	$L(0, \sigma)$	- 39.689	0.832	0.574	- 0.061	2.004	110.31
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	- 40.554	0.769	1.119	- 0.138	2.612	114.36
	$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	- 40.319	0.825	0.892	- 0.125	1.974	116.06

Çizelge 5.2 incelendiğinde, aykırı gözlemlerin veri setinden çıkarılması durumunda verinin Normal dağılıma dayalı modele (N-model) alternatif olarak t, L ve RN dağılımına dayalı modellerden herhangi biri ile de modellenebileceği söylenebilir. Modellere ilişkin AIC değerlerine bakıldığında ise verinin en küçük AIC değerine (AIC=61.34) sahip N-modele ek olarak bu modele en yakın AIC değerli (AIC=61.50) olan $RN(0.05, 2)$ dağılımına dayalı model ($RN(0.05, 2)$ -model) ile de modellenebileceği görülmüştür.

Aykırı gözlemlerin veri setinden çıkarılmaması durumunda ise N-modeli parametre tahminlerinin aykırı gözlemlerden etkilendiği dolayısıyla da tahmin değerlerinde bozulma meydana geldiği görülmüştür. Bu nedenle t, L ve RN dağılımlarına dayalı modellerin parametre tahminleri incelenmiş ve verinin analizinde en düşük AIC'ye (AIC=110.31) sahip Laplace dağılımına dayalı modelin (L-model) kullanımının tercih

edilebileceği belirlenmiştir. t tahminlerini içeren t dağılımına dayalı model (t -model) de $AIC=112.14$ değeri ile bu performansı izlemiştir. Ayrıca modeller, parametre tahminleri açısından incelendiğinde ise $RN(0.05, 2)$ -modelinin diğerlerine kıyasla (5.11) eşitliğinde yer alan referans model ile daha tutarlı tahminler verdiği görülmüştür (**Çizelge 5.2**).

Verinin modellenmesinde hangi modelin kullanılması gerektiğine karar verebilmek amacıyla **çizelge 5.2**'de yer alan modellerin parametre tahminleri kullanılarak her model için standartlaştırılmış artık (d_i) değerleri elde edilmiş olup bu değerlerin grafikleri **şekil 5.2**'de verilmiştir. Bu şekil'den görüldüğü gibi stack loss verisinin modellenmesinde öncelik sırasına göre L , t ve $RN(0.05, 2)$ modelleri kullanımının tercih edilebileceği söylenebilir.



Şekil 5.2 Stack loss verisi için farklı hata dağılımlarına dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Klasik tahmin yöntemine alternatif olarak çalışmaya Bayesyen yöntem de ilave edilmiş olup bu doğrultuda Normal, t , Laplace ve RN hata dağılımlarına dayalı bayesyen ve robust bayesyen regresyon modelleri oluşturulmuştur. Söz konusu modellere ilişkin parametre tahminleri, **çizelge 5.3-5.4**'de görüldüğü gibi elde edilmiştir.

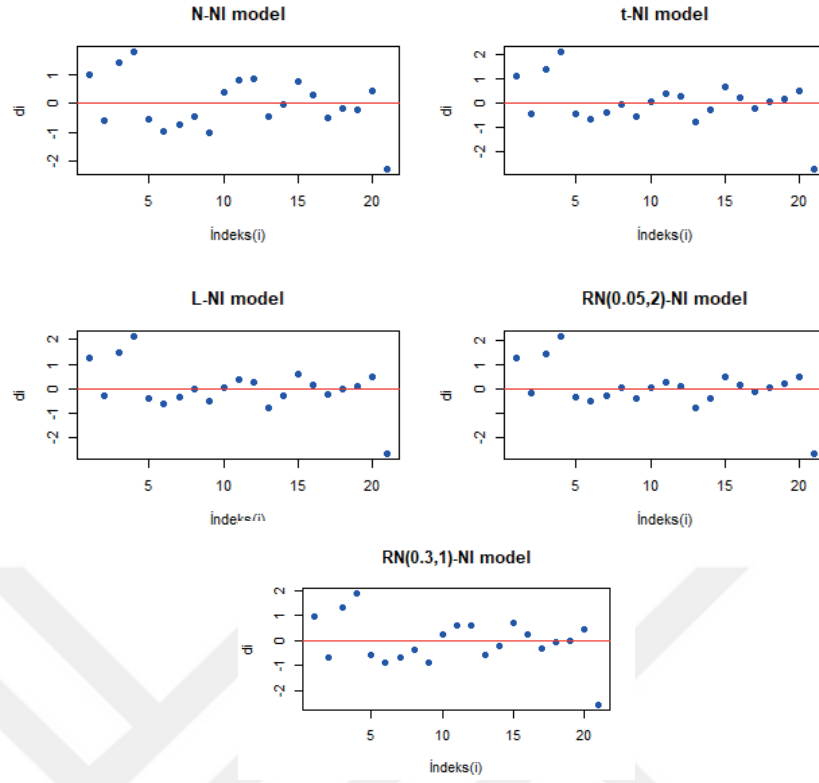
Çizelge 5.3 Stack loss verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine yönelik bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri

Model	Regresyon modeli parametre tahminleri					Sapma Bilgi Ölçütü
	$\hat{\beta}_0$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_1$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_2$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_3$ (sd ^a)	$\hat{\sigma}$ (sd ^a)	DIC
N-NI	-39.380 (12.51)	0.717 (0.14)	1.292 (0.39)	-0.158 (0.16)	3.395 (0.62)	115.50
t-NI	-39.480 (9.10)	0.849 (0.13)	0.776 (0.35)	-0.124 (0.12)	2.238 (0.59)	108.28
L-NI	-38.310 (8.79)	0.835 (0.13)	0.749 (0.33)	-0.122 (0.12)	1.561 (0.19)	113.44
<i>RN</i> (0.05, 2) -NI	-41.770 (3.24)	0.778 (0.14)	1.094 (0.37)	-0.124 (0.08)	2.918 (0.58)	72.31
<i>RN</i> (0.3, 1) -NI	-39.680 (1.74)	0.855 (0.12)	0.627 (0.25)	-0.091 (0.06)	6.099 (1.68)	127.64

^a sd, parametre tahminlerinin standart sapması

Kalın kuyruklu hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri (t-NI, L-NI, RN-NI) kıyaslandığında (**Çizelge 5.3**), bu verinin en küçük DIC değerli (DIC=72.31) *RN*(0.05, 2)-NI modeli ile modellenmesinin tercih edilebileceği söylenebilir. Söz konusu modelin parametre tahminlerinin, (5.11) eşitliğinde verilen referans modelin parametre tahminleri ile benzer olduğu görülmektedir. Ayrıca elde edilen bu sonucun, **çizelge 4.1.a-4.3.b**'de yer alan simülasyon çalışmasıyla tutarlı sonuçlar verdiği gözlenmiştir.

Çizelge 5.3'de yer alan tüm modellere ilişkin artık grafikleri ise **şekil 5.3**'de verilmiştir. Bu şekil incelendiğinde, 0'a en yakın artık değerlerinin *RN*(0.05, 2)-NI modeli kullanılarak elde edildiği görülmektedir.



Şekil 5.3 Stack loss verisi için farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Çizelge 5.4 incelendiğinde ise N-N modeli parametre tahminlerinin, (5.10) eşitliği ile verilen EKK modeli tahminleri ile tutarlı sonuçlar verdiği görülmektedir. N-t ve N-L modellerinin kıyaslanması durumunda verinin en küçük DIC değerli ($DIC=115.35$) N-t modeli ile modellenmesinin uygun olabileceği söylenebilir. Ayrıca t-N, L-N, $RN(0.05, 2)$ -N ve $RN(0.3, 1)$ modelleri içerisinde en küçük DIC değerli ($DIC=73.18$) modelin, $RN(0.05, 2)$ -N modeli olduğu gözlemlenmiş olup verinin modellenmesinde bu modelin kullanımının tercih edilebileceği söylenebilir.

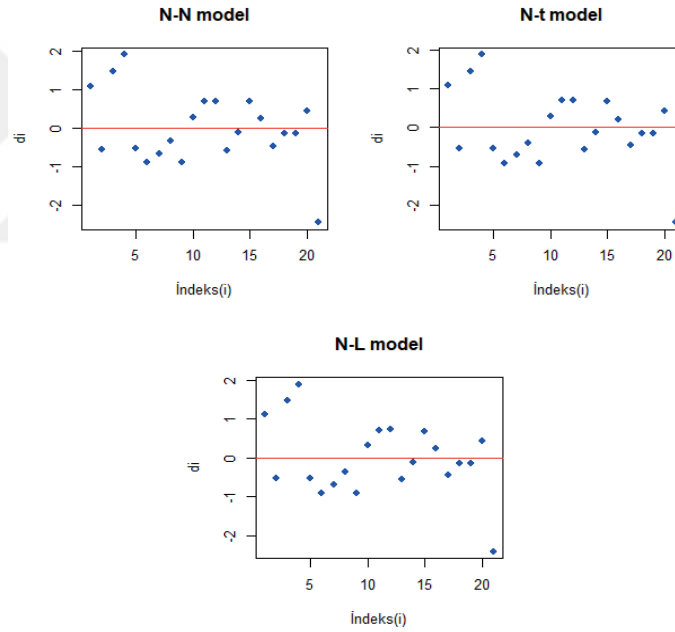
Çizelge 5.4 Stack loss verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine yönelik bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri

Hata terimleri (ε_i) dağılımı	β 'nin önseli	Regresyon modeli parametre tahminleri					Sapma Bilgi Ölçütü
		$\hat{\beta}_0$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_1$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_2$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_3$ (sd ^a)	$\hat{\sigma}$ (sd ^a)	DIC
$N(0, \sigma^2)$	$N(0,1)$	-39.070 (12.33)	0.747 (0.13)	1.150 (0.36)	-0.148 (0.16)	3.391 (0.62)	115.27
$N(0, \sigma^2)$	$t(0,1,3)$	-39.680 (12.36)	0.738 (0.14)	1.174 (0.38)	-0.140 (0.16)	3.391 (0.62)	115.35
$N(0, \sigma^2)$	$L(0,1)$	-39.580 (12.28)	0.735 (0.14)	1.175 (0.39)	-0.140 (0.15)	3.403 (0.63)	115.55
$t(0, \sigma^2, 3)$	$N(0,1)$	-39.370 (8.80)	0.859 (0.12)	0.712 (0.31)	-0.116 (0.11)	2.194 (0.58)	107.58
$L(0, \sigma)$	$N(0,1)$	-38.280 (8.46)	0.838 (0.12)	0.694 (0.29)	-0.111 (0.11)	1.553 (0.18)	113.26
$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$N(0,1)$	-45.920 (4.53)	0.787 (0.13)	1.026 (0.33)	-0.066 (0.08)	2.925 (0.58)	73.18
$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	$N(0,1)$	-54.030 (7.05)	0.839 (0.13)	0.739 (0.34)	0.062 (0.09)	7.235 (2.04)	131.05
$t(0, \sigma^2, 3)$	$t(0,1,3)$	-39.850 (8.80)	0.856 (0.12)	0.717 (0.31)	-0.110 (0.11)	2.200 (0.58)	107.65
$L(0, \sigma)$	$t(0,1,3)$	-38.300 (8.36)	0.840 (0.12)	0.692 (0.30)	-0.112 (0.11)	1.554 (0.18)	113.38
$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$t(0,1,3)$	-43.010 (1.92)	0.775 (0.13)	1.072 (0.36)	-0.103 (0.06)	2.909 (0.57)	72.13
$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	$t(0,1,3)$	-40.900 (4.08)	0.837 (0.11)	0.632 (0.25)	-0.066 (0.07)	6.138 (1.70)	128.20
$t(0, \sigma^2, 3)$	$L(0,1)$	-39.460 (8.84)	0.859 (0.13)	0.698 (0.32)	-0.112 (0.11)	2.200 (0.58)	107.68
$L(0, \sigma)$	$L(0,1)$	-38.680 (8.10)	0.841 (0.12)	0.671 (0.31)	-0.103 (0.11)	1.553 (0.18)	113.37
$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$L(0,1)$	-46.670 (6.21)	0.756 (0.14)	1.105 (0.39)	-0.055 (0.09)	2.973 (0.59)	73.53
$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	$L(0,1)$	-40.000 (2.38)	0.842 (0.10)	0.601 (0.24)	-0.072 (0.06)	6.043 (1.67)	127.06

^a sd, parametre tahminlerinin standart sapması

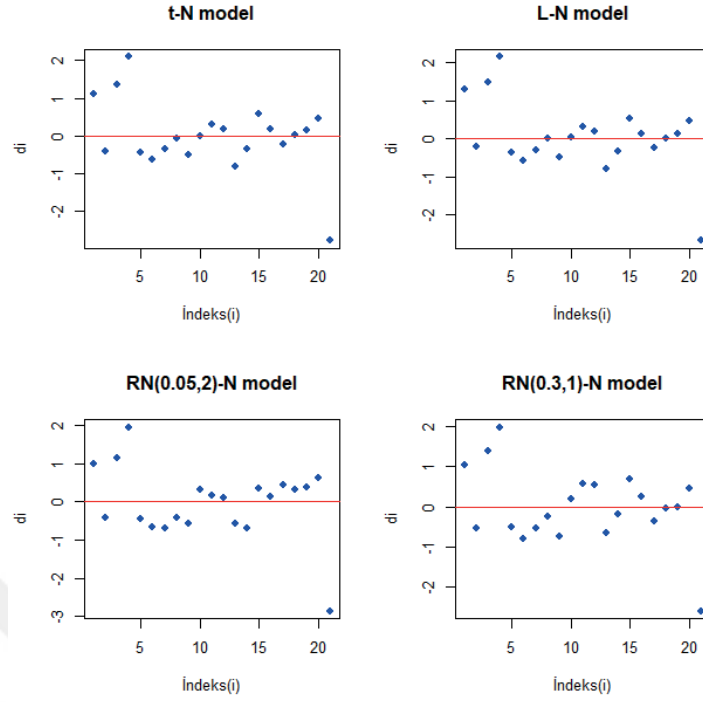
Son olarak, hem hata dağılımı hem de önsel dağılımı kalın kuyruklu dağılıma dayalı olan modeller (t-t, L-t, RN-t, t-L, L-L, RN-L) incelendiğinde ise en küçük DIC değerli (DIC=72.13) $RN(0.05, 2)$ -t modeli, veriyi en iyi şekilde temsil edebilecek olan model olarak önerilebilir. M tahmin yöntemiyle elde edilen (5.11) referans modeli dikkate alındığında, sözü edilen bu modelin diğer modellere kıyasla veri setindeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahminler verdiği görülmüştür. $RN(0.3, 1)$ hata dağılımı ve bilgi içermeyen / içeren önsel dağılıma dayalı olan modellerin ise incelenen diğer modellere kıyasla aykırı gözlemlerden oldukça etkilenen parametre tahminlerine sahip olduğu gözlenmiştir (**Çizelge 5.4**).

Çizelge 5.4'de yer alan modellere ilişkin standartlaştırılmış artık grafikleri ise aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi elde edilmiştir.



Şekil 5.4 Stack loss verisi için Normal hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

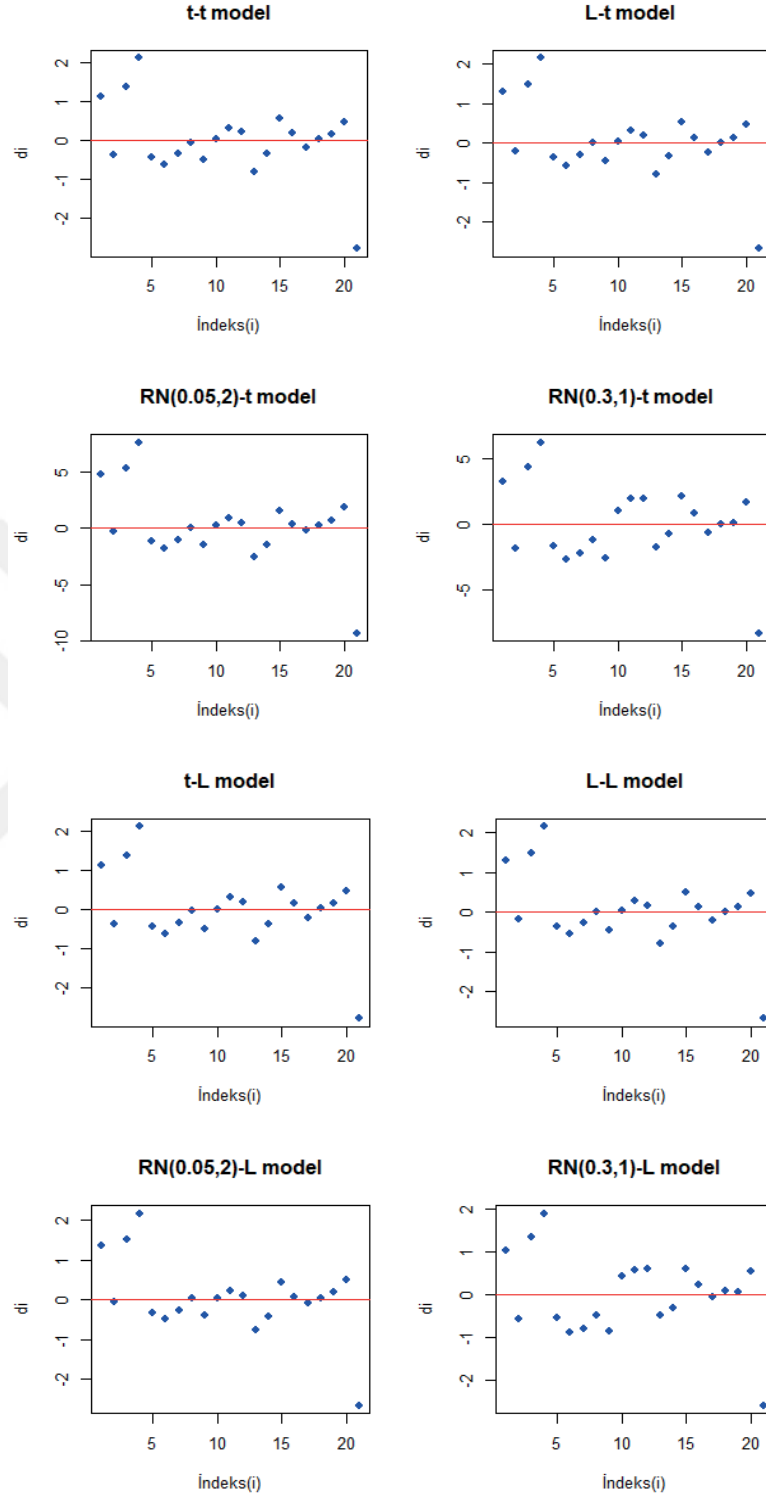
Bu şekil incelendiğinde, N-t ve N-L modellerinin N-N modelinden hiçbir farkı olmadığı dolayısıyla sadece önsel bilgide kalın kuyruklu dağılım kullanmanın yeterli olmayacağı görülmektedir.



Şekil 5.5 Stack loss verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Kalın kuyruklu hata dağılımı (t, L, RN) ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine yönelik elde edilen standartlaştırılmış artık değerleri incelendiğinde, $RN(0.05, 2)$ -N modeli kullanılarak bulunan artıkların 0'a daha yakın olduğu görülmüştür (Şekil 5.5).

Hem hata dağılımı hem de önsel dağılımı kalın kuyruklu dağılıma dayalı regresyon modelleri kullanılarak elde edilen standartlaştırılmış artık grafikleri ise **şekil 5.6**'da verilmiştir. Bu şekil incelendiğinde, $RN(0.05, 2)$ -t ve $RN(0.05, 2)$ -L modellerinden bulunan artık değerlerinin diğer modellere kıyasla daha küçük değerli ve 0'a yakın olduğu görülmüştür.



Şekil 5.6 Stack loss verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Sonuç olarak; **çizelge 5.4'**de ele alınan tüm modeller birlikte kıyaslandığında, stack loss verisinin en küçük DIC değerine (DIC=72.13) sahip olan $RN(0.05, 2)$ -t modeli kullanılarak modellenmesinin en iyi seçim olabileceği ortaya çıkmıştır. $RN(0.05, 2)$ -L modeli de DIC=73.53 değeri ile bu performansı izlemiştir. Bu sonucun, **şekil 5.4, 5.5 ve 5.6'nın** birlikte incelenmesi durumunda da elde edildiği görülmektedir. Ayrıca **çizelge 5.3-5.4'**de yer alan tüm parametre tahminlerinin **çizelge 4.4.a-4.14.b'**de yer alan simülasyon çalışması ile tutarlı olduğu görülmüştür.

5.3 Coleman Verisi

Orta Atlantik ve Kuzeydoğu Amerika Birleşik Devletleri eyaletlerinde yer alan 20 okul üzerinde, öğrenci başına personel maaşları (x_1), memur babaların yüzdesi (x_2), sosyo-ekonomik statüden sapma durumu (aile büyüklüğü, aile bütünlüğü, baba eğitimi, anne eğitimi ve ev eşyaları) (x_3), öğretmenlerin ortalama sözel test puanı (x_4) ve annelerin eğitim düzeyi (x_5) değişkenleri açısından ölçümler elde edilmiş ve bu değişkenlerin okulların sözel ortalama test puanları (y) üzerindeki etkisini belirlemek amacıyla inceleme yapılmıştır (Coleman vd. 1966, Mosteller ve Tukey 1977). Değişkenlere ilişkin elde edilen gözlemler Ek 3'de verilmiştir. Bu gözlemlere ilişkin regresyon modeli,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i5} + \varepsilon_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 20 \quad (5.12)$$

eşitliği şeklinde oluşturulur. EKK tahmin yönteminin kullanılması durumunda model denklemi,

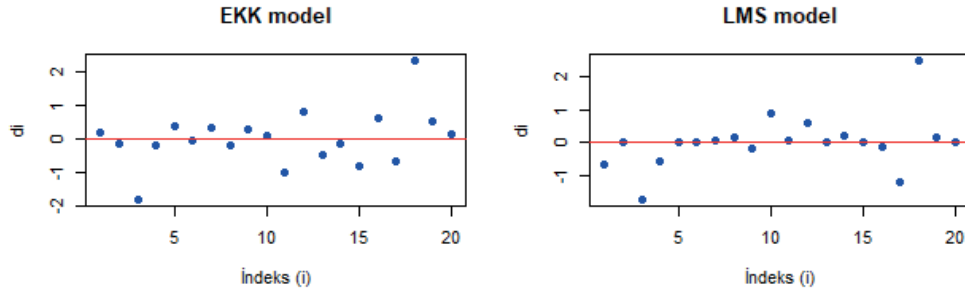
$$\hat{y}_i = 19.9 - 1.790x_{i1} + 0.044x_{i2} + 0.556x_{i3} + 1.110x_{i4} - 1.810x_{i5} \quad (5.13)$$

olarak elde edilmiştir. Bu modelin yanı sıra literatürde tahmin edilmiş modellerden biri olan ve robust regresyon yöntemlerinden LMS yöntemi ile tahmin edilen

$$\hat{y}_{i_{LMS}} = 25.1 + 0.580x_{i1} + 0.058x_{i2} + 0.637x_{i3} + 0.740x_{i4} - 2.320x_{i5} \quad (5.14)$$

modeli ise bu uygulamada referans model olarak dikkate alınmıştır (Rousseeuw ve Leroy 1987).

Coleman verisi içerisinde aykırı gözlem olup olmadığına karar verebilmek amacıyla yukarıda sözü edilen EKK ve LMS model denklemleri kullanılarak her gözleme ait standartlaştırılmış artık (d_i) değerleri incelenmiş ve bu değerlerin grafikleri **şekil 5.7**'de görüldüğü gibi elde edilmiştir.



Şekil 5.7 Coleman verisi için EKK ve LMS yöntemlerine göre elde edilen standartlaştırılmış artık grafiği

Bu şekil incelendiğinde, EKK artıkları 3., 11. ve 18. gözlemin, LMS artıkları ise 3., 17. ve 18. gözlemlerin veri kümesinden oldukça uzakta olduğunu dolayısıyla bu gözlemlerin aykırı gözlem olabileceğini göstermektedir. Sözü edilen bu gözlemlere ilişkin artık ve standartlaştırılmış artık değerleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.5 Coleman verisinde yer alan aykırı gözlemlere ilişkin EKK ve LMS regresyon modellerinden elde edilen artık ve standartlaştırılmış artık değerleri

EKK model			LMS model		
Gözlem no (i)	Artık (e_i)	Standartlaştırılmış artık (d_i)	Gözlem no (i)	Artık (e_i)	Standartlaştırılmış artık (d_i)
3	-3.949	-1.834	3	-4.786	-1.770
11	-2.208	-1.025	17	-3.342	-1.236
18	5.001	2.323	18	6.761	2.500

Görüldüğü gibi sadece EKK artıklarına bakarak aykırı gözlemleri araştırmak yanıltıcıdır. Bu bağlamda robust regresyon yöntemlerden herhangi biri kullanılarak aykırı gözlemler belirlenmelidir. Sonuç olarak Coleman verisi gözlemlerinden 3. 17. ve 18. gözlemler, aykırı gözlem olarak belirlenmiştir. Literatürde bu gözlemlerin aykırı gözlem olduğuna ilişkin bilgi veren birçok çalışma mevcuttur (Rousseeuw ve Leroy 1987, Gao ve Fang 2016).

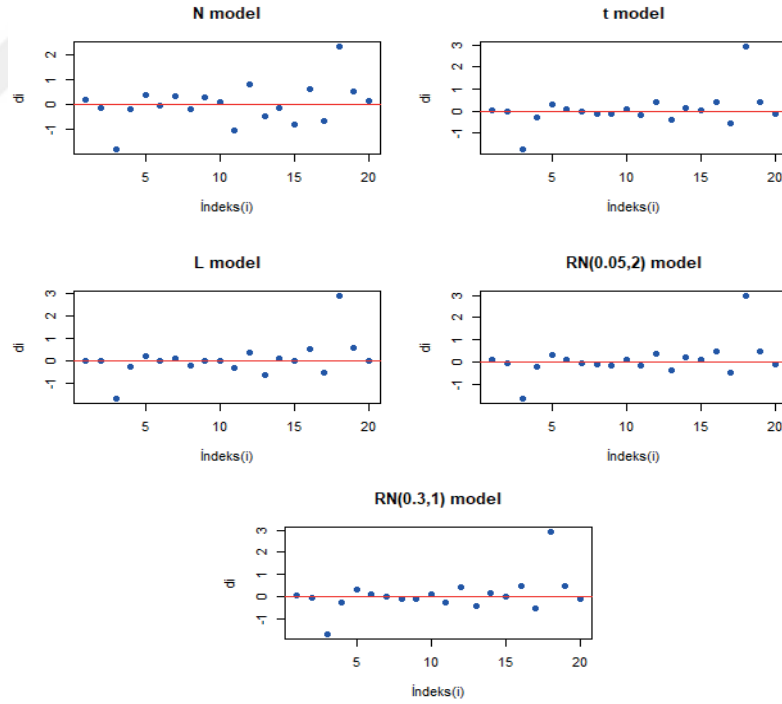
Aykırı gözlemlili bu veri setinin modellenmesinde, Normal dağılımının yanı sıra t, Laplace ve RN gibi farklı kalın kuyruklu dağılımlara dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri de incelenmiş ve aşağıdaki çizelgede görüldüğü gibi elde edilmiştir.

Çizelge 5.6 Coleman verisi için oluşturulan farklı hata dağılımlarına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri

Aykırı gözlem	Hata terimleri (ϵ_i) dağılımı	Regresyon modeli parametre tahminleri							Akaike Bilgi Ölçütü
		$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\sigma}$	
Aykırı gözlem yok	$N(0, \sigma^2)$	29.750	1.203	0.082	0.659	1.098	-3.898	0.555	42.24
	$t(0, \sigma^2, 3)$	26.776	-1.290	0.072	0.655	1.125	-3.430	0.468	45.18
	$L(0, \sigma)$	28.037	-1.224	0.073	0.638	1.012	-3.227	0.447	44.61
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	29.315	-1.213	0.080	0.659	1.101	-3.829	0.528	44.85
	$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	28.251	-1.248	0.076	0.658	1.109	-3.646	0.430	43.83
Aykırı gözlem var	$N(0, \sigma^2)$	19.948	-1.793	0.043	0.556	1.110	-1.811	1.735	92.81
	$t(0, \sigma^2, 3)$	28.713	-1.597	0.076	0.661	1.158	-3.779	0.712	80.07
	$L(0, \sigma)$	29.162	-1.734	0.059	0.675	1.124	-3.550	0.989	81.35
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	30.690	-1.659	0.083	0.667	1.161	-4.140	0.743	89.17
	$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	28.915	-1.652	0.076	0.655	1.153	-3.768	0.784	89.46

Çizelge 5.6 incelendiğinde, aykırı gözlemlerin veri setinden çıkarılması durumunda verinin N-model'in yanı sıra bu modele alternatif olarak t, L ve RN modellerinden herhangi biri kullanılarak da modellenebileceği görülmektedir. Bu gözlemlerin veri setinden çıkarılmaması durumunda ise N-model'in parametre tahminlerinde bozulma meydana gelmiştir. Bu nedenle Normal dağılım yerine farklı kalın kuyruklu (t, Laplace ve RN) dağılımlara dayalı modellerin kullanımı tercih edilmiş ve verinin bu modeller içerisinde en düşük AIC değerine sahip (AIC=80.07) t-model ile modellenmesinin daha uygun olacağı görülmüştür.

Ayrıca verinin modellenmesinde hangi modelin kullanımının daha uygun olacağına karar verebilmek amacıyla **çizelge 5.6** 'de yer alan tüm modeller için standartlaştırılmış artık değerleri de elde edilmiş olup bu değerlerin grafikleri **şekil 5.8**'de verilmiştir. Bu şekil incelendiğinde, Coleman verisinin t-model ile modellenmesinin daha uygun olabileceği söylenebilir.



Şekil 5.8 Coleman verisi için farklı hata dağılımlarına dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Klasik tahmin yöntemine ek olarak çalışmaya Bayesyen yöntem de ilave edilmiş ve Normal, t, Laplace ve RN hata dağılımlarına dayalı bayesyen ve robust bayesyen regresyon modelleri oluşturulmuştur. Sözü edilen modellere ilişkin parametre tahminleri **çizelge 5.7-5.8**'da verilmiştir.

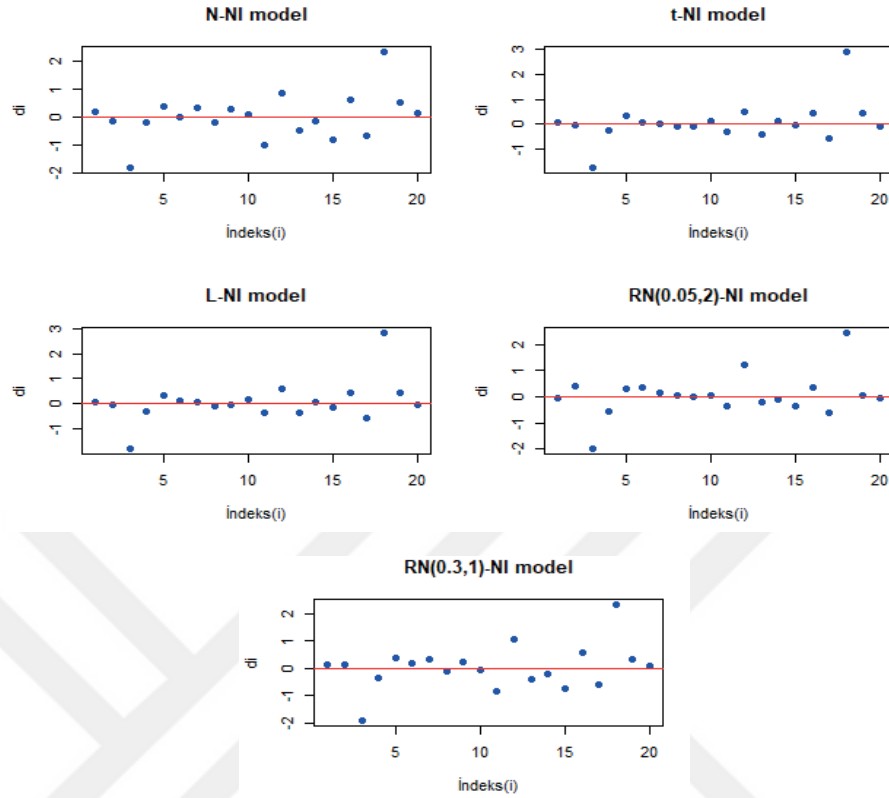
Çizelge 5.7 Coleman verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri

Model	Regresyon modeli parametre tahminleri							Sapma Bilgi Ölçütü
	$\hat{\beta}_0$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_1$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_2$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_3$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_4$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_5$ (sd ^a)	$\hat{\sigma}$ (sd ^a)	DIC
N-NI	19.550 (14.480)	-1.799 (1.328)	0.043 (0.057)	0.555 (0.100)	1.118 (0.466)	-1.770 (2.169)	2.193 (0.450)	94.77
t-NI	27.910 (9.393)	-1.626 (0.777)	0.075 (0.032)	0.647 (0.064)	1.155 (0.264)	-3.612 (1.410)	1.049 (0.333)	75.97
L-NI	25.410 (11.020)	-1.600 (0.908)	0.069 (0.035)	0.628 (0.075)	1.158 (0.308)	-3.186 (1.644)	1.149 (0.150)	86.96
RN(0.05,2) - NI	13.340 (3.974)	-1.945 (1.177)	0.038 (0.038)	0.557 (0.084)	1.281 (0.277)	-1.345 (1.007)	1.802 (0.405)	52.29
RN(0.3,1) - NI	9.409 (4.264)	-1.694 (0.784)	0.043 (0.028)	0.582 (0.067)	1.368 (0.216)	-1.232 (0.918)	3.484 (1.067)	101.15

^a sd, parametre tahminlerinin standart sapması

Bu çizelge incelendiğinde, N-NI modeli parametre tahminlerinin N-model'in tahminleri (**Çizelge 5.6**) ile tutarlı sonuçlar verdiği görülmektedir. Ayrıca bu modelin yanı sıra farklı kalın kuyruklu hata dağılımı (t, L, RN) ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı modeller kıyaslandığında ise en küçük DIC değerli (DIC=52.29) RN(0.05,2)-NI modelinin verinin modellenmesinde tercih edilebileceği söylenebilir. Elde edilen bu sonucun **çizelge 4.1.a-4.3.b**'de yer alan simülasyon çalışmasıyla tutarlı olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.7'de yer alan tüm modellere yönelik artık grafikleri ise **şekil 5.9**'da verilmiştir. Bu şekilden 0'a en yakın artık değerlerine sahip modellerin RN(0.05,2)-NI, t-NI ve L-NI olduğu görülmektedir.



Şekil 5.9 Coleman verisi için farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı oluşturulan modellere ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Çizelge 5.8'de ise farklı hata dağılımına ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı modellerin parametre tahminleri yer almaktadır. Ele alınan modeller içerisinde N-N modeli tahminlerinin, (5.13) eşitliğinde yer alan EKK modeli tahminleri ile tutarlı sonuçlar verdiği görülmektedir. Ancak bu modelin tahminlerinin, LMS yöntemi ile tahmin edilen (5.14) referans modeli tahminleri ile kıyaslandığında veri setinde yer alan aykırı gözlemlerden etkilendiği görülmüştür. Bu nedenle önsel bilginin kalın kuyruklu bir dağılımdan geldiği varsayılarak N-t ve N-L modelleri ele alınmış ancak bu model parametre tahminlerinin de N-N modeli tahminleri ile benzer sonuçlar verdiği görülmüştür. Sadece önsel dağılımda kalın kuyruklu dağılımın kullanılması aykırı gözlemlere karşı robust tahminlerin elde edilmesinde yeterli olmamıştır.

Çizelge 5.8 Coleman verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri

Hata terimleri (ε_i) dağılımı	β 'nin önseli	Regresyon modeli parametre tahminleri						
		$\hat{\beta}_0$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_1$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_2$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_3$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_4$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_5$ (sd ^a)	$\hat{\sigma}$ (sd ^a)
$N(0, \sigma^2)$	$N(0,1)$	17.500 (10.370)	-0.606 (0.790)	0.010 (0.039)	0.541 (0.096)	0.761 (0.388)	-0.312 (0.901)	2.173 (0.424)
$N(0, \sigma^2)$	$t(0,1,3)$	17.920 (10.880)	-0.713 (0.908)	0.013 (0.041)	0.542 (0.096)	0.784 (0.395)	-0.446 (1.090)	2.171 (0.424)
$N(0, \sigma^2)$	$L(0,1)$	18.530 (11.050)	-0.645 (0.905)	0.012 (0.041)	0.539 (0.096)	0.740 (0.414)	-0.390 (1.066)	2.186 (0.429)
$t(0, \sigma^2, 3)$	$N(0,1)$	17.640 (8.620)	-0.848 (0.708)	0.030 (0.029)	0.588 (0.076)	0.920 (0.315)	-1.030 (0.944)	1.278 (0.406)
$L(0, \sigma)$	$N(0,1)$	15.960 (8.500)	-0.777 (0.713)	0.032 (0.028)	0.574 (0.078)	0.940 (0.315)	-0.866 (0.890)	1.193 (0.156)
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$N(0,1)$	14.870 (2.072)	-0.549 (0.800)	0.011 (0.036)	0.547 (0.088)	0.846 (0.186)	-0.271 (0.837)	1.897 (0.413)
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$N(0,1)$	21.910 (2.796)	-0.723 (0.707)	0.036 (0.028)	0.603 (0.068)	0.801 (0.253)	-1.330 (0.921)	3.567 (1.209)
$t(0, \sigma^2, 3)$	$t(0,1,3)$	21.460 (9.400)	-0.961 (0.752)	0.043 (0.033)	0.607 (0.074)	0.952 (0.297)	-1.819 (1.402)	1.190 (0.397)
$L(0, \sigma)$	$t(0,1,3)$	18.610 (9.731)	-0.839 (0.782)	0.037 (0.031)	0.585 (0.079)	0.929 (0.328)	-1.262 (1.244)	1.186 (0.157)
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$t(0,1,3)$	14.350 (2.641)	-0.867 (0.816)	0.018 (0.038)	0.546 (0.087)	0.944 (0.275)	-0.487 (0.970)	1.854 (0.412)
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$t(0,1,3)$	23.710 (2.408)	-0.941 (0.593)	0.056 (0.024)	0.623 (0.055)	0.988 (0.195)	-2.417 (0.828)	3.140 (1.003)
$t(0, \sigma^2, 3)$	$L(0,1)$	20.370 (10.010)	-0.938 (0.797)	0.040 (0.034)	0.600 (0.077)	0.952 (0.331)	-1.637 (1.416)	1.227 (0.410)
$L(0, \sigma)$	$L(0,1)$	19.560 (10.390)	-0.781 (0.809)	0.037 (0.032)	0.584 (0.081)	0.887 (0.364)	-1.271 (1.270)	1.194 (0.159)
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$L(0,1)$	28.510 (4.100)	-0.572 (0.901)	0.010 (0.038)	0.584 (0.091)	0.418 (0.283)	-0.737 (0.894)	1.979 (0.437)
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$L(0,1)$	17.740 (2.846)	-0.766 (0.715)	0.037 (0.025)	0.591 (0.065)	0.938 (0.221)	-1.195 (0.821)	3.484 (1.116)

^a sd, parametre tahminlerinin standart sapması

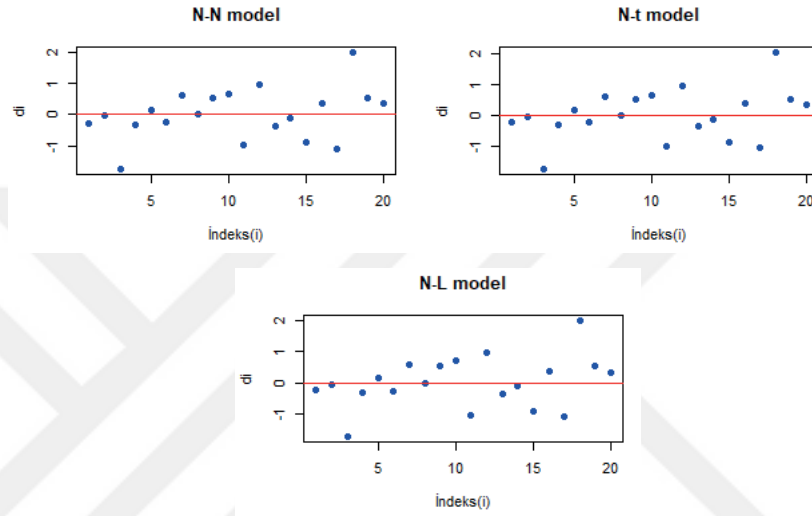
Çizelge 5.9 Coleman verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin DIC değerleri

Hata terimleri (ε_i) dağılımı	β 'nın önseli	Sapma Bilgi Ölçütü (DIC)
$N(0, \sigma^2)$	$N(0,1)$	92.71
$N(0, \sigma^2)$	$t(0,1,3)$	92.94
$N(0, \sigma^2)$	$L(0,1)$	93.20
$t(0, \sigma^2, 3)$	$N(0,1)$	80.94
$L(0, \sigma)$	$N(0,1)$	87.06
$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$N(0,1)$	52.17
$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	$N(0,1)$	99.82
$t(0, \sigma^2, 3)$	$t(0,1,3)$	78.47
$L(0, \sigma)$	$t(0,1,3)$	87.26
$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$t(0,1,3)$	52.45
$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	$t(0,1,3)$	97.74
$t(0, \sigma^2, 3)$	$L(0,1)$	79.61
$L(0, \sigma)$	$L(0,1)$	87.86
$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	$L(0,1)$	54.19
$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	$L(0,1)$	99.55

Kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri (t-N, L-N, $RN(0.05, 2)$ -N, $RN(0.3, 1)$ -N) ele alındığında bu modeller içerisinde en küçük DIC değerli (DIC=52.17) modelinin $RN(0.05, 2)$ -N modeli olduğu gözlemlenmiş olup verinin modellenmesinde bu modelin kullanımının tercih edilebileceği söylenebilir (**Çizelge 5.8**). Hem hata dağılımı hem de önsel dağılımı kalın kuyruklu olan modeller incelendiğinde ise verinin en küçük DIC değerli (DIC=52.45) $RN(0.05, 2)$ -t modeli ile

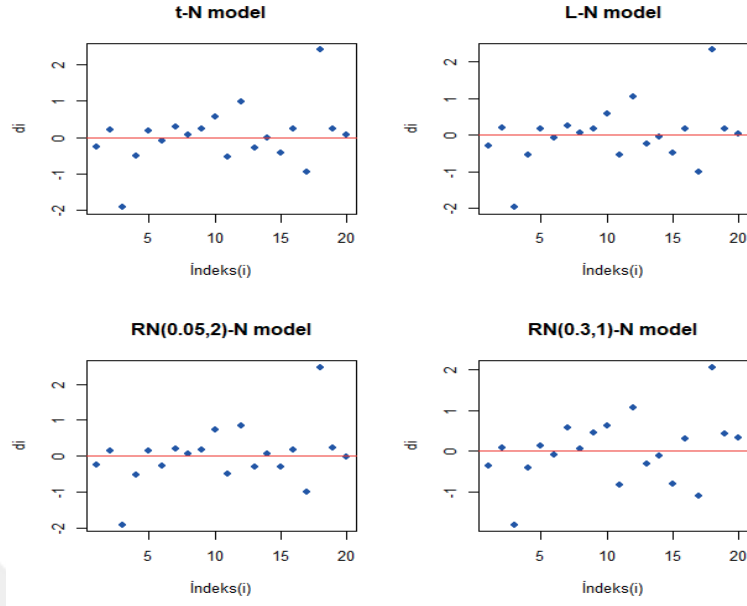
modellenmesinin uygun olabileceği önerilmiştir. **Çizelge 5.7-5.9**'da elde edilen tüm sonuçların **çizelge 4.4.a-4.14.b**'de yer alan simülasyon çalışması ile tutarlı olduğu görülmüştür.

Çizelge 5.8'de yer alan modellere ilişkin standartlaştırılmış artık grafikleri ise aşağıdaki şekillerde görüldüğü gibi elde edilmiştir.



Şekil 5.10 Coleman verisi için Normal hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

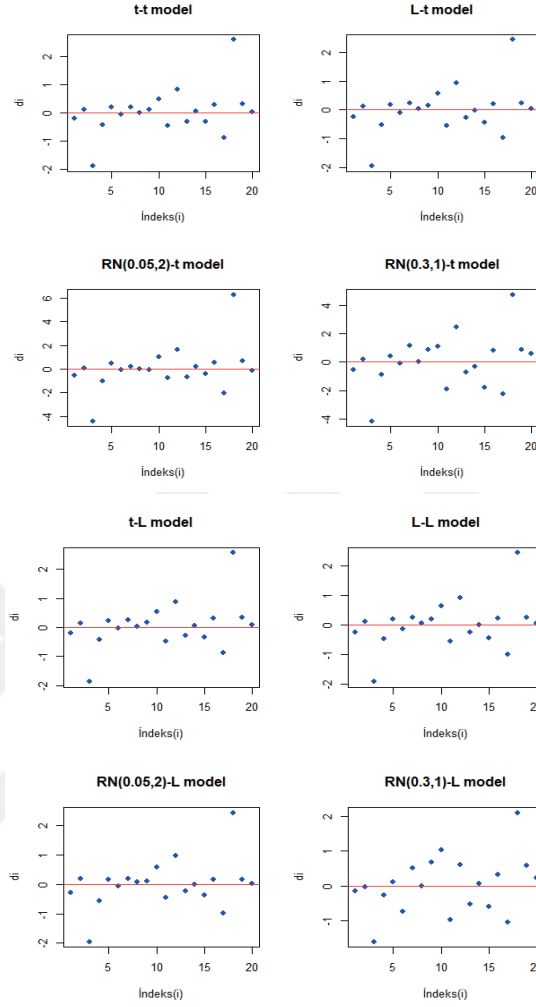
Bu şekil incelendiğinde, N-t ve N-L modellerinin kullanılması durumunda N-N modeli ile benzer artık değerler elde edildiği görülmüştür. Dolayısıyla sadece önsel bilgide kalın kuyruklu dağılım kullanmanın yeterli olmayacağı söylenebilir.



Şekil 5.11 Coleman verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Kalın kuyruklu hata dağılımı (t, L, RN) ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine yönelik elde edilen standartlaştırılmış artık değerleri incelendiğinde ise $RN(0.05, 2)$ -N modeli kullanılarak bulunan artıkların 0'a daha yakın olduğu görülmüştür (Şekil 5.11).

Hem hata dağılımı hem de önsel dağılımı kalın kuyruklu dağılıma dayalı regresyon modelleri kullanılarak elde edilen standartlaştırılmış artık grafikleri ise **şekil 5.12**'de verilmiştir. Bu şekil incelendiğinde, $RN(0.05, 2)$ -t modelinden bulunan artık değerlerinin diğer modellere kıyasla daha küçük değerli ve 0'a yakın olduğu görülmüştür.



Şekil 5.12 Coleman verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Sonuç olarak; **çizelge 5.8**'de yer alan tüm modeller kıyaslandığında, Coleman verisinin sırasıyla en küçük DIC değerine ($DIC=52.17$ ve $DIC=52.45$) sahip olan $RN(0.05, 2)$ -N ve $RN(0.05, 2)$ -t modelleri kullanılarak modellenmesinin en uygun seçim olabileceği ortaya çıkmıştır. $RN(0.05, 2)$ -L modeli ise $DIC=54.19$ değeri ile bu performansı izlemiştir. Bu sonucun, **şekil 5.10**, **5.11** ve **5.12**'nin birlikte incelenmesi durumunda da elde edildiği görülmektedir. Ayrıca **çizelge 5.8**'de yer alan tüm parametre tahminlerinin **çizelge 4.4.a-4.14.b**'de yer alan simülasyon çalışması ile tutarlı olduğu görülmüştür.

5.4 Vücut Yağı verisi

252 erkek üzerinde yapılan bir araştırmada kişilerin vücutlarındaki yağ yüzdelerini tahmin etmek amacıyla 14 bağımsız değişken açısından ölçümler alınmıştır (Pensore vd. 1985). Bu değişkenlerden ilk üçü, yaş, vücut ağırlığı ve su altındaki ağırlıktan tanımlanan vücut yoğunluğu olup diğerleri ise boy uzunluğu, boyun, göğüs, karın, kalça, uyluk, diz, ayak bileği, kol kası, ön kol ve el bileği için vücut çevresi ölçümleridir. Siri (1956), vücuttaki yağ yüzdesini belirlemek amacıyla vücut yoğunluğu ölçümlerinin yeterli olabileceğini aşağıdaki eşitlik yardımıyla ortaya çıkarmıştır.

$$Vücut\ yağ\ yüzdesi = \frac{495}{vücut\ yoğunluğu} - 450$$

Bu eşitlikten görüldüğü gibi, vücut yağ yüzdesinin belirlenebilmesi vücut yoğunluğu ölçümlerine bağlıdır. Bu nedenle, vücut yoğunluğu değişkeni bağımsız değişken olarak kullanılmamıştır (Kojima ve Komaki, 2014). Bu durumda 13 bağımsız değişken; yaş (x_1 (yıl)), vücut ağırlığı (x_2 (lbs)), boy uzunluğu (x_3 (inç)), boyun çevresi (x_4 (cm)), göğüs çevresi (x_5 (cm)), karın çevresi (x_6 (cm)), kalça çevresi (x_7 (cm)), uyluk çevresi (x_8 (cm)), diz çevresi (x_9 (cm)), ayak bileği çevresi (x_{10} (cm)), kol kası çevresi (x_{11} (cm)), ön kol çevresi (x_{12} (cm)), el bileği çevresi (x_{13} (cm)) ve bağımlı değişken (y (%)), vücut yağı yüzdesi olmak üzere, bu değişkenlere ilişkin elde edilmiş gözlemler Ek-3'de yer almaktadır. Bu gözlemlere ilişkin regresyon modeli,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + \beta_5 x_{i5} + \beta_6 x_{i6} + \beta_7 x_{i7} + \beta_8 x_{i8} + \beta_9 x_{i9} \\ + \beta_{10} x_{i10} + \beta_{11} x_{i11} + \beta_{12} x_{i12} + \beta_{13} x_{i13} + \varepsilon_i \\ i = 1, 2, \dots, 252$$

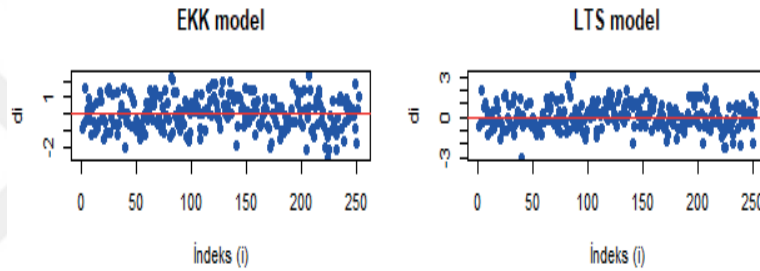
eşitliği şeklinde oluşturulmuştur. EKK yöntemi kullanılarak tahmin edilen model denklemi ise

$$\hat{y}_i = -18.188 + 0.062x_{i1} - 0.088x_{i2} - 0.069x_{i3} - 0.470x_{i4} - 0.023x_{i5} + 0.954x_{i6} \\ - 0.207x_{i7} + 0.236x_{i8} + 0.015x_{i9} + 0.174x_{i10} + 0.181x_{i11} + 0.452x_{i12} - 1.620x_{i13} \\ (5.15)$$

olarak tanımlanır. Bu uygulamada referans model olarak, robust regresyon yöntemlerinden LTS yöntemi ile tahmin edilen aşağıdaki modelin kullanımı tercih edilmiştir.

$$\begin{aligned}\hat{y}_{i_{LTS}} = & -11.300 + 0.068x_{i1} - 0.043x_{i2} - 0.094x_{i3} - 0.253x_{i4} - 0.0003x_{i5} + 0.891x_{i6} \\ & - 0.194x_{i7} + 0.271x_{i8} + 0.0048x_{i9} - 0.535x_{i10} + 0.128x_{i11} + 0.327x_{i12} - 1.612x_{i13}\end{aligned}\quad (5.16)$$

Vücut yağı verisi içerisinde aykırı gözlem olup olmadığını belirlemek amacıyla, sözü edilen EKK ve LTS model denklemleri kullanılarak her gözleme ait standartlaştırılmış artık (d_i) değerleri elde edilmiş ve bu değerlerin grafikleri **şekil 5.13**'de görüldüğü gibi elde edilmiştir.



Şekil 5.13 Vücut yağı verisi için EKK ve LTS yöntemlerine göre elde edilen standartlaştırılmış artık grafiği

Her iki model için de elde edilen standartlaştırılmış artık değerleri incelendiğinde, LTS artık değerlerine göre 39.,86., 135., 207., 224. ve 225. gözlemlerin aykırı gözlem olduğu görülmüştür. Bu gözlemlere ilişkin artık ve standartlaştırılmış artık değerleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 5.10 Vücut yağı verisinde yer alan aykırı gözlemlere ilişkin LTS regresyon modelinden elde edilen artık ve standartlaştırılmış artık değerleri

Gözlem no (i)	39	86	135	207	224	225
Artık (e_i)	-13.334	14.031	9.370	9.490	-9.811	-10.433
Standartlaştırılmış Artık (d_i)	-2.980	3.136	2.094	2.121	-2.192	-2.331

Aykırı gözlemlili bu veri seti kullanılarak sözü edilen aykırı gözlemlerden mümkün olduğunca etkilenmeyen parametre tahminlerini bulmak amacıyla farklı kalın kuyruklu dağılımlara dayalı regresyon modelleri incelenmiştir (**Çizelge 5.11**).

Çizelge 5.11 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımlarına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri

Aykırı gözlem	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Regresyon modeli parametre tahminleri						
		$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_3$	$\hat{\beta}_4$	$\hat{\beta}_5$	$\hat{\beta}_6$
Aykırı gözlem yok	$N(0, \sigma^2)$	-14.195	0.074	-0.058	-0.113	-0.339	-0.055	0.909
	$t(0, \sigma^2, 3)$	-7.403	0.086	-0.028	-0.085	-0.437	-0.043	0.905
	$L(0, \sigma)$	0.751	0.075	0.012	-0.086	-0.370	-0.104	0.905
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	-12.534	0.078	-0.051	-0.104	-0.368	-0.050	0.907
	$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	-10.644	0.082	-0.041	-0.091	-0.403	-0.046	0.906
Aykırı gözlem var	$N(0, \sigma^2)$	-18.188	0.062	-0.088	-0.069	-0.470	-0.024	0.954
	$t(0, \sigma^2, 3)$	-7.988	0.076	-0.039	-0.071	-0.504	-0.032	0.931
	$L(0, \sigma)$	12.187	0.072	0.044	-0.089	-0.547	-0.126	0.925
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	-16.013	0.066	-0.079	-0.068	-0.482	-0.021	0.947
	$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	-12.507	0.071	-0.062	-0.069	-0.499	-0.023	0.939

Bu çizelge incelendiğinde, aykırı gözlemlerin veri setinden çıkarılması sonucunda verinin N-model'e alternatif olarak diğer modellere kıyasla en düşük AIC değerli olan $RN(0.05, 2)$ ve $RN(0.3, 1)$ modellerinden herhangi biri ile modellenebileceği söylenebilir. Aykırı gözlemlerin varlığında ise LTS yöntemine göre elde edilen (5.16) referans modeline göre verinin N-model'e dayalı parametre tahminlerinde bozulma meydana geldiği görülmüştür. Bu doğrultuda farklı kalın kuyruklu hata dağılımına dayalı modeller (t, L ve RN) incelendiğinde en küçük AIC değerli ($AIC=1455.51$) $RN(0.05, 2)$ modeli kullanımının en uygun seçim olacağı söylenebilir.

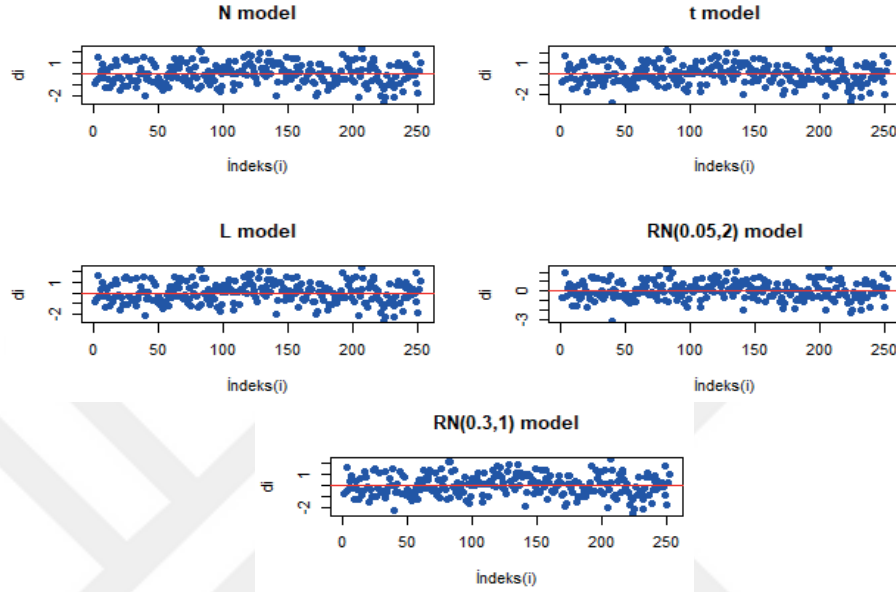
Çizelge 5.11 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımlarına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri (devam)

Aykırı gözlem	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	Regresyon modeli parametre tahminleri						
		$\hat{\beta}_7$	$\hat{\beta}_8$	$\hat{\beta}_9$	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{11}$	$\hat{\beta}_{12}$	$\hat{\beta}_{13}$
Aykırı gözlem yok	$N(0, \sigma^2)$	-0.138	0.213	-0.107	0.166	0.179	0.289	-1.643
	$t(0, \sigma^2, 3)$	-0.208	0.281	-0.214	0.079	0.101	0.336	-1.727
	$L(0, \sigma)$	-0.330	0.362	-0.203	-0.057	0.059	0.412	-1.849
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	-0.155	0.235	-0.143	0.166	0.161	0.300	-1.687
	$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	-0.179	0.258	-0.178	0.128	0.132	0.318	-1.695
Aykırı gözlem var	$N(0, \sigma^2)$	-0.207	0.236	0.015	0.174	0.181	0.452	-1.620
	$t(0, \sigma^2, 3)$	-0.257	0.284	-0.124	0.086	0.118	0.419	-1.764
	$L(0, \sigma)$	-0.393	0.323	-0.236	-0.064	0.104	0.432	-1.935
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	-0.219	0.253	-0.029	0.173	0.167	0.445	-1.664
	$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	-0.239	0.270	-0.069	0.133	0.143	0.435	-1.695

Çizelge 5.11 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımlarına dayalı regresyon modellerinin parametre tahminleri (devam)

Aykırı gözlem	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	$\hat{\sigma}$	Akaike Bilgi Ölçütü (AIC)	Aykırı gözlem	Hata terimleri (ε_i) dağılımı	$\hat{\sigma}$	Akaike Bilgi Ölçütü (AIC)
Aykırı gözlem yok	$N(0, \sigma^2)$	4.037	1423.53	Aykırı gözlem var	$N(0, \sigma^2)$	4.184	1466.50
	$t(0, \sigma^2, 3)$	3.387	1454.75		$t(0, \sigma^2, 3)$	3.425	1497.02
	$L(0, \sigma)$	3.349	1457.89		$L(0, \sigma)$	3.393	1499.34
	$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	3.838	1428.74		$RN(0, \sigma, 0.05, 2)$	3.902	1455.51
	$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	3.097	1437.09		$RN(0, \sigma, 0.3, 1)$	3.143	1478.17

Çizelge 5.11'de yer alan modellerin standartlaştırılmış artık değerleri de elde edilmiş olup bu değerlerin grafikleri **şekil 5.14**'de verilmiştir. Bu şekil incelendiğinde, vücut yağı verisinin $RN(0.05, 2)$ modeli ile modellenmesinin daha uygun olabileceği görülmüştür.



Şekil 5.14 Vücut yağı verisi için farklı hata dağılımlarına dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Klasik tahmin yöntemine ek olarak çalışmaya Bayesyen yöntem de dahil edilmiş olup bu doğrultuda Normal, t, Laplace ve RN hata dağılımlarına dayalı bayesyen ve robust bayesyen regresyon modelleri oluşturulmuştur. Bu modellere ilişkin parametre tahminleri, **çizelge 5.12-5.13**'de görüldüğü gibi elde edilmiştir.

Çizelge 5.12 incelendiğinde, N-NI modeli parametre tahminlerinde tıpkı **çizelge 5.11**'de yer alan N-model tahminlerinde olduğu gibi bozulma söz konusudur. Bu nedenle farklı kalın kuyruklu hata (t, L, RN) dağılımına ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı modeller incelenmiş ve en düşük DIC değerini ($DIC=983.85$) veren $RN(0.05, 2)$ -NI modelinin bu verinin modellenmesinde en uygun seçim olabileceği görülmüştür.

Çizelge 5.12 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri

Model	Regresyon modeli parametre tahminleri							
	$\hat{\beta}_0$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_1$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_2$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_3$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_4$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_5$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_6$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_7$ (sd ^a)
N-NI	-17.980 (17.180)	0.062 (0.032)	-0.087 (0.053)	-0.071 (0.095)	-0.455 (0.231)	-0.026 (0.099)	0.954 (0.087)	-0.208 (0.145)
t-NI	-9.281 (18.650)	0.076 (0.032)	-0.043 (0.060)	-0.066 (0.101)	-0.484 (0.244)	-0.034 (0.110)	0.931 (0.089)	-0.250 (0.149)
L-NI	-4.715 (18.600)	0.073 (0.032)	-0.022 (0.059)	-0.075 (0.093)	-0.504 (0.246)	-0.045 (0.112)	0.930 (0.091)	-0.304 (0.153)
RN(0.05, 2) - NI	-29.120 (2.552)	0.062 (0.032)	-0.115 (0.025)	-0.023 (0.077)	-0.434 (0.210)	-0.008 (0.088)	0.963 (0.092)	-0.147 (0.113)
RN(0.3, 1) - NI	-17.460 (4.952)	0.073 (0.032)	-0.055 (0.028)	-0.023 (0.086)	-0.441 (0.253)	0.003 (0.105)	0.927 (0.088)	-0.271 (0.131)

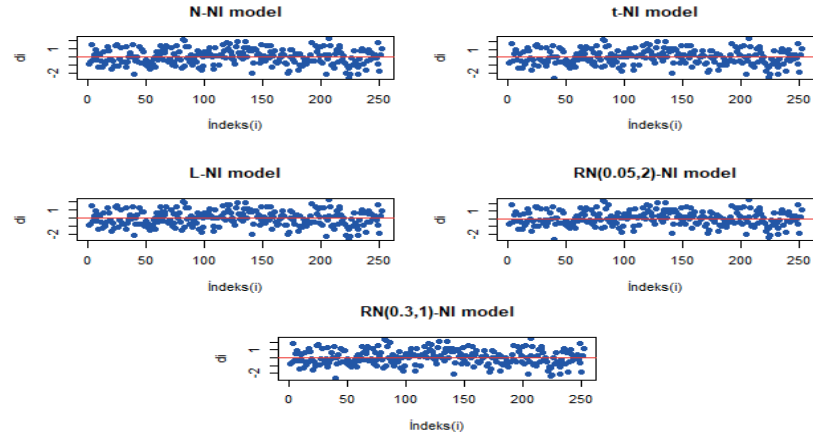
^a sd, parametre tahminlerinin standart sapması

Çizelge 5.12 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri (devam)

Model	Regresyon modeli parametre tahminleri							Sapma Bilgi Ölçütü
	$\hat{\beta}_8$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_9$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_{10}$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_{11}$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_{12}$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_{13}$ (sd ^a)	$\hat{\sigma}$ (sd ^a)	DIC
N-NI	0.234 (0.145)	0.017 (0.242)	0.175 (0.222)	0.180 (0.171)	0.452 (0.200)	-1.644 (0.535)	4.321 (0.198)	1467.28
t-NI	0.284 (0.146)	-0.135 (0.255)	0.111 (0.256)	0.123 (0.177)	0.429 (0.206)	-1.780 (0.560)	3.535 (0.212)	1508.52
L-NI	0.302 (0.152)	-0.119 (0.263)	-0.001 (0.247)	0.098 (0.179)	0.428 (0.199)	-1.711 (0.597)	1.876 (0.060)	1502.22
RN(0.05, 2) -NI	0.254 (0.133)	-0.002 (0.219)	0.173 (0.232)	0.180 (0.174)	0.453 (0.209)	-1.487 (0.464)	4.022 (0.197)	983.85
RN(0.3, 1) - NI	0.363 (0.146)	-0.075 (0.265)	-0.012 (0.240)	0.071 (0.173)	0.457 (0.218)	-1.721 (0.583)	9.994 (0.699)	1723.73

^a sd, parametre tahminlerinin standart sapması

Çizelge 5.12’de yer alan tüm modellere yönelik artık grafikleri ise **şekil 5.15**’de verilmiştir. Bu şekilden 0’a en yakın artık değerlerine sahip modelin *RN(0.05, 2)*-NI modeli olduğu görülmektedir.



Şekil 5.15 Vücut yağı verisi için farklı hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Çizelge 5.13’de ise farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin parametre tahminleri yer almaktadır. N-N modeli incelendiğinde bu modelin parametre tahminlerinde de çizelge 5.11’de yer alan N-model tahminlerinde olduğu gibi bozulma söz konusudur. Bu nedenle N-t ve N-L modelleri oluşturulmuş ve parametre tahminleri elde edilmiştir. Elde edilen tahmin sonuçları, (5.16)’da verilen referans modeli dikkate alınarak incelendiğinde ve modellere ilişkin DIC değerlerine bakıldığında sadece önsel bilgide kalın kuyruklu dağılım kullanmanın aykırı gözlemlere karşı robust tahminlerin bulunmasında etkili olmadığı görülmüştür. t-N, L-N ve RN-N modelleri incelendiğinde ise verinin en küçük DIC değerli ($DIC=983.20$) $RN(0.05,2)$ -N modeli ile modellenebileceği söylenebilir. Hem hata dağılımı hem de önsel dağılımı kalın kuyruklu olan modeller kıyaslandığında, en düşük DIC değerine ($DIC=983.17$) sahip $RN(0.05,2)$ -t modelinin diğerlerine göre daha robust tahminler verdiği ve verinin modellenmesinde kullanılabileceği görülmüştür (Çizelge 5.13-5.14).

Çizelge 5.13 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri

Hata terimleri (ε_i) dağılımı	β 'nin önseli	Regresyon modeli parametre tahminleri						
		$\hat{\beta}_0$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_1$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_2$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_3$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_4$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_5$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_6$ (sd ^a)
$N(0, \sigma^2)$	$N(0,1)$	-20.700 (16.910)	0.054 (0.031)	-0.094 (0.052)	-0.078 (0.095)	-0.471 (0.223)	-0.020 (0.098)	0.954 (0.086)
$N(0, \sigma^2)$	$t(0,1,3)$	-20.370 (16.430)	0.056 (0.032)	-0.093 (0.050)	-0.074 (0.096)	-0.453 (0.224)	-0.017 (0.099)	0.952 (0.089)
$N(0, \sigma^2)$	$L(0,1)$	-19.680 (16.470)	0.053 (0.032)	-0.090 (0.051)	-0.080 (0.093)	-0.432 (0.229)	-0.022 (0.091)	0.950 (0.086)
$t(0, \sigma^2, 3)$	$N(0,1)$	-13.730 (18.280)	0.067 (0.031)	-0.055 (0.059)	-0.074 (0.100)	-0.493 (0.233)	-0.019 (0.109)	0.932 (0.088)
$L(0, \sigma)$	$N(0,1)$	-9.899 (18.250)	0.062 (0.030)	-0.038 (0.060)	-0.077 (0.097)	-0.518 (0.244)	-0.019 (0.109)	0.942 (0.088)
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$N(0,1)$	-19.630 (1.727)	0.057 (0.030)	-0.087 (0.024)	-0.078 (0.073)	-0.467 (0.201)	-0.024 (0.087)	0.954 (0.082)
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$N(0,1)$	-21.260 (4.143)	0.056 (0.029)	-0.068 (0.027)	-0.062 (0.080)	-0.425 (0.230)	0.017 (0.094)	0.943 (0.084)
$t(0, \sigma^2, 3)$	$t(0,1,3)$	-13.990 (18.390)	0.069 (0.033)	-0.056 (0.059)	-0.072 (0.094)	-0.464 (0.227)	-0.016 (0.116)	0.928 (0.088)
$L(0, \sigma)$	$t(0,1,3)$	-8.745 (19.930)	0.064 (0.030)	-0.035 (0.064)	-0.083 (0.098)	-0.492 (0.242)	-0.025 (0.117)	0.935 (0.086)
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$t(0,1,3)$	-10.500 (3.759)	0.058 (0.031)	-0.060 (0.026)	-0.112 (0.079)	-0.468 (0.204)	-0.039 (0.082)	0.937 (0.080)
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$t(0,1,3)$	-4.012 (3.509)	0.067 (0.030)	-0.010 (0.027)	-0.082 (0.083)	-0.519 (0.228)	-0.040 (0.108)	0.929 (0.099)
$t(0, \sigma^2, 3)$	$L(0,1)$	-14.040 (18.460)	0.067 (0.031)	-0.056 (0.059)	-0.067 (0.099)	-0.438 (0.235)	-0.024 (0.101)	0.936 (0.086)
$L(0, \sigma)$	$L(0,1)$	-11.440 (17.200)	0.061 (0.031)	-0.041 (0.056)	-0.077 (0.093)	-0.449 (0.240)	-0.018 (0.112)	0.934 (0.085)
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$L(0,1)$	-19.400 (2.702)	0.055 (0.032)	-0.085 (0.025)	-0.077 (0.076)	-0.455 (0.223)	-0.022 (0.087)	0.949 (0.084)
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$L(0,1)$	-20.700 (3.816)	-0.062 (0.032)	-0.063 (0.028)	-0.055 (0.080)	-0.376 (0.235)	0.016 (0.103)	0.924 (0.095)

^a sd, parametre tahminlerinin standart sapması

Çizelge 5.13 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin bayesyen ve robust bayesyen parametre tahminleri (devam)

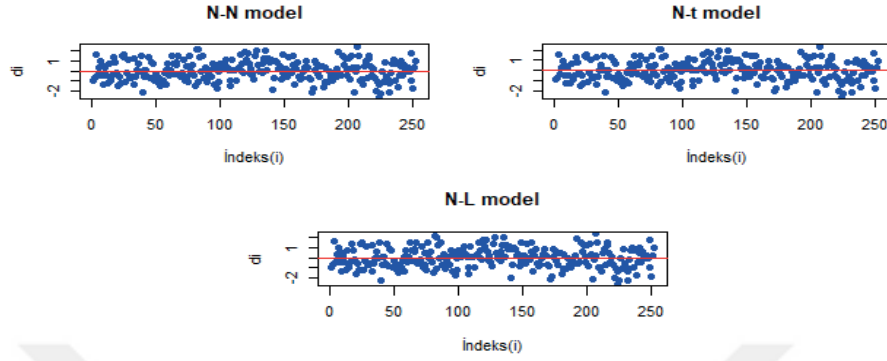
Hata terimleri (ε_i) dağılımı	β 'nin önseli	Regresyon modeli parametre tahminleri						
		$\hat{\beta}_7$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_8$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_9$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_{10}$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_{11}$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_{12}$ (sd ^a)	$\hat{\beta}_{13}$ (sd ^a)
$N(0, \sigma^2)$	$N(0,1)$	-0.200 (0.143)	0.236 (0.142)	0.010 (0.234)	0.132 (0.215)	0.173 (0.168)	0.410 (0.195)	-1.288 (0.471)
$N(0, \sigma^2)$	$t(0,1,3)$	-0.198 (0.142)	0.235 (0.148)	0.012 (0.230)	0.138 (0.216)	0.172 (0.169)	0.410 (0.196)	-1.393 (0.513)
$N(0, \sigma^2)$	$L(0,1)$	-0.195 (0.144)	0.222 (0.144)	0.018 (0.220)	0.117 (0.206)	0.162 (0.168)	0.393 (0.196)	-1.348 (0.537)
$t(0, \sigma^2, 3)$	$N(0,1)$	-0.237 (0.147)	0.282 (0.143)	-0.121 (0.248)	0.062 (0.247)	0.098 (0.174)	0.386 (0.194)	-1.363 (0.490)
$L(0, \sigma)$	$N(0,1)$	-0.300 (0.149)	0.304 (0.143)	-0.117 (0.252)	-0.025 (0.242)	0.061 (0.176)	0.385 (0.188)	-1.270 (0.513)
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$N(0,1)$	-0.205 (0.110)	0.247 (0.137)	-0.027 (0.227)	0.125 (0.232)	0.162 (0.163)	0.404 (0.196)	-1.296 (0.409)
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$N(0,1)$	-0.253 (0.138)	0.311 (0.139)	-0.086 (0.233)	-0.036 (0.228)	0.008 (0.174)	0.389 (0.175)	-1.058 (0.457)
$t(0, \sigma^2, 3)$	$t(0,1,3)$	-0.233 (0.140)	0.280 (0.142)	-0.112 (0.244)	0.076 (0.249)	0.102 (0.181)	0.391 (0.198)	-1.471 (0.553)
$L(0, \sigma)$	$t(0,1,3)$	-0.292 (0.157)	0.299 (0.146)	-0.119 (0.246)	-0.038 (0.225)	0.062 (0.171)	0.387 (0.185)	-1.352 (0.543)
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$t(0,1,3)$	-0.230 (0.112)	0.229 (0.135)	-0.049 (0.222)	0.079 (0.215)	0.147 (0.170)	0.364 (0.195)	-1.372 (0.473)
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$t(0,1,3)$	-0.329 (0.120)	0.313 (0.130)	-0.169 (0.244)	-0.065 (0.256)	0.032 (0.170)	0.392 (0.184)	-1.362 (0.541)
$t(0, \sigma^2, 3)$	$L(0,1)$	-0.227 (0.147)	0.267 (0.138)	-0.103 (0.233)	0.068 (0.231)	0.104 (0.163)	0.369 (0.192)	-1.502 (0.530)
$L(0, \sigma)$	$L(0,1)$	-0.264 (0.147)	0.278 (0.140)	-0.111 (0.231)	-0.027 (0.219)	0.053 (0.164)	0.368 (0.178)	-1.347 (0.583)
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$L(0,1)$	-0.179 (0.117)	0.211 (0.145)	-0.019 (0.217)	0.117 (0.200)	0.155 (0.160)	0.398 (0.203)	-1.343 (0.498)
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$L(0,1)$	-0.219 (0.138)	0.301 (0.151)	-0.105 (0.247)	-0.035 (0.223)	0.020 (0.177)	0.382 (0.179)	-1.294 (0.623)

^a sd, parametre tahminlerinin standart sapması

Çizelge 5.14 Vücut yağı verisi için oluşturulan farklı hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine ilişkin DIC değerleri

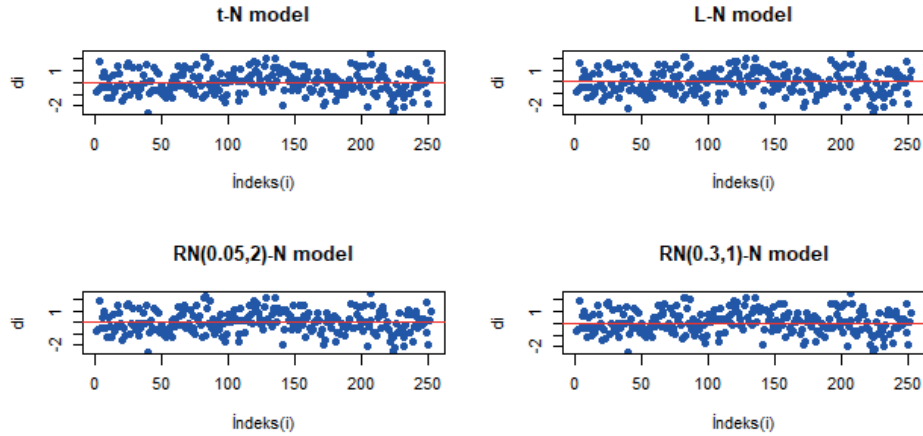
Hata terimleri (ε_i) dağılımı	β 'nın önseli	$\hat{\sigma}$ (sd ^a)	Sapma Bilgi Ölçütü (DIC)
$N(0, \sigma^2)$	$N(0,1)$	4.321 (0.198)	1466.72
$N(0, \sigma^2)$	$t(0,1,3)$	4.322 (0.198)	1467.03
$N(0, \sigma^2)$	$L(0,1)$	4.321 (0.198)	1466.76
$t(0, \sigma^2, 3)$	$N(0,1)$	3.537 (0.213)	1508.38
$L(0, \sigma)$	$N(0,1)$	1.876 (0.059)	1500.86
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$N(0,1)$	4.016 (0.197)	983.20
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$N(0,1)$	9.990 (0.696)	1722.45
$t(0, \sigma^2, 3)$	$t(0,1,3)$	3.537 (0.213)	1508.35
$L(0, \sigma)$	$t(0,1,3)$	1.876 (0.059)	1501.45
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$t(0,1,3)$	4.017 (0.198)	983.17
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$t(0,1,3)$	9.974 (0.697)	1713.93
$t(0, \sigma^2, 3)$	$L(0,1)$	3.533 (0.213)	1507.60
$L(0, \sigma)$	$L(0,1)$	1.875 (0.060)	1500.19
RN ($0, \sigma, 0.05, 2$)	$L(0,1)$	4.020 (0.198)	983.54
RN ($0, \sigma, 0.3, 1$)	$L(0,1)$	9.997 (0.697)	1723.30

Çizelge 5.13'de yer alan tüm modellere yönelik artık grafikleri ise **şekil 5.16**'da verilmiştir. Bu şekil incelendiğinde, verinin N-N modelinin yanı sıra N-t ve N-L modelleri ile de modellenmesinin uygun olmayacağı söylenebilir.



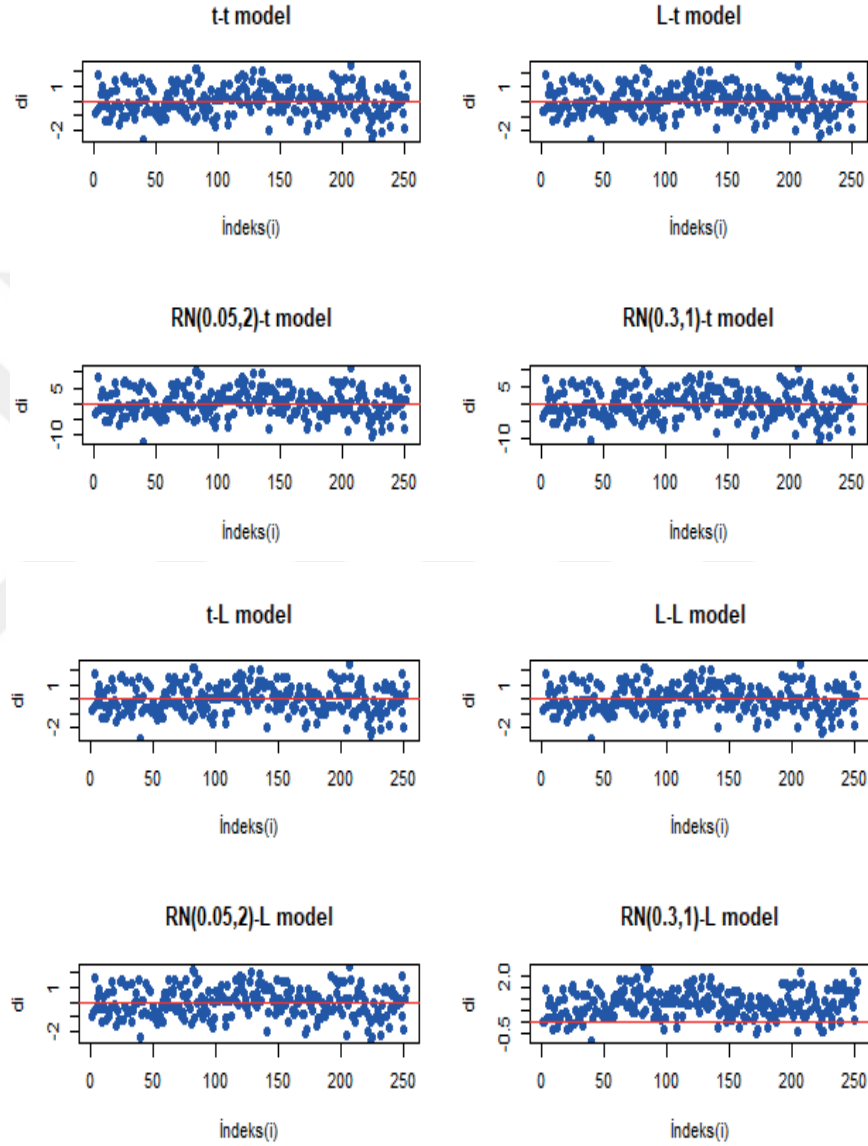
Şekil 5.16 Vücut yağı verisi için Normal hata dağılımı ve bilgi içeren önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Kalın kuyruklu hata dağılımı (t, L, RN) ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modellerine yönelik elde edilen standartlaştırılmış artık değerleri incelendiğinde ise $RN(0.05, 2)$ -N modeli kullanılarak bulunan artıkların 0'a daha yakın olduğu görülmüştür (**Şekil 5.17**).



Şekil 5.17 Vücut yağı verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Kalın kuyruklu hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri kullanılarak elde edilen standartlaştırılmış artık grafikleri ise **şekil 5.18**'de verilmiştir. Bu şekil incelendiğinde, $RN(0.05, 2)$ -t modelinden bulunan artık değerlerinin diğer modellere kıyasla daha küçük değerli ve 0'a yakın olduğu görülmüştür.



Şekil 5.18 Vücut yağı verisi için kalın kuyruklu hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı oluşturulan regresyon modellerine ilişkin standartlaştırılmış artık grafiği

Sonuç olarak; **çizelge 5.13**'de yer alan tüm modeller kıyaslandığında, vücut yağı verisinin modellenmesinde $RN(0.05, 2)$ -t, $RN(0.05, 2)$ -N ve $RN(0.05, 2)$ -L modellerinden herhangi birinin kullanılabileceği önerilmiştir. Bu sonucun, **şekil 5.16**, **5.17** ve **5.18**'nin birlikte incelenmesi durumunda da elde edildiği görülmektedir. Ayrıca **çizelge 5.13**'de yer alan tüm parametre tahminleri, **çizelge 4.4.a-4.14.b**'de yer alan simülasyon çalışması sonuçları ile tutarlı çıkmıştır.



6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Doğrusal regresyon modellerinde hata terimlerinin genellikle Normal dağılıma sahip olduğu varsayılmaktadır. Halbuki, veri setinde yer alan gözlemlerin Normal dağılıması her zaman mümkün olmayabilir. Bu gibi durumlarda normallik varsayımı doğrultusunda modelleme yapılması uygun olmaz. Ayrıca Normal dağılıma dayalı regresyon modellerinden elde edilen parametre tahminlerinin veri setinde yer alan aykırı gözlemlerden etkilendiği de bilinmektedir. Bu doğrultuda, sözü edilen bu problemlerden mümkün olduğunca az etkilenen tahminlerin elde edilmesini sağlayan robust tahmin edicilerin kullanımına yönelik literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Robust parametre tahmini, kalın kuyruklu dağılıma dayalı modeller veya dağılıma dayalı olmayan robust tahmin yöntemleri kullanılarak yapılmaktadır.

Bu tez çalışmasında, kalın kuyruklu dağılımlara dayalı regresyon modelleri ele alınmış olup öncelikle eliptik dağılım ailesine ait kalın kuyruklu dağılımlardan t ve Laplace gibi bilindik dağılımlara dayalı regresyon modelleri incelenmiş ve model parametrelerine ilişkin robust tahmin ediciler elde edilmiştir. Sonrasında bu modellere alternatif olarak, Ramsay ve Novick (1980) tarafından geliştirilen eliptik dağılım ailesine ait kalın kuyruklu bir dağılım olan RN dağılımına dayalı regresyon modeli ve model parametrelerinin robust tahmin edicileri önerilmiştir. RN dağılımına dayalı regresyon modelinin performansı ile Normal, t ve Laplace dağılımlarına dayalı modellerin performansı, simülasyon çalışması yapılarak parametre tahminlerinin RMSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır. Simülasyon sonuçlarına göre, Normal dağılıma dayalı modelin parametre tahminlerinin veri setinde yer alan tüm yönlerdeki (x -, y - ve $x-y$) aykırı gözlemlerden etkilendiği ancak t , Laplace ve RN dağılımlarına dayalı modellerin ise y - yönündeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust parametre tahminleri verdiği ortaya çıkmıştır. Bu modeller içerisinde RN dağılımına dayalı modelin diğerlerine kıyasla tüm model parametreleri için daha küçük RMSE'li robust tahminler verdiği görülmüştür. Ayrıca aykırı gözlemlerli bir veri setinin modellenmesinde ele alınan regresyon modellerinden hangisinin tercih edilmesi gerektiğine gerçek veri uygulaması yapılarak karar verilmiştir. Uygulama sonucunda aykırı gözlemlerli verinin Normal dağılım yerine kalın kuyruklu dağılıma dayalı regresyon modeli ile modellenmesinin uygun olacağı belirlenmiştir.

Tezin asıl amacına yönelik olarak klasik yaklaşımın yanı sıra çalışmada Bayesyen yaklaşım da ele alınmıştır. Bu doğrultuda öncelikle, bilgi içermeyen / bilgi içeren önsel dağılım kullanılarak Bayesyen regresyon modelleri oluşturulmuş ve model parametrelerinin Bayesyen tahmin edicileri elde edilmiştir. Bu tahmin edicilerin performansını değerlendirmek amacıyla simülasyon çalışması ve gerçek veri uygulaması yapılmış ve elde edilen Bayesyen parametre tahminlerinin veri setindeki aykırı gözlemlerden oldukça etkilendiği ortaya çıkmıştır. Bu nedenle, aykırı gözlemlerin varlığından ve model varsayımlarındaki sapmalardan etkilenmeyen robust Bayesyen tahmin edicilerin elde edilmesi amaçlanmıştır.

Bu bağlamda, öncelikle t ve Laplace hata dağılımlarından birine ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri (t -NI ve L -NI) ele alınmıştır. Bu modellere alternatif olarak RN hata dağılımı ve bilgi içermeyen önsel dağılıma dayalı regresyon modeli (RN-NI) de önerilmiş olup bu modellerin performansları, simülasyon çalışması yapılarak parametre tahminlerinin RMSE değerlerine göre karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda, RN-NI modeli tahmin edicilerinin diğerlerine kıyasla tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen daha küçük RMSE değerli robust Bayesyen parametre tahminleri verdiği görülmüştür. Ayrıca gerçek veri uygulaması yapılarak modeller, artık grafiklerine ve DIC değerlerine göre de incelenmiş ve aynı sonuca ulaşılmıştır.

Sonrasında ise sözü edilen bu modellere alternatif olarak model parametrelerine ilişkin ön bilgiye sahip olduğu varsayılmış ve bu doğrultuda ilk önce t ve Laplace hata dağılımlarından birine ve Normal önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri (t -N, L -N) ele alınmıştır. Daha sonra bu modellere alternatif olarak RN hata dağılımı ve Normal önsel dağılıma dayalı model (RN-N) önerilmiş olup modellerin performansları, simülasyon ve gerçek veri uygulaması ile karşılaştırılmıştır. L -N modelinin bazı, t -N modelinin ise bütün parametreleri için y - yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahminler elde edilmiştir. Bu modellere kıyasla RN-N modeli ise bütün parametreleri açısından tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenmeyen robust Bayesyen tahminler vermiştir.

Normal hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma dayalı regresyon modelleri (N - t , N - L) performanslarının simülasyon ve gerçek veri uygulaması ile kıyaslanması

sonucunda ise bu modellere ilişkin elde edilen parametre tahminlerinin tüm yönlerdeki aykırı gözlemlerden etkilenen robust olmayan tahminler olduğu ortaya çıkmıştır. Dolayısıyla sadece önsel bilginin kalın kuyruklu bir dağılımdan geldiğinin varsayılması robust tahminler elde edilmesinde yeterli değildir. Bu nedenle aykırı gözlemlerli bir verinin modellenmesinde N-t ve N-L modellerinin kullanımı tercih edilmemelidir. Son olarak hem hata dağılımı hem de önsel dağılımı, t ve Laplace dağılımlarından birine dayalı olan regresyon modelleri (t-t, t-L, L-t, L-L) elde edilmiş ve bu modellere alternatif olarak RN hata dağılımı ve kalın kuyruklu önsel dağılıma (t, L) dayalı regresyon modelleri (RN-t, RN-L) önerilmiştir. Simülasyon ve gerçek veri uygulaması yapılarak modellerin performansları karşılaştırıldığında, L-t ve L-L modelleri parametre tahminlerinin tüm yönlerdeki aykırı gözlemlere karşı bozulma gösterdiği ancak t-t ve t-L modellerinin ise y- yönündeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen tahminler verdiği gösterilmiştir. Önerilen RN-t ve RN-L modellerinden ise tüm yönlerdeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen parametre tahminler elde edilmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışmada diğer modellere kıyasla RN-N, RN-t ve RN-L modellerine ilişkin verideki aykırı gözlemlerden ve model varsayımlarındaki sapmalardan etkilenmeyen robust Bayesyen tahmin ediciler önerilmiş olup bu tahmin ediciler kullanılarak tüm yönlerdeki aykırı gözlemlere karşı robust Bayesyen parametre tahminleri elde edilmiştir. Bu nedenle, aykırı gözlemlerli bir verinin RN-N, RN-t ve RN-L modellerinden herhangi biri kullanılarak modellenmesinin tercih edilebileceği önerilmiştir.

İlerleyen çalışmalarda, bu tezde önerilen modellerin yanı sıra eliptik dağılım ailesine ait tek ve çok değişkenli kalın kuyruklu çarpık dağılımlara dayalı robust Bayesyen regresyon modelleri oluşturularak hata terimleri ve önsel dağılımın her ikisinin de simetrik, her ikisinin de çarpık veya birinin simetrik birinin çarpık kalın kuyruklu dağıldığı durumlar ele alınacaktır. Ayrıca önsel dağılım parametrelerinin bilinmediği varsayılarak, genelleştirilmiş robust Bayesyen regresyon analizi yapılması planlanmaktadır. Ek olarak, RN dağılımına dayalı robust Bayesyen regresyon analizinden elde edilen parametre tahminleri, bu dağılım ailesine dayalı olmadan robust yöntemler kullanılarak elde edilmeye çalışılacaktır.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. (Eds.) 1972. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. New York: Dover, 9th printing.
- Aitkin, M. and Wilson, G.T. 1980. Mixture models, outliers, and the EM algorithm. *Technometrics*, 22, 325-331.
- Akaike, H. 1973. Information theory and extension of the maximum likelihood principle. In B.N Petrov and F.Csáki (Eds.), Second international symposium on information theory, *Académiai Kiadó*, Budapest, 267-281.
- Albert, J. 2009. Bayesian Computation with R. Springer Dordrecht Heidelberg, London New York, 298s.
- Alhamzawi, R., Yu, K. and Benoit, D.F. 2012. Bayesian adaptive Lasso quantile regression. *Statistical Modelling*, 12(3), 279–297.
- Antoch, J. and Jureckova, J. 1985. Trimmed LSE resistant to leverage points. *Computational Statistics Quarterly*, 4, 329-339.
- Arfken, G. 1985. The Incomplete Gamma Function and Related Functions. §10.5 in *Mathematical Methods for Physicists*, 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, 565-572.
- Arslan, O. 2010. An alternative multivariate skew Laplace distribution: propoerties and estimation. *Stat Papers*, 51, 865-887.
- Arslan, O. 1997. Asymptotic Rejection Probability of Constrained M estimators. *Bulletin of the 51st Session of the International Statistical Institute*, contributed Book, 2, 283-284.
- Arslan, O. and Billor, N. 2000. Robust Liu estimator based on an M estimator. *Journal of Applied Statistics*, 27(1), 39-47.
- Arslan, O., Constable, P.D.L and Kent, J.T. 1995. Convergence behavior of the EM algorithm for the multivariate t distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 24(12), 2981-3000.
- Arslan O. and Genc A. I. 2003. Robust location and scale estimation based on the univariate generalized t GT distribution. *Communications in Statistics: Theory and Methods*, 32, 1505-1525.
- Aryal, G. R. 2006. Study of laplace and related probability distributions and their applications. *Graduate Theses and Dissertations*.
- Barrodale, I. and Roberts, F.D.K. 1973. An improved algorithm for discrete L1 linear approximation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 10(5), 839-848.
- Bilodeau, M. and Brenner, D. 1999. *Theory of Multivariate Statistics*. Springer, New York.

- Birkes, D. and Dodge, Y. 1993. *Alternative methods of regression*. New York: John Wiley & Sons.
- Bolfarine, H. and Valle, R. 1994. Robust modelling in measurement error models using t - distribution. *Revista Brasileira de probabilidade e Estatistica*, 1, 67-84.
- Box, G.E.P. 1953. Non-Normality and Tests on Variances. *Biometrika*, 40, 318-335.
- Brownlee, K. A. 1965. *Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering*. New York: Wiley. 2nd ed.
- Burnham, K.P. and Anderson, D.R. 2002. *Model Selection and Inference: A Practical Information-Theoretic Approach*. 2nd Edition, Springer-Verlag, New York.
- Cambanis, S., Huang, S., and Simons, G. 1981. On the theory of elliptically contoured distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 11, 368-385.
- Chen, R., Wang, X. and Liu, J. 2000. Adaptive Joint Detection and Decoding in flat-fading channels via mixture Kalman filtering. *IEEE Trans. Inform. Theor.*, 46, 2079-2094.
- Chib, S. and Greenberg, E. 1995. Understanding the Metropolis-Hastings Algorithm. *The American Statistician*, 49, 327-335.
- Choy, S., Chan, J. 2008 Scale mixtures distributions in statistical modelling. *Australian and New Zealand Journal of statistics*, 50, 135-146.
- Coleman, J. S., Campbell, E. Q., Hobson, C. J., McPartland, J., Mood, A. M., Weinfeld, F. D., and York, R. L. vd. 1966. *Equality of Educational Opportunity*, two volumes, Office of Education, U.S. Department of Health, Washington.
- Dempster, A. P. 1974. The Direct Use of Likelihood for Significance Testing in *Proceedings of Conference on Foundational Questions in Statistical Inference*. University of Aarhus, 335-352.
- Draper, N.R. and Smith, H. 1981. *Applied regression analysis*. (2nd Ed.) New York: Wiley.
- Efron, B. 1979. Bootstrap Methods: Another Look At The Jackknife. *THE Annals of Statistics*, 7(1), 1-26.
- Ellis, S. P. and Morgenthaler, S. 1992. Leverage and breakdown in L1 regression. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 87, 143-148.
- Evans, S. 2012. *Bayesian Regression Analysis*. Master Report, Department of Mathematics University of Louisville.
- Fang, T.W. and Anderson, T.W. (Eds.) 1990. *Statistical Inference in Elliptically Contoured and Related Distributions*. Allerton Press, New York, 1-23.
- Fernandez, C. and Steel, M.F.J. 1998. On Bayesian modeling of Fat Tails and Skewness. *Journal of the American Statistical Association*, 93(441), 359-371.

- Fisher, R. A. 1922. On the mathematical foundations of theoretical statistics, *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, 222, 309-368.
- Galea, M., Riquelme, M., Paula, G.A. 2000. Diagnostic methods in elliptical linear regression models. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 14, 167–184.
- Gamerman, D. 1997. *Markov Chain Monte Carlo, Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. London: Chapman & Hall.
- Gao, X. and Fang, Y. 2016. Penalized weighted least squares for outlier detection and robust regression. *ArXiv*.
- Gelfand, A.E., Dey, D.K. 1994. Bayesian model choice: asymptotics and exact calculations. *Journal Royal Statistics Soc. B*, 56.
- Gelfand, A.E., Smith, A.F.M. 1990. Sampling-Based Approaches to calculating marginal densities. *J. Am. Stat. Asso.* 85, 398-409.
- Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S., Rubin, D.B. 2004. *Bayesian Data Analysis*. Second Edition, Chapman and Hall / CRC, Boca Raton, FL.
- Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, and D. B. Rubin. 2003. *Bayesian Data Analysis*. Chapman & Hall/CRC, London, 2nd edition.
- Geman, S. and Geman, D. 1984. Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions, and the Bayesian Restoration of Images. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Mathematical Intelligence*, 6, 721-741.
- Gilks, W.R., Richardson, S. and Spiegelhalter, D.J., eds. 1996. *Markov Chain Monte Carlo in Practice*, London: Chapman and Hall.
- Gómez-Sánchez-Manzano, E., Gómez-Villegas, M.A. and Marín, J. M. 2006. Sequences of elliptical distributions and mixtures of normal distributions, *J. Multivariate Anal.* 97, 295–310.
- Gupta, K. and Varga, T. 1993. *Elliptically Contoured Models in Statistics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Gutenbrunner, G., Jureckova, J., Koenker, R. and Portnoy, S. 1993. Tests of linear hypotheses based on regression rank scores. *Nonparametric Statist.*, 2, 307-331.
- Hampel, F.R., Ronchetti, E.M., Rousseeuw, P.J. and Stahel, W.A. 1986. *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*. John Wiley & Sons, New York.
- Hastings, W.K. 1970. Monte Carlo sampling methods using Markov Chains and their applications. *Biometrika*, 57, 97-109.
- Hettmansperger, T.P., McKean, J.W. 1977. A robust alternative based on ranks to least squares in analyzing linear models. *Techno*, 19, 275-284.
- Hitchcock, D.B. 2009. The Bayesian Linear Regression Model. *STAT J535: Chapter 4*.
- Huber, P. J. 1964. Robust estimation of a location parameter. *Annals of Mathematical Statistics*, 35, 73-101.

- Huber, P. J. 1967. The Behavior of Maximum Likelihood Estimates Under Nonstandard Conditions. *Proceedings of the 5th Berkeley Symposium*, 1, 221-233.
- Huber, P.J. 1973. Robust Regression: Asymptotics, Conjectures and Monte Carlo. *The Annals of Statistics*, 1-5, 799-821.
- Huber, P.J. 1977. Robust Covariances. *Statistical Decision Theory and Related Topics*, H.S.S. Gupta, D.S. Moore, Eds, Academic Press, New York.
- Huber, P.J. 1981. Robust statistics. New York: John Wiley & Sons, Inc., ISBN 0-471-41805-6, MR 606374. Republished in paperback, 2004. 2nd ed., Wiley, 2009.
- Huber, P.J. and Ronchetti, E.M. 2009. Robust Statistics. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.
- Jackman, S. 2009. Bayesian Analysis for the Social Sciences. Wiley, 507.
- Jameson, G. J. O. 2016. The incomplete gamma functions. *Math. Gazette*, 100, 298–306.
- Kass, R.E., Raftery, A.E. 1995. Bayes factors. *Journal of the American Statistical Association*, 90, 773-795.
- Kelker, D. 1970. Distribution theory of spherical distributions and a location-scale parameter generalization. *Sankhya A*, 32, 419-430.
- Kojima, M. and Komaki, F. 2014. Determinantal Point Process Priors for Bayesian Variable Selection in Linear Regression. *ArXiv*.
- Kotz, S., Kozubowski, T.J. and Podgorski, K. 2001. The Laplace distribution and generalizations. Birkhauser, Boston.
- Krasker, W.S. and Welsch, R.E. 1982. Efficient bounded-influence regression estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 77(379), 595-604.
- Lange, K.L., Little, R.J.A. and Taylor, J.M.G. 1989. Robust statistical modeling using the t distribution. *J. Am. Statist. Assoc.*, 84 (408), 881-896.
- Legendre, A.M. 1805. *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes*. Courcier, Paris.
- Li, Y. and Arce, G.R. 2004. A Maximum Likelihood Approach to Least Absolute Deviation Regression. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 12, 1762-1769.
- Liu, J.S. 2001. Monte Carlo Strategies in Statistical Computing. New York: Springer.
- Lynch, S. M. 2007. Introduction to Applied Bayesian Statistics and Estimation for Social Scientists. New York: Springer.
- Mallows, C.L. 1973. Some Comments on Cp. *Technometrics*, 15, 661-675.
- Mallows, C.L. 1975. On some topics in robustness. Technical memorandum, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, N.J.

- Maronna, R.A., Martin, R.D. and Yohai, V.J. 2006. Robust Statistics: Theory, and Methods. Wiley.
- Mendoza, M. and Pena, E.G. 2010. Some thoughts on the Bayesian robustness of location scale models. *Chilean Journal of Statistics*, 1(1), 35-58.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A., Teller, H. 1953. Equations of state calculations by fast computing machines. *Journal of Chemical Physics*, 21, 1087-1091.
- Montgomery, D. C. and Peck, E.A. 1992. Introduction to Linear Regression Analysis. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- Montgomery, D.C., Peck, A.E. and Vining, G.G. 2001. Introduction to the Linear Regression Analysis. John Wiley & Sons, Canada.
- Mosteller, F. and Tukey, J. W. 1977. Data Analysis and Regression. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Ntzoufras, I. 2009. Bayesian Modeling Using WinBUGS. Wiley Series in Computational Statistics, 492, Hoboken, USA.
- Osborne, M.R. 1985. Finite Algorithms in Optimization and Data Analysis. J. Wiley New York, 267-270.
- Passarin, K. 2004. Robust Bayesian Estimation. Università degli Studi dell'Insubria, Varese, Italy.
- Penrose, K., Nelson, A., and Fisher, A. 1985. Generalized Body Composition Prediction Equation for Men Using Simple Measurement Techniques (abstract). *Medicine and Science in Sports and Exercise*, 17(2), 189.
- Penttinen, A. and Piché, R. 2010. Bayesian Methods. Tampere University of Technology.
- Piche, R. 2011. Robust Multivariate Linear Regression Using the Student-t Distribution. Working Paper, Tampere University of Technology.
- Pfeil, W.A. 2006. Statistical Teaching Aids. Bachelor of Science thesis, Worcester Polytechnic Institute.
- Raftery, A.E. 1986. Choosing Models for Cross-Classifications. *American Sociological Review*, 51, 145-146.
- Raiffa, H. and Schlaifer, R. 1968. Applied Statistical Decision Theory. The M. I. T. Press, 356, Cambridge.
- Ramsay, J.O. and Novick, M.R. 1980. PLU robust Bayesian decision theory: point estimation. *Journal of the American Statistical Association*, 75, 901-907.
- Rey, W.J.J. 1977. M-Estimators in Robust Regression, a Case Study. M.B.L.E. Research Lab Brussels.
- Robert, C.P. and Casella, G. 2004. Monte Carlo Statistical Methods. Springer, New York.

- Rousseeuw, P.J. 1984. Least median of squares regression. *Journal of the American Statistical Association*, 79, 871-880.
- Rousseeuw, P.J. and Leroy, A.M. 1987. *Robust Regression and Outlier Detection*. John Wiley, 313, New York.
- Rousseeuw, P. J. and Yohai, V. J. 1984. Robust Regression by Means of S-Estimators. *Robust and Nonlinear Time Series*, edited by. J. Franke, W. Hardle, ve D. Martin, *Lecture Notes in Statistics*, Berlin: Springer-Verlag, 26, 256–272.
- Ruppert, D., and Carroll, R. J. 1980. Trimmed least squares estimation in the linear model. *J. Am. Stat. ASSOC*7., 5 , 828-838.
- Russell, S. and Norvig, P. 2010. *Artificial Intelligence: A Modern Approach*. Prentice Hall. 3rd edition.
- Schlossmacher, E.J. 1973. An Iterative Technique for Absolute Deviations Curve Fitting. *Journal of the American Statistical Association*, 68(344), 857-859.
- Schwarz, G.D. 1978. Estimating the Dimension of a Model. *Annals of Statistics*, 6, 461-464.
- Shao, J. 2003. *Mathematical Statistics*. 2nd ed. Springer;New York.
- Sharpe, W.F. 1971. Mean-absolute-deviation characteristic lines for securities and portfolios. *Management Science*, 18, B1–B13.
- Siegel, A.F. 1982. Robust regression using repeated medians. *Biometrika*, 69, 242-244.
- Simpson, D.G., Ruppert, D. and Carroll, R.J. 1992. On one-step gm estimates and stability of inferences in linear regression. *Journal of American Statistical Association*, 87(418), 439-450.
- Siri, W. E. 1956. Gross Composition of the Body in *Advances in Biological and Medical Physics* (Vol. IV). eds. J. H. Lawrence and C. A. Tobias, New York: Academic Press.
- Smith, V.K. and Hall, T.W. 1972. A Comparison of Maximum Likelihood Versus BLUE Estimators. *The Review of Economics and Statistics*, 54, 186-190.
- Spiegelhalter, D.J., Best, N.G., Carlin, B.P., Van der Linde, A. 2002. Bayesian measures of model complexity and fit (Pkg:p 583-639). *Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Methodological*, 64(4), 583-616.
- Sturtz S., Ligges, U. and Gelman, A. 2005. R2WinBUGS: A Package for Running WinBUGS from R. *Journal of Statistical Software*, 12(3), 1–16.
- Tanner, M.A. 1993. *Tools for Statistical Inference*. New York:Springer-Verlag.
- Tiao, G.C. and Zellner, A. 1964. Bayes's Theorem and the Use of Prior Knowledge in Regression Analysis. *Biometrika*, 51(1/2), 219-230.
- Tukey, J.W. 1960. A survey of sampling from contaminated distributions. *Contributions to Probability and Statistics*, Stanford University Press, 511, Stanford.

- Valdez, E.A. 2005. Probability Transforms with Elliptical Generators. The 36th International ASTIN Colloquium.
- Valdez, E. A. And Chernih, A. 2003. Wang's capital allocation formula for elliptically contoured distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 33, 517–532.
- Vallejos, C.A. and Steel, M.F.J. 2013. On posterior propriety for the Student-t linear regression model under Jeffreys priors. Department of Statistics, University of Warwick, arXiv:1311.1454v2 stat.ME.
- Wackerly, D., Mendenhall, W. and Scheaffer, R.L. 2008. *Mathematical Statistics with Applications* (7 ed.). Belmont, CA, USA: Thomson Higher Education.
- Wesolowsky, G.O. 1981. A new descent algorithm for the least absolute value regression problem. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, B10(5), 479-491.
- Yohai, V.J. 1987. High breakdown point and high efficiency robust estimates for regression. *The Annals of Statistics*, 15(20), 642-656.
- Zellner, A. 1975. Bayesian Analysis of Regression Error Terms. *Journal of the American Statistical Association*, 70(349), 138-144.
- Zellner, A. 1976. Bayesian and non-Bayesian analysis on the regression model with multivariate Student-t error terms. *Journal of the American Statistical Association*, 71, 400-405.

EKLER

EK 1 N-NI, t-NI, L-NI ve RN-NI Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması için Rv.3.4.4 ve WinBUGS Programlarında Yazılmış Olan Program Kodları

EK 2 N-N, N-t, N-L, t-N, L-N, RN-N, t-t, t-L, L-t, L-L, RN-t ve RN-L Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması için Rv.3.4.4 ve WinBUGS Programlarında Yazılmış Olan Program Kodları

EK 3 Gerçek Veri Uygulamasında Kullanılan Veri Setleri



EK 1 N-NI, t-NI, L-NI ve RN-NI Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması için Rv.3.4.4 ve WinBUGS Programlarında Yazılmış Olan Program Kodları

Bölüm 3 ve Bölüm 4’de verilen simülasyon çalışmasında yer alan üç bağımsız değişken içeren N-NI, t-NI, L-NI ve RN-NI modellerine ilişkin bilgisayar program kodları

‘N-NI’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```
set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x – ), case:3 ( y – ), case:4 ( x – y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

x1<-runif(n,-5,5)
x2<-runif(n,-5,5)
x3<-runif(n,-5,5)

y<-1+x1+x2+x3+rnorm(n)

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
      y<-y
      x1<-x1
      x2<-x2
      x3<-x3
    }else{if(case==2){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
      x1[j]<-x1[j]+c
      x2[j]<-x2[j]+c
      x3[j]<-x3[j]+c}
    }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
      y[j]<-y[j]+c}
    }else{
```

```

# k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
(CASE4)
      m<-trunc((k+1)/2)
      for(j in 1:m){
        y[j]<-y[j]+c
        s<-j+m
        x1[s]<-x1[s]+c
        x2[s]<-x2[s]+c
        x3[s]<-x3[s]+c}
      }
    }
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

Normal.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregNormal3.odc",parameters=c("beta0","beta1","beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory="C:/Program Files/WinBUGS14", codaPkg=FALSE)

beta0[i]=Normal.sim$summary[1]
beta1[i]=Normal.sim$summary[2]
beta2[i]=Normal.sim$summary[3]
beta3[i]=Normal.sim$summary[4]
tau[i]=Normal.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(Normal.sim)
}
rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.tau<-sqrt(var(tau)+((mean(tau)-1)^2))
output<-c(mean(tau),rmse.tau)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

N-NI modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregNormal3.odc) :

```
model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ dnorm(mu[i], tau)
    mu[i] <- beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1 ~ dnorm(0, .0001)
  beta2 ~ dnorm(0, .0001)
  beta3 ~ dnorm(0, .0001)

  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
}
```

‘t-NI’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```
set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
v<-3     # Serbestlik derecesi
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
phi<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

  x1<-runif(n,-5,5)
  x2<-runif(n,-5,5)
  x3<-runif(n,-5,5)

  y<-1+x1+x2+x3+rt(n,v)

  if(case==1){
    # aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
    x3<-x3
  }
}
```

```

    }else{if(case==2){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
      x1[j]<-x1[j]+c
      x2[j]<-x2[j]+c
      x3[j]<-x3[j]+c}
    }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
      y[j]<-y[j]+c}
    }else{
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
#   (CASE4)
      m<-trunc((k+1)/2)
      for(j in 1:m){
        y[j]<-y[j]+c
        s<-j+m
        x1[s]<-x1[s]+c
        x2[s]<-x2[s]+c
        x3[s]<-x3[s]+c}
      }
    }
  }
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,phi=1)}

t.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregStudentt3.odc",parameters=c("beta0","beta1",
,"beta2","beta3","phi"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory="
C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=t.sim$summary[1]
beta1[i]=t.sim$summary[2]
beta2[i]=t.sim$summary[3]
beta3[i]=t.sim$summary[4]

phi[i]=t.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/phi[i])
print(t.sim)
}
rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)

```

```

rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.phi<-sqrt(var(phi)+((mean(phi)-1)^2))
output<-c(mean(phi),rmse.phi)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

t-NI modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregStudentt3.odc) :

```

model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ dnorm(mu[i], prec[i] )
    mu[i] <- beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
    prec[i] <-phi*lambda[i]
    lambda[i] ~ dgamma(1.5,1.5)
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1~ dnorm(0 ,.0001)
  beta2~ dnorm(0 ,.0001)
  beta3~ dnorm(0 ,.0001)

  phi ~ dgamma(0.0001,0.0001)
}

```

‘L-NI’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
library(VGAM)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

```

```

x1<-runif(n,-5,5)
x2<-runif(n,-5,5)
x3<-runif(n,-5,5)
y<-1+x1+x2+x3+rlaplace(n,0,sqrt(2))

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
    x3<-x3
} else { if(case==2){ for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
    x1[j]<-x1[j]+c
    x2[j]<-x2[j]+c
    x3[j]<-x3[j]+c}
} else { if(case==3){ for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
    y[j]<-y[j]+c}
} else {
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
#   (CASE4)
    m<-trunc((k+1)/2)
    for(j in 1:m){
        y[j]<-y[j]+c
        s<-j+m
        x1[s]<-x1[s]+c
        x2[s]<-x2[s]+c
        x3[s]<-x3[s]+c}
    }
}
}
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

laplace.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregLaplace3.odc",parameters=c("beta0",
"beta1","beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,
bugs.directory="C:/Program Files/WinBUGS14", codaPkg=FALSE)

beta0[i]=laplace.sim$summary[1]
beta1[i]=laplace.sim$summary[2]
beta2[i]=laplace.sim$summary[3]
beta3[i]=laplace.sim$summary[4]
tau[i]=laplace.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(laplace.sim)
}

```

```

rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

L-NI modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregLaplace3.odc) :

```

model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ ddexp(mu[i],tau)
    mu[i] <- beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
  }
  beta0 ~ dnorm(0, .0001)
  beta1 ~ dnorm(0, .0001)
  beta2 ~ dnorm(0, .0001)
  beta3 ~ dnorm(0, .0001)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
}

```

‘RN-NI’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
library(mixtools)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit
a<-0.05
b<-2

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)

```

```

beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

###Simülasyondan önce çağırılması gereken fonksiyon###

###rrnov ###

# Kullanıcı tarafından tanımlanan “a” ve “b” parametreli RN dağılımından rasgele
değerler üretir.
# ”mixtools” paketinin yüklenmesi gerekmektedir.
# Örnek kullanım, err<-rrnov(x0=0,a=0.3,b=1,10000,5000)

rrnov<-function(x0,a,b,iter,burnin){
  nsim<-iter+burnin
  xvec<-numeric()
  sim<-numeric()
  x<-x0
  xvec[1]<-x0
  count<-0

  #Bağımsız Metropolis-Hasting (envelope=0.15*N(0,1)+0.85*N(0, sigma=3.2))

  for(j in 2:nsim){

    x.new<-rnormmix(1, c(0.15,0.85), c(0,0), c(1,3.2)) #Öneri dağılımı: İki Normalin
                                                         ölçek karması

    fx<-exp(-(1/(b*a^(2/b))))*pgamma(a*(abs(x)^b), 2/b)*gamma(2/b))
    fx.new<- exp(-(1/(b*a^(2/b))))*pgamma(a*(abs(x.new)^b), 2/b)*gamma(2/b))
    alpha<-min((fx.new/fx),1)
    u<-runif(1,0,1)
    if(u<=alpha) x<-x.new
    xvec<-c(xvec,x)
    if(j>burnin&&xvec[j]!=xvec[j-1]) {
      count<-count+1
      sim<-c(sim,xvec[j])
    }
  }
  accep.rate<-count/(nsim-burnin)
  return(list(chain=xvec,data=sim,rate=accep.rate))
}
err<-rrnov(0,a,b,20000,5000)

for(i in 1:sim){

  x1<-runif(n,-5,5)
  x2<-runif(n,-5,5)

```



```

x3<-runif(n,-5,5)
rand<-runif(n,1,length(err$data))
y<-1+x1+x2+x3+err$data[rand]

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
    x3<-x3
    }else{if(case==2){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
        x1[j]<-x1[j]+c
        x2[j]<-x2[j]+c
        x3[j]<-x3[j]+c}
    }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
        y[j]<-y[j]+c}
    }else{
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
    (CASE4)
        m<-trunc((k+1)/2)
        for(j in 1:m){
            y[j]<-y[j]+c
            s<-j+m
            x1[s]<-x1[s]+c
            x2[s]<-x2[s]+c
            x3[s]<-x3[s]+c}
        }
    }
}
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

RN.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregRN3.odc",parameters=c("beta0","beta1","
beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory="C:/
Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=RN.sim$summary[1]
beta1[i]=RN.sim$summary[2]
beta2[i]=RN.sim$summary[3]
beta3[i]=RN.sim$summary[4]
tau[i]=RN.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(RN.sim)
}

```

```

rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.tau<-sqrt(var(tau)+((mean(tau)-1)^2))
output<-c(mean(tau),rmse.tau)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

RN-NI modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregRN3.odc) :

```

model{
  C <- 10000
  a<-0.05
  for (i in 1:n) {
    zeros[i] <- 0
    zeros[i] ~ dpois( zeros.mean[i])
    zeros.mean[i] <- -l[i] + C
    l[i]<-(-log(1/sqrt(tau)))-(1/(2*a))*(1-exp(-a*(pow(abs((y[i]-mu[i]))/(1/sqrt(tau))),2
    ))))
    mu[i]<- beta0 + beta1*x[i,1] + beta2*x[i,2] + beta3*x[i,3]
  }
  beta0 ~ dnorm(0,0.0001)
  beta1 ~ dnorm(0,0.0001)
  beta2 ~ dnorm(0,0.0001)
  beta3 ~ dnorm(0,0.0001)
  tau ~ dgamma( 0.001, 0.001)
}

```

EK 2 N-N, N-t, N-L, t-N, L-N, RN-N, t-t, t-L, L-t, L-L, RN-t ve RN-L Regresyon Modellerinin Karşılaştırılması için Rv.3.4.4 ve WinBUGS Programlarında Yazılmış Olan Program Kodları

Bölüm 3 ve Bölüm 4’de verilen simülasyon çalışmasında yer alan üç bağımsız değişken içeren N-N, N-t, N-L, t-N, L-N, RN-N, t-t, t-L, L-t, L-L, RN-t ve RN-L modellerine ilişkin bilgisayar program kodları:

‘N-N’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```
set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x – ), case:3 ( y – ), case:4 ( x – y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

x1<-runif(n,-5,5)
x2<-runif(n,-5,5)
x3<-runif(n,-5,5)
y<-1+x1+x2+x3+rnorm(n)

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
      y<-y
      x1<-x1
      x2<-x2
      x3<-x3
    }else{if(case==2){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
      x1[j]<-x1[j]+c
      x2[j]<-x2[j]+c
      x3[j]<-x3[j]+c}
    }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
      y[j]<-y[j]+c}
    }else{
```

```

#      k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
      (CASE4)
      m<-trunc((k+1)/2)
      for(j in 1:m){
        y[j]<-y[j]+c
        s<-j+m
        x1[s]<-x1[s]+c
        x2[s]<-x2[s]+c
        x3[s]<-x3[s]+c}
      }
    }
  x<-cbind(x1,x2,x3)
  data=list("y","x","n")
  inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

  NN.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregNN3.odc",parameters=c("beta0","beta1","
  beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory="C:/
  Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

  beta0[i]=NN.sim$summary[1]
  beta1[i]=NN.sim$summary[2]
  beta2[i]=NN.sim$summary[3]
  beta3[i]=NN.sim$summary[4]
  tau[i]=NN.sim$summary[5]
  std[i]=sqrt(1/tau[i])
  print(NN.sim)
}
rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.tau<-sqrt(var(tau)+((mean(tau)-1)^2))
output<-c(mean(tau),rmse.tau)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

N-N modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregNN3.odc):

```
model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ dnorm(mu[i], tau)
    mu[i] <- beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1 ~ dnorm(0,1)
  beta2 ~ dnorm(0,1)
  beta3 ~ dnorm(0,1)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
}
```

‘N-t’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```
set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

  x1<-runif(n,-5,5)
  x2<-runif(n,-5,5)
  x3<-runif(n,-5,5)
  y<-1+x1+x2+x3+rnorm(n)

  if(case==1){
    # aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
    x3<-x3
  }else{if(case==2){for(j in 1:k){
    # k tane aykırı gözlem( x - yönünde)(CASE2)
    x1[j]<-x1[j]+c
```

```

        x2[j]<-x2[j]+c
        x3[j]<-x3[j]+c}
    }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
        y[j]<-y[j]+c}
    }else{
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
    (CASE4)
        m<-trunc((k+1)/2)
        for(j in 1:m){
            y[j]<-y[j]+c
            s<-j+m
            x1[s]<-x1[s]+c
            x2[s]<-x2[s]+c
            x3[s]<-x3[s]+c}
        }
    }
}

x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

Nt.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregNt3.odc",parameters=c("beta0","beta1",
"beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory=
"C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=Nt.sim$summary[1]
beta1[i]=Nt.sim$summary[2]
beta2[i]=Nt.sim$summary[3]
beta3[i]=Nt.sim$summary[4]
tau[i]=Nt.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(Nt.sim)
}

rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)

```

```
rmse.tau<-sqrt(var(tau)+((mean(tau)-1)^2))
output<-c(mean(tau),rmse.tau)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)
```

N-t modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregNt3.odc):

```
model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ dnorm(mu[i],tau)
    mu[i] <-beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1 ~ dt(0,1,3)
  beta2 ~ dt(0,1,3)
  beta3 ~ dt(0,1,3)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
}
```

‘N-L’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```
set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

x1<-runif(n,-5,5)
x2<-runif(n,-5,5)
x3<-runif(n,-5,5)
y<-1+x1+x2+x3+rnorm(n)

if(case==1){
```

```

# aykırı gözlem olmaması durumu
  y<-y
  x1<-x1
  x2<-x2
  x3<-x3
} else { if (case==2) { for (j in 1:k) {
# k tane aykırı gözlem ( x – yönünde) (CASE2)
  x1[j]<-x1[j]+c
  x2[j]<-x2[j]+c
  x3[j]<-x3[j]+c
} else { if (case==3) { for (j in 1:k) {
# k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
  y[j]<-y[j]+c
} else {
# k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
# (CASE4)
  m<-trunc((k+1)/2)
  for (j in 1:m) {
    y[j]<-y[j]+c
    s<-j+m
    x1[s]<-x1[s]+c
    x2[s]<-x2[s]+c
    x3[s]<-x3[s]+c
  }
}
}
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

Nlaplace.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregNL3.odc",parameters=c("beta0",
"beta1","beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,
bugs.directory="C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=Nlaplace.sim$summary[1]
beta1[i]=Nlaplace.sim$summary[2]
beta2[i]=Nlaplace.sim$summary[3]
beta3[i]=Nlaplace.sim$summary[4]
tau[i]=Nlaplace.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(Nlaplace.sim)
}
rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)

```



```

rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.tau<-sqrt(var(tau)+((mean(tau)-1)^2))
output<-c(mean(tau),rmse.tau)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

N-L modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregNL3.odc):

```

model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ dnorm(mu[i],tau)
    mu[i] <-beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1 ~ ddexp(0,1)
  beta2 ~ ddexp(0,1)
  beta3 ~ ddexp(0,1)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
}

```

‘t-N’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
v<-3     #Serbestlik derecesi
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
phi<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

```

```

x1<-runif(n,-5,5)
x2<-runif(n,-5,5)
x3<-runif(n,-5,5)
y<-1+x1+x2+x3+rt(n,v)

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
      y<-y
      x1<-x1
      x2<-x2
      x3<-x3
    }else{if(case==2){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
      x1[j]<-x1[j]+c
      x2[j]<-x2[j]+c
      x3[j]<-x3[j]+c}
    }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
      y[j]<-y[j]+c}
    }else{
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
#   (CASE4)
      m<-trunc((k+1)/2)
      for(j in 1:m){
        y[j]<-y[j]+c
        s<-j+m
        x1[s]<-x1[s]+c
        x2[s]<-x2[s]+c
        x3[s]<-x3[s]+c}
      }
    }
  }
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,phi=1)}

tN.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregtN3.odc",parameters=c("beta0","beta1",
"beta2","beta3","phi"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory=
"C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=tN.sim$summary[1]
beta1[i]=tN.sim$summary[2]
beta2[i]=tN.sim$summary[3]
beta3[i]=tN.sim$summary[4]
phi[i]=tN.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/phi[i])
print(tN.sim)
}

```

```

rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.phi<-sqrt(var(phi)+((mean(phi)-1)^2))
output<-c(mean(phi),rmse.phi)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

t-N modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregtN3.odc):

```

model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ dnorm(mu[i],prec[i])
    mu[i] <- beta0+beta1*x[i,1]+beta2*x[i,2]+beta3*x[i,3]
    lambda[i] ~ dgamma(1.5,1.5)
    prec[i] <-phi*lambda[i]
  }
  phi ~ dgamma(0.0001,0.0001)
  beta0 ~ dnorm(0,0.0001)
  beta1 ~ dnorm(0,1)
  beta2 ~ dnorm(0,1)
  beta3 ~ dnorm(0,1)
}

```

‘L-N’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
library(VGAM)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

```

```

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

x1<-runif(n,-5,5)
x2<-runif(n,-5,5)
x3<-runif(n,-5,5)
y<-1+x1+x2+x3+rlaplace(n,0,sqrt(2))

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
    x3<-x3
  }else{if(case==2){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
    x1[j]<-x1[j]+c
    x2[j]<-x2[j]+c
    x3[j]<-x3[j]+c}
  }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
    y[j]<-y[j]+c}
  }else{
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
#   (CASE4)
    m<-trunc((k+1)/2)
    for(j in 1:m){
      y[j]<-y[j]+c
      s<-j+m
      x1[s]<-x1[s]+c
      x2[s]<-x2[s]+c
      x3[s]<-x3[s]+c}
    }
  }
}
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

LN.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregLN3.odc",parameters=c("beta0","beta1",
"beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory=
"C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

```

```

beta0[i]=LN.sim$summary[1]
beta1[i]=LN.sim$summary[2]
beta2[i]=LN.sim$summary[3]
beta3[i]=LN.sim$summary[4]
tau[i]=LN.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(LN.sim)
}
rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.tau<-sqrt(var(tau)+((mean(tau)-1)^2))
output<-c(mean(tau),rmse.tau)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

L-N modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregLN3.odc):

```

model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ ddexp(mu[i],tau)
    mu[i] <- beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1 ~ dnorm(0,1)
  beta2 ~ dnorm(0,1)
  beta3 ~ dnorm(0,1)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
}

```

‘RN-N’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
library(mixtools)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.

```

```

n<-30      # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1       # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2     # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100     # Eklenen sabit
a<-0.05
b<-2

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

####Simülasyondan önce çağırılması gereken fonksiyon####

####rrnov ###

# Kullanıcı tarafından tanımlanan “a” ve “b” parametreli RN dağılımından rasgele
değerler üretir.
# ”mixtools” paketinin yüklenmesi gerekmektedir.
# Örnek kullanım, err<-rrnov(x0=0,a=0.3,b=1,10000,5000)

rrnov<-function(x0,a,b,iter,burnin){
nsim<-iter+burnin
xvec<-numeric()
sim<-numeric()
x<-x0
xvec[1]<-x0
count<-0

#Bağımsız Metropolis-Hasting (envelope=0.15*N(0,1)+0.85*N(0, sigma=3.2))

for(j in 2:nsim){

  x.new<-rnormmix(1, c(0.15,0.85), c(0,0), c(1,3.2))  #Öneri dağılımı: İki Normalin
                                                         ölçek karması

  fx<-exp(-(1/(b*a^(2/b)))*pgamma(a*(abs(x)^b), 2/b)*gamma(2/b))
  fx.new<- exp(-(1/(b*a^(2/b)))*pgamma(a*(abs(x.new)^b), 2/b)*gamma(2/b))
  alpha<-min((fx.new/fx),1)
  u<-runif(1,0,1)
  if(u<=alpha) x<-x.new
  xvec<-c(xvec,x)
  if(j>burnin&&xvec[j]!=xvec[j-1]) {
    count<-count+1
    sim<-c(sim,xvec[j])
  }
}

```

```

    }
    accep.rate<-count/(nsim-burnin)
    return(list(chain=xvec,data=sim,rate=accep.rate))
  }
  err<-rrnov(0,a,b,20000,5000)

  for(i in 1:sim){

    x1<-runif(n,-5,5)
    x2<-runif(n,-5,5)
    x3<-runif(n,-5,5)
    rand<-runif(n,1,length(err$data))
    y<-1+x1+x2+x3+err$data[rand]

    if(case==1){
      #   aykırı gözlem olmaması durumu
        y<-y
        x1<-x1
        x2<-x2
        x3<-x3
      }else{if(case==2){for(j in 1:k){
      #   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
        x1[j]<-x1[j]+c
        x2[j]<-x2[j]+c
        x3[j]<-x3[j]+c}
      }else{if(case==3){for(j in 1:k){
      #   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
        y[j]<-y[j]+c}
      }else{
      #   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
      (CASE4)
        m<-trunc((k+1)/2)
        for(j in 1:m){
          y[j]<-y[j]+c
          s<-j+m
          x1[s]<-x1[s]+c
          x2[s]<-x2[s]+c
          x3[s]<-x3[s]+c}
        }
      }
    }

    x<-cbind(x1,x2,x3)
    data=list("y","x","n")
    inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}
  }

```

```
RNN.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregRNN3.odc",parameters=c("beta0","beta
1","beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory=
"C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)
```

```
beta0[i]=RNN.sim$summary[1]
beta1[i]=RNN.sim$summary[2]
beta2[i]=RNN.sim$summary[3]
beta3[i]=RNN.sim$summary[4]
tau[i]=RNN.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(RNN.sim)
}
```

```
rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.tau<-sqrt(var(tau)+((mean(tau)-1)^2))
output<-c(mean(tau),rmse.tau)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)
```

RN-N modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregRNN3.odc):

```
model{
  C <- 10000
  a<-0.05
  for (i in 1:n) {
    zeros[i] <- 0
    zeros[i] ~ dpois( zeros.mean[i])
    zeros.mean[i] <- -l[i] + C
    l[i] <- (-log(1/sqrt(tau)))-(1/(2*a))*(1-exp(-a*(pow(abs((y[i]- mu[i])/(1/sqrt(tau))),
2))))
    mu[i]<- beta0 + beta1*x[i,1] + beta2*x[i,2] + beta3*x[i,3]
  }
  beta0 ~ dnorm(0,0.0001)
  beta1 ~ dnorm(0,1)
```



```

    beta2 ~ dnorm(0,1)
    beta3 ~ dnorm(0,1)
    tau ~ dgamma( 0.001, 0.001)
}

```

‘t-t’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
v<-3     # Serbestlik derecesi
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x – ), case:3 ( y – ), case:4 ( x – y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
phi<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

x1<-runif(n,-5,5)
x2<-runif(n,-5,5)
x3<-runif(n,-5,5)
y<-1+x1+x2+x3+rt(n,v)

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
    x3<-x3
  }else{if(case==2){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
    x1[j]<-x1[j]+c
    x2[j]<-x2[j]+c
    x3[j]<-x3[j]+c}
  }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
    y[j]<-y[j]+c}
  }else{
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
#   (CASE4)

```

```

        m<-trunc((k+1)/2)
        for(j in 1:m){
            y[j]<-y[j]+c
            s<-j+m
            x1[s]<-x1[s]+c
            x2[s]<-x2[s]+c
            x3[s]<-x3[s]+c}
        }
    }
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,phi=1)}

tt.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregtt3.odc",parameters=c("beta0","beta1","beta
2","beta3","phi"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory="C:/
Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=tt.sim$summary[1]
beta1[i]=tt.sim$summary[2]
beta2[i]=tt.sim$summary[3]
beta3[i]=tt.sim$summary[4]
phi[i]=tt.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/phi[i])
print(tt.sim)
}

rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.phi<-sqrt(var(phi)+((mean(phi)-1)^2))
output<-c(mean(phi),rmse.phi)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

t-t modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregtt3.odc):

```
model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ dnorm(mu[i], prec[i] )
    mu[i] <- beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
    prec[i] <-phi*lambda[i]
    lambda[i] ~ dgamma(1.5,1.5)
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1~ dt(0,1,3)
  beta2~ dt(0,1,3)
  beta3~ dt(0,1,3)
  phi ~ dgamma(0.0001,0.0001)
}
```

‘t-L’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```
set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
v<-3     #Serbestlik derecesi
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit
```

```
beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
phi<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)
```

```
for (i in 1:sim) {
```

```
  x1<-runif(n,-5,5)
  x2<-runif(n,-5,5)
  x3<-runif(n,-5,5)
```

```
  y<-1+x1+x2+x3+rt(n,v)
```

```
  if(case==1){
    # aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
```

```

        x3<-x3
    }else{if(case==2){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
        x1[j]<-x1[j]+c
        x2[j]<-x2[j]+c
        x3[j]<-x3[j]+c}
    }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
        y[j]<-y[j]+c}
    }else{
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
#   (CASE4)
        m<-trunc((k+1)/2)
        for(j in 1:m){
            y[j]<-y[j]+c
            s<-j+m
            x1[s]<-x1[s]+c
            x2[s]<-x2[s]+c
            x3[s]<-x3[s]+c}
        }
    }
}
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,phi=1)}

tL.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregtL3.odc",parameters=c("beta0",
"beta1","beta2","beta3","phi"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.
directory="C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=tL.sim$summary[1]
beta1[i]=tL.sim$summary[2]
beta2[i]=tL.sim$summary[3]
beta3[i]=tL.sim$summary[4]
phi[i]=tL.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/phi[i])
print(tL.sim)
}

rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)

```

```

rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.phi<-sqrt(var(phi)+((mean(phi)-1)^2))
output<-c(mean(phi),rmse.phi)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

t-L modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregtL3.odc):

```

model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ dnorm(mu[i], prec[i] )
    mu[i] <- beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
    prec[i] <-phi*lambda[i]
    lambda[i] ~ dgamma(1.5,1.5)
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1~ ddexp(0, 1)
  beta2~ ddexp(0, 1)
  beta3~ ddexp(0, 1)
  phi ~ dgamma(0.0001,0.0001)
}

```

‘L-t’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
library(VGAM)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

for (i in 1:sim) {

x1<-runif(n,-5,5)

```

```

x2<-runif(n,-5,5)
x3<-runif(n,-5,5)
y<-1+x1+x2+x3+rlaplace(n,0,sqrt(2))

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
    x3<-x3
} else { if(case==2){ for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
    x1[j]<-x1[j]+c
    x2[j]<-x2[j]+c
    x3[j]<-x3[j]+c}
} else { if(case==3){ for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
    y[j]<-y[j]+c}
} else {
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
#   (CASE4)
    m<-trunc((k+1)/2)
    for(j in 1:m){
        y[j]<-y[j]+c
        s<-j+m
        x1[s]<-x1[s]+c
        x2[s]<-x2[s]+c
        x3[s]<-x3[s]+c}
    }
}
}
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

Lt.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregLt3.odc",parameters=c("beta0","beta1","beta2",
"beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory="C:/
Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=laplacet.sim$summary[1]
beta1[i]=laplacet.sim$summary[2]
beta2[i]=laplacet.sim$summary[3]
beta3[i]=laplacet.sim$summary[4]
tau[i]=laplacet.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(laplacet.sim)
}
rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))

```

```

output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

L-t modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregLt3.odc):

```

model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ ddexp(mu[i],tau)
    mu[i] <- beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1 ~ dt(0,1,3)
  beta2 ~ dt(0,1,3)
  beta3 ~ dt(0,1,3)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
}

```

‘L-L’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
library(VGAM)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

```

```

for (i in 1:sim) {

x1<-runif(n,-5,5)
x2<-runif(n,-5,5)
x3<-runif(n,-5,5)
y<-1+x1+x2+x3+rlaplace(n,0,sqrt(2))

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
    x3<-x3
  }else{if(case==2){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
    x1[j]<-x1[j]+c
    x2[j]<-x2[j]+c
    x3[j]<-x3[j]+c}
  }else{if(case==3){for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
    y[j]<-y[j]+c}
  }else{
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
#   (CASE4)
    m<-trunc((k+1)/2)
    for(j in 1:m){
      y[j]<-y[j]+c
      s<-j+m
      x1[s]<-x1[s]+c
      x2[s]<-x2[s]+c
      x3[s]<-x3[s]+c}
    }
  }
}
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

LL.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregLL3.odc",parameters=c("beta0","beta1",
"beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory=
"C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=LL.sim$summary[1]
beta1[i]=LL.sim$summary[2]
beta2[i]=LL.sim$summary[3]
beta3[i]=LL.sim$summary[4]
tau[i]=LL.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])

```



```

print(LL.sim)
}
rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

L-L modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregLL3.odc):

```

model {
  for (i in 1:n) {
    y[i] ~ ddexp(mu[i],tau)
    mu[i] <- beta0+x[i,1]*beta1+x[i,2]*beta2+x[i,3]*beta3
  }
  beta0 ~ dnorm(0,.0001)
  beta1 ~ ddexp(0,1)
  beta2 ~ ddexp(0,1)
  beta3 ~ ddexp(0,1)
  tau ~ dgamma(0.001,0.001)
}

```

‘RN-t’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(R2WinBUGS)
library(mixtools)
sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.
k<-1     # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2  # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100   # Eklenen sabit
a<-0.05
b<-2

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)

```

```

beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

###Simülasyondan önce çağırılması gereken fonksiyon###

###rrnov ###

# Kullanıcı tarafından tanımlanan “a” ve “b” parametrelili RN dağılımından rasgele
değerler üretir.
# ”mixtools” paketinin yüklenmesi gerekmektedir.
# Örnek kullanım, err<-rrnov(x0=0,a=0.3,b=1,10000,5000)

rrnov<-function(x0,a,b,iter,burnin){
  nsim<-iter+burnin
  xvec<-numeric()
  sim<-numeric()
  x<-x0
  xvec[1]<-x0
  count<-0

  #Bağımsız Metropolis-Hasting (envelope=0.15*N(0,1)+0.85*N(0, sigma=3.2))

  for(j in 2:nsim){

    x.new<-rnormmix(1, c(0.15,0.85), c(0,0), c(1,3.2)) #Öneri dağılımı: İki Normalin
                                                         ölçek karması

    fx<-exp(-(1/(b*a^(2/b)))*pgamma(a*(abs(x)^b), 2/b)*gamma(2/b))
    fx.new<- exp(-(1/(b*a^(2/b)))*pgamma(a*(abs(x.new)^b), 2/b)*gamma(2/b))
    alpha<-min((fx.new/fx),1)
    u<-runif(1,0,1)
    if(u<=alpha) x<-x.new
    xvec<-c(xvec,x)
    if(j>burnin&&xvec[j]!=xvec[j-1]) {
      count<-count+1
      sim<-c(sim,xvec[j])
    }
  }
  accep.rate<-count/(nsim-burnin)
  return(list(chain=xvec,data=sim,rate=accep.rate))
}
err<-rrnov(0,a,b,20000,5000)

for(i in 1:sim){
  x1<-runif(n,-5,5)
  x2<-runif(n,-5,5)

```

```

x3<-runif(n,-5,5)

rand<-runif(n,1,length(err$data))
y<-1+x1+x2+x3+err$data[rand]

if(case==1){
#   aykırı gözlem olmaması durumu
    y<-y
    x1<-x1
    x2<-x2
    x3<-x3
} else { if(case==2){ for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
    x1[j]<-x1[j]+c
    x2[j]<-x2[j]+c
    x3[j]<-x3[j]+c}
} else { if(case==3){ for(j in 1:k){
#   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
    y[j]<-y[j]+c}
} else {
#   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
#   (CASE4)
    m<-trunc((k+1)/2)
    for(j in 1:m){
        y[j]<-y[j]+c
        s<-j+m
        x1[s]<-x1[s]+c
        x2[s]<-x2[s]+c
        x3[s]<-x3[s]+c}
    }
}
}
x<-cbind(x1,x2,x3)
data=list("y","x","n")
inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

RNt.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregRNt3.odc",parameters=c("beta0","beta1",
"beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory=
"C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)

beta0[i]=RNt.sim$summary[1]
beta1[i]=RNt.sim$summary[2]
beta2[i]=RNt.sim$summary[3]
beta3[i]=RNt.sim$summary[4]
tau[i]=RNt.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(RNt.sim)
}

```

```

rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.tau<-sqrt(var(tau)+((mean(tau)-1)^2))
output<-c(mean(tau),rmse.tau)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

RN-t modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregRNt3.odc):

```

model{
  C <- 10000
  a<-0.05
  for (i in 1:n) {
    zeros[i] <- 0
    zeros[i] ~ dpois( zeros.mean[i])
    zeros.mean[i] <- -l[i] + C
    l[i] <- (-log(1/sqrt(tau)))-(1/(2*a))*(1-exp(-a*(pow(abs((y[i]- mu[i])/(1/sqrt(tau))),
      2))))
    mu[i]<- beta0 + beta1*x[i,1] + beta2*x[i,2] + beta3*x[i,3]
  }
  beta0 ~ dnorm(0,0.0001)
  beta1 ~ dt(0,1,3)
  beta2 ~ dt(0,1,3)
  beta3 ~ dt(0,1,3)
  tau ~ dgamma( 0.001, 0.001)
}

```

‘RN-L’ modeli için R2WinBUGS Kodu:

```

set.seed(112)
library(mixtools)
library(R2WinBUGS)

```

```

sim<-100 # Simülasyon sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
n<-30    # Örneklem genişliği kullanıcı tarafından belirlenecektir.

```

```

k<-1      # Aykırı gözlem sayısı kullanıcı tarafından belirlenecektir.
case<-2    # Aykırı gözlem yönü (case:2 ( x - ), case:3 ( y - ), case:4 ( x - y ) )
c<-100     # Eklenen sabit
a<-0.05
b<-2

beta0<-numeric(sim)
beta1<-numeric(sim)
beta2<-numeric(sim)
beta3<-numeric(sim)
tau<-numeric(sim)
std<-numeric(sim)

###Simülasyondan önce çağırılması gereken fonksiyon###

###rrnov ###

# Kullanıcı tarafından tanımlanan “a” ve “b” parametreli RN dağılımından rasgele
değerler üretir.
# ”mixtools” paketinin yüklenmesi gerekmektedir.
# Örnek kullanım, err<-rrnov(x0=0,a=0.3,b=1,10000,5000)

rrnov<-function(x0,a,b,iter,burnin){
  nsim<-iter+burnin
  xvec<-numeric()
  sim<-numeric()
  x<-x0
  xvec[1]<-x0
  count<-0

  #Bağımsız Metropolis-Hasting (envelope=0.15*N(0,1)+0.85*N(0, sigma=3.2))

  for(j in 2:nsim){

    x.new<-rnormmix(1, c(0.15,0.85), c(0,0), c(1,3.2))    #Öneri dağılımı: İki Normalin
                                                            ölçek karması

    fx<-exp(-(1/(b*a^(2/b))))*pgamma(a*(abs(x)^b), 2/b)*gamma(2/b)
    fx.new<- exp(-(1/(b*a^(2/b))))*pgamma(a*(abs(x.new)^b), 2/b)*gamma(2/b)
    alpha<-min((fx.new/fx),1)
    u<-runif(1,0,1)
    if(u<=alpha) x<-x.new
    xvec<-c(xvec,x)
    if(j>burnin&&xvec[j]!=xvec[j-1]) {
      count<-count+1
      sim<-c(sim,xvec[j])
    }
  }
}

```

```

accep.rate<-count/(nsim-burnin)
return(list(chain=xvec,data=sim,rate=accep.rate))
}
err<-rrnov(0,a,b,20000,5000)

for(i in 1:sim){

  x1<-runif(n,-5,5)
  x2<-runif(n,-5,5)
  x3<-runif(n,-5,5)
  rand<-runif(n,1,length(err$data))
  y<-1+x1+x2+x3+err$data[rand]

  if(case==1){
    #   aykırı gözlem olmaması durumu
      y<-y
      x1<-x1
      x2<-x2
      x3<-x3
    }else{if(case==2){for(j in 1:k){
    #   k tane aykırı gözlem ( x – yönünde)(CASE2)
      x1[j]<-x1[j]+c
      x2[j]<-x2[j]+c
      x3[j]<-x3[j]+c}
    }else{if(case==3){for(j in 1:k){
    #   k tane aykırı gözlem ( y – yönünde) (CASE3)
      y[j]<-y[j]+c}
    }else{
    #   k+1 tane aykırı gözlem ((k+1)/2 tane y – yönünde ve (k+1)/2 tane x – yönünde)
    (CASE4)
      m<-trunc((k+1)/2)
      for(j in 1:m){
        y[j]<-y[j]+c
        s<-j+m
        x1[s]<-x1[s]+c
        x2[s]<-x2[s]+c
        x3[s]<-x3[s]+c}
      }
    }
  }
  x<-cbind(x1,x2,x3)
  data=list("y","x","n")
  inits=function() {list(beta0=1,beta1=1,beta2=1,beta3=1,tau=1)}

  RNL.sim=bugs(data,inits,model.file="C:/linregRNL3.odc",parameters=c("beta0","beta1",
  "beta2","beta3","tau"),n.chains=1,n.iter=1000,n.burnin=100,n.thin=1,bugs.directory="
  C:/Program Files/WinBUGS14",codaPkg=FALSE)
  beta0[i]=RNL.sim$summary[1]

```

```

beta1[i]=RNL.sim$summary[2]
beta2[i]=RNL.sim$summary[3]
beta3[i]=RNL.sim$summary[4]
tau[i]=RNL.sim$summary[5]
std[i]=sqrt(1/tau[i])
print(RNL.sim)
}
rmse.beta0<-sqrt(var(beta0)+((mean(beta0)-1)^2))
output<-c(mean(beta0),rmse.beta0)
print(output)
rmse.beta1<-sqrt(var(beta1)+((mean(beta1)-1)^2))
output<-c(mean(beta1),rmse.beta1)
print(output)
rmse.beta2<-sqrt(var(beta2)+((mean(beta2)-1)^2))
output<-c(mean(beta2),rmse.beta2)
print(output)
rmse.beta3<-sqrt(var(beta3)+((mean(beta3)-1)^2))
output<-c(mean(beta3),rmse.beta3)
print(output)
rmse.tau<-sqrt(var(tau)+((mean(tau)-1)^2))
output<-c(mean(tau),rmse.tau)
print(output)
rmse.std<-sqrt(var(std)+((mean(std)-1)^2))
output<-c(mean(std),rmse.std)
print(output)

```

RN-L modeli için WinBUGS programında çalıştırılacak olan dosya (linregRNL3.odc):

```

model{
  C <- 10000
  a<-0.05
  for (i in 1:n) {
    zeros[i] <- 0
    zeros[i] ~ dpois( zeros.mean[i])
    zeros.mean[i] <- -l[i] + C
    l[i] <- (-log(1/sqrt(tau)))-(1/(2*a))*(1-exp(-a*(pow(abs((y[i]-mu[i])/(1/sqrt(tau))),
      2))))
    mu[i]<- beta0 + beta1*x[i,1] + beta2*x[i,2] + beta3*x[i,3]
  }
  beta0 ~ dnorm(0,0.0001)
  beta1 ~ ddexp(0,1)
  beta2 ~ ddexp(0,1)
  beta3 ~ ddexp(0,1)
  tau ~ dgamma( 0.001, 0.001)
}

```

EK 3 Gerçek Veri Uygulamasında Kullanılan Veri Setleri

Stack Loss Bitki Verisi

x_1 = 80,80,75,62,62,62,62,62,58,58,58,58,58,50,50,50,50,50,56,70
 x_2 = 27,27,25,24,22,23,24,24,23,18,18,17,18,19,18,18,19,19,20,20,20
 x_3 = 89,88,90,87,87,87,93,93,87,80,89,88,82,93,89,86,72,79,80,82,91
 y = 42,37,37,28,18,18,19,20,15,14,14,13,11,12,8,7,8,8,9,15,15

Coleman Verisi

x_1 = 3.83, 2.89, 2.86, 2.92, 3.06, 2.07, 2.52, 2.45, 3.13, 2.44, 2.09, 2.52, 2.22, 2.67, 2.71, 3.14, 3.54, 2.52, 2.68, 2.37
 x_2 = 28.87, 20.10, 69.05, 65.40, 29.59, 44.82, 77.37, 24.67, 65.01, 9.99, 12.20, 22.55, 14.30, 31.79, 11.60, 68.47, 42.64, 16.70, 86.27, 76.73
 x_3 = 7.20, -11.71, 12.32, 14.28, 6.31, 6.16, 12.70, -0.17, 9.85, -0.05, -12.86, 0.92, 4.77, -0.96, -16.04, 10.62, 2.66, -10.99, 15.03, 12.77
 x_4 = 26.60, 24.40, 25.70, 25.70, 25.40, 21.60, 24.90, 25.01, 26.60, 28.01, 23.51, 23.60, 24.51, 25.80, 25.20, 25.01, 25.01, 24.80, 25.51, 24.51
 x_5 = 6.19, 5.17, 7.04, 7.10, 6.15, 6.41, 6.86, 5.78, 6.51, 5.57, 5.62, 5.34, 5.80, 6.19, 5.62, 6.94, 6.33, 6.01, 7.51, 6.96
 y = 37.01, 26.51, 36.51, 40.70, 37.10, 33.90, 41.80, 33.40, 41.01, 37.20, 23.30, 35.20, 34.90, 33.10, 22.70, 39.70, 31.80, 31.70, 43.10, 41.01

Vücut Yağı Verisi

x_1 = 23, 22, 22, 26, 24, 24, 26, 25, 25, 23, 26, 27, 32, 30, 35, 35, 34, 32, 28, 33, 28, 28, 31, 32, 28, 27, 34, 31, 27, 29, 32, 29, 27, 41, 41, 49, 40, 50, 46, 50, 45, 44, 48, 41, 39, 43, 40, 39, 45, 47, 47, 40, 51, 49, 42, 54, 58, 62, 54, 61, 62, 56, 54, 61, 57, 55, 54, 55, 54, 55, 62, 55, 56, 55, 61, 61, 57, 69, 81, 66, 67, 64, 64, 70, 72, 67, 72, 64, 46, 48, 46, 44, 47, 46, 47, 53, 38, 50, 46, 47, 49, 48, 41, 49, 43, 43, 43, 52, 43, 40, 43, 43, 47, 42, 48, 40, 48, 51, 40, 44, 52, 44, 40, 47, 50, 46, 42, 43, 40, 42, 49, 40, 47, 50, 41, 44, 39, 43, 40, 49, 40, 40, 52, 23, 23, 24, 24, 25, 25, 26, 26, 26, 27, 27, 27, 28, 28, 28, 30, 31, 31, 33, 33, 34, 34, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 35, 36, 36, 37, 37, 37, 38, 39, 39, 40, 40, 40, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 42, 43, 43, 43, 43, 44, 44, 44, 44, 47, 47, 47, 49, 49, 49, 50, 50, 51, 51, 51, 52, 53, 54, 54, 54, 55, 55, 55, 55, 55, 56, 56, 57, 57, 58, 58, 60, 62, 62, 63, 64, 65, 65, 65, 66, 67, 67, 68, 69, 70, 72, 72, 72, 74
 x_2 = 154.25, 173.25, 154.00, 184.75, 184.25, 210.25, 181.00, 176.00, 191.00, 198.25, 186.25, 216.00, 180.50, 205.25, 187.75, 162.75, 195.75, 209.25, 183.75, 211.75, 179.00, 200.50, 140.25, 148.75, 151.25, 159.25, 131.50, 148.00, 133.25, 160.75, 182.00, 160.25, 168.00, 218.50, 247.25, 191.75, 202.25, 196.75, 363.15, 203.00, 262.75, 205.00, 217.00, 212.00, 125.25, 164.25, 133.50, 148.50, 135.75, 127.50, 158.25, 139.25, 137.25, 152.75, 136.25, 198.00, 181.50, 201.25, 202.50, 179.75, 216.00, 178.75, 193.25, 178.00, 205.50, 183.50, 151.50, 154.75, 155.25, 156.75, 167.50, 146.75, 160.75, 125.00, 143.00, 148.25, 162.50, 177.75, 161.25, 171.25, 163.75, 150.25, 190.25, 170.75, 168.00, 167.00, 157.75, 160.00, 176.75, 176.00, 177.00, 179.75, 165.25, 192.50, 184.25, 224.50, 188.75, 162.50, 156.50, 197.00,

198.50, 173.75, 172.75, 196.75, 177.00, 165.50, 200.25, 203.25, 194.00, 168.50,
 170.75, 183.25, 178.25, 163.00, 175.25, 158.00, 177.25, 179.00, 191.00, 187.50,
 206.50, 185.25, 160.25, 151.50, 161.00, 167.00, 177.50, 152.25, 192.25, 165.25,
 171.75, 171.25, 197.00, 157.00, 168.25, 186.00, 166.75, 187.75, 168.25, 212.75,
 176.75, 173.25, 167.00, 159.75, 188.15, 156.00, 208.50, 206.50, 143.75, 223.00,
 152.25, 241.75, 146.00, 156.75, 200.25, 171.50, 205.75, 182.50, 136.50, 177.25,
 151.25, 196.00, 184.25, 140.00, 218.75, 217.00, 166.25, 224.75, 228.25, 172.75,
 152.25, 125.75, 177.25, 176.25, 226.75, 145.25, 151.00, 241.25, 187.25, 234.75,
 219.25, 118.50, 145.75, 159.25, 170.50, 167.50, 232.75, 210.50, 202.25, 185.00,
 153.00, 244.25, 193.50, 224.75, 162.75, 180.00, 156.25, 168.00, 167.25, 170.75,
 178.25, 150.00, 200.50, 184.00, 223.00, 208.75, 166.00, 195.00, 160.50, 159.75,
 140.50, 216.25, 168.25, 194.75, 172.75, 219.00, 149.25, 154.50, 153.25, 230.00,
 161.75, 142.25, 179.75, 126.50, 169.50, 198.50, 174.50, 167.75, 147.75, 182.25,
 175.50, 161.75, 157.75, 168.75, 191.50, 219.15, 155.25, 189.75, 127.50, 224.50,
 234.25, 227.75, 199.50, 155.50, 215.50, 134.25, 201.00, 186.75, 190.75, 207.50
 $x_3 =$ 67.75, 72.25, 66.25, 72.25, 71.25, 74.75, 69.75, 72.50, 74.00, 73.50, 74.50, 76.00,
 69.50, 71.25, 69.50, 66.00, 71.00, 71.00, 67.75, 73.50, 68.00, 69.75, 68.25, 70.00,
 67.75, 71.50, 67.50, 67.50, 64.75, 69.00, 73.75, 71.25, 71.25, 71.00, 73.50, 65.00,
 70.00, 68.25, 72.25, 67.00, 68.75, 29.50, 70.00, 71.50, 68.00, 73.25, 67.50, 71.25,
 68.50, 66.75, 72.25, 69.00, 67.75, 73.50, 67.50, 72.00, 68.00, 69.50, 70.75, 65.75,
 73.25, 68.50, 70.25, 67.00, 70.00, 67.50, 70.75, 71.50, 69.25, 71.50, 71.50, 68.75,
 73.75, 64.00, 65.75, 67.50, 69.50, 68.50, 70.25, 69.25, 67.75, 67.25, 72.75, 70.00,
 69.25, 67.50, 67.25, 65.75, 72.50, 73.00, 70.00, 69.50, 70.50, 71.75, 74.50, 77.75,
 73.25, 66.50, 68.25, 72.00, 73.50, 72.00, 71.25, 73.75, 69.25, 68.50, 73.50, 74.25,
 75.50, 69.25, 68.50, 70.00, 70.00, 70.25, 71.75, 69.25, 72.75, 72.00, 74.00, 72.25,
 74.50, 71.50, 68.75, 66.75, 66.50, 67.00, 68.75, 67.75, 73.25, 69.75, 71.50, 70.50,
 73.25, 66.75, 69.50, 69.75, 70.75, 74.00, 71.25, 75.00, 71.00, 69.50, 67.75, 72.25,
 77.50, 70.75, 72.75, 69.75, 72.50, 70.25, 69.00, 74.50, 72.25, 67.25, 73.50, 75.25,
 69.00, 72.25, 68.75, 71.50, 72.25, 73.00, 68.75, 70.50, 72.00, 73.75, 68.00, 72.25,
 69.50, 69.50, 67.75, 65.50, 71.00, 71.50, 71.75, 69.25, 67.00, 71.50, 69.25, 74.50,
 74.25, 68.00, 67.25, 69.75, 74.25, 71.50, 74.25, 72.00, 72.50, 68.25, 69.25, 76.00,
 70.50, 74.75, 72.75, 68.25, 69.00, 71.50, 72.75, 67.50, 70.25, 69.25, 71.50, 74.00,
 69.75, 73.00, 65.50, 72.50, 70.25, 70.75, 68.00, 74.50, 71.75, 70.75, 73.00, 64.00,
 69.75, 70.00, 71.75, 69.25, 70.50, 72.25, 67.50, 67.25, 68.75, 66.75, 68.25, 74.25,
 69.50, 68.50, 65.75, 71.75, 71.50, 67.25, 67.50, 67.50, 72.25, 69.50, 69.50, 65.75,
 65.75, 68.25, 72.00, 72.75, 68.50, 69.25, 70.50, 67.00, 69.75, 66.00, 70.50, 70.00
 $x_4 =$ 36.2, 38.5, 34.0, 37.4, 34.4, 39.0, 36.4, 37.8, 38.1, 42.1, 38.5, 39.4, 38.4, 39.4, 40.5,
 36.4, 38.9, 42.1, 38.0, 40.0, 39.1, 41.3, 33.9, 35.5, 34.5, 35.7, 36.2, 38.8, 36.4, 36.7,
 38.7, 37.3, 38.1, 39.8, 42.1, 38.4, 38.5, 42.1, 51.2, 40.2, 43.2, 36.6, 37.3, 41.5, 31.5,
 35.7, 33.6, 34.6, 32.8, 34.0, 34.9, 34.3, 36.5, 35.1, 37.8, 39.9, 39.1, 40.5, 40.5, 38.4,
 41.4, 35.6, 38.0, 37.4, 40.1, 40.9, 35.6, 36.9, 37.5, 36.3, 35.5, 38.7, 36.4, 33.2, 36.5,
 36.0, 38.7, 38.7, 37.8, 37.4, 38.4, 38.1, 39.3, 38.7, 38.5, 36.5, 37.7, 36.5, 38.0, 36.7,
 37.2, 39.2, 37.5, 38.0, 37.3, 41.1, 37.5, 38.7, 35.9, 40.0, 40.1, 37.0, 36.3, 40.7, 39.6,
 31.1, 38.6, 42.0, 38.5, 34.2, 37.2, 37.1, 40.2, 35.3, 38.0, 36.3, 36.8, 41.0, 38.3, 38.0,
 40.8, 39.5, 36.9, 36.9, 37.7, 36.6, 38.9, 37.5, 39.8, 38.3, 35.5, 36.3, 37.8, 37.8, 36.5,
 37.8, 37.0, 37.7, 34.3, 40.8, 37.4, 36.5, 37.5, 35.5, 38.0, 35.7, 39.2, 40.9, 35.2, 40.6,
 35.4, 41.8, 34.1, 37.9, 38.2, 35.6, 38.5, 37.0, 35.9, 36.2, 35.0, 38.5, 40.7, 36.0, 39.5,
 40.5, 38.5, 43.9, 40.4, 37.6, 37.0, 34.0, 38.4, 38.7, 41.5, 36.0, 35.3, 42.1, 38.0, 42.8,

40.0, 33.8, 35.5, 35.3, 37.7, 39.4, 41.9, 38.5, 40.8, 38.0, 36.4, 41.8, 40.7, 38.5, 35.4, 38.5, 35.5, 36.5, 37.6, 37.4, 37.8, 35.2, 37.9, 37.9, 40.9, 41.9, 39.1, 40.2, 36.0, 34.5, 35.8, 40.2, 38.3, 39.0, 37.4, 41.2, 34.8, 36.9, 39.4, 37.6, 38.5, 42.5, 37.4, 35.2, 41.1, 33.4, 37.2, 38.3, 38.1, 37.4, 35.2, 39.4, 38.0, 35.1, 40.4, 38.3, 40.6, 40.2, 37.9, 40.8, 34.7, 38.8, 41.4, 41.3, 40.7, 36.3, 40.8, 34.9, 40.9, 38.9, 38.9, 40.8

$x_5 =$ 93.1, 93.6, 95.8, 101.8, 97.3, 104.5, 105.1, 99.6, 100.9, 99.6, 101.5, 103.6, 102.0, 104.1, 101.3, 99.1, 101.9, 107.6, 106.8, 106.2, 103.3, 111.4, 86.0, 86.7, 90.2, 89.6, 88.6, 97.4, 93.5, 97.4, 100.5, 93.5, 93.0, 111.7, 117.0, 118.5, 106.5, 105.6, 136.2, 114.8, 128.3, 106.0, 113.3, 106.6, 85.1, 96.6, 88.2, 89.8, 92.3, 83.4, 90.2, 89.2, 89.7, 93.3, 87.6, 107.6, 100.0, 111.5, 115.4, 104.8, 112.3, 102.9, 107.6, 105.3, 105.3, 103.0, 90.0, 95.4, 89.3, 94.4, 97.6, 88.5, 93.6, 87.7, 93.4, 91.6, 91.6, 102.0, 96.4, 102.7, 97.7, 97.1, 103.1, 101.8, 101.4, 98.9, 97.5, 104.3, 97.3, 96.7, 99.7, 101.9, 97.2, 106.6, 99.6, 113.2, 99.1, 99.4, 95.1, 107.5, 106.5, 99.1, 96.7, 103.5, 104.0, 93.1, 105.2, 110.0, 110.1, 97.8, 96.3, 108.0, 99.7, 93.5, 100.7, 97.0, 96.0, 99.2, 95.4, 101.8, 104.3, 99.2, 99.3, 94.0, 98.9, 101.0, 98.7, 95.9, 103.9, 96.2, 97.8, 94.6, 103.6, 100.4, 98.4, 104.6, 92.9, 97.8, 98.3, 104.7, 98.6, 99.5, 102.7, 92.1, 96.6, 92.7, 102.0, 110.9, 92.3, 114.1, 92.9, 108.3, 88.5, 94.0, 101.1, 92.1, 105.6, 98.5, 88.7, 101.1, 94.0, 103.8, 98.9, 89.2, 111.4, 107.5, 99.1, 108.2, 114.9, 99.1, 92.2, 90.8, 100.5, 98.2, 115.3, 96.8, 92.6, 119.2, 102.7, 109.5, 108.5, 79.3, 95.5, 92.3, 98.9, 89.5, 117.5, 107.4, 109.2, 103.4, 91.4, 115.2, 104.9, 106.7, 92.2, 101.6, 97.8, 92.0, 94.0, 103.7, 102.7, 91.1, 107.2, 100.8, 121.6, 105.6, 100.6, 102.7, 99.8, 92.9, 91.2, 115.6, 98.3, 103.7, 98.7, 119.8, 92.8, 93.3, 106.8, 93.9, 99.0, 119.9, 94.2, 92.7, 106.9, 88.8, 101.7, 105.3, 104.0, 98.6, 99.6, 103.4, 100.2, 94.9, 97.2, 104.7, 104.0, 117.6, 95.8, 106.4, 93.0, 119.6, 119.7, 115.8, 118.3, 97.4, 113.7, 89.2, 108.5, 111.1, 108.3, 112.4

$x_6 =$ 85.2, 83.0, 87.9, 86.4, 100.0, 94.4, 90.7, 88.5, 82.5, 88.6, 83.6, 90.9, 91.6, 101.8, 96.4, 92.8, 96.4, 97.5, 89.6, 100.5, 95.9, 98.8, 76.4, 80.0, 76.3, 79.7, 74.6, 88.7, 73.9, 83.5, 88.7, 84.5, 79.1, 100.5, 115.6, 113.1, 100.9, 98.8, 148.1, 108.1, 126.2, 104.3, 111.2, 104.3, 76.0, 81.5, 73.7, 79.5, 83.4, 70.4, 86.7, 77.9, 82.0, 79.6, 77.6, 100.0, 99.8, 104.2, 105.3, 98.3, 104.8, 94.7, 102.4, 99.7, 105.5, 100.3, 83.9, 86.6, 78.4, 84.6, 91.5, 82.8, 82.9, 76.0, 83.3, 81.8, 78.8, 95.0, 95.4, 98.6, 95.8, 89.0, 97.8, 94.9, 99.8, 89.7, 88.1, 90.9, 86.0, 86.5, 95.6, 93.2, 83.1, 97.5, 88.8, 99.2, 91.6, 86.7, 88.2, 94.0, 95.0, 92.0, 89.2, 95.5, 98.6, 87.3, 102.8, 101.6, 88.7, 92.3, 90.6, 105.0, 95.0, 89.6, 92.4, 86.6, 90.0, 90.0, 92.4, 87.5, 99.2, 98.1, 83.3, 86.1, 84.1, 89.9, 92.1, 78.0, 93.5, 87.0, 90.1, 90.3, 99.8, 89.4, 87.2, 101.1, 86.1, 98.6, 88.5, 106.6, 93.1, 93.0, 91.0, 77.1, 85.3, 81.9, 99.1, 100.5, 76.5, 106.8, 77.6, 102.9, 72.8, 88.2, 100.1, 83.5, 105.0, 90.8, 76.6, 92.4, 81.2, 95.6, 92.1, 83.4, 106.0, 95.1, 90.4, 100.4, 115.9, 90.8, 81.9, 75.0, 90.3, 90.3, 108.8, 79.4, 83.2, 110.3, 92.7, 104.5, 104.6, 69.4, 83.6, 86.8, 90.4, 83.7, 109.3, 98.9, 98.0, 101.2, 80.6, 113.7, 94.1, 105.7, 85.6, 96.6, 86.0, 89.7, 78.0, 89.7, 89.2, 85.7, 103.1, 89.1, 113.9, 96.3, 93.9, 101.3, 83.9, 84.4, 79.4, 104.0, 89.7, 97.6, 87.6, 122.1, 81.1, 81.5, 100.0, 88.7, 91.8, 110.4, 87.6, 82.8, 95.3, 78.2, 91.1, 96.7, 89.4, 93.0, 86.4, 96.7, 88.1, 94.9, 93.3, 95.6, 98.2, 113.8, 82.8, 100.5, 79.7, 118.0, 109.0, 113.4, 106.1, 84.3, 107.6, 83.6, 105.0, 111.5, 101.3, 108.5

$x_7 =$ 94.5, 98.7, 99.2, 101.2, 101.9, 107.8, 100.3, 97.1, 99.9, 104.1, 98.2, 107.7, 103.9, 108.6, 100.1, 99.2, 105.2, 107.0, 102.4, 109.0, 104.9, 104.8, 94.6, 93.4, 95.8, 96.5, 85.3, 94.7, 88.5, 98.7, 99.8, 100.6, 94.5, 108.3, 116.1, 113.8, 106.2, 104.8, 147.7, 102.5, 125.6, 115.5, 114.1, 106.0, 88.2, 97.2, 88.5, 92.7, 90.4, 87.2, 98.3, 91.0, 89.1, 91.6, 88.6, 99.6, 102.5, 105.8, 97.0, 99.6, 103.1, 100.8, 99.4, 99.7, 108.3, 104.2, 93.9, 91.8, 96.1, 94.3, 98.5, 95.5, 96.3, 88.6, 93.0, 94.8, 94.3, 98.3, 99.3, 100.2,

97.1, 96.9, 99.6, 95.0, 96.2, 96.2, 96.9, 93.8, 99.3, 98.3, 102.2, 100.6, 95.4, 100.6,
 101.4, 107.5, 102.4, 96.2, 92.8, 103.7, 101.7, 98.3, 98.3, 101.6, 99.5, 96.6, 103.6,
 100.7, 102.1, 100.6, 99.3, 103.0, 98.6, 99.8, 97.5, 92.6, 99.7, 96.4, 104.3, 101.0,
 104.1, 101.4, 97.5, 95.2, 94.0, 100.0, 98.5, 93.2, 99.5, 97.8, 95.8, 99.1, 103.2, 92.3,
 98.4, 102.1, 95.6, 100.6, 98.3, 107.7, 101.6, 99.3, 98.9, 93.9, 102.5, 95.3, 110.1,
 106.2, 92.1, 113.9, 93.5, 114.4, 91.1, 95.2, 105.0, 98.3, 106.4, 102.5, 89.8, 99.3,
 91.5, 105.1, 103.5, 89.6, 108.8, 104.5, 95.6, 106.8, 111.9, 98.1, 92.8, 89.2, 98.7,
 99.9, 114.4, 89.2, 96.4, 113.9, 101.9, 109.9, 109.8, 85.0, 91.6, 96.1, 95.5, 98.1,
 108.8, 104.1, 101.8, 103.1, 92.3, 112.4, 102.7, 111.8, 96.5, 100.6, 96.2, 101.0, 99.0,
 94.2, 99.2, 96.9, 105.5, 102.6, 107.1, 102.0, 100.1, 101.7, 91.8, 94.0, 89.0, 109.0,
 99.1, 104.2, 96.1, 112.8, 96.3, 94.4, 105.0, 94.5, 96.2, 105.5, 95.6, 91.9, 98.2, 87.5,
 97.1, 106.6, 98.4, 97.0, 90.1, 100.7, 97.8, 100.2, 94.0, 93.7, 101.1, 111.8, 94.5,
 100.5, 87.6, 114.3, 109.1, 109.8, 101.6, 94.4, 110.0, 88.8, 104.5, 101.7, 97.8, 107.1
 $x_8 =$ 59.0, 58.7, 59.6, 60.1, 63.2, 66.0, 58.4, 60.0, 62.9, 63.1, 59.7, 66.2, 63.4, 66.0, 69.0,
 63.1, 64.8, 66.9, 64.2, 65.8, 63.5, 63.4, 57.4, 54.9, 58.4, 55.0, 51.7, 57.5, 50.1, 58.9,
 57.5, 58.5, 57.3, 67.1, 71.2, 61.9, 63.5, 66.0, 87.3, 61.3, 72.5, 70.6, 67.7, 65.0, 50.0,
 58.4, 53.3, 52.7, 52.0, 50.6, 52.6, 51.4, 49.3, 52.6, 51.9, 57.2, 62.1, 61.8, 59.1, 60.6,
 61.6, 60.9, 61.0, 60.8, 65.0, 64.8, 55.0, 54.3, 56.0, 51.2, 56.6, 58.9, 52.9, 50.9, 55.5,
 54.5, 56.7, 55.0, 53.5, 56.5, 54.8, 54.8, 58.9, 56.0, 56.3, 54.7, 57.2, 57.8, 61.0, 60.4,
 58.3, 58.9, 56.9, 58.9, 57.4, 61.7, 60.6, 62.1, 54.7, 62.7, 59.0, 59.3, 60.0, 59.1, 59.5,
 54.7, 61.2, 55.8, 57.5, 57.5, 61.9, 63.7, 62.3, 61.5, 59.3, 55.9, 58.8, 56.8, 64.6, 58.5,
 58.5, 57.1, 60.5, 58.1, 58.5, 60.7, 60.7, 53.5, 61.7, 57.4, 57.0, 60.3, 61.2, 56.1, 56.0,
 58.9, 58.8, 63.6, 58.1, 66.5, 59.1, 60.4, 57.1, 56.1, 59.1, 56.4, 71.2, 68.4, 51.9, 67.6,
 56.9, 72.9, 53.6, 56.8, 62.1, 57.3, 68.6, 60.8, 50.1, 59.4, 52.5, 61.4, 64.0, 52.4, 63.8,
 64.8, 55.5, 63.3, 74.4, 60.1, 54.7, 50.0, 57.8, 59.2, 69.2, 50.3, 60.0, 69.8, 64.7, 69.5,
 68.1, 47.2, 54.1, 58.0, 55.4, 57.3, 67.7, 63.5, 62.8, 61.5, 54.3, 68.5, 60.6, 65.3, 60.2,
 61.1, 57.7, 62.3, 57.5, 58.5, 60.2, 55.5, 68.8, 60.6, 63.5, 63.3, 58.9, 60.7, 53.0, 56.0,
 51.1, 63.7, 56.3, 60.0, 57.1, 62.5, 53.8, 54.7, 63.9, 53.7, 57.7, 64.2, 59.7, 54.4, 57.4,
 50.8, 56.6, 64.0, 58.4, 55.4, 53.0, 59.3, 57.1, 56.8, 54.3, 54.4, 59.3, 63.4, 61.2, 59.2,
 50.7, 61.3, 63.7, 65.6, 58.2, 54.3, 63.3, 49.6, 59.6, 60.3, 56.0, 59.3
 $x_9 =$ 37.3, 37.3, 38.9, 37.3, 42.2, 42.0, 38.3, 39.4, 38.3, 41.7, 39.7, 39.2, 38.3, 41.5, 39.0,
 38.7, 40.8, 40.0, 38.7, 40.6, 38.0, 40.6, 35.3, 36.2, 35.5, 36.7, 34.7, 36.0, 34.5, 35.3,
 38.7, 38.8, 36.2, 44.2, 43.3, 38.3, 39.9, 41.5, 49.1, 41.1, 39.6, 42.5, 40.9, 40.2, 34.7,
 38.2, 34.5, 37.5, 35.8, 34.4, 37.2, 34.9, 33.7, 37.6, 34.9, 38.0, 39.6, 39.8, 38.0, 37.7,
 40.9, 38.0, 39.4, 40.1, 41.2, 40.2, 36.1, 35.4, 37.4, 37.4, 38.6, 37.6, 37.5, 35.4, 35.2,
 37.0, 39.7, 38.3, 37.5, 39.3, 38.2, 38.0, 39.0, 36.5, 36.6, 37.8, 37.7, 39.5, 38.4, 39.9,
 38.2, 39.7, 38.3, 40.5, 39.6, 42.3, 39.4, 39.3, 37.3, 39.0, 39.4, 38.4, 38.4, 39.8, 36.1,
 39.0, 39.3, 38.7, 40.0, 36.8, 38.0, 40.0, 38.1, 37.8, 38.1, 36.3, 38.4, 38.8, 41.1, 39.2,
 39.3, 40.5, 38.7, 36.5, 36.6, 36.0, 36.8, 35.8, 39.0, 36.9, 38.7, 38.5, 38.1, 35.6, 36.9,
 37.9, 36.1, 39.2, 38.4, 42.5, 39.6, 38.2, 36.7, 36.1, 37.6, 36.5, 43.5, 40.8, 35.7, 42.7,
 35.9, 43.5, 36.8, 37.4, 40.0, 37.8, 40.0, 38.5, 34.8, 39.0, 36.6, 40.6, 37.3, 35.6, 42.0,
 41.3, 34.2, 41.7, 40.6, 39.1, 36.2, 34.8, 37.3, 37.7, 42.4, 34.8, 38.1, 42.6, 39.5, 43.1,
 42.8, 33.5, 36.2, 39.4, 38.9, 39.7, 41.3, 39.8, 41.3, 40.4, 36.3, 45.0, 38.6, 43.3, 38.9,
 38.4, 38.6, 38.0, 40.0, 39.0, 39.2, 35.7, 38.3, 39.0, 40.3, 39.8, 37.6, 39.4, 36.2, 38.2,
 35.0, 40.3, 38.8, 40.9, 38.1, 36.9, 36.5, 39.0, 39.2, 36.2, 38.1, 42.7, 40.2, 35.2, 37.1,
 33.0, 38.5, 42.6, 37.4, 38.8, 35.0, 38.6, 38.9, 35.9, 35.7, 37.1, 40.3, 41.1, 39.1, 38.1,
 33.4, 42.1, 42.4, 46.0, 38.8, 37.5, 44.0, 34.8, 40.8, 37.3, 41.6, 42.2

$x_{10} =$ 21.9, 23.4, 24.0, 22.8, 24.0, 25.6, 22.9, 23.2, 23.8, 25.0, 25.2, 25.9, 21.5, 23.7, 23.1,
 21.7, 23.1, 24.4, 22.9, 24.0, 22.1, 24.6, 22.2, 22.1, 22.9, 22.5, 21.4, 21.0, 21.3, 22.6,
 33.9, 21.5, 24.5, 25.2, 26.3, 21.9, 22.6, 24.7, 29.6, 24.7, 26.6, 23.7, 25.0, 23.0, 21.0,
 23.4, 22.5, 21.9, 20.6, 21.9, 22.4, 21.0, 21.4, 22.6, 22.5, 22.0, 22.5, 22.7, 22.5, 22.9,
 23.1, 22.1, 23.6, 22.7, 24.7, 22.7, 21.7, 21.5, 22.4, 21.6, 22.4, 21.6, 23.1, 19.1, 20.9,
 21.4, 24.2, 21.8, 21.5, 22.7, 23.7, 22.0, 23.0, 24.1, 22.0, 33.7, 21.8, 23.3, 23.8, 24.4,
 22.5, 23.1, 22.1, 24.5, 24.6, 23.2, 22.9, 23.3, 21.9, 22.3, 22.3, 22.4, 23.2, 25.4, 22.0,
 24.8, 23.5, 23.4, 24.8, 22.8, 22.3, 23.6, 23.9, 21.9, 21.8, 22.1, 22.8, 23.3, 24.8, 24.5,
 24.6, 23.2, 22.6, 22.1, 23.5, 21.9, 22.2, 20.8, 21.8, 22.2, 23.2, 23.0, 22.6, 20.5, 23.0,
 22.7, 22.4, 23.8, 22.5, 24.5, 21.6, 22.0, 22.3, 22.7, 23.2, 22.0, 25.2, 24.6, 22.0, 24.7,
 20.4, 25.1, 23.8, 22.8, 24.9, 21.7, 25.2, 25.0, 21.8, 24.6, 21.0, 25.0, 23.5, 20.4, 23.4,
 25.6, 21.9, 24.6, 24.0, 23.4, 22.1, 22.0, 22.4, 21.5, 24.0, 22.2, 22.0, 24.8, 24.7, 25.8,
 24.1, 20.2, 21.8, 22.7, 22.4, 22.6, 24.7, 23.5, 24.8, 22.9, 21.8, 25.5, 24.7, 26.0, 22.4,
 24.1, 24.0, 22.3, 22.5, 24.1, 23.8, 22.0, 23.7, 24.0, 21.8, 24.1, 21.4, 23.3, 22.5, 22.6,
 21.7, 23.2, 23.0, 25.5, 21.8, 23.6, 21.5, 22.6, 22.9, 22.0, 23.9, 27.0, 23.4, 22.5, 21.8,
 19.7, 22.6, 23.4, 22.5, 23.2, 21.3, 22.8, 23.6, 21.0, 21.0, 22.7, 23.0, 22.3, 22.3, 24.0,
 20.1, 23.4, 24.6, 25.4, 24.1, 22.6, 22.6, 21.5, 23.2, 21.5, 22.7, 24.6
 $x_{11} =$ 32.0, 30.5, 28.8, 32.4, 32.2, 35.7, 31.9, 30.5, 35.9, 35.6, 32.8, 37.2, 32.5, 36.9, 36.1,
 31.1, 36.2, 38.2, 37.2, 37.1, 32.5, 33.0, 27.9, 29.8, 31.1, 29.9, 28.7, 29.2, 30.5, 30.1,
 32.5, 30.1, 29.0, 37.5, 37.3, 32.0, 35.1, 33.2, 45.0, 34.1, 36.4, 33.6, 36.7, 35.8, 26.1,
 29.7, 27.9, 28.8, 28.8, 26.8, 26.0, 26.7, 29.6, 38.5, 27.7, 35.9, 33.1, 37.7, 31.6, 34.5,
 36.2, 32.5, 32.7, 33.6, 35.3, 34.8, 29.6, 32.8, 32.6, 27.3, 31.5, 30.3, 29.7, 29.3, 29.4,
 29.3, 30.2, 30.8, 31.4, 30.3, 29.4, 29.9, 34.3, 31.2, 29.7, 32.4, 32.6, 29.2, 30.2, 28.8,
 29.1, 31.4, 30.1, 33.3, 30.3, 32.9, 31.6, 30.6, 31.6, 35.3, 32.2, 27.9, 31.0, 31.0, 30.1,
 31.0, 30.5, 35.1, 35.1, 32.1, 33.3, 33.5, 35.3, 30.7, 31.8, 29.8, 29.9, 33.4, 33.6, 32.1,
 33.9, 33.0, 34.4, 30.6, 34.4, 35.6, 33.8, 33.9, 33.3, 31.6, 27.5, 31.2, 33.5, 33.6, 34.0,
 30.9, 32.7, 34.3, 31.7, 35.5, 30.8, 32.0, 31.6, 30.5, 31.8, 33.5, 36.1, 33.3, 25.8, 36.0,
 31.6, 38.5, 27.8, 30.6, 33.7, 32.2, 35.2, 31.6, 27.0, 30.1, 27.0, 31.3, 33.5, 28.3, 34.0,
 36.4, 30.2, 37.2, 36.1, 32.5, 30.4, 24.8, 31.0, 32.4, 35.4, 31.0, 31.5, 34.4, 34.8, 39.1,
 35.6, 27.7, 31.4, 30.0, 30.5, 32.9, 37.2, 36.4, 36.6, 33.4, 29.6, 37.1, 34.0, 33.7, 31.7,
 32.9, 31.2, 30.8, 30.6, 33.8, 31.7, 29.4, 32.1, 32.9, 34.8, 37.3, 33.1, 36.7, 31.4, 29.0,
 30.9, 36.8, 29.5, 32.7, 28.6, 34.7, 31.3, 27.5, 35.7, 28.5, 31.4, 38.4, 27.9, 29.4, 34.1,
 25.3, 33.4, 33.2, 34.6, 32.4, 31.7, 31.8, 30.9, 27.8, 31.3, 30.3, 32.6, 35.1, 29.8, 35.9,
 28.5, 34.9, 35.6, 35.3, 32.1, 29.2, 37.5, 25.6, 35.2, 31.3, 30.5, 33.7
 $x_{12} =$ 27.4, 28.9, 25.2, 29.4, 27.7, 30.6, 27.8, 29.0, 31.1, 30.0, 29.4, 30.2, 28.6, 31.6, 30.5,
 26.4, 30.8, 31.6, 30.5, 30.1, 30.3, 32.8, 25.9, 26.7, 28.0, 28.2, 27.0, 26.6, 27.9, 26.7,
 27.7, 26.4, 30.0, 31.5, 31.7, 29.8, 30.6, 30.5, 29.0, 31.0, 32.7, 28.7, 29.8, 31.5, 23.1,
 27.4, 26.2, 26.8, 25.5, 25.8, 25.8, 26.1, 26.0, 27.4, 27.5, 30.2, 28.3, 30.9, 28.8, 29.6,
 31.8, 29.8, 29.9, 29.0, 31.1, 30.1, 27.4, 27.4, 28.1, 27.1, 27.3, 27.3, 27.3, 25.7, 27.0,
 27.0, 29.2, 25.7, 26.8, 28.7, 27.2, 25.2, 29.6, 27.3, 26.3, 27.7, 28.0, 28.4, 29.3, 29.6,
 27.7, 28.4, 28.2, 29.6, 27.9, 30.8, 30.1, 27.8, 27.5, 30.9, 31.0, 26.2, 29.2, 30.3, 27.2,
 29.4, 28.5, 29.6, 30.7, 26.0, 28.2, 27.8, 31.1, 27.6, 27.3, 26.3, 28.0, 29.8, 29.5, 28.6,
 31.2, 29.6, 28.0, 27.5, 29.2, 30.2, 30.3, 28.2, 29.6, 27.8, 26.5, 28.4, 28.6, 29.3, 29.8,
 28.8, 28.3, 28.4, 27.4, 29.8, 27.9, 28.5, 27.5, 27.2, 29.7, 28.3, 30.3, 29.7, 25.2, 30.4,
 29.0, 33.8, 26.3, 28.3, 29.2, 27.7, 30.7, 28.0, 34.9, 28.2, 26.3, 29.2, 30.6, 26.2, 31.2,
 33.7, 28.7, 33.1, 31.8, 29.8, 27.4, 25.9, 28.7, 28.4, 21.0, 26.9, 26.6, 29.5, 30.3, 32.5,
 29.0, 24.6, 28.3, 26.4, 28.9, 29.3, 31.8, 30.4, 32.4, 29.2, 27.3, 31.2, 30.1, 29.9, 27.1,
 29.8, 27.3, 27.8, 30.0, 28.8, 28.4, 26.6, 28.9, 29.2, 30.7, 23.1, 29.5, 31.6, 27.5, 26.2,

28.8, 31.0, 27.9, 30.0, 26.7, 29.1, 26.3, 25.9, 30.4, 25.7, 29.9, 32.0, 27.0, 26.8, 31.1,
 22.0, 29.3, 30.0, 30.1, 29.7, 27.3, 29.1, 29.6, 26.1, 28.7, 26.3, 28.5, 29.6, 28.9, 30.5,
 24.8, 30.1, 30.7, 29.8, 29.3, 27.3, 32.6, 25.7, 28.6, 27.2, 29.4, 30.0

$x_{13} =$ 17.1, 18.2, 16.6, 18.2, 17.7, 18.8, 17.7, 18.8, 18.2, 19.2, 18.5, 19.0, 17.7, 18.8, 18.2,
 16.9, 17.3, 19.3, 18.5, 18.2, 18.4, 19.9, 16.7, 17.1, 17.6, 17.7, 16.5, 17.0, 17.2, 17.6,
 18.4, 17.9, 18.8, 18.7, 19.7, 17.0, 19.0, 19.4, 21.4, 18.3, 21.4, 17.4, 18.4, 18.8, 16.1,
 18.3, 17.3, 17.9, 16.3, 16.8, 17.3, 17.2, 16.9, 18.5, 18.5, 18.9, 18.5, 19.2, 18.2, 18.5,
 20.2, 18.3, 19.1, 18.8, 18.4, 18.7, 17.4, 18.7, 18.1, 17.3, 18.6, 18.3, 18.2, 16.9, 16.8,
 18.3, 18.1, 18.8, 18.3, 19.0, 19.0, 17.7, 19.0, 19.2, 18.0, 18.2, 18.8, 18.1, 18.8, 18.7,
 17.7, 18.8, 18.4, 19.1, 17.8, 20.4, 18.5, 18.2, 18.2, 18.3, 18.6, 17.0, 18.4, 19.7, 17.7,
 18.8, 18.1, 19.1, 19.2, 17.3, 18.1, 17.4, 19.8, 17.4, 17.5, 17.3, 18.1, 19.5, 18.5, 18.0,
 19.5, 18.4, 17.6, 17.6, 18.0, 17.6, 17.2, 17.4, 18.1, 17.7, 17.6, 17.1, 17.9, 17.3, 18.1,
 17.6, 17.1, 17.7, 17.6, 18.7, 16.6, 17.8, 17.9, 18.2, 18.3, 17.3, 18.7, 18.4, 16.9, 18.4,
 17.8, 19.6, 17.4, 17.9, 19.4, 17.7, 19.1, 18.6, 16.9, 18.2, 16.5, 19.1, 19.7, 16.5, 18.5,
 19.4, 17.7, 19.8, 18.8, 17.4, 17.7, 16.9, 17.7, 17.8, 20.1, 16.9, 16.7, 18.4, 18.1, 19.9,
 19.0, 16.5, 17.2, 17.4, 17.7, 18.2, 20.0, 19.1, 18.8, 18.5, 17.9, 19.9, 18.7, 18.5, 17.1,
 18.8, 17.4, 16.9, 18.5, 18.8, 18.6, 17.4, 18.7, 18.4, 17.4, 19.4, 17.3, 18.4, 17.7, 17.6,
 17.4, 18.9, 18.6, 19.0, 18.0, 18.4, 17.8, 18.6, 19.2, 17.1, 18.9, 19.6, 17.8, 17.0, 19.2,
 15.8, 18.8, 18.4, 18.8, 19.0, 16.9, 19.0, 18.0, 17.6, 18.3, 18.3, 19.0, 18.5, 18.3, 19.1,
 16.5, 19.4, 19.5, 19.5, 18.5, 18.5, 18.8, 18.5, 20.1, 18.0, 19.8, 20.9

$y =$ 12.3, 6.1, 25.3, 10.4, 28.7, 20.9, 19.2, 12.4, 4.1, 11.7, 7.1, 7.8, 20.8, 21.2, 22.1, 20.9,
 29.0, 22.9, 16.0, 16.5, 19.1, 15.2, 15.6, 17.7, 14.0, 3.7, 7.9, 22.9, 3.7, 8.8, 11.9, 5.7,
 11.8, 21.3, 32.3, 40.1, 24.2, 28.4, 35.2, 32.6, 34.5, 32.9, 31.6, 32.0, 7.7, 13.9, 10.8,
 5.6, 13.6, 4.0, 10.2, 6.6, 8.0, 6.3, 3.9, 22.6, 20.4, 28.0, 31.5, 24.6, 26.1, 29.8, 30.7,
 25.8, 32.3, 30.0, 21.5, 13.8, 6.3, 12.9, 24.3, 8.8, 8.5, 13.5, 11.8, 18.5, 8.8, 22.2, 21.5,
 18.8, 31.4, 26.8, 18.4, 27.0, 27.0, 26.6, 14.9, 23.1, 8.3, 14.1, 20.5, 18.2, 8.5, 24.9,
 9.0, 17.4, 9.6, 11.3, 17.8, 22.2, 21.2, 20.4, 20.1, 22.3, 25.4, 18.0, 19.3, 18.3, 17.3,
 21.4, 19.7, 28.0, 22.1, 21.3, 26.7, 16.7, 20.1, 13.9, 25.8, 18.1, 27.9, 25.3, 14.7, 16.0,
 13.8, 17.5, 27.2, 17.4, 20.8, 14.9, 18.1, 22.7, 23.6, 26.1, 24.4, 27.1, 21.8, 29.4, 22.4,
 20.4, 24.9, 18.3, 23.3, 9.4, 10.3, 14.2, 19.2, 29.6, 5.3, 25.2, 9.4, 19.6, 10.1, 16.5,
 21.0, 17.3, 31.2, 10.0, 12.5, 22.5, 9.4, 14.6, 13.0, 15.1, 27.3, 19.2, 21.8, 20.3, 34.3,
 16.5, 3.0, 0.7, 20.5, 16.9, 25.3, 9.9, 13.1, 29.9, 22.5, 16.9, 26.6, 0.0, 11.5, 12.1, 17.5,
 8.6, 23.6, 20.4, 20.5, 24.4, 11.4, 38.1, 15.9, 24.7, 22.8, 25.5, 22.0, 17.7, 6.6, 23.6,
 12.2, 22.1, 28.7, 6.0, 34.8, 16.6, 32.9, 32.8, 9.6, 10.8, 7.1, 27.2, 19.5, 18.7, 19.5,
 47.5, 13.6, 7.5, 24.5, 15.0, 12.4, 26.0, 11.5, 5.2, 10.9, 12.5, 14.8, 25.2, 14.9, 17.0,
 10.6, 16.1, 15.4, 26.7, 25.8, 18.6, 24.8, 27.3, 12.4, 29.9, 17.0, 35.0, 30.4, 32.6, 29.0,
 15.2, 30.2, 11.0, 33.6, 29.3, 26.0, 31.9

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Mutlu KAYA
Doğum Yeri: Konya
Doğum Tarihi: 17/07/1984
Medeni Hali: Evli
Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Çemberlitaş Kız Lisesi (2002)
Lisans: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Sinop Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü (2007)
Yüksek Lisans: Sinop Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik ABD (2011)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Sinop Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü (2009-Devam Ediyor)

ESCI

Kaya, M., Çankaya, E. and Arslan, O. 2019. Robust Bayesian regression analysis using Ramsay-Novick distributed errors with Student-t prior. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 68(1), 602-618.

Hakemli Dergiler

Altuntaş, M., **Kaya, M.**, Demir, Ş., Oyman, G., Metecan, A., Rastgel, H. and Öngel, K. 2013. 0-14 Yaş Arası Çocuklarda Önlenebilir Nitelikteki Kazaların Belirlenmesi Ve İlişkili Tedbirlerin Alınması. Smyrna Tıp Dergisi, 3(1), 28-33.

Kaya, M. and Çankaya, E. 2013. Bayes Faktörü, Bayesci Bilgi Ölçütü ve Sapma Bilgi Ölçütü Kullanımıyla Bayesci Model Seçiminin Bir Uygulaması. Journal of Statistical Research, 10(2), 25-41.

Ulusal Kongre Sunum

Altuntaş, M., **Altuntaş, M.** ve Öngel, K. Bir İlçe Devlet Hastanesi'nde İlaç Kullanımı ve Hasta Katılım Payından Muaf İlaç Raporu Verilen Hastaların Farklı Özellikleri Temelinde Araştırılması, 2. Trakya Aile Hekimliği Kongresi, 1-3 Kasım 2012, Balkan Kongre Merkezi, Edirne, Türkiye (Poster Sunum).

Altuntaş, M., **Kaya, M.**, Demir, Ş., Oyman, G., Metecan, A., Rastgel, H. ve Öngel, K. 0-14 Yaş Arası Çocuklarda Önlenebilir Nitelikteki Kazaların Belirlenmesi ve İlişkili Tedbirlerin Alınması, 12. Ulusal Aile Hekimliği Kongresi, 15-19 Mayıs 2013, Kuşadası, Türkiye (Poster Sunum).

Uluslararası Kongre Sunum

Kaya, M. ve Arslan, O. Ramsay-Novick Dağılım Ailesine Dayalı Robust Bayesyen Regresyon Analizi. 15 th International Symposium On Econometrics, Operations Research And Statistics ISEOS, Isparta, Turkey, 22-25 Mayıs 2014.

Çankaya, E., Fieller, N. and **Kaya, M.** Analysis of Quantal Models. International Conference Applied Statistics, Ribno, Slovenia, 20-23 September 2015.

Kaya, M., Çankaya, E. and Arslan, O. Robust Bayesian Linear Regression Modelling using Student-t Distribution. Xth International Statistics Days Conference, ISDC, Giresun, Turkey, 07-09 October 2016.

Kaya, M., Çankaya, E. and Arslan, O. Robust Bayesian Estimation in Regression using Ramsay-Novick Distribution. IRSYSC 2017 – 3RD International Researchers, Statisticians and Young Statisticians Congress, Konya, Turkey, 24-26 May 2017.

Kaya, M., Çankaya, E. and Arslan, O. Robust Bayesian penalized regression estimation based on Ramsay-Novick distribution. 31st EMS (The European Meeting of Statisticians), Helsinki, Finland, 24-28 Temmuz 2017.

Kaya, M. Evaluation of Bayesian L1-Penalized LAD Estimators for Regression Models. XVIII. International Symposium on Econometrics Operations Research and Statistics (ISEOS), Trabzon, Turkey, 05-07 October 2017.

Kaya, M., Çankaya, E. and Arslan, O. Iterative Robust Bayesian Estimation of Regression Modelling based on Ramsay-Novick Distribution. 11th ISC2019 International Statistics Congress, Bodrum, Turkey, 04-08 October 2019.