

**T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
FELSEFE (BİLİMTARİHİ)
ANABİLİM DALI**

ORTAÇAĞ İSLÂM DÜNYASINDA V. POSTULAT GELENEĞİ

Yüksek Lisans Tezi

İrem ASLAN

Ankara-2012

**T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
FELSEFE (BİLİMTARİHİ)
ANABİLİM DALI**

ORTAÇAĞ İSLÂM DÜNYASINDA V. POSTULAT GELENEĞİ

Yüksek Lisans Tezi

İrem ASLAN

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Melek DOSAY GÖKDOĞAN

Ankara-2012

**T.C.
ANKARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
FELSEFE (BİLİMTARİHİ)
ANABİLİM DALI**

ORTAÇAĞ İSLÂM DÜNYASINDA V. POSTULAT GELENEĞİ

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Melek DOSAY GÖKDOĞAN

Tez Jürisi Üyeleri:

Adı ve Soyadı

İmzası

.....
.....
.....
.....

.....
.....
.....
.....

Tez Sınavı Tarihi.....

ÖNSÖZ

Günlük ihtiyaçlardan doğan matematik bilimi ilerledikçe karmaşık ve gerçek dünyayla bağları zayıf görünen bir disiplin haline gelmiştir. Her ne kadar uğraştığı nesneler soyut olsa da, tüm diğer doğa bilimleri gibi ampirik bir şekilde ortaya çıkmıştır. Zaman içerisinde matematik o kadar karmaşık ve anlaşılmaz hale gelmiştir ki, gerçeklerle arasındaki bağları görmek matematikçiler için bile zor bir hal almıştır. Matematiğin evrimi, Öklid'in *Element*'leri ile başlamıştır. Matematiğin konusunu tamamıyla değiştiren bir tek önerme aranırsa, o da V. postulat olacaktır. Tarih boyunca başka hiç bir önerme ait olduğu bilim dalının gidişatını bu denli etkilememiştir.

V. postulat sadece geometrinin gündemini değiştirmekle kalmamış, aynı zamanda metodolojisini de değiştirmiştir. İspatının mümkün olmadığı kanıtlandığında, postulat kavramı yeniden yazılmıştır. İçerdiği sonsuzluk kavramıyla başka soruları da akla getiren bu postulat, tarihin en büyük sırlarından biri olmuştur. Matematikçilerin en önemli özellikleri sezgi güçleri olduğundan, konunun derinliğini sezmiş ve üzerine itina ile eğilerek bu meseleyi çözmeye çalışmışlardır.

Ben, tezimde bu meselenin sıkıntılarını ve çözüm aşamalarını göstererek, ulaşılan sonuçların önemini anlatmaya çalıştım. Tezimin birinci bölümünde *Elementler* ve V. postulat ile ilgili bilgilere yer verdim. Böylelikle meselenin özünün ne olduğunu açıklamaya çalıştım. İkinci bölümünde, tarihsel süreci ve etkileşimleri daha net inceleyebilmek için İslâm uygarlığından önceki ispat girişimlerine yer verdim. Tezimin üçüncü bölümünde, İslâm Uygarlığındaki ispat girişimlerinin üzerinde durdum, bu konudaki en önemli gelişmelerin bu uygarlığa mensup

matematikçilerce gerçekleştirildiğine inandığım için, en çok bu bölümün üzerinde durdum.

Tez çalışmamın her aşamasında bana destek olan değerli hocam sayın Prof. Dr. Melek Dosay Gökdoğan'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Takıldığım her noktada yardımcı olan ve bana değerli vaktini ayıran sayın hocam Prof. Dr. Cem Tezer'e teşekkür etmeyi borç bilirim. Ayrıca sunduğu bakış açısıyla tezimin gidişatına yön veren sayın hocam Prof. Dr. Remzi Demir'e ve önerdiği kaynaklarla tezimin içeriğini etkileyen Utrecht Üniversitesinden Prof. Dr. Jan P. Hogendijk'a şükranlarımı bildiririm.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	vi
KISALTMALAR LİSTESİ.....	viii
GİRİŞ	1
BÖLÜM I- ELEMENTLER VE V. POSTULAT	3
BÖLÜM II- İSLÂM UYGARLIĞINDAN ÖNCE V. POSTULATI KANITLAMA GİRİŞİMLERİ.....	12
a) Posidonius	13
b) Geminus	13
c) Batlamyus.....	17
d) Proclus.....	19
e) Simplicius.....	21
BÖLÜM III- İSLÂM UYGARLIĞINDAKİ V. POSTULAT ÇALIŞMALARI	24
A. Genel Bilgi.....	24
B. İslâm Uygarlığında V. Postulat İspat Girişimleri	29
a) El-'Abbâs ibn Sa'îd el-Cevherî	29
b) Ebû el-'Abbâs el-Fadl ibn Hâtim el-Neyrîzî	35
c) Sabit ibn Kurra (el-Sâbi'î el-Harrânî).....	39
Sabit İbn Kurra'nın I. İspatı	41
Sabit İbn Kurra'nın II. İspatı.....	48

d) Ebû 'Alî el-Hasan ibn el-Hasan ibn Heysem	62
e) Ömer Hayyâm.....	71
Ömer Hayyâm - Öklid'deki Güçlüklerin Tartışılması	74
f) Nâsıreddîn Tûsî	87
SONUÇ.....	99
KAYNAKLAR	103
ÖZET.....	108
ABSTRACT	109

KISALTMALAR LİSTESİ

bknz. : Bakınız

c. : Cilt

çev. : Çeviren

derece: °

D.S.B : Dictionary of Scientific Biography

ed. : Editör

S. : Sayı

s. : Sayfa

yay. : Yayıncı

y.y. : Yüzyıl

GİRİŞ

Tarih boyunca yazılmış hiç bir kitap Öklid'in¹ (M.Ö 300 civarı) *Elementler*'i² kadar zamanının ötesine geçmemiş ve bilime hem metodolojik hem de teorik olarak onun kadar yön vermemiştir. Öklid, M.Ö. 300 yılı sıralarında İskenderiye'deki Müze'de öğretimle ilgili görev yapmış ve yine aynı tarihlerde kendinden önceki (M.Ö. 5. yüzyıldan itibaren) matematikçilerin çalışmalarını toparlayarak 13 ciltlik *Elementler*'i yazmıştır. *Elementler*, o zamana kadar üretilmiş tüm geometri çalışmalarını sistemli bir biçimde sunduğundan, o dönemde yapılmış ansiklopedik bir çalışma mahiyetindeydi. Ancak bu çalışmanın esas önemi, içerdiği bilgilerden ziyade, o zamana kadar Eski Mısır ve Mezapotamya'dan gelmiş olan pragmatik ve gündelik hesap zihniyetiyle kullanılan matematik kavramlarına yeni bir boyut kazandırmış olmasıdır.

Eski Mısır'da geometri, Nil'in taşmasını hesaplamak, Nil taşıktan sonra bozulan arazi sınırlarını yeniden belirlemek amacıyla kullanılan bir "yer ölçümü" sistemi olarak ortaya çıkmıştı. Kâğıt olarak papirüs kullanıldığından, günümüze ulaşan az sayıdaki kaynaktan anlaşıldığı kadarıyla matematik, alacak-verecek, borç hesaplamalarında ve yukarıda bahsi geçen gündelik faaliyetlerde kullanılan bir bilgi türüydü. Babil'de de durum farklı değildi, o döneme göre ileri sayılabilecek düzeyde bir hesap sistemi mevcuttu ve kil tabletlere kaydediliyordu. Her iki uygarlık da hayranlık uyandıracak takvim sistemlerine sahipti. Ancak matematiğin bugün bildiğimiz halini almasını, teori-ispat sistemiyle ilerleyen ve soyut çalışmaları içeren bir sistem oluşunu, Eski Yunanlılara, özellikle de Öklid'e ve *Elementler*'e borçluyuz.

¹ Ευκλείδης

² Στοιχεία (Stoyhea)

Matematiğin teorik bir sistem oluşu, ampirik olarak ilerlememesi, hatasız olmasını sağlamıştır.

Elementler'in yüzyıllarca tartışma konusu olmuş V. postulatı, Batı'lı bilginlerin ve İslâm Dünyası bilginlerinin dikkatini çekmiştir. Bu postulatı diğerlerinden ayıran karmaşık ifadesi, onun ispatsız kabul edilen bir postulattan çok, ispata gereksinim duyan bir teorem olarak algılanmasına sebep olmuştur. Öklid, bu postulatın ispatını ya dikkatsizlik sonucu atlamış ya da bir bilgelik belirtisi olarak kasten atlamış olabilir. Sebebi ne olursa olsun, onun bu meseleye takılmamış olması, 13 ciltlik eserini tamamlamasına olanak sağlamıştır.

İslâm Dünyası bilginleri Eski Yunanlı bilginlerin eserlerini itinayla çevirmeye başladıklarında, eksiklik gördükleri yerlerde metine müdahale etmekten çekinmemişlerdir. V. postulatı da açık ve net olan bu ispat gereksinimini fark ederek konunun üstüne gitmişler ve kendilerinden sonra gelen matematikçilerin, geometride yeni bir çağ sayılan, Öklid dışı geometrileri keşfetmelerine olanak sağlamışlardır.

BÖLÜM I- ELEMENTLER VE V. POSTULAT

Elementler, geometri biliminin mantıksal yapısına şekil vermiş ve asırlarca mantıksal mükemmellik örneği olmuştur. Toplamda 13 kitap ve 465 önermeden oluşur. Sonraları tarihçiler Hypsicles'in (M.Ö 190-120 civarı) yazdığı (veya bulduğu) bir 14. cildin varlığından bahsetmişlerdir.³ İbn Nedim'in söylediğine göre de Öklid'in bir öğrencisi olan Hypsicles tarafından İskenderiye'de 14. ve 15. kitap bulunmuş ve dönemin kralına sunulularak *Elementler*'e eklenmiştir.⁴ Bizim asıl ilgilendiğimiz I. kitap, tanımlarla başlar. Burada her matematiksel nesnenin tek tek tanımı verilmiştir ve paralel çizgilerin tanımı dâhil toplam 23 adet tanım vardır. Sonra 5 adet postulat⁵ gelir. Postulatlar ispata gerek duyulmadan kabul edilecek genel doğrulardır. Daha sonra gelecek önermelerin ispatının dayanaklarını teşkil ederler. Öklid'in meşhur postulatları şöyle ifade edilebilir.

I. Herhangi iki noktadan bir doğru geçer.

II. Bir doğru parçası doğrusal bir çizgi halinde sürekli uzatılabilir.

III. Belli bir merkez ve uzaklıkla bir çember çizilebilir.

IV. Tüm dik açılar birbirine eşittir.

V. Verilen iki doğru başka bir doğru tarafından kesildiğinde, aynı tarafa bakan açılar toplamı iki dik açıdan küçük oluyorsa, verilen doğrular, bu tarafta sonsuza dek uzatıldıklarında mutlaka kesişirler.⁶

³ T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, c. 2, s. 192.

⁴ İbn Nedim, *El Fihrist*, s. 636.

⁵ αἰτήματα

⁶ Euclid, *Elements*.

Bu postulatlardan sonra 5 adet aksiyom (genel doğrular)⁷ gelir. Öklid, *Elementler*'inde aksiyom kelimesi yerine Aristoteles'i takip ederek ortak şeyler manasına gelen "κοινὰ ἐννοιαί" (common options ya da notions) terimini kullanmıştır.⁸ Aksiyomlar mantıksal olarak kolayca kabul edilebilecek genel gerçeklerdir. Örneğin, "aynı şeye eşit olan şeyler birbirine eşittir" gibi. Bu noktada postulatın aksiyomdan farkı merak edilebilir. Temel olarak aksiyom, tüm alanlar için geçerli daha geniş doğrulardır. Postulatlar ise belirli alanlara mahsus genel gerçeklerdir. Öklid'in aksiyomları şunlardır;

I. Aynı şeye eşit olan şeyler birbirine eşittir.

II. Eşitlere eşitler eklenirse sonuç eşit olur.

III. Eşitlerden eşitler çıkarılırsa kalanlar eşit olur.

IV. Birbiriyle çakışan şeyler birbirine eşittir.

V. Bütün parçasından büyüktür.

Aksiyom ve postulat kavramının farkını anlayabilmek için, onları ilk ortaya koyan Öklid'in aksiyom ve postulatları karşılaştırıldığında açıkça görülecektir ki, postulatları anlayabilmek için tanımlara ihtiyaç duyulmaktadır. Örneğin, nokta tanımı olmadan iki noktadan bir doğru geçeceği gerçeği pek bir anlam ifade etmez ya da Öklid'in 15. tanımında verdiği çember tanımı olmadan III. postulat havada kalacaktır. Ancak aksiyomlar hiç bir tanım kullanmadan kurulabildiği gibi, anlaşılması için de hiç bir tanıma ihtiyaç duyulmaz.

⁷ Belit, aksiyom (ἀξιώματα)

⁸ T. L. Heath, *Greek Mathematics*, 1921, c.1, s.362-364.

Karanlık Çağın parlak bilgini Proclus (M.S 410- 485, Bizans), Öklid'in aksiyom ve postulatları arasındaki farkı açıklamak için 3 yöntem belirlemiştir. Bunlardan birincisi, postulat ve aksiyom arasındaki farkı, problem ve teorem arasındaki farka benzetir. Burada postulatın bir yapıyı bildiren ve doğrulayan özelliği vurgulanmak istenmiştir. İkinci olarak, postulatı geometrik anlamda bir önermeye (proposition) benzetmiştir. Aksiyom ise hem geometrik hem de aritmetik anlamda bir önermedir. Proclus, postulatların alanlarıyla ilgili gerçekleri, aksiyomların ise bahsi geçen alan dışındaki genel gerçekleri de açıkladığını, bu ikinci ayrım yöntemiyle vurgulamaktadır. Üçüncü ve son yönteme (ki bu yöntemi Aristoteles de desteklemiştir) göre, aksiyom kendi içinde ve içerdiği kelimelerden (kelimelerin anlamlarından) dolayı doğrudur, başka deyişle doğruluğunu kelime anlamlarına borçlu olan önermelerdir, postulatlar ise adı geçen anlamda ispata gerek duyulmadan kabul edilirler. Dolayısıyla aksiyomlar kendiliğinden bir anlam içerdiğinden, anlaşılmaları daha kolay ve aşikârdır.⁹

Aksiyomlardan sonra bugün teoremler dediğimiz "önermeler"¹⁰ gelmektedir. Bu teoremlerde tanım ve postulatlar kullanılarak çeşitli önermeler açıklanmış ve ispat edilmiştir.

Açıklamaya çalıştığım bu aksiyomatik sistem, ilk defa Öklid'in çalışmalarının bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Öklid, *Elementler* ile matematik başta olmak üzere tüm bilimlere aksiyomatik bir metodoloji örneği sunmuş ve kabul görmüştür. Öklid'den sonra Arşimet'in (M.Ö 287-212, Siracusa), mekanik alanındaki bulgularını *Düzlem ve Dengeler Üzerine* isimli eserinde aksiyomatik bir sistemle

⁹ Roberto Bonola, *Non Euclidean Geometry*, 1955, s.18.

¹⁰ Teklifler, propositions.

sunmuş olması ve 25 teoremini 3 postulata dayanarak ispatlaması, bunun en açık örneklerindendir.¹¹

Tarih boyunca birçok Antik ve Ortaçağ âlimi ilk üç postulatla son iki postulatı birbirinden ayırmıştır. Bunun başlıca sebebi, ilk üç postulatın geometrik şekilleri tarif eden bir çeşit "inşa etme" postulatı olması, son iki postulatın ise yargı içeren yapıları bakımından birer teorem niteliği taşımasıdır. Dolayısıyla ilk üç postulatta ispata gerek duyulmazken, dört ve beşinci postulatlar için ispatın gerekli olduğu düşünülmüştür.

V. postulat paraleller postulatı olarak da bilinir, orijinal ifadesi yukarıda da verildiği üzere "iki doğru, başka bir doğru tarafından kesildiğinde, aynı tarafa bakan açılar toplamı iki dik açıdan küçük oluyorsa, bu doğrular, bu tarafta sonsuza dek uzatıldıklarında mutlaka kesişirler" şeklinde Türkçe'ye çevrilebilir. Ancak Playfair aksiyomunda¹² söylendiği gibi, "bir doğruya o doğrunun dışındaki bir noktadan geçen ve o doğruya paralel yalnız bir doğru çizilebilir" demek, "bir üçgenin iç açılarının toplamı 180° 'dir" demek veya Nâsireddîn el-Tûsî'nin (1201-1274) varsayımı gibi "benzer ve çakışmayan üçgenler vardır" demek, V. postulatı farklı yollardan ifade etmek manasına gelir. Tüm bu tanımlar V. postulatın kendisinden başka bir şey değildir. Dolayısıyla V. postulatı ispatlamakla ona denk bir başka ifadeyi ispatlamak aynı şey demektir. Ünlü matematik tarihçisi T. L. Heath, V. postulata denk olan ifadelerin bir listesini vermiştir. Bu ifadeler şöyledir:

¹¹ Cemal Yıldırım, *Matematiksel Düşünce*, 1988, s.29.

¹² John Playfair'ın (1748-1819) meşhur ettiği, ancak Proclus'un fikrine dayanan ve birçok İslâm bilgini tarafından Playfair'den önce de kullanılan aksiyom.

1. a) Playfair aksiyomu.

b) Playfair aksiyomu'nun bir başka ifadesi olan, "aynı doğruya paralel olan doğrular birbirlerine de paraleldir" ifadesi.

2. Öyle doğrular vardır ki, aralarındaki mesafe hep aynıdır.

3. Öyle bir üçgen vardır ki, iç açıları toplamı iki dik açıya eşittir.

İç açıları 180° 'ye eşit olan bir tane üçgen bulmak, bunu tüm üçgenlere genellemek için yeterli bir koşuldur. Aynı sebepten bir dörtgenin iç açılarının toplamının 360° olduğunu söylemekle de aynı ispat hatası yapılmış olunur.

4. Verilen herhangi bir şekil için, ona benzer olan başka boyutlarda bir şekil bulunur.

Örneğin, bir üçgenin açıları sabit kalacak şekilde her kenarının iki katının alınmasıyla oluşacak bir başka üçgen, ilk üçgene benzer olacaktır. Bu varsayım Nâsireddîn Tûsî'nin varsayımıdır.

5. Dik açının üçte ikisinden küçük (60° 'den küçük) bir açının içindeki herhangi bir noktadan, açının her iki kolunu da kesecek bir doğru çizilebilir.

6. Aynı doğru üzerinde olmayan herhangi üç noktadan, bir çember çizilebilir.

Bu ifade, ileride bahsi geçecek olan ünlü matematikçiler, Legendre ve Bolyai'de bulunmaktadır.

7. "Eğer bir düzlem üçgenin alanının, verilen herhangi bir alandan daha büyük olmasının mümkün olduğunu kanıtlayabilirsem, tüm geometriyi kesinlikle

mükemmel bir şekilde kanıtlayabilecek konumda olacağım." (Gauss'un 1799'da W. Bolyai'ye yazdığı mektuptan alıntı)

8. Eğer bir dörtgende üç açı dikse, dördüncü açı da diktir.

Bu ifade ibn Heysem'in varsayımına dayanır.

9. Eğer iki doğru paralelse, bu doğrular ortak kesenlerinin orta noktasına göre simetrikler.¹³

V. postulata denk bu ifadeleri bilmek, ispat girişimlerini inceleyebilmek açısından çok önemlidir. Çünkü V. postulata denk bir ifade, ispatın içinde geçtiği anda ispatın geçerliliği ortadan kalkmış olur. Bu hataya *petitio principii* denir. Yüzyıllarca birçok bilgin ispatlarında V. postulata denk kabullerde bulunarak bu hataya düşmüştür. İnceleyeceğimiz ispatların çoğunda da bu hatayı göreceğiz.

Öklid'den sonra gelen matematikçilerin çoğu özellikle V. postulatı ispatlamaya çalışmışlardır. Aslında birçok Antik ve Ortaçağ âlimi, Öklid'in bu postulatın tersi olan, I. kitap 28. teoremi ispat etmesini fakat bu postulatın ispatını vermemiş olmasını yadırgamıştır. Öklid 28. teoremi V. postulata müracaat etmeden ispatlamaya çalışmış, V. postulatı ilk defa I. kitap 29. önermenin ispatında kullanmıştır.¹⁴

Kimilerine göre, V. postulatın bu kadar üzerine düşülmesinin sebebi, ifadesindeki karışıklıktan ileri gelmektedir. Bana göre bu açıklama, V. postulatın doğurduğu sonuçları bilen bizler için, bu postulatı ispata girişmiş önemli matematikçilerin sezgi gücünü hafife almaktan başka bir şey değildir. V. postulata

¹³ T. L. Heath, *The Thirteen books of Euclid's Elements*, s.220.

¹⁴ T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, c.1, s.529.

yüklenmiş daha farklı felsefî ve matematiksel anlamlar vardır. Bunlardan birisi *sonsuzluk kavramı* ile ilgilidir. V. postulattaki çizgiler sonsuza kadar uzatıldığı takdirde, ifadesi sonsuzluğun varlığını ya da yokluğunu gündeme getirmiş, V. postulatın ispatı bir manada sonsuzluğun ispatı sayılmıştır. İlerdeki bölümlerde daha detaylı anlatacağımız üzere, Simplicius (yaklaşık 500), bahsi geçen manada sonsuz kavramından haberdar olduğunu açıkça dile getirmekle birlikte, sonsuzun aslında olmadığını iddia etmektedir. Bu zatın V. postulatı hem ispata kalkışmış hem de konuyu sonsuzluğun varlığıyla ilişkilendirmiş olması, onun konuya ne derece hâkim olduğunu ve V. postulatı ispatlama girişiminin ifade karışıklığından farklı bir sebep içerdiğini açıkça gözler önüne sermektedir.

Sonsuz meselesi kendiliğinden önemli bir konu olmakla birlikte, matematiğin mahiyetini belirlemek açısından da önem taşımaktadır. Sonsuzluğun var olması ve matematiğin bununla uğraşması, matematiğin tek derdinin fizik dünya¹⁵ problemleri olmaması anlamına gelmektedir. Bu noktada matematik felsefesinin en temel sorunlarından birisi olan, matematik, fizik dünya için mi vardır yoksa onun derdi fiziksel dünyayı açıklamaktan farklı mıdır sorusuna varılabilir. Bu konunun V. postulatla esas bağlantısı, V. postulatın o döneme gelinceye kadar uğraşılmış tüm problemlerden farklı olarak, ilk defa pratik bir çözüm sunma çabasında olmayan bir ifade içermesi ve anlam taşımasıdır.

Bahsi geçen felsefî mevzuların yanı sıra V. postulat, metodolojik olarak da bir devrim yaratmış, nihayet XIX. yüzyılda ispatının imkansızlığı kanıtlandığında ve

¹⁵ Metafizik olmayan, beş duyumuzla algıladığımız dünya.

Öklid dışı geometriler¹⁶ ortaya çıktığında *postulat* kavramının tanımı değişmiştir. Önceleri *postulat*, doğruluğu apaçık, ispata gerek duyulmadan kabul edilen bir önermeyken, yalnızca bir varsayım olduğu ortaya çıkmıştır.¹⁷ Böylelikle V. *postulat* bir manada matematiğin mutlak doğruluk iddiasını da yıkmıştır.

Elementler, Yunanca yazılmasına karşın Latince'den çok önce Arapça'ya çevrilmiş, Latince'ye önce Arapça'dan, daha sonra ancak 13.yüzyılda Yunanca aslından Comphanus tarafından çevrilmiştir (Johannes Companus, bu çeviriyi Bath'lı Adelard'dan 150 yıl sonra yapmıştır ve çeviri Adelard'inkinden bağımsız değildir. Companus'un çevirisi 1482'de Venedik'te Erhard Ratdolt tarafından basılarak, yayımlanan ilk çeviri olmuştur)¹⁸. Bugün metnin elimizde bulunan ilk çevirisi, Bath'lı Adelard'ın 1120'de Arapçadan Latinceye yaptığı *Elementler* çevirisidir. Ayrıca, Cremona'lı Gerard'ın da bir *Elementler* çevirisi olduğu bilinmektedir. 12. yüzyılda Cremona'lı Gerard'ın (1114-87), Neyrîzî'nin, Öklid'in I-X. kitaplarına yazmış olduğu şehirleri çevirmesinden sonra dahi V. *postulat* meselesi Batı dünyasının ilgisini çekmemiş, bu konunun ilgiyi çekmesi, 1560'da yayınlanan Barazzî'nin Proclus şerhi'nin Latince çevirisini beklemiştir.¹⁹

İslâm Dünyasında ise el-Haccac ibn Yusuf ibn Matar'ın (786-833), ilki Harun Reşîd ve ikincisi el-Memun için olmak üzere iki tane *Elementler* çevirisi olduğunu biliyoruz.²⁰ El-Memun için yapılmış olan çeviri, bugün Leyden el yazmalarında, Neyrîzî'nin şerhi ile birlikte mevcuttur. Bir başka çeviri ise Ebû Yakup İshak bin

¹⁶ Non Euclidean Geometries (Öklid dışı Geometriler); eliptik ve hiperbolik (pangeometri) geometriler.

¹⁷ Cemal Yıldırım, s.40.

¹⁸ Thomas Heath, *Greek Mathematics*, 1921, c.1, s.373.

¹⁹ A.I.Sabra, *Optics Astronomy and Logic*, Geometry XII, s.14.

²⁰ İbn Nedim, s.634.

Huneyn bin İshak el-İbadi (ö. 910) tarafından yapılmıştır.²¹ Ayrıca Sabit ibn Kurra'nın da *Elementler*'i çevirdiği bilinmektedir.

Biz bu çalışmada, Öklid dışı geometrilere ve soyut bir matematiğe kapı açan V. postulatın İslâm Dünyasındaki yerini ve yapılmış ispat girişimlerini inceleyeceğiz. Ancak tarihsel süreci ve etkileşimi daha açık anlayabilmek için Eski Yunan'daki ispat girişimlerine göz atmakla başlayacağız.

²¹ Thomas Heath, *Greek Mathematics*, 1921, c.1, s.362.

BÖLÜM II- İSLÂM UYGARLIĞINDAN ÖNCE V. POSTULATI

KANITLAMA GİRİŞİMLERİ

İki bin yıldan fazla süre boyunca, paralel doğrular konusu matematikçilerin en çok ilgisini çeken konulardan biri olmuştur. Bu mesele Yunan'lı ve Bizans'lı bilginlerin dikkatini çekmiştir. Bu bilginler arasında, tanımları ve ispat girişimleriyle geometri tarihine yön vermiş olan bazılarından bahsedeceğiz. Aşağıda detaylı bir şekilde inceleyeceğimiz kişilerin dışında, İskenderiye'li Heron (M.S. 10- M.S. 70) ve Arşimet (M.Ö 287) de V. postulat meselesiyle ilgilenmiştir. Arşimet, paralel çizgiler hakkındaki kayıp eseri "*paralel çizgiler üzerine*"de bu konuyu etraflıca tartışmıştır.²² Ayrıca, 5. yüzyılda Aganis (bazı metinlerde Aghan, Anaritus veya Anartii olarak da geçer) isminde bir şahsin V. postulatı ispatlama girişiminde bulunduğunu, Neyrîzî'nin şerhinden öğrenmekteyiz. İspatlarının benzerliğinden ötürü Aganis geçmişte Geminus'la karıştırılmıştır. Neyrîzî şerhinde, Simplicius'un Aganis'den "bizim Aganis" olarak bahsettiğini belirtmiştir. Bu yolla bu iki bilginin tanıştıklarını ve aynı dönemde yaşadıklarını öğrenmekteyiz.

²² İbn Nedim, s.636.

a) Posidonius

Stoacı bir filozof olan Posidonius (M.Ö 135-51)²³, V. postulatla ilgili çalışmamış olmakla beraber, vermiş olduğu tanımlar arasında paralel çizgiler tanımı da bulunmaktadır. Bu tanıma göre paraleller, aynı düzlemde, yakınsak veya ıraksak olmayan doğrulardır. Bu doğrular üzerindeki her noktadan çizilen dikler birbirine eşittir. T. L. Heath, bu tanımın Heron'da²⁴ bulunduğunu belirtir. Posidonius'la ilgili en önemli nokta, eşit mesafe (equidistant) kavramından söz eden ilk kişinin o olmasıdır.²⁵

b) Geminus

Geminus (M.Ö. yaklaşık 77)²⁶, Roma döneminde yaşamış önemli bilginlerden Proclus'un çok itibar ettiği bir zattır. Proclus, Öklid'in *Elementler* kitabına yazdığı şerhte, Geminus'tan sık sık bahseder. Geminus, paralel postulatını ispatlama girişiminde öncelikle paralelleri yeniden tanımlayarak işe başlamıştır. Yeni tanımı tıpkı Posidonius'unki gibi eşit mesafe kavramına dayanmaktadır. Geminus'un V. postulat ispatı, "aralarındaki uzaklık eşit ve sabit olan doğrular paraleldir" tanımına dayanmaktadır. Bu tanım Posidonius'un tanımına çok benzemektedir, ancak Geminus'un bu tanıma esas katkısı, doğrular arasındaki uzaklıktan ne kastettiğini netleştirmesi ve bu uzaklığı "en kısa mesafe" olarak tanımlamasıdır. Geminus'un paralel postulatını ispatlama girişimi ustaca olmasına rağmen başarılı olamamıştır. Ancak günümüze ulaşan ilk teşebbüs olması açısından ilginçtir. Neyrîzî

²³ Ποσειδώνιος

²⁴ Ἡρων ὁ Ἀλεξανδρεὺς

²⁵ Bonola, s.2.

²⁶ Γεμῖνος

de paraleller postulatına yazmış olduğu şerhte Geminus'un ispatına yer vermiştir. Bu şerh bu gün mevcuttur.²⁷ Geminus öncelikle aşağıdaki tanımlamaları yapmıştır:

I. İki doğru arasındaki uzaklık, ikisine de dik olan uzaklıktır.

II. Eğer bir doğru diğer iki doğruyu dik olarak kesiyorsa (o doğrulara temas ettiği noktalarda diklik oluyorsa), dik kesilen iki doğru birbirlerine paraleldir ve aralarındaki uzaklık ikisinin arasındaki uzaklıktır. Bu *reductio absurdum* (olmayana ergi) yardımıyla gösterilir.

III. Öklid'in I. 27 ve I. 28 önermeleri; Eğer iki doğru paralelse, bu doğruları kesen başka bir doğru ile bu kesilen iki doğrunun oluşturduğu ters açılar eşittir.

IV. Öklid'in I. 29'u yani I. 28'in tersi, ki bu da olmayana ergi metodu ile kolayca ispatlanır.

Tüm bu tanımlardan sonra Geminus'un V. postulat ispatının son haline gelebilmesi için hala paralellerle ilgili olan Öklid'in I. 30 ve I. 31 önermelerine ve paralel kenarlarla ilgili ilk iki önerme olan I. 33-34'e ihtiyacı vardır.

Geminus'un ispatı:

AB ve CD, EF ile kesilen doğrular olsun. Varsayalım ki BEF ve EFD açılarının toplamı iki dik açıdan küçük olsun. FD üzerinde herhangi bir H noktası seçelim ve o noktadan AB'ye paralel bir HK doğrusu çizelim. HK, EF'yi K noktasında kessin. Eğer EF'yi L noktasında ikiye bölersek ve aynı şekilde LF'yi

²⁷ Besthorn ve Heiberg, "Euclidis Elementa Ex Interpretatione Al-Hadschdschadschii Cum Commentariis Al-Narizii", *Islamic Mathematics and Astronomy*, 1997, c. 14, s. 117- 131.

Daha sonra FON ve ROP üçgenlerinde, FON ve ROP açıları eşit, NFO ve

koşuluyla $RG=2FN=FM$ 'dir. Aynı şekilde $SU=2FM=FL$ olduğundan ve LS 'nin FG ya da AB 'ye paralel olduğunu da ispatlarız.

Son olarak, FLS ve QVS üçgenlerine baktığımızda, bu üçgenlerin FS ve SQ kenarları eşittir ve $QV=FL$ olduğundan, $QV=LE$ sonucuna varırız. Öte yandan EL ve QV eşit ve paraleldir. Dolayısıyla EQ ve LV 'de (Geminus öyle der) yani AB , Q noktasından geçer.²⁸

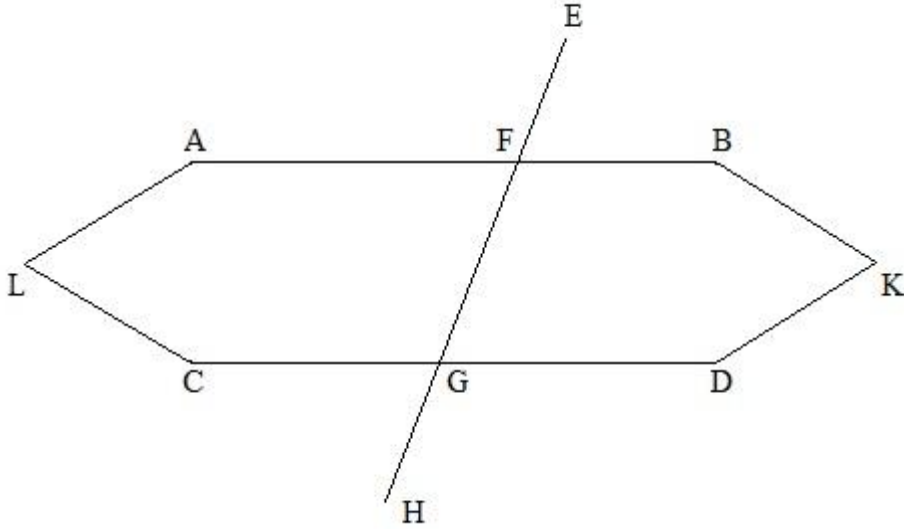
T. L. Heath'in bu konuda yorumu şöyledir; " EQ ve AB (ya da EB) gerçekten de LV 'ye paraleldir. Geminus, EQ ve AB 'nin çakışık olduğunu varsaymıştır ki bu bir başka deyişle verilen bir noktadan, bir doğruya paralel yalnız bir doğrunun çizilebileceğini varsayan Playfair aksiyomunun kendisidir."²⁹ Playfair aksiyomuna denk bir ifade kullanmak, V. postulata denk bir ifade kullanmaktır ki bu da ispatı geçersiz kılar.

²⁸ T.L Heath, *A History of Greek Mathematics*, s. 228-229.

²⁹ T.L Heath, *A History of Greek Mathematics*, s. 230.

c) Batlamyus

Batlamyus (M.S 85-165)³⁰, öncelikle Öklid'in I. kitabının 28. teoremini ispatlamıştır. Daha sonra I. kitabın 29. teoreminin ispatına kalkışmıştır ki bu iki teoremden de bir çıkarım yaparak V. postulatın ispatına ulaşmıştır.



I.28 'i ispatlamak için şekil 2 deki gibi, iki düzgün AB ve CD doğruları ve bu doğruları kesen EFGH doğrusunu almıştır. Burada ispat edilmesi gereken şudur: Eğer BFG ve FGD açılarının toplamı iki dik açıya eşitse, AB ve CD doğruları paraleldir. Dolayısıyla kesişmezler. AFG açısı, BFG açısının bütünleyeni ve FGC açısı da, FGD açısının bütünleyeni olduğundan, AFG ve FGC açılarının toplamı da iki dik açıya (180°) eşittir.

Daha sonra ispatına şu şekilde devam etmiştir. Varsayalım ki, FB ve GD, BFG ve FGD açılarının toplamını iki dik açı yapısınlar ve K noktasında buluşsunlar (hem iç açılar toplamı 180° olsun hem de FB ve GD, K noktasında kesişsin). Sonra

³⁰ Κλαύδιος Πτολεμαῖος [Claudius Ptolemaios], Ptolemy.

aynı şekilde FA ve GC doğruları da AFG ve FGC açıları toplamı iki dik açı olacak şekilde bulunsunlar ve L noktasında kesişsinler.

Heath bu noktada Batlamyus'un iddiasına bir not düşmüş ve onun bu konuyu daha iyi belirtmiş olması gerektiğini söylemiştir. Bu düşüncesini "sadece iki toplamın eşit olduğunu değil, açılarının da çiftler halinde eşit olmaları gerektiğini belirtmesi gerekirdi" şeklinde ifade etmiş ve açıklamıştır. Batlamyus'un AFG'nin FGD'ye ve FGC'nin BFG'ye olan eşitliğini belirtmesi gerektiğini savunmuştur.

Daha sonra Batlamyus KFG üçgenini ele almış ve şekli FG doğrusu sabit kalacak şekilde katlamıştır. Bu durumda sırasıyla FK, GK'nın ve GC, FA'nın üzerine düşecektir ve GC ve FA K'nın olduğu yerde kesişeceklerdir. Sonuç olarak LABK ve LCDK doğruları bir alan oluşturacaktır ki bu imkânsızdır. Yani AB ve CD herhangi bir tarafta kesişmezler ve dolayısıyla paraleldirler.

Bu da I. 28'in ispatını vermiş olur. Bu teoremden sonra Batlamyus I. 29'un ispatına geçmiş ve şu şekilde yapmıştır.

AB ve CD paralel iki doğru olsun ve FG doğrusu bu paralel iki doğruyu birer noktada kessin. Bu durumda AFG açısı ve CGF açısının toplamının iki dik açıya eşit olduğunu ispatlamak icap eder. Eğer bu toplam iki dik açıya eşit değilse, iki seçenek vardır. (1) İki dik açıdan büyük ya da (2) ondan küçük olmalıdır. Batlamyus'un söylemek istediklerini günümüz notasyonları yardımıyla ifade edelim;

1) Eğer $AFG + CGF > 180^\circ$ ise, diğer taraftaki açılarının toplamı yani $BFG + FGD < 180^\circ$ olmalıdır. Fakat AF ve CG artık paralel değildir, dolayısıyla FB ve GD de paralel olmayacaktır. Yani, eğer FG doğrusu AFG ve FGC toplamını 180° 'den büyük yapıyorsa, BFG ve FGD açılarının toplamını da 180° 'den

büyük yapmalıdır. Bu, paralelliğin korunması için gereklidir. Fakat yukarıda bu açı çiftlerinin toplamının 180° 'den küçük olduğunu gördük ki bu imkânsızdır. Sonuç olarak AFG ve CGF toplamı iki dik açıdan büyük olamaz.

2) Benzer şekilde $AFG+CGF<180^\circ$ olamayacağını da gösterebiliriz.

O halde $AFG+CGF=180^\circ$ (iki dik açı) olmalıdır.

Bu ispattaki yanlış düşünce Heath'e göre; Batlamyus'un "AF ve CG paralel değildir, dolayısıyla FB ve GD de paralel değildir" sözleri altında yatar. Batlamyus ispatının son adımında V. postulatın I. 28 ve I. 29'dan çıkarımını yapmıştır;³¹

Varsayalım ki düzgün doğruları kesen başka bir doğrunun oluşturduğu, aynı yöne bakan açılar toplamı iki dik açıdan küçük olsun ve açılar küçük olduğu tarafta kesişmesinler. Sonra daha ziyade açılar 180° 'den büyük oldukları karşı tarafta da kesişmesinler. Sonuç olarak bu doğrular iki tarafta da kesişmezler dolayısıyla bu doğrular paraleldir. Fakat eğer açıları kesen doğru ile yaptığı açı iki dik açıya eşitse bu varsayımımızla çelişir dolayısıyla doğrular kesişmezler.

d) Proclus

Proclus (M.S 410-485)³², Bizans'ta 5.yüz yılın başlarında Helenistik çağ kapanmak üzereyken doğmuştur. Neoplatonist bir filozoftur. Öklid'in *Elementler* kitabına yazdığı şerhte V. postulata bir bölüm ayırmıştır. Bu bölümde öncelikle V. postulatı vermiş ve V. postulatın yapısını diğer postulatlarla bağlı kalması açısından bir teoreme benzetmiştir. Proclus'a göre, bu teorem (V. postulat) bir çok sorunu beraberinde getirmektedir. Ayrıca Batlamyus'un bu sorunları kitaplarından birinde çözümlemeye çalıştığını belirtmiştir. *Commentarii in Primun Euclidis Elementorum*

³¹ T.L Heath, *A History of Greek Mathematics*, s.297.

³² Πρόκλος

Librum kitabında Batlamyus'un bir ispatını alıntılar, fakat bundan memnun olmayarak kendisi bir ispat dener.³³ Proclus'a göre bu sorunların çözümü için birden çok yeni tanıma ihtiyaç duyulmaktadır. Bahsettiği bir diğer isim de Geminus'dur. Proclus, Geminus'un aksiyom ve postulat arasındaki farkı, teorem ve problem arasındaki farka benzettiğini belirtmiştir.³⁴ Proclus, Geminus'un çalışmasından ilham alarak tartışmayı bir ileri safhaya taşımış, hiperbol ve konkoidin asimptotlarına göre davranışların, Öklid'in "aynı düzlemde olan ve uzatıldıkları takdirde kesişmeyen çizgiler paraleldir" tanımına uyduğunu ve Öklidçi anlayışa göre paralel sayılabileceklerini, ancak Posidonius'un "eşit mesafe" tanımına uymayacaklarını ve bu manada paralel sayılmamalarının çelişkili (paradoksal) olduğunu belirtmiştir.³⁵ Proclus'a göre, Öklid'in bu teoremin tersini kanıtlaması fakat V. postulatı ispatlamaması dikkat çekici bir konudur. Yazmış olduğu şerhte Öklid'in bu postulatı ispat etmediğini ve postulatların tanımlarından ötürü ispat edilmeyişini, aşikâr olarak kabul edilmelerine bağlı oluşunu eleştirmiştir.³⁶

Ayrıca Proclus, meşhur *Playfair aksiyomu*'nu ilk defa gündeme getiren kişidir. John Playfair'ın (1748-1819) bu aksiyomu yeniden keşfetmesiyle onun adıyla anılan aksiyom aslında Öklid'in V. postulatına denk bir aksiyomdur; bir doğruya dışındaki bir noktadan yalnız bir tane doğru çizilebileceği fikrini ilk olarak Proclus iddia etmiştir ki bu da Playfair aksiyomunun kendisidir. Proclus bu aksiyomun kanıtını da vermiştir.³⁷

³³ Bonola, s. 2-7.

³⁴ David Eugene Smith, *History of Mathematics*, 1958, s.280.

³⁵ Bonola, s.3.

³⁶ Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, 1992, s.151.

³⁷ Şafak Alpay, "Paralellik Aksiyomu Üzerine", *Matematik Dünyası*, 1996-1, s.2-6.

e) *Simplicius*

Simplicius (Cilicia, yaklaşık 500, ölümü yaklaşık 533)³⁸, Neoplatonist bir filozof olan Simplicius'un Öklid'in *Elementler*'inin 1. kitabına yazdığı şerhin ne orijinali, ne de orijinalinin Arapça çevirisi elimizde bulunmaktadır. Biz Simplicius'un bu çalışmasından, ibn Hatim el-Neyrîzî'nin (9.yy), Öklid'in *Elementler*'ine yazdığı şerh dolayısı ile haberdar olmaktadır. Neyrîzî'nin şerhi, elementlerin ilk çevirilerinden olan ibn Haccac ibn Yusuf ibn Matar'ın *Elementler* çevirisine ve Simplicius'un Öklid'in *Elementler*'ine yazdığı şerhin Arapçasına dayanır. Simplicius'un çalışmasının Arapçasının kimin tarafından çevrildiği belli değildir. Neyrîzî kendi çalışmasının sonunda "Simplicius'un Öklid'in *Elementler* kitabının 1. kısmına yazdığı şerhin sonucudur" ifadesini kullanması, onun çalışmasının en azından tercümesini görmüş olduğunun en önemli kanıtıdır.

A.I Sabra, "*Simplicius's proof of Euclid's parallels postulate*" (Simplicius'un Öklid'in paralel postulatı ispatı) makalesinde³⁹ Simplicius'u Neyrîzî'nin çalışması üstünden titizlikle inceleyerek aktarmaktadır. Bu makalesinin asıl amacı Neyrîzî'nin çalışmasından Simplicius'un çalışmasını ayıklamak ve bu güne kadar aslı görülmemiş bir çalışmayı su yüzüne çıkarmaktır. Biz Neyrîzî'nin çalışmasına ileriki bölümlerde detaylı bir şekilde yer vereceğimizden, bu incelemeye daha sonra tekrar değinmemiz daha uygun olacaktır. Ancak aynı kaynakta Simplicius'un postulatlar üzerine Öklid'le bir söyleşi bulunmaktadır. Bu söyleşi, Simplicius'un postulatları ve özellikle V. postulatı inceleme sebebinin, matematiğin o güne kadar ki gündelik

³⁸ Σιμπλίκιος

³⁹ A.I. Sabra, "Simplicius's Proof of Euclid's parallel postulate", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 32, London 1969, s. 1-24.

kullanım sınırlarının dışına çıkışını ve pragmatik kaygılardan sıyrılarak reel dünyadan kopuşunu incelemek olduğu izlenimi vermektedir. Bu diyalog şöyledir;

Öklid: Postulatlar beş tanedir.

Simplicius: Öklid, tanımlanan şeylerin her birinin özünü (cevherini) gösteren tanımları ifade ettikten sonra postulatları sıralamaya geçti. Postulatlar genellikle var olmayan, fakat öğrencilerden var kabul edilmesi istenen, öğretmenle öğrenci arasında yer alan ve var olan izin verilebilir hipotezler olarak kabul edilen şeylerdir.

Bu noktada Simplicius Arşimet örneğiyle devam eder ve Arşimet'in ünlü mekanik postulatını ve dünyayı yerinden oynatabileceği iddiasını, var olmayan, ancak var kabul edilen kurallara örnek gösterir. Ona göre postulat olarak verilmiş şeyler imkânsız olabilir, ancak öğretmenler mekanik öğretirken onu var kabul ederler. Bu noktada açıkça görüyoruz ki Simplicius o dönemde, matematiğin ve fiziğin, bu dünyayı açıklamak için kullanılmalarına rağmen, gözle görülmeyen (yaşadığımız dünyada fiziksel olarak var olmayan) gerçekleri de açıklayabildiklerinin farkına varmıştı. Bu tür bir matematiği yok saymak yerine ispat yoluyla anlama çabasına gittiği açıktır. Simplicius sözlerine şöyle devam etmektedir;

"Bazı geometrik meseleler de garantilenmek istenmiştir. Ancak biri çıkıp şunu söyleyebilir, ben düz bir çizgiyi denizin yüzeyinden uzatamam diyebilir, ben de uzatamam. Ben de düz bir çizgiyi sonsuza kadar uzatamam, çünkü sonsuz zaten yok. Fakat bunu söyleyenler öncelikle postulatların sadece geometrik materyal olduğunu düşünenlerdir. Fakat o zaman dik açıların eşitliği meselesine ne diyecekler? ⁴⁰ Maddeyi açıklamayan bu postulatı nasıl kurarlardı? Ve aynı şekilde bundan sonrakini

⁴⁰ Öklid'in IV. postulatı; Tüm dik açılar eşittir.

nasıl kurarlar? Dolayısıyla şöyle söylemek daha doğrudur ki, postulatlar öğrenciler tarafından ilk duyulduklarında kabul edilmeyen şeylerdir ve ispat esnasında gerek duyulan şeylerdir. Bazıları imkânsızdır ve dolayısı ile ilk üçü gibi kabul edilmezler, fakat öğrenme süreci içinde gereklidirler. Diğerleri (dört ve beşinci postulatlar), öğretmenler tarafından bilinir ve kabul edilmiştir. Fakat öğrenciler başlangıçta uzak dururlar ve aşikâr bulmazlar. Biz onlardan bunları kabul edip saymalarını isteriz. İlk üç faydalı postulatı ispatlamaya izin verilmez. Fakat sonraki ikisinin kesinlikle ispata ihtiyacı vardır.⁴¹

Tüm bu diyaloglar açıkça göstermektedir ki, V. postulatın bu kadar üzerinde durulması, bir ifade karışıklığı meselesinden ziyade, matematiğin temelinde bulunan sonsuzluk kavramının algılanmasının güçlüğünden ileri gelmektedir.

⁴¹ A.I. Sabra, *Optics Astronomy and Logic, Geometry*, XIII, s. 2-3.

BÖLÜM III- İSLÂM UYGARLIĞINDAKİ V. POSTULAT ÇALIŞMALARI

A. Genel Bilgi

Şüphesiz V. postulatın matematik dünyasına en büyük katkısı Öklid dışı geometrilere açtığı kapı olmuştur. Öklid dışı geometrilerin bulunması, matematikte atılmış en önemli adımlardan biridir. V. postulat, dolayısıyla Öklid dışı geometriler, hem matematiksel manada hem de geometri ve matematiğin felsefî anlamlarının yerleşmesi bakımından mihenk taşı olmuştur. Geometri bilimini sentetik bir bilim olmaktan çıkarıp analitik bilimler kategorisine sokan, Öklid'in bu sıra dışı postulatı olmuştur.

Geometrinin evrimleştiği bu süreçte İslâm Dünyası âlimlerinin katkısı yadsınamayacak kadar büyüktür. İslâm Dünyası âlimleri, yalnızca kendilerinden önceki bilgileri korumak ve aktarmakla yetinmemiş, aynı zamanda yazdıkları şerhlerle bu konunun gelişmesine katkı sağlamışlardır. Batı dünyasında Öklid dışı geometrilerin kurucuları olarak adlandırılan bilim adamlarına kaynak olmuşlar, Pasch ve Playfair gibi meşhur aksiyomları Batılı meslektaşlarından çok daha önce kullanmışlar, fakat hak ettikleri övgüyü toplayamamışlardır. Biz bu tezde İslâm Dünyası bilginlerinin bu bilimsel süreçteki yerinin önemini vurgulamaya çalışacağız. Bilim her ne kadar bir millete tahsis edilemese ve elde edilen sonuçlar kimin ne bulduğundan daha mühim olsa da, tarihsel süreçte yapılan katkılar göz ardı edilmemeli ve azımsanmamalıdır.

İslâm Dünyasında geometriye zaman ayırmış âlimlerin hemen hepsi V. postulat meselesine takılmıştır. Bu postulatla uğraşma sebepleri, Ömer Hayyâm'ın da açıkça belirttiği gibi, bu postulatın karışık ifadesine ve onu diğer postulatlardan

ayırır yapısına bağlıdır. Ayrıca, Öklid'in bu postulatın tersine denk olan teoremi ve çok daha az karmaşık olan bir sürü teoremi ispatlayıp, bu postulatı ispatsız olarak vermesi, V. postulatla uğraşanların içine sinmemiştir. İslâm Dünyasındaki ilk ispat girişimi Cevherî'ye aittir. Sonra sırasıyla Neyrîzî, Sabit ibn Kurra, ibn Heysem, Ömer Hayyâm, Nâsireddîn Tûsî ispat girişimlerinde bulunmuşlardır. Biz bu isimleri tek tek inceleyecek ve ispat girişimlerini sırasıyla sunacağız.

Bu isimlerin dışında Ebû 'Ali ibn Sînâ (980-1037), *Dânişnâme* adlı eserinin geometri ile ilgili olan bölümünün ikinci kısmını paraleller kuramına ayırmıştır. İbn Sînâ bu bölümün girişini şöyle yapmıştır; "Ayrı çizgiler, birinin ucu diğerine eğimli olacak şekilde yerleştirilebilirler, eğer bu yönde uzatılırlarsa kesişeceklerdir. Öteki yönde kesişmeyeceklerdir." İbn Sînâ bir ispat vermemiş olsa da, paralel çizgiler arasındaki mesafeyi sabit kabul ederek V. postulatın doğruluğunu savunmuştur. Ancak eşit mesafe kavramını kabul ederek, paraleller postulatını savunduğundan ve bu iki durum aslında aynı şeye (V. postulat) denk bir ifade olduğundan, hataya (*petitio principii* hatası) düşmüştür.⁴²

El-Bîrûnî (973-1048) de, paralel çizgiler kuramıyla ilgilenmiştir. Kendi hazırladığı eserlerine ilişkin listede *Makale fî 'enne levâzım teczî el-makâdir ilâ lâ nihaye karîbe min emr el-hatteyn ellezeyn yukreben ve lâ yultakiyen fî el-istib* (Varlıkların miktarlarını sonsuza kadar bölerken ki durumun, hareket esnasında birbirine yaklaşan ama birleşmeyen iki düz çizginin durumuna benzediğini gösteren kitap)⁴³ diye bir kitap vardır. Bîrûnî'nin çalışmasının son zamanlarda keşfedilmiş bir parçasında, Yakup el-Kindî'nin (801-873), paralel çizgilerin var olduğuna dayanarak

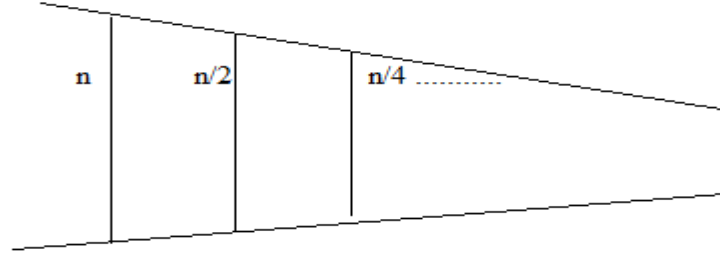
⁴² B.A Rosenfeld, s.58.

⁴³ "The property of quantities to be divided to infinity is similar to the situation with two straight lines approaching each other but not meeting"

niceliklerin sonsuza kadar bölünebileceğini kanıtladığı bir çıkarımı bulunmaktadır. Bîrûnî'nin eserinin bu parçası, Kindi'nin bu konudaki kendi görüşlerini de ihtiva etmektedir.⁴⁴

Yakup el-Kindi'nin çalışmasındaki ana fikir ve Bîrûnî'nin bu eseri, İslâm Dünyasında V. postulatın neden bu kadar önem teşkil ettiğinin cevabıdır. Yazımızın başında da değindiğimiz gibi, bu konunun üzerinde bu kadar durulmasının sebebi V. postulatın ifadesindeki karışıklık olabilir. Fakat bana göre, ifade, dönemin en büyük matematikçilerinin, âlimlerinin anlayamayacağı kadar karışık değildir. İslâm Dünyası âlimlerinin karışık ifade yüzünden bu postulatla uğraştıklarını söylemek, onların dehasını hafife almak olur. Tezimin başından beri aklımı kurcalayan bu mesele, nihayet Bîrûnî'nin eserinin ismiyle açıklığa kavuşmuş oldu. İslâm Dünyasının aklını esas kurcalayan konu, büyük ihtimalle şuydu: İki doğru birbirine yaklaşırken aralarındaki mesafe sürekli azalıyordu. Varsayalım ki bu mesafe sürekli yarılsın, bu işlemi sonsuza kadar yapabileceğimiz için, bu iki doğru aslında bir türlü kavuşmuyordu. Dolayısıyla V. postulatı ispat etmek, niceliklerin nereye kadar bölünebileceğine de ışık tutabilirdi. Bu anlamda V. postulat felsefi, metodolojik, geometrik ve cebirsel bir problemli.

⁴⁴ Roshdi Rashed, *Encyclopedia of the History of the Arabic Science*, c. 2, s. 468.



Paralleller postulatının ispatını vermiş bir başka âlim de Hüsameddin el-Salar'dır (ö.1262). Salar'ın bir dönem Harezmi'de çalıştığı bilinmektedir. Moğol istilasından sonra Cengiz Han'ın, Hülâgû Han'ın ve ardıllarının hizmetine girmiştir. El-Salar, *Mukaddime li-tebyîn el-muşâdere elleti zekaraha Uklidis fî şadr el-makâle el-ûlâ fî ma yete'alleke bî-l-hutût el-mutevâziye* (Öklid tarafından birinci kitabın başında verilen postulatın, ki bu paralel postulatıdır, ispatı için verilen öncüller) eserinde bu postulatın bir ispatına yer vermiştir. Ancak çalışması Hayyâm'ın çalışmasına çok benzerdir ve onu geliştiren niteliktedir. Örneğin, Salar'ın ilk kabulü, Hayyâm'ın ispatının birinci önermesiyle çakışmaktadır. Burada Salar, Hayyâm gibi Hayyâm - Saccheri dörtgenindeki üst açının mahiyetiyle ilgilenmiş ve şöyle demiştir; "iki çizgi arasındaki uzaklık ya da bunlar üzerindeki iki nokta arasındaki uzaklık, bu iki çizgiyi birleştiren ve bunlarla iki eşit açı yapan büyüklük ile tanımlanmıştır." Yani Salar iki çizgi arasındaki uzaklık terimiyle Hayyâm'la aynı anlamı kastetmektedir. Salar'ın ikinci kabulü ispatının kalbidir, üçüncü önermesi ise Hayyâm'ın yedinci önermesindeki iddialardan biriyle özdeştir. Salar'ın dördüncü kabulü Hayyâm'ın üçüncü teoremiyle, beşinci kabulü ise Hayyâm'ın dördüncü teoremiyle çakışmaktadır. Altıncı kabulü ise çok dikkat çekicidir ve ifadesi şöyledir; "bir noktadan çıkarak birbirlerinden uzaklaşan, dik olan veya olmayan bir açıyı sınırlandıran iki çizgi sonsuza uzatıldığında bunlar arasındaki mesafe herhangi bir

mesafenin ve verilen herhangi bir büyüklüğün bir katını sonsuz bir şekilde aşacaktır." Bu önerme, Cevherî'nin 31 ve 32. önermelerine çok yakındır. Salar'ın paralel postulatı ispatı Hayyâm'ın sekizinci önermesinin ispatıyla aynıdır.⁴⁵ İlerdeki bölümlerde Hayyâm ve Cevherînin teoremlerine ve ispatlarını detaylı bir şekilde yer vereceğiz.

El-Tûsî'nin adına ithafen yazılmış olan bir eser mevcuttur ve *Sahte Tûsî'nin Öklid incelemesi* olarak bilinir. Bu eserin yazarı meçhuldür, kimileri eserin Nâsıreddîn Tûsî'nin bir öğrencisi tarafından yazıldığını iddia ederken, kimileri de oğlu Sadreddîn Tûsî tarafından yazılmış olmasının daha muhtemel olduğunu savunmaktadır. Bu eserde V. postulat yerine başka bir önerme kullanılmıştır, bu V. postulattan bağımsız ve ispatlaması kolay bir önermedir. Ancak sonra sahte Tûsî de *petitio principii* hatasına düşmüştür. Hem Öklid sisteminin aksiyom ve postulatlarını hem de elementlerdeki birçok önermenin ispatını yeniden elden geçirmiştir.

Bu isimlerin dışında, el-Tûsî'nin öğrencisi Kutbiddîn Şîrâzî (1236-1311), yazdığı ansiklopedik bir çalışma olan *Durra el-Tac li-Gurre el-Dibâc* adlı kitabın geometri bölümünde Öklid'in postulatlarının varlığına da ispatına da yer vermiştir. Ömer el-Ebherî (ö.1262), *Islah el-Usul* kitabında bu konuya değinmiştir. Son olarak Alâeddin el-Hanefî'nin ve Muhyiddîn el-Magrîbî'nin (1220-1238, Endülüs) de konuyla ilgili çalışmaları olduğundan haberdarız.

Şimdi geometri bilimine yön veren, İslâm Dünyasındaki V. postulat ispat girişimlerinden günümüzde mevcut olanları sırasıyla inceleyelim.

⁴⁵ B.A Rosenfeld, s.71-73.

B. İslâm Uygarlığında V. Postulat İspat Girişimleri

a) El-'Abbâs ibn Sa'îd el-Cevherî

9. yüzyılın ilk yarısında⁴⁶ Farab'a yakın Cevher kasabasında (bugünkü Kazakistan'da) doğmuş ve Bağdat'ta yetişmiş matematikçi ve astronomdur.⁴⁷ İbn Nedim (M.S yaklaşık 935) Cevherî'nin konumuzla ilgili iki kitabından bahsetmiştir: *Kitâb Tefsîr Kitâb Uklîdis* (Öklid'in Elementler'inin tefsiri)⁴⁸ ve *Kitâb el-Eşkâl elletî zadehâ fî'l-makâle el-ülâ min Uklîdis* (Öklid'in Elementler'indeki I. kitabın teoremlerine ek).

İbn Kıftî (yaklaşık 1172- 1248), bu kitaplara ek olarak Cevherî'nin *Kitâb el-zij*'inden (Astronomik tablolar kitabı) bahsetmiştir. Bu eserlerden hiçbirisi günümüze intikal etmemiştir. Cevherî, Abbasi Halifesi Memun'un (813- 833) hizmetinde astronomluk yapmış ve bu alanda birçok çalışmaları olmuştur. Ancak İbn Nedim'e göre Cevherî en çok geometri çalışmıştır.⁴⁹

Nâsireddîn Tûsî (1201- 1274) de, Öklid'in paraleller teorisine adanmış eseri *el-Risâle'l şafiye 'an el-şekk fî'l-hutût el-mütevâziye*'de Cevherî'nin *Islâh li-Kitâb el-Usûl*'üne atıfta bulunmuştur. Bu kitap, İbn Nedim ve İbn Kıftî'nin bahsetmiş olduğu *Tefsir* olabilir. El-Tûsî'ye göre, Cevherî *Elementler*'e ekler yapmıştır. Buna göre, tam bir ispat vermemiş olan Cevherî, *Elementler*'in 27. teoreminden sonra altı yeni teorem eklemiştir. Tamamı paralellerle ilgili olan bu eklerin sonuncusunda⁵⁰ V. postulat'a ulaşılmıştır. Tûsî, Cevherî'nin yapmış olduğu tüm eklerle *Elementler*'in

⁴⁶ B.A Rosenfeld, s. 46.

⁴⁷ B.A Rosenfeld, E. İhsanoğlu, *Mathematics, Astronomers and other Scholars of Islamic Civilisation and their Works (7th- 9th c.)*, 2003. s. 26- 27.

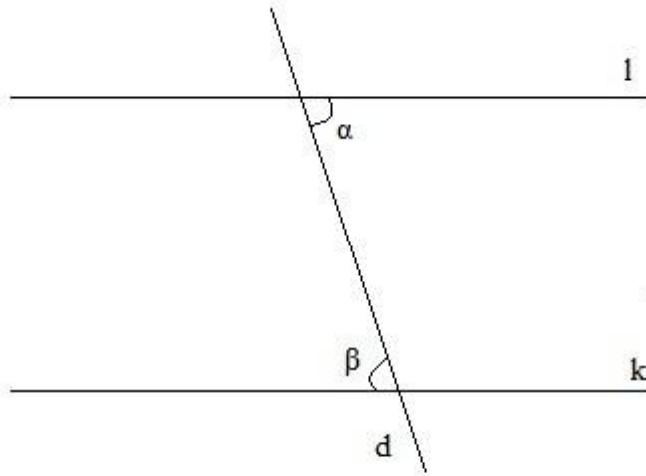
⁴⁸ İbn Nedim, s. 647.

⁴⁹ Ferruh Müftüoğlu, "Cevherî", *İslâm Ansiklopedisi*, Türkiye Diyanet Vakfı, c. 7, s. 458.

⁵⁰ Cevherî'nin 1. eki *Elementler*'e eklenmiş haliyle 28. teorem ve 6. ve buradaki son eki 33. teoreme denk gelir.

elli teoreme kadar genişlediğinden bahsetmiş, fakat bunlardan paralel çizgilerle ilgili olan altı tanesini vermiştir. Cevherî'nin V. postulat ispatı olarak kabul gören bu altı teorem, Ortaçağ İslâm Dünyasında yapılmış V. postulatı ispat çalışmalarının ilki olması bakımından önemlidir.⁵¹ Bu altı teorem şunlardır.

Teorem I: Eğer iki doğru (k ve l doğruları) üzerine düşen bir başka doğru (d doğrusu), bu doğruları (k ve l) iç ters açıları birbirine eşit olacak şekilde kesiyorsa, bu doğrular birbirine paraleldir. Böyleyse birinci doğru (l doğrusu) üzerinde bulunan her noktanın, ikinci doğru (k doğrusu) üzerinde ona karşılık gelen (nazıra) noktalara olan uzaklığı aynıdır (birinci doğrudaki birinci nokta ikinci doğrudaki birinci noktaya, birinci doğrudaki ikinci nokta ikinci doğrudaki ikinci noktaya vb).

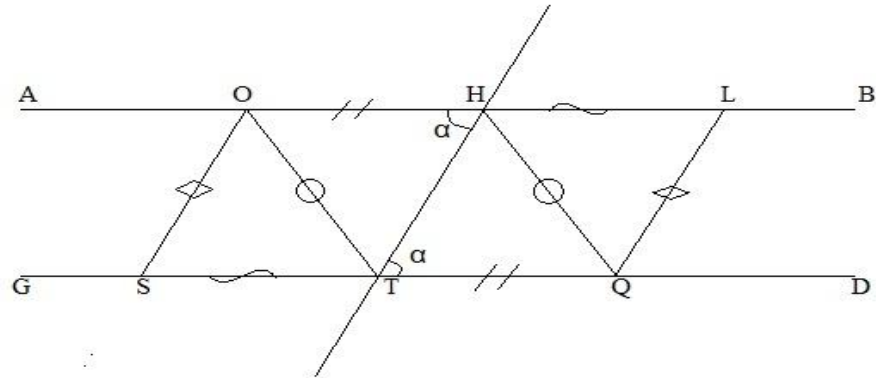


Bu teoremi iki kısım halinde incelemek faydalı olacaktır.

⁵¹ A.I. Sabra, “Al-Jawharî”, *DSB*, c.7, s. 79- 80.

a) Eğer $\alpha=\beta$ ise k ve l paraleldir. Bu kısımda bir problem yoktur, zaten bu kısım Öklid'in 27. teoreminin aynısıdır. Daha önceden bilindiği üzere ters açıların eşitliği paralellik manasına gelmektedir ve V. postulatla bir ilgisi yoktur.

b) l doğrusundaki her bir noktanın k doğrusu üzerinde ona tekabül eden noktaya uzaklığı hep aynıdır. Cevherî'nin bu hükümle ne kastettiği açık değildir. Eğer burada kastedilen uzaklık, iki doğru arasındaki dik uzaklıksa, bu V. postulata denk bir ifadedir. Dolayısıyla kastettiği, dik uzaklık olmayabilir. Bu kısmı ispatlamak için Cevherî aşağıdaki şekildeki gibi bir yol izlemiştir.

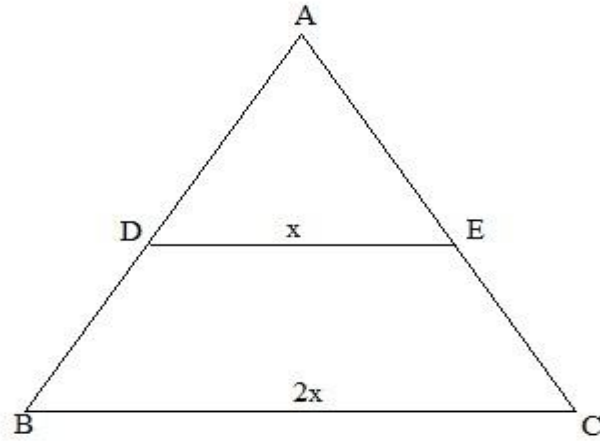


HO= TQ ve OHT açısı HTQ açısına eşit olsun. $|QH|=|TO|$ olduğundan, kenar açı kenar benzerliğinden HOT üçgeni ve TQH üçgeni birbirine denk olur. Daha sonra Cevherî HL=TS alır ve yine benzer şekilde TOS ve HQL üçgenlerinin benzerliğini gösterir. Sonuç olarak OS = QL uç noktalarından OL ve SQ olarak birleştirildiğinde OL=QS olacaktır.⁵²

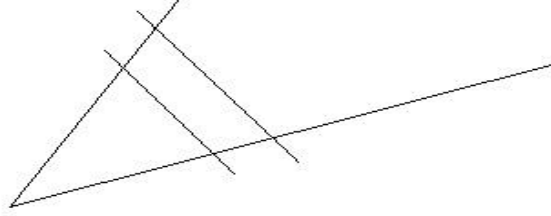
⁵² A.I. Sabra, DSB, c.7, s. 80.

Bu ispat Öklid ve Öklid dışı geometrilere geçerlidir. Ancak ispatlanmaya çalışılan teoremle bağlantısı çok zayıftır. Bunun sebebi orijinal kaynağın elde olmaması olabilir.

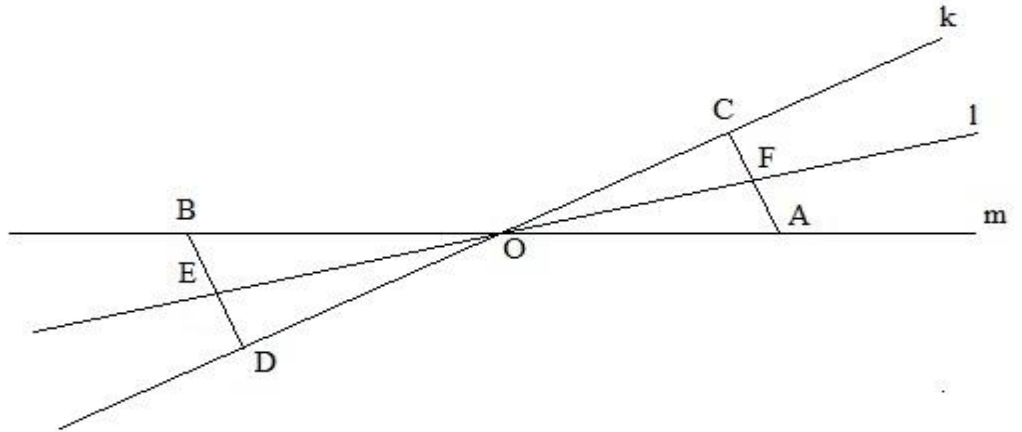
Teorem II: Eğer bir üçgenin her iki kenarı, kenarların tam orta noktalarından birleştirilirse, oluşan doğru tabanın yarısıdır. Bir başka ifade ile $|AD|=|DB|$ ve $|AE|=|EC|$ ise, $2|DE|=|BC|$ dir. Bu ifade aslında V. postulata denk bir ifadedir. Çünkü Tûsî'nin de bahsetmiş olduğu "birbirine eş, benzer üçgenler vardır" ifadesinin bir başka yolla ifade edilmiş halidir.



Teorem III: Her açı için istenen sayıda taban⁵³ çizilebilir.

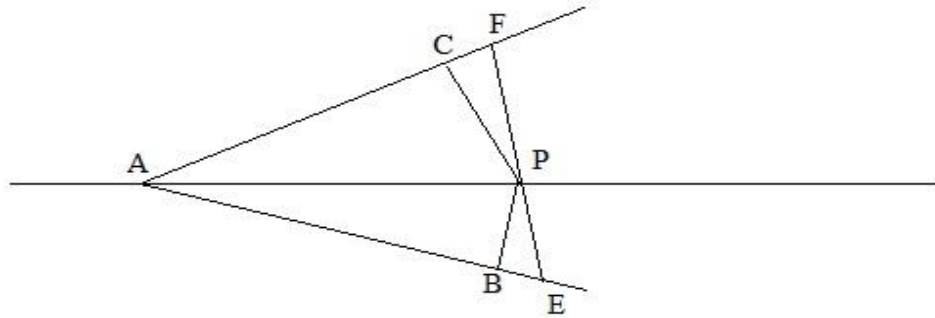


Teorem IV: Eğer bir doğru (l doğrusu) bir açıyı (COA) iki parçaya ayırıyorsa, açının her iki tarafından $|BO|=|OA|$, $|DO|=|OC|$ olacak şekilde çizilen tabanlar $|BD|$ ve $|AC|$ olsun, bu durumda $|OE|=|OF|$ olacaktır.



⁵³ Kaide.

Teorem V: Eğer herhangi bir açı (CAB açısı) bir doğruyla (A ve P noktalarından geçen doğru) iki parçaya ayrılıyorsa ve o doğrudan rastgele seçilen bir nokta (P noktası) işaretleniyorsa, o noktadan geçen ve açıyı taban olacak şekilde kesen bir doğru çizilebilir.



Bu teorem Cevherî'nin bu konuda ne kadar derin bilgi sahibi olduğunun açık bir kanıtıdır. Verilen bir noktadan geçerek açının iki kolunu da kesen bir çizgi çizmek V. postulaya denk bir ifadedir. Bu teorem hiperbolik geometri için doğru değildir. Bu teoremin aynısını Adrien Marie Legendre (1752- 1833) de kullanarak⁵⁴ Cevherî'nin düştüğü hataya düşmüş, ancak sonradan hatasını fark ederek düzeltmiştir. Büyük bir matematikçi olan Legendre, *Elements de Geometrie* ve *Reflexions sur differentes manirers demontrer la theorie des paralleles ou le theoreme sur la some des trois angles du triangle* adlı kitaplarında paraleller meselesiyle uğraşmıştır. Cevherî'nin aynı teoremi yüzyıllar önce düşünmüş olması dikkate değer bir noktadır. Unutulmamalıdır ki bu meselede hataya düşmek bile üstün bir matematik bilgisi gerektirmektedir.

⁵⁴ Bonola, s. 58.

Teorem VI: Eğer bir doğru başka iki doğruyu, bir taraftaki açılarının toplamı iki dik açıdan küçük olacak şekilde kesiyorsa, o tarafta kesişirler.

Bu madde V. postulatın aynısıdır.⁵⁵

b) Ebû el-'Abbâs el-Fadl ibn Hâtim el-Neyrîzî

Neyrîzî, adından da anlaşılacağı üzere İran'da Şiraz'ın güneydoğusunda bulunan Neyriz kasabasında doğmuştur. Yaklaşık 897 civarında Bağdat'ta yaşadığı ve 922'de öldüğü bilinmektedir. Geometri ve astronomiyle uğraşmıştır. Hayatının çoğunu Bağdat'ta geçirmiş ve muhtemelen Abbasi halifesi Mu'tadid'in (892-902) hizmetinde çalışmıştır. İsmi Latince Anaritus olarak geçmektedir.⁵⁶

İbn Nedim, Neyrîzî'den "bir Öklid ve astronomi otoritesi" olarak bahsetmiş ve onun "seçkin bir astronom" olduğunu belirtmiştir.⁵⁷ İbn Kıfti, onun geometri ve astronomideki üstünlüğünden söz etmiştir. İbn Nedim ve İbn Kıfti, Neyrîzî'nin eserlerini şöyle sıralamışlardır: Batlamyus'un *Almagest*'i⁵⁸ ve *Tetrabiblos*'una yazılmış şerhler, biri büyük biri daha küçük olmak üzere iki tane astronomik tablo (zij).⁵⁹ Bunların dışında Neyrîzî'nin Öklid'in *Elementler*'ine *Risale fî beyân el-müşâdere el-meşhûra li-Uqlîdis* (Öklid'in meşhur postulatının bir ispatı üzerine inceleme) isimli bir şerh yazmış olduğu bilinmektedir. Neyrîzî, İbn Haccac ibn Yusuf ibn Matar'ın *Elementler* çevirisine bir şerh yazmıştır. Bu şerh ve bu şerhin Cremona'lı Gerard tarafından yapılmış Latince çevirisi günümüzde mevcuttur. Bu

⁵⁵ B.A Rosenfeld, s. 46- 48.

⁵⁶ A.I. Sabra, "Al-Nayrizi", *DSB*, c.10, s.5.

⁵⁷ İbn Nedim, s.661.

⁵⁸ İbn Nedim, s.639.

⁵⁹ A.I. Sabra, *DSB*, c.10, s.5.

şerhte Neyrîzî Geminus'un ispatına da yer vermektedir.⁶⁰ Yazmış olduğu şerhlerde Neyrîzî, günümüzde orijinali mevcut olmayan, Simplicius ve İskenderiyeli Heron'un çalışmalarından da alıntı yapmıştır. Neyrîzî'nin şerhleri Öklid'in en azından sekiz kitabını kapsamaktadır.⁶¹

Neyrîzî'nin Öklid üzerine şerhleri Aganis'in paralel postulatı ispatını da içermektedir. Neyrîzî de Sabit ibn Kurra'nın bu konu hakkındaki ikinci çalışmasında olduğu gibi, eserine eşit mesafeli çizgilerin var olduğuna dair felsefi bir doğrulama ile başlamıştır, ancak B.A Rosenfeld'e göre, Neyrîzî'nin argümanları Kurra'ninkilerden çok daha az ikna edicidirler.⁶²

Çalışmanın başındaki girişte Neyrîzî, eşitliğin eşitsizlikten doğal olarak üstün olduğunu savunmuştur ki bu da ona göre şunu ifade etmektedir, aralarındaki uzaklıklar sabit olan düz çizgilerin varlığı, olmayanlardan daha muhtemeldir. Bu akıl yürütme aralarındaki uzaklık sabit olan çizgilerin varlığının kabulü ile sonuçlanır. Aralarındaki uzaklık sabit olan çizgiler ise kesişmezler.⁶³ Bu fikir Neyrîzî'nin ispatının ana fikri olmuştur. Bu girişten sonra Neyrîzî yedi tane teorem vermiştir. Bunlar şunlardır:

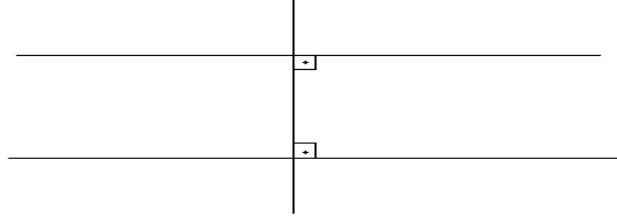
⁶⁰ Fuat Sezgin, *Islamic Mathematics and Astronomy*, c.14-15.

⁶¹ A.I. Sabra, *DSB*, c.10, s.5-6.

⁶² B.A Rosenfeld, s.56.

⁶³ A.I. Sabra, *DSB*, c.10, s.6.

Teorem I: Aralarındaki uzaklık eşit olan çizgiler (paralel çizgiler) arasındaki uzaklık, her iki çizgiye de diktir.

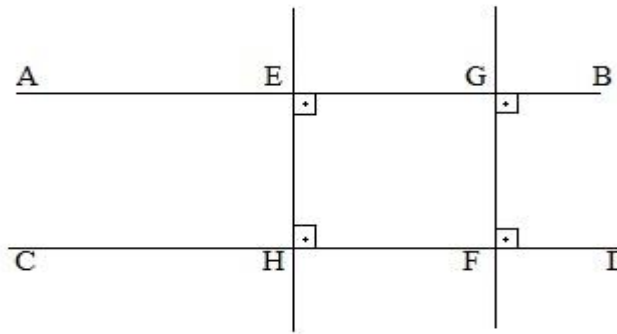


Teorem II: Aralarındaki mesafenin eşit olan iki çizgi arasındaki en kısa uzaklık, her ikisine de dik olandır.

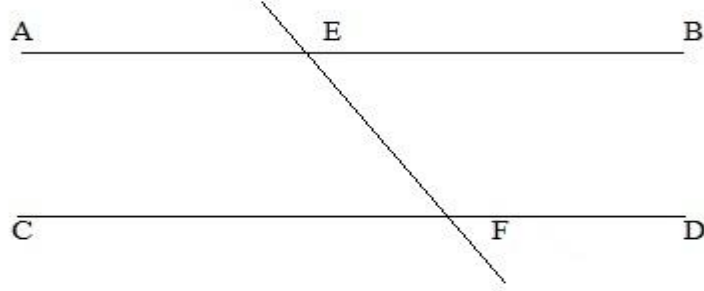
Teorem III: Aralarındaki mesafe eşit olan çizgilerin birine dik olan çizgi diğerine de diktir.

Teorem IV: Eğer iki çizgiye müşterek bir dik çizgi çizilmişse, bu durumda bu iki çizgi paraleldir.

Teorem V: Eşit mesafeli AB ve CD çizgilerine, EH ve GF diklerini indirirsek, oluşan |HF|'nin uzunluğu |EG|'nin uzunluğuna eşit olacaktır.

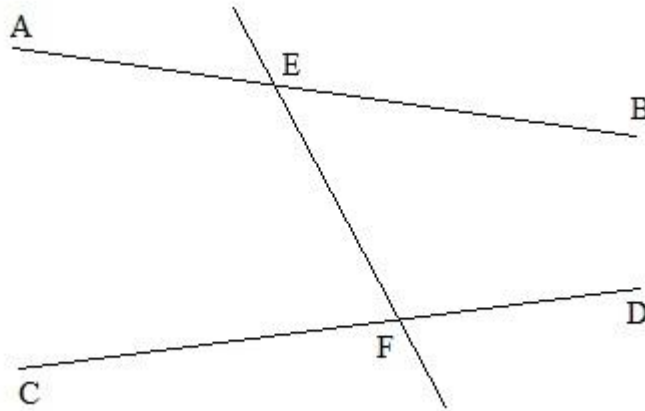


Teorem VI: Eşit mesafeli AB ve CD çizgilerinin üstüne bir çizgi düşerse, aynı tarafa bakan açılar toplamı iki dik açı kadar olacaktır.



$$\angle BEF + \angle EFD = 180^\circ$$

Teorem VII: Eğer AB ve CD çizgilerinin üstüne bir EF çizgisi düşerse, aynı tarafa bakan açılar toplamı iki dik açıdan küçükse, bu çizgiler uzatıldıkları takdirde, açılar toplamı iki dik açıdan küçük olduğu tarafta kesişeceklerdir.⁶⁴



⁶⁴ B.A Rosenfeld, s.56-57.

$BEF + EFD < 180^\circ$ ise AB ve CD kesişirler.

İlk dört teorem, aralarındaki uzaklık eşit olan eşit mesafeli dediğimiz çizgilerle ilgilidir. Beşinci teorem, bir dikdörtgenin oluşturulmasıyken, altıncı teoremden eşit mesafeli iki çizginin üçüncüsü tarafından kesildiğindeki durumu incelenmiştir. Neyrîzî'nin yedinci teoremi V. postulatın kendisidir. Neyrîzî'nin tüm çalışması Sabit'in ikinci ispatına çok benzer. Neyrîzî paralel ispatında Eudoxos-Arşimet aksiyomunu kullanmıştır.

c) Sabit ibn Kurra (el-Sâbi'î el-Harrânî)

836'da bugün Türkiye sınırlarındaki Harran'da doğmuş, matematik, astronomi, mekanik, tıp ve felsefeyle ilgilenmiştir. 18 Şubat 901'de ölmüştür. Sabiî soyundan gelmektedir. Gençlik döneminde para değiştiricisi (takasçı) ve bir dönem Irak'ta Sabiî topluluğunda seçkin bir hekim olarak çalıştığı bilinmektedir. Oğlu Sinan ve torunları İbrahim ve Sabit de meşhur bilim adamlarıdır.

Sabit'in ana dili Süryanice olmasına karşın eserlerinin çoğunu Arapça yazmış ve birçok eseri Yunanca'dan Arapça'ya çevirmiştir. Bu çeviriler arasında Arşimet'in tüm eserleri, Apollonius'un *Koni kesitleri*, Batlamyus'un *Almagest*'i ve Öklid'in *Elementler*'i yer almaktadır. Meşhur mühendislerden Musa ibn Şakir'in üç oğlundan biri olan Muhammed ibn Musa ibn Şakir, Harran gezisi sırasında Sabit ibn Kurra ile tanışmış, onun dil bilgisinden (çok dil bilmesinden) ve çalışmalarından çok etkilenerek onu Bağdat'a davet etmiştir. Sabit bu daveti kabul ederek Musa kardeşlerin kılavuzluğunda büyük bir matematikçi ve astronom olarak yetişmiştir.

892- 902 yılları arasında Abbasi Halifesi el-Mutadid'in heyetinde yer aldığı bilinmektedir.⁶⁵

Sabit ibn Kurra birçok alanda çalışmış olmasına rağmen en çok matematikle ilgilenmiştir. İki tane V. postulat ispat girişimi vardır. Bunlardan biri *Makala fî burhân el-muşâdere el-meşhûrra min Uklîdis* (Öklid'in meşhur postulatının ispat kitabı) olup, bu kitabın bir diğer adı *kitâb fî ennehu izhâ vaka'a hattun mustakîmun 'alâ hatteyn mustakîmeyn fa-şeyyare el-zâviyeteyn elleteyn fî cihetin vâhidetin ekalle min kâ'imeteyn fa-inna el-hatteyn izhâ uhrîca fî tilke el-cihet el-tekayâ* (Konusu, bir düz çizgi iki düz çizgi üstüne düştüğünde, aynı taraftaki açılarının toplamını iki dik açıdan küçük yapıyorsa, bu çizgiler sonsuza uzatıldıkları takdirde kesişeceği, olan kitap). Diğerisi ise ilk kitabın ikinci adının kısaltması olan *Makâle fî enne el-hatteyn izhâ uhrîcâ 'alâ zavîyeteyn ekall min kâ'imeteyn el-tekayâ* (Konusu, iki çizgi açılarının toplamı iki dik açıdan küçük olacak şekilde çiziliyorsa kesişir, olan kitap) kitabıdır.⁶⁶ Bu ispatlardan birincisi geometrik bir ispattır ve beş kısımdan oluşur. İkinci ispat ise kinematik⁶⁷ hususlar göz önüne alınarak yapılmıştır ve yedi kısımdan oluşur.⁶⁸

⁶⁵ B.A Rosenfeld, A.T. Grigorian, "Thabit ibn Qurra", *DSB*, c. 13, s. 288-289.

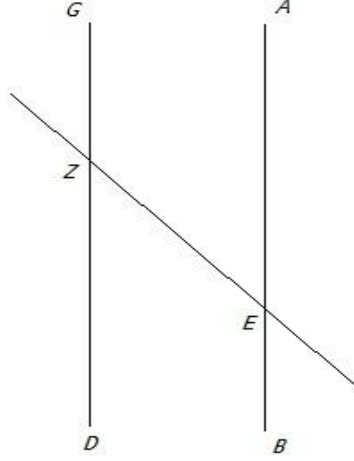
⁶⁶ B.A Rosenfeld, s.49-50.

⁶⁷ Hareket bilimi.

⁶⁸ B.A Rosenfeld, A.T. Grigorian, *DSB*, c. 13, s. 290-291.

Sabit İbn Kurra'nın I. İspatı

Teorem I: Eğer bir düz çizgi ($|ZE|$), diğer iki çizginin ($|GD|$ ve $|AB|$) üstüne düşüyorsa ve iç ters açılar ($\angle DZE$ ve $\angle ZEA$) birbirine eşitse, bu çizgiler ($|GD|$ ve $|AB|$) her iki yönde ne ıraksak ne de yakınsak olurlar.



İspat: Şekli $|EA|$, $|ZD|$ 'nin üzerine gelecek şekilde katlayalım⁶⁹. E noktası Z noktasının, $\angle AEZ$ açısı $\angle EZD$ açısının ve $|GZ|$ $|EB|$ 'nin üzerine gelir. $|AE|$ ile $|ZD|$, $\angle GZE$ açısıyla $\angle ZEB$ açısı da çakışır.

Eğer böyle olmazsa (örtüşmezlerse), açı kendinden büyük olan açıya eşit olmuş olacaktır ki bu imkânsızdır.

Şimdi $|EB|$ ve $|ZD|$ 'nin B ve D tarafında yakınsak olduklarını farz edelim. $|AE|$ ve $|GZ|$ de A ve G tarafında yakınsak olacaklardır⁷⁰.

Fakat biz biliyoruz ki eğer bir düz çizgi, diğer iki düz çizgiyi keserse, bu çizgiler bir tarafta yakınsaklarsa diğer tarafta ıraksaktırlar ve bir taraftaki yakınsaklık

⁶⁹ Şekli koordinat düzlemi üzerindeymiş gibi düşünüp hem x eksenini hem de y eksenini boyunca katlamak.

⁷⁰ Çünkü bu uzaklıkları, çakışacak şekilde katlamıştık.

ne ölçüde artarsa, diğer taraftaki ıraksaklık da aynı ölçüde artar. Bu durum aşikâr olarak kabul edilmiştir.

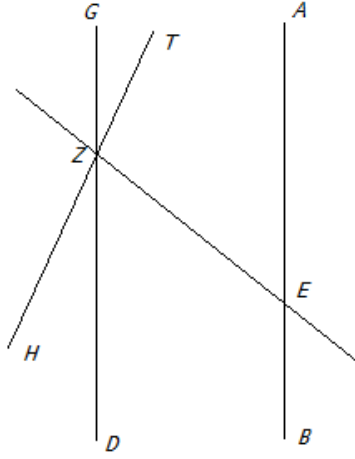
Dolayısıyla varsayalım ki, $|EB|$ ve $|ZD|$ doğruları, B ve D tarafında yakınsak olsun. Bu durumda $|AE|$ ve $|GZ|$, A ve G tarafında ıraksak olmalı. Ancak $|AE|$ ve $|GZ|$ doğruları, $|EB|$ ve $|ZD|$ doğrularıyla B, D tarafında çakışıktı. Eğer $|EB|$ ve $|ZD|$ yakınsaksa, $|AE|$ ve $|GZ|$ ıraksak olacak ve onlarla çakışmayacaktır.

Fakat eğer çakışıyorlarsa ve A, G tarafında ıraksak değillerse, geriye iki ihtimal kalır: ya $|AE|$ ve $|GZ|$ tıpkı $|EB|$ ve $|ZD|$ gibi yakınsak olacaklardır ya da bu çizgiler A, G tarafında ne ıraksak ne de yakınsak olacaklardır.

Eğer bahsi geçen tarafta yakınsaklarsa kabul edilen varsayım yanlış olacaktır. Çünkü her iki tarafta da yakınsak olan çizgiler olmuş olacak. Eğer bu çizgilerin arasındaki uzaklık sabit kalırsa, $|EB|$ ve $|ZD|$ ile çakışmazlar.

Dolayısıyla, $|EB|$ ve $|ZD|$ 'nin Z, D tarafında yakınsak olduğu varsayımı, AEZ ve EZD açılarının eşitliği durumunda imkânsızdır. Dolayısıyla o tarafta ne ıraksak ne de yakınsaklardır. Aynı şeyi AE ve GZ için de gösterebiliriz ki bu da ispat etmek istediğimiz şeydir.

Teorem II: Eğer bir düz çizgi ($|ZE|$), diğer iki çizginin ($|GD|$ ve $|AB|$) üstüne düşüyorsa ve bu iki düz çizgi her iki yönde ıraksak veya yakınsak değillerse, iç ters açılar (DZE ve ZEA) birbirine eşittir.



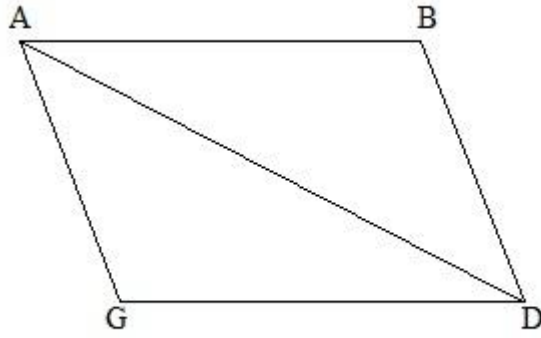
İspat: Varsayalım ki AEZ ve EZD açıları eşit olmasın. $AEZ < EZD$ ve $AEZ = EZT$ olsun. TZH 'yi uzatalım. Bu durumda TZH ve AB çizgileri içters açılarının eşitliğinden dolayı ıraksak ya da yakınsak değillerdir⁷¹ ve hipoteze göre, AB ve GD ne yakınsak ne de ıraksaktır ve GD , TH 'yi Z noktasında keser. Bu durumda her iki çizgi de (GD , TH) AB ile ne yakınsak ne de ıraksaktır.

Fakat ZT , EB 'ye ZD 'den daha yakındır. Çünkü ikisinin arasında bulunur ki bu bir çelişkidir.

Sonuç olarak, AEZ açısı EZD açısına eşittir.

⁷¹ Sabit ibn Kurra paralellik kelimesini kullanmamış, paralellik kastettiği zaman ıraksak ya da yakınsak olmayan doğrular demiştir. Çünkü ona göre, bir doğru ıraksak veya yakınsak değilse, aralarındaki uzaklık sabittir, dolayısıyla doğrular paraleldir.

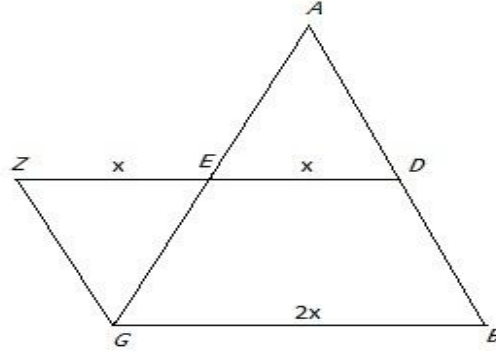
Teorem III: Eğer iki döz, birbirine eşit, yakınsak veya ıraksak olmayan çizgilerin (doğru parçaları) uç noktaları birleştirilirse, bu yeni oluşan çizgiler de birbirine eşittir ve onlar da ıraksak veya yakınsak değildirler.



İspat: ADG ve DAB açıları eşit olsun. Dolayısıyla AB ve AD doğru parçaları sırasıyla GD ve DA doğru parçalarına eşittir. Aynı zamanda ADG ve DAB açıları iç ters açılar olduklarından, birbirlerine eşittirler.

Dolayısıyla, AB ve GD ıraksak ya da yakınsak değildir ve aynı şekilde AG ve DB de ıraksak veya yakınsak değildir ve $AG = DB$ 'dir ki bu da ispat etmek istediğimiz şeydir.

Teorem IV: Herhangi bir üçgenin iki kenarının orta noktası alınır ve bu orta nokta birleştirilirse, oluşan çizgi, tabana ıraksak veya yakınsak değildir ve tabanın yarısı kadardır.

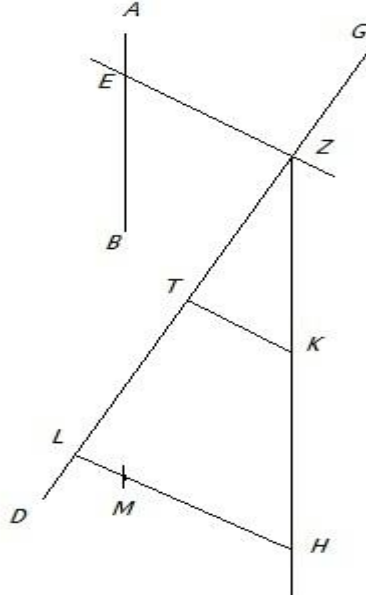


İspat: DE'yi Z'ye kadar $EZ=DE$ olacak şekilde uzatalım. G ile Z'yi birleştirelim. Nitekim $|AD|=|GZ|$ ve ADE ve GEZ üçgenleri birbirine eşit olur. Benzer şekilde, $|DB|=|ZG|$ olur. Ayrıca, ADE, GZE iç ters açıları eşit olduğundan, $|AB|$ ve $|GZ|$ ıraksak ya da yakınsak değildir.

Benzer şekilde, $|BD|$ ve $|GZ|$ 'de ıraksak veya yakınsak değildir ve eşittir. Şimdi $|BD|$ ve $|GZ|$ 'nin uç noktaları $|BG|$ ve $|DZ|$ doğrularıyla birleştirilsin. $|BG|$ ve $|DZ|$ ıraksak ya da yakınsak değildir. Fakat $|DZ|$, $|DE|$ 'nin iki katıdır ve dolayısıyla $|BG|=|DZ|$ den dolayı $|BG|$ 'de $|DE|$ 'nin iki katıdır. Bu da ispatlamaya çalıştığımız şeydir. Eğer biz bu $|AB|$ veya $|AG|$ 'yi herhangi bir çift sayıda parçalara ayırırsak ve bu parçaları taban oluşturacak şekilde birleştirirsek aynı kural geçerli olur⁷².

⁷² n çift pozitif bir sayı olmak üzere, n parçaya ayrılan bir üçgenin, en küçük tabanının n katı en büyük tabana eşit olacaktır.

Teorem V: Eğer bir düz çizgi iki düz çizgi üstüne düşüyorsa ve aynı tarafa bakan açılar toplamı iki dik açıdan küçükse, bu iki çizgi uzatıldıkları takdirde kesişirler.



İspat: Z noktasından ZH'yi çizelim. ZH, AB'ye ıraksak veya yakınsak olmasın. ZD'nin üstünden rastgele bir T noktası seçelim ve ondan ZH'ye bir TK doğrusu çizelim. TK EZ'ye ne ıraksak ne de yakınsak olsun.

TK > EZ olabilir. Değilse ZT'ye eşit olan TL'yi çizeriz ve ZK'ya eşit olan KH'yi çizeriz. L ve H'yi birleştiririz; Zaten (daha önce I. IV de ispatladığımız gibi) LH = 2TK ve LH, TK'ya ne ıraksak ne de yakınsaktır.

Eğer TK < EZ ise, TK'nın katlarını TK > EZ olana kadar alıriz. Varsayalım ki TK > EZ durumu LH'de yakalanmış olsun ve LH > EZ olsun. LH ile EZ ne ıraksak ne de yakınsak olsunlar.

Şimdi LH'den EZ'ye eşit bir parça keselim ki bu HM olsun. Bu durumda $EZ = HM$ ve EZ ile HM ne ıraksak ne de yakınsaktır.

Dolayısıyla EZ ve HM'yi uç noktalarından birleştiren doğrular daha önceden de ispat ettiğimiz gibi ne ıraksak ne de yakınsaktır. Fakat ZH, Z ve H noktalarından birleştirilmiştir. Dolayısıyla eğer EB uzatılırsa M ile birleşecektir veya E ve M'yi birleştiren çizgi EB'den farklıysa, ZB ne ıraksak ne de yakınsaktır (eğer EB'den farklıysa bu sefer yeni çizilen çizgi ZB'ye paralel olacaktır).

Fakat EB ve ZH ne ıraksak ne de yakınsaktı ve E ve M'yi birleştiren çizgi, EB ile ZH arasında kalır ki bu saçmadır. Dolayısıyla EB uzatıldığında M ile kesişecektir. Yani EB, (M'ye giderken) GD doğrusunu bir noktada kesecektir.

Sonuç olarak, AB ve GD, uzatıldıkları takdirde B ve D tarafında kesişirler. Bu da bizim ispatlamak istediğimiz şeydir.⁷³

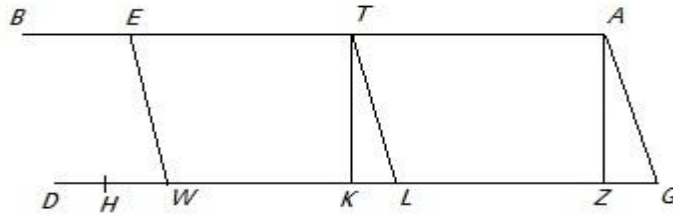
⁷³ A.I Sabra, *Optics Astronomy and Logic*, Geometry XII, s. 28- 32.

Sabit İbn Kurra'nın II. İspatı

Aristoteles "Astronomininkiler hariç, matematiğin nesneleri hareketsiz nesneler sınıfındandır" diyerek geometride hareketin kullanılmasını kınamıştır. Öklid de *Elementler*'de hareket kullanmaktan kaçınmıştır. Buna karşın Sabit ibni Kurra, büyüklükleri ölçmenin, bunlar ötelenmedikçe, karşılaştırılmadıkça veya üst üste getirilmedikçe imkânsız olduğunu söylemiş ve ikinci ispatını kinematiği esas alarak oluşturmuştur.⁷⁴

Sabit'in bu ispatı, onun "katı bir cisim düzgün ve doğrusal bir hareket sergilediğinde üzerindeki tüm noktalar da düzgün doğrusal olarak hareket ederek, düz bir çizgi teşkil ederler" fikrinden yola çıkarak oluşturduğu ispatıdır.

Teorem I: Eğer iki düz çizgi aynı düzlemde ise, bu iki düz çizginin üzerine, ikisini de kesecek şekilde eşit çizgiler çizilirse ve bu yeni çizilen çizgilerin ilk çizilenlerle yaptığı açılar eşit olursa, bu iki çizgi arasına çizilecek herhangi iki dikme birbirlerine eşit olur.



⁷⁴ B.A Rosenfeld, s.52.

İspat: Bu teoremin ispatı için Sabit bir katı cisim tasavvur eder. Bu katı cismin bir kenarı GZ doğru parçası üzerinde kalır. Cisim AG doğru parçasını üzerinde taşıyarak, GD boyunca düzgün, doğrusal hareket eder.

Benzer şekilde, katı cismin içinde bulunan AG, GZ'ye benzer olan çizgiler de şekillerini korusunlar. Böylece katı cismin içinde AB'ye benzer olarak çizilen çizgi cismin hareketi boyunca yerini koruyamazken (örneğin AG), GZ'ye benzer olarak oluşturulan çizgi hareket boyunca yerini korur.

Dolayısıyla, GZ'ye benzer olan çizgi GD boyunca hareket eder ve GD'nin üstünde kalır.

Farz edelim ki, AG üstündeki G noktası katının hareketi sonucunda, W noktasına ulaştığında GZ'nin pozisyonu WH olmuş olsun (GD üzerindeki hareketten ötürü). Fakat EWH açısı AGZ açısına eşit olduğundan, G noktası W'ya geldiği zaman katı üstündeki AG, WE'nin üstüne düşecektir. $AG=WE$ olduğundan, onunla çakışık olacaktır. AG üzerindeki A, EW üzerindeki E ile üst üste gelmiş olacaktır.

Bundan dolayı, katı cisimdeki A'nın E'ye gelmesi katı cismin bir hareketinin sonucudur. Hareket, ilerlerken düzgün bir çizgi oluşturacaktır. Bundan dolayı A'nın geçişi A ve E noktalarından başka hiçbir düz çizgi geçmediğinden, AEB doğrusu boyunca olacaktır.

Şimdi AEB üzerinde herhangi bir T noktası işaretleyelim ve ondan GD'ye dik olacak şekilde bir TK'yı çizelim. AGD açısı dik açı olabilir ya da olmayabilir.

Farz edelim ki AGD dik açı olsun. Bu durumda AG üzerindeki A, T'nin üzerine gelecek ve AG, TK ile çakışacak ve ona eşit olacaktır.

AGD dik değilse, AG, TK ile değil TL ile çakışsın ve TL ile GD arasındaki açı β olsun. AG ile GD arasındaki açı α olsun. $\alpha = \beta$ olduğundan, β dik açıdır. Fakat TKL de dik açıya eşitti, KTL üçgeninde iki dik açı olamayacağından, bu bir çelişki teşkil eder.

Dolayısıyla AG çizgisi TK diki ile çakışacak ve ona eşit olacak. Benzer şekilde AG, GD üzerindeki tüm diğer diklerle de çakışacaktır. (AZ, TK, EH)

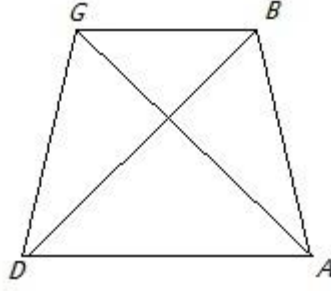
Şimdi varsayalım ki, $\alpha = \angle AGD \neq 90^\circ$ olsun. Sonra A noktasından GD'ye dik olan AZ dikmesini çizelim ve varsayalım ki bir katı cisim A'dan başlayıp hareket ederek T'ye gelsin ve benzer bir şekil oluşsun. (AG, TL olsun, GZ de KL olsun).

Sonra, GAZ ve LTK üçgenleri için $\angle AG = \angle TL$ olacaktır. Çünkü AG ve TL eşittir ve çakışacaktır. Ayrıca $\alpha = \beta$ ve AZG ile TKL açıları da eşittir. Bu iki üçgende (AZG ile TKL) kalan açılar da birbirlerine eşit olacaktır.

Sonuç olarak TK diki, AZ dikine eşittir. Bu dikler AB ve GD çizgileri arasına çizilecek tüm diğer diklere de eşit olacaklardır ki bu da bizim ispatlamaya çalıştığımız şeydir.

Teorem II: Eğer bir dörtgende taban açıları ve ilgili kenarlar birbirlerine eşitse, kalan açılar da birbirlerine eşittir.

Aşağıdaki şekli göz önüne alarak ifade edersek, $\angle BAD$ açısı α olsun, $\angle GDA$ açısı β olsun. Eğer, $AB = DG$ ve $\alpha = \beta$ ise, $\angle ABG$ açısıyla $\angle DGB$ açısı eşittir.

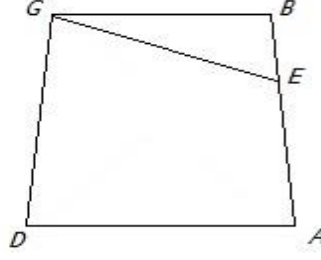


İspat: AG ve BD köşegenlerini çizelim. Sonra AB, GD'ye eşit ve AD ortak olduğundan, BAD üçgenindeki BA ve AD sırasıyla, GAD üçgenindeki GD ve DB'ye eşit olacaklardır. Fakat BAG açısı BGD açısına eşit olduğundan, $BD=AG$ olur. Ayrıca $AB=DG$ olduğundan, ABG üçgenindeki $BA=AG$ ve BGD üçgenindeki $GD=DB$ olacaktır.

Sonuç olarak, ABG açısı, DGB açısına eşit olacaktır ki bu da ispat etmeyi umduğumuz durumdur.

Teorem III: Eğer bir dörtgende taban açıları birbirine eşit ve kalan açılar da birbirine eşitse, ilgili kenarlar da eşit olacaktır.

Aşağıdaki şekli göz önüne alarak ifade edersek, BAD açısı α , GDA açısı β , ABG açısı μ ve DGB açısı θ olsun. Eğer $\alpha = \beta$ ve $\mu = \theta$ ise, $AB=DG$ olur.



İspat: Eğer $|AB| \neq |DG|$ ise, iki durum olabilir. Ya $|AB| < |DG|$ ya da $|AB| > |DG|$ 'dir. Varsayalım ki $|AB| > |DG|$ olsun. Büyük kenardan (AB'den) $|AE|$ 'yi keselim. Böylece $|AE| = |DG|$ olsun ve $|EG|$ 'yi çizelim. Daha sonra, AEGD dörtgeninde EAD açısı, GDA açısına eşit olur. Dolayısıyla AEG açısı DGE açısına eşit olacaktır.

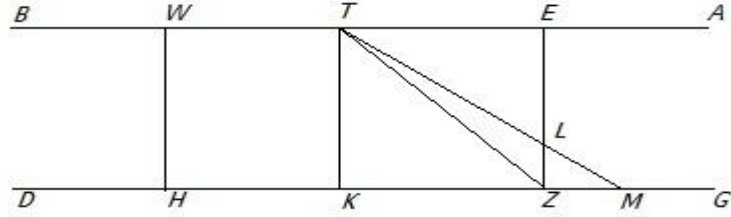
Fakat AEG açısı GBE açısının dış açısı olduğundan, EBG açısından büyüktür. DGE açısı da ABG açısından büyüktür ve DGB açısı da DGE açısından büyük olduğundan, sonuç olarak DGB açısı ABG açısından çok büyüktür ($\theta > \mu$).

Fakat en başta bu açıları eşit kabul etmiştik ki bu imkânsızdır. Böylece ispatımız tamamlanır.

Teorem IV: Eğer aynı düzlemdeki iki düz çizgi arasına iki tane dik çizilirse ve bu dikmeler birbirlerine eşitse, o zaman aynı iki düz çizgi arasına çizilecek tüm diğer dikler de, birbirine eşit olan diklere eşittir.

Aşağıdaki şekli göz önüne alarak ifade edersek; eğer $EZ = WH$ olmak üzere, EZ ve WH, AB'ye dikse, bu durumda, bir ucu AB'de diğer ucu GD'de kalacak

şekilde, AB ve GD arasına çizeceğimiz tüm diğer dikler de birbirlerine ve EZ'ye eşittirler.



İspat: EW doğrusu üstünden rastgele bir T noktası seçelim. T'den GD'ye dik bir TK doğrusu çizelim. Bu durumda bu dik EZ veya WH ile kesişmeden, GD ile buluşacaktır. Varsayalım ki bu çizgilerden biri ile kesişsin. Kesişen doğru TZ olsun. Bu durumda büyük açı olan EZD, küçük açı olan TZD'ye eşit olurdu (her ikisi de dik açı olacağından) ki bu imkânsızdır.

Eğer bu çizgi (TK), diğer diklerden biriyle L noktasında kesişseydi (TML çizgisinin EZ'yi kestiği gibi), MLZ üçgeninin dış açısı olan EZD açısı, içters açısı olan LMZ'ye eşit olurdu ki bu imkânsızdır.

Dolayısıyla, $|TK|$ ve $|ZH|$ birbirlerine diktirler. Ayrıca TK, ne EZ ile ne de WH ile kesişmez.

AB ve GD doğruları aynı düzlemde olduklarından ve EZ ile WH onların aralarına çizildiklerinden, bu doğrular belli noktalarda (W, E, Z, H) kesişeceklerdir.

AB ve GD arasına EZ ve WH'de dâhil olmak üzere çizilecek tüm diğer dikler eşit olacaktırlar (bir önceki teoremden dolayı).

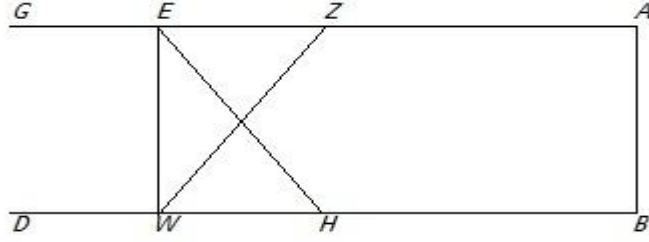
Sonuç olarak $|TK| = |EZ| = |WH|$ 'dir ve dolayısıyla EZK açısı TKZ açısına eşittir ve her iki açı da dik açıdır.

Benzer şekilde TWHK dörtgenindeki KTW açısı HWT açısına eşittir. EWHZ dörtgenindeki ZEW açısı da HZE açısına eşittir. Nitekim KTE açısı da KTW açısına eşit ve dik açıdır. Fakat biz bu açıların ZET ve HWT açılarına eşitliğini göstermiştik, yani bu açılar da dik açı olmalıdır. Sonuçta $|AB|$, $|ZE|$ ve $|HW|$ 'ye diktir.

TK'da dâhil olmak üzere AB ve GD doğruları arasına çizilen tüm diğer dikmeler, EZ'ye ve WH'ye eşit olacaklar ki bu da bizim ispat etmeye çalıştığımız şeydi.

Teorem V: Eğer aynı düzlemde, bir doğru parçasının uç noktalarından bu doğruya dik, iki ışın (yarı doğru) çizilirse, bu ışınlardan bir tanesinden diğerine dik bir açıyla çizilecek herhangi başka bir çizgi, diğer ışına da dik ve ucundan ışın çizilen doğruya eşit olacaktır.

Aşağıdaki şekli göz önüne alarak ifade edersek; $|AB|$ 'nin uç noktalarından $|AG|$ ve $|BD|$ ışınlarını çizelim. $|AG|$ üzerinde herhangi bir E noktası seçip BD 'ye dik indirelim. Bu dik EW olsun EW aynı zamanda AG 'ye de diktir ve AB 'ye eşittir.



İspat: AE ve BW'nun durumları üç şekilde olabilir. $AE=BW$, $AE>BW$ ya da $AE<BW$ 'dur. Biz $AE=BW$ 'dur diyoruz ve diğer iki seçenek mümkün değildir diyoruz.

Eğer başka bir şey mümkünse:

I. Varsayalım ki birincisi ikincisinden uzun olsun. Yani $AE>BW$ ise; ZW'ü çizelim. W ve Z noktalarından AB'ye dik ZA ve WB'yi çizelim. Bunlar aynı zamanda ZW'ya da diktir. Ayrıca ZWB açısı dik açı olmalıdır.

Fakat büyük açı olan EWB açısı dik açıya eşittir. Büyük açı küçük açıya eşit olamayacağından, bu durum bir çelişki temsil eder.

Dolayısıyla AE, BW'dan uzun değildir.

II. Varsayalım ki birincisi ikincisinden kısa olsun. Yani $AE<BW$ ise; BW üstünde bir H noktası seçelim. Böylece $AE=BH$ olsun. Şimdi EH doğrusundan AB'ye, EA ve HB diklerini indirelim. Bu dikler birbirlerine eşit olsun ($|EA|=|HB|$)

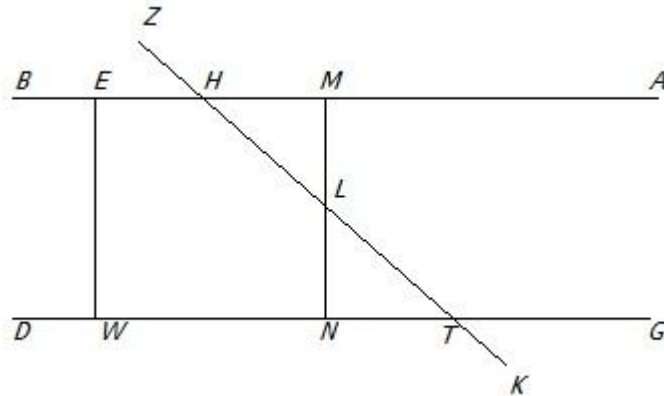
Dolayısıyla EA ve HB doğruları, EH'ye dik olmalıdır. Aynı zamanda EHB açısı, WEH üçgeninin dış açısıdır. EWH açısı dik açı olduğundan, EHB açısı dik açıdan mutlaka büyük olmalıdır. Ancak biz EHB'yi dik açı saymıştık ki bu bir çelişki

temsil eder. Dolayısıyla AE, BW'dan kısa değildir. Sonuç olarak AE, BW'dan kısa ya da uzun olmadığından, $AE=BW$ 'dur.

ABWE dörtgeninin açıları, $EAB=WBA$ ve $|AE|=|BW|$ 'dir. AEW açısı BWE açısına eşit ve BWE açısı dik açı olduğundan, AEW açısı da dik açı olacak ve EW doğrusu AG doğrusuna dik olacaktır. ABWE dörtgeninde, BW tarafındaki açılar eşit olduğundan, AE tarafındaki açılar da eşit olmalıdır.

Dolayısıyla, EW doğrusu hem AG doğrusuna hem BD doğrusuna dik, AB doğrusu da hem AG doğrusuna hem de BD doğrusuna dik ve $EW=AB$ 'dir ki bu da bizim ispatlamak istediğimiz şeydir.

Teorem VI: Eğer aynı düzlemde iki çizgi (AB, GD) üzerine düşen, başka bir çizgi (EW) bu iki çizgiye de dikse, bu çizgileri (AB, GD) kesen bir başka çizgi (ZHTK), bu çizgileri içters açıları ($AHT=DTH$) eşit ve bu açılardan birinin dış açısına ($ZHB= DTH$) eşit olacak şekilde keser.



İspat: HT doğrusunu L noktasından ikiye ayıralım ve L noktasından geçen, AB'ye dik olan bir LM çizelim ve bu çizgiyi N noktasına kadar düzgünce uzatalım. Varsayalım ki bu doğru TW ile kesişsin. Eğer kesişmeseydi, EW ile kesişirdi. Fakat bu imkânsızdır. Çünkü MN ve EW, ME'ye diktir.

Varsayalım ki, MN, TW ile N noktasında kesişsin ve dolayısıyla TW, daha önce gösterildiği gibi MN'ye dik olsun. Sonra, MLH üçgenindeki LMH ve MLH açıları sırasıyla NTL üçgenindeki, LNT ve TLN açılara eşit olacaktır. İlk üçgende LH ikinci üçgende LT'ye eşit olacaktır. Geri kalan açılar ve taraflar da sırasıyla birbirlerine eşit olacaktır ve MHL açısı LTN açısına da eşit olacaktır (iç ters açı). Fakat MHL açısı ZHB açısına da eşittir (ters açı).

Dolayısıyla, ZHB açısı LTN açısına eşittir ki bu da bizim ispatlamak istediğimiz şeydir.⁷⁵

Teorem VII: Bir doğru parçası uç noktalarından, açılar toplamı iki dik açıdan küçük olacak şekilde uzatılırsa, bu doğrular açılar toplamının iki dik açıdan küçük olduğu yönde kesişirler.

⁷⁵ A.I Sabra, "Thabit on Euclid's parallel postulate", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, 31, London 1968, s. 21- 27.

Daha sonra, T noktasından geçerek, AE'yi dik olarak kesecek doğruyu uzatalım. W'dan bu doğruya bir dik indirelim ve dikmenin ayağı S olsun. Bu durumda WS, WZ'ye dik ve $WS=ZT$ olacaktır. Fakat $ZT=AZ$ idi, bu durumda $WS=AZ$ diyebiliriz.

ZWS açısı dik açıdır⁷⁹, AWS açısı dik açıdan küçük olmalıdır. Çünkü AZW dik açıydı ve bir üçgende iki açı da dik açı olamaz. WS doğrusu, AT ve WS doğrularının arasında bulunmaktadır ve her iki doğruyu da dik kesmektedir. AG doğrusu da AT ve WS doğrularının üstüne düşmektedir.

LWS dış açısı, (yöndeş açısı olan) WAZ açısına eşittir. Dolayısıyla AWZ açısı da WLS açısına eşittir. Fakat biz daha önce $|AZ|=|WS|$ ve $|AW|=|WL|$ olduğunu göstermiştik. Böylece iki taban da eşittir ve kalan açılar ve kenarlar da eşittir.

WSL açısı AZW açısına eşittir. AZW açısı dik açıdır. Dolayısıyla WSL de dik açı olmalıdır. Fakat WST dik açıdır. Bu demektir ki $|TS|$ ve $|SL|$ doğruları doğrusaldır ve $|TSL|$ $|AH|$ 'ye diktir.

Aynı yolla $|KM|$ 'nin K noktasında $|AH|$ 'ye dik olduğunu ve $|HN|$ 'nin H noktasında $|AH|$ 'ye dik olduğunu da gösterebiliriz. Dolayısıyla AHN dik açıdır.

Fakat BEH açısı AED açısına eşitti ve bu açılar dik açıydı. Dolayısıyla $|HN|$ ve $|BD|$, $|AEH|$ üzerinden geçen ters açıları eşit yapar. Yani BD doğrusu HN doğrusuna paraleldir ve sonsuza kadar uzatıldıklarında dahi kesişmezler. Fakat HN

⁷⁹ Bu açıyı dik saymak Sabit ibn Kurra'nın esas hatası olmuştur. Çünkü bu açıyı dik açı saymak V. postulatı kabul etmek demektir ve ispata kalkışılan önerme ispatın içinde kullanılmış olmaktadır. ZWS açısı dik açıdan küçük olduğunda hiperbolik geometri, büyük olduğunda eliptik geometri ortaya çıkmaktadır.

doğrusu, AG doğrusuyla N noktasında kesişir, yani AG doğrusu BD doğrusunun üzerinden geçer ve onu D noktasında keser.

Sonuç olarak AG doğrusu BD doğrusuyla D noktasında kesişir ki bu da bizim ispatlamak istediğimiz durumdur.⁸⁰

Sabit'in çalışmaları bu gün, Paris'te Bibliotheque Nationale'de ve İstanbul'da Carullah'ta bulunmaktadır. İkinci ispat ise İstanbul'da Ayasofya'da ve Kahire Milli kütüphanesinde mevcuttur.⁸¹

Sabit ibn Kurra'nın I. ispatı, hareketi esas alarak oluşturduğu ikinci ispatının aksine, geometrik temelli bir ispattır. I. ispattaki I. teorem Cevherî'nin I.teoreminin aynısıdır. Cevherî gibi Sabit de bu teoremin ispatında *petitio principii* hatasına düşerek, ispatlamaya çalıştığı V. teoreme denk bir ifadeyi ispatında kullanmıştır. Sabit'in I. I'inde ki "eğer bir düz çizgi, diğer iki düz çizgiyi keserse, bu çizgiler bir tarafta yakınsaklarsa diğer tarafta ıraksaktırlar ve bir taraftaki yakınsaklık ne ölçüde artarsa, diğer taraftaki ıraksaklık da aynı ölçüde artar" ifadesi V. postulata denk bir ifadedir. Lobatchewsky geometrisinde ortak bir dikmenin her iki tarafında ıraksak olan çizgiler vardır. Bunun tersine V. postulatın geçerli olduğu fakat Öklid geometrisinin bazı öteki aksiyomlarının dışlandığı Riemann eliptik geometrisinin sınırları içinde herhangi iki doğru parçası ortak dikmelerinin her iki yönünde de birbirlerine yaklaşır ve kesişirler.⁸² I. II'deki ispat *Elementler*'deki I. kitap 29. teoremin ilk kısmıyla mutabıktır ve ispatta olmayana ergi metodu kullanılmıştır. I. III 'de Sabit, bir paralel kenarın varlığını kanıtlamıştır. IV. teorem ise Cevherî'nin II. teoreminin aynısıdır. Sabit'in bu teoreme katkısı bu teoremi genellemesi ve n çift

⁸⁰ A.I Sabra, "Thabit on Euclid's parallel postulate", s. 19- 27.

⁸¹ A.I Sabra, "Thabit on Euclid's parallel postulate", s.17.

⁸² Roshdi Rashed, , *Encyclopedia of the History of Arabic Science*, c. 2, s.465.

olmak üzere, n taban için de geçerli olduğunu söyleyen ilk kişi olmasıdır.⁸³ I. ispatının son teoremi V. postulatın kendisidir.

Sabit İbni Kurra ikinci çalışmasında oldukça farklı bir varsayımdan yola çıkmıştır. Yalın hareketi yani belli bir cismin, belli bir doğru parçası boyunca düzgün çizgisel bir hareketini göz önünde bulundurarak, bu cismin bütün noktalarının doğru parçaları çizeceğini kabul etmiştir. Kurra, bundan eşit mesafeli doğru parçalarının var olduğu sonucunu çıkarmıştır. Aslında onun bu varsayımı sadece Öklid geometrisinde doğrudur. Oysaki Lobatchewsky'nin hiperbolik geometrisine göre, noktalar düz çizgiler boyunca çevrimsel olarak hareket ederek, yayları ve kıvrımlı doğruları oluşturur.⁸⁴ İkinci ispatın ilk altı teoremi paralellerle ilgili çeşitli özellikleri vermektedir. Sabit, birinci ispatında olduğu gibi ikinci ispatında da, son teoremden önceki teoremleri son teoremin ispatında kullanmak üzere geliştirmiştir. Sabit ibn Kurra'nın II. ispatının V. II. teoremi V. postulatın kendisidir. Bu ispatta Sabit *petitio principii* hatasına düşmüştür.⁸⁵

Sabit ibn Kurra her iki ispatın son teoremlerinde, V.postulatın farklı ispatlarını vermiştir. Dolayısıyla Sabit'in I. ispatının son teoremini birinci asıl ispat, II. ispatın son teoremi olan bu teoremini ise, onun ikinci asıl ispatı saymak daha doğru olacaktır.

⁸³ Bakınız; dipnot: 8.

⁸⁴ Roshdi Rashed, s.465.

⁸⁵ Bakınız; dipnot: 15.

d) Ebû 'Alî el-Hasan ibn el-Hasan ibn Heysem

İbn Heysem 965'de doğmuş ve 1040'da Kahire'de ölmüştür. El- Mısri veya ilk adı olan el-Hasan'ın Latincedeki hali olan Alhazen olarak da bilinir. Astronomi, matematik ve özellikle de optik alanlarında çalışmıştır. Batı'da "Alhazen problemi" ile meşhurdur.⁸⁶

İbn Heysem Öklid'in *Elementler*'ini şerh etmeye tahsis ettiği iki kitabında geometrik objelerin varlığı problemini formüle eden ilk Arap matematikçi olmuştur. İkinci kitapta birinci kitabına atıfta bulunarak şöyle yazmıştır: *"biz şunu iddia ediyoruz ki cisimler, yüzeyler ve çizgiler gibi nicelikler matematikte mevcuttur. Bunlar akıl gözünden vardır ve bu var oluş hissedilen cisimlerden soyutlama yapılarak gerçekleşir."* Ayrıca, *"bir şeylerin var oluşuyla ilgili spekülasyonlar matematikçilerden ziyade felsefecilerinin işidir"*⁸⁷ demiş ve şöyle devam etmiştir: *"Var olan şeyler ikiye ayrılır; duyularla var olanlar ve imgelem ve soyutlama ile var olanlar. Fakat duyularla var olanlar gerçekte var değildirler. Çünkü duyular genellikle gözlemcinin algısı olmazsa hatalı olur, hâlbuki imgelemde var olanlar gerçekten ve kesinlikle vardırler. Çünkü bunları hayal gücünde şekillendiren form ortadan kaybolmadığından ve değişmediğinden gerçektir."*⁸⁸

El Heysem *Elementler*'le alakalı iki adet şerh yazmıştır. Bunlardan birincisi, *Elementler*'in giriş bölümüne ait olan *Şerh Müsâdarât kitâb Uklidis fî' l-Usul*'dür (Öklid'in kitabı *Elementler*'in öncüllerine şerh) ve yayınlanmamıştır. İkincisi ise, teoremlerin incelendiği *Kitâb fî hall şukûk kitâb Uklîdis fî' l-Usul ve-şerh ma'ânîhi*'dir (Öklid'in kitabı *Elementler*'deki şüphelerin giderildiği kitap) ve

⁸⁶ J. F. Scott, "İbn Al Haytham", DSB, c.6, s.189.

⁸⁷ İbn Heysem, *Kitâb fî hall şukûk kitâb Uklîdis fî' l-Usul ve-şerh ma'ânîhi*, s. 7.

⁸⁸ Roshdi Rashed, s. 462-463.

Frankfurt'ta tıpkıbasım olarak yayınlanmıştır. İbn Heysem'in ilk şerhi, İbn Kurra'nın hareketi esas alan ikinci çalışmasının aynısıdır. Bu ispatlar, bir dikdörtgenin varlığını kanıtlamayı esas alırlar. Bir başka deyişle, bu ispatlar, aralarındaki uzaklık sabit olan çizgilerin varlığı esasına dayanırlar ve hareket eden katı bir cismin izlediği yolu kullanırlar. Bir dikdörtgenin varlığının ispatı, üç açısı dik açı olan bir dikdörtgenin dördüncü açısının durumuna dayanır ve dördüncü açının dar veya geniş olmasının imkânsız olduğu gösterilmeye çalışılır.⁸⁹ Fakat özellikle dördüncü açı dar açıyken bu imkânsızlığı bulmak zordur. Günümüzde bahsi geçen açının dik açıya eşit olması durumunda Öklid Geometrisi, dar olması durumunda Lobatchewsky Geometrisi ve geniş olması durumunda Riemann Geometrisi'nin geçerli olduğu bilinmektedir. Bu dörtgenler genellikle İsviçreli matematikçi Johan Heinrich Lambert'in (1728-1777) adıyla, *Lambert dörtgenleri* olarak bilinmektedir.⁹⁰

İbn Heysem bir dikdörtgenin varlığını kanıtladıktan sonra, V. postulatı önce dik bir kesen için, sonra da eğimli bir kesen için kanıtlar. Heysem, Öklid'in "Paralel çizgiler aynı düzlemde konumlanmış, her iki yönde de sonsuza kadar uzatıldığında kesişmeyen çizgilerdir" tanımını eleştirmiştir. Bu eleştirisinde, sonsuza kadar uzatılabilen çizgilerin varlığının kanıtlanması gerektiğini savunmuştur. Çünkü ona göre, sürekli bir şekilde uzatılan ve bir yere varmayan çizgileri tasavvur etmenin imkânı yoktur. Bu amaçla daha aşikâr bir postulat önermiştir: "Eğer iki çizgi sürekli uzatılırsa, birinin ucu diğerine mutlaka değer. Bu hareket boyunca ikinci çizgiye dik kalan bir çizginin öbür ucunun meydana getirdiği çizgi, ikinci çizgiye paraleldir"⁹¹ ve

⁸⁹ B.A Rosenfeld, s. 59.

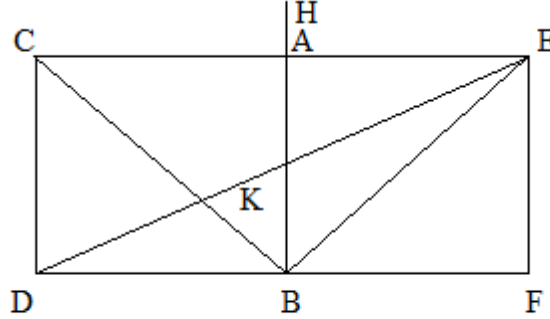
⁹⁰ Bonola, s. 44-51.

⁹¹ J. F. Scott, *DSB*, c.6, s.201-202.

"böyle iki çizginin kesişmesine imkân yoktur"⁹². Bir başka deyişle İbn Heysem paralel postulatının ifadesini değiştirerek, "kesişen iki çizginin ikisi de aynı anda bir üçüncü çizgiye paralel olamaz"⁹³ demiştir. Bu ifadenin orijinal dilinden İngilizceye çevrilmiş hâli Roshdi Rashed'in kitabında "*V. postulatın yerine geçmek üzere başka bir kuram ki bu kuram daha açıktır ve ruhumuza daha çok hitab eder, bunu şöyle ifade ederiz, kesişen iki çizgiden biri diğerine ya da onun aynısı olan bir başkasına paralel olamaz*" (İbn el-Heysem, *Kitab fî hall*, s. 25) olarak verilmiştir.⁹⁴ Bu ifade bu gün Playfair aksiyomu olarak bilinen aksiyoma denk bir ifadedir.

Heysem bu yeni postulatla, Öklid'in paralellik tanımına *eşit mesafe* kavramını eklemiş olmaktadır.

Heysem V. postulatı şu şekilde ispatlamıştır:



$|AC|$ ve $|BD|$, $|AB|$ 'ye dik olarak çizilmiş olsun. C noktasından $|BD|$ 'ye $|CD|$ dikini indirelim. $|CD|$, $|AB|$ 'ye eşit olacaktır.⁹⁵

⁹² B.A Rosenfeld, s.60.

⁹³ B.A Rosenfeld, s.64.

⁹⁴ Roshdi Rashed, s. 467.

⁹⁵ Bu ispattaki hata buradan kaynaklanmaktadır, eşit kabul edildiğinde V. postulata denk olmuş oluyor. Çünkü 3 dik açısı dik olan bir dörtgenin 4. açısı da dik olduğu zaman bir dörtgenin iç açılarının toplamı 360° ye denk olmuş oluyor böylece dörtgenin ikiye bölünmesiyle elde edilen üçgenin iç açılarının toplamı 180° olmuş oluyor. İç açıları toplamı 180° olan yalnız bir tane üçgenin

Bunun tersi imkânsızdır. Varsayalım ki tersi mümkün olsun. Yani $|CD| \neq |AB|$ olsun. Bu durumda iki seçenek olabilir. $|CD| > |AB|$ ya da $|CD| < |AB|$ 'dir.

Varsayalım ki $|CD| > |AB|$ olsun. $|CA|$ 'yı A tarafında uzatalım. Bu uzattığımız çizgi $|AE|$ olsun ve $|CA| = |AE|$ olsun. $|BD|$ 'yi de B yönünde F'ye kadar uzatalım. E noktasından $|BF|$ 'ye $|EF|$ dikini çizelim. Daha sonra, $|CB|$ ve $|BE|$ çizgilerini çizelim. $|CA| = |AE|$ olduğundan ve $|AB|$ doğrusu ortak olduğundan, CAB açısı EAB açısına eşittir ve bu açılar dik açıdır. $|CB| = |EB|$ 'dir. Dolayısıyla CAB üçgeni EAB üçgenine eşittir. Dolayısıyla üçgenin kalan açıları da birbirine eşittir ($CBA = EBA$, $BCA = BEA$). Fakat ABD açısı da ABF açısına eşittir. Yani CBD açısının EBF açısına eşit olduğu sonucuna varabiliriz. Buradan CBD üçgeninin EBF üçgenine eşit olduğunu görebiliriz. Sonuç olarak $|CD|$, $|EF|$ 'ye eşittir. Fakat bizim varsayımımıza göre, $|CD| > |AB|$ 'ydi. Öyleyse $|EF| > |AB|$ olmalı. $|EF|$ çizgisinin $|FB|$ çizgisine dik olarak ilerlediğini varsayalım. Hareket devam ettiğinde ve F noktası B noktasına geldiğinde $|EF|$, $|AB|$ 'yle çakışacaktır. Bunun sebebi EBF açısının ve ABD açısının her ikisinin de dik açı olmalarıdır. $|EF|$, $|AB|$ 'yle çakıştığında E noktası $|AB|$ doğrusunun dışında kalan H noktasıyla çakışacaktır. Yani $|EF| > |AB|$ 'dir ve $|EF|$ çizgisi $|BH|$ çizgisi olmuştur. Bundan sonra $|BH|$, $|BD|$ boyunca ilerlemeye devam etsin, bu hareket sonunda B noktası D noktasının üstüne gelecektir ve HBF açısı CDB açısına eşit (her ikisi de dik açı) olduğundan, $|BH|$, $|DC|$ 'yle çakışacaktır. Yani hareket boyunca EFB, HBD ve CDB açıları dik açı olarak kalmış; F noktası sırasıyla önce B sonra D noktasıyla çakışmış, E noktası ise önce H sonra da C noktasıyla

varlığının kanıtlanması, tüm üçgenlerin iç açılarının toplamının 180° olduğunu kanıtlamak için yeterli oluyor. Üçgenin iç açılarının toplamının 180° olması da V. postulata denk bir ifade oluyor. Bir başka nokta da iki doğrunun ikisine de dik bir tane doğru çizilebilir. Bu hiperbolik geometri için de doğrudur. Fakat iki doğru arasına ikisine de dik olan ikinci bir dik çizilebildiği anda bu yalnızca Öklid geometrisinde mümkündür.

çakışmıştır. Fakat biz paralel çizgileri tanımlarken böyle hareket eden çizgilerin paralel olduğunu ve bu çizgiler üstündeki noktaların doğrusal olarak hareket edeceğini söylemiştik. Yani EHC düz bir doğrudur. Bizim varsayımımıza göre EAC çizgisi E ve C'yi birleştiren düz bir çizgi olmalıydı. Fakat EHC çizgisi de E ve C'yi birleştiren düz çizgidir ve EAC'den farklıdır. Sonuç olarak bu iki çizgi de düz çizgidir, fakat bir yüzey kapsamaktadır (CAE üçgeni) ki bu durum imkânsızdır.⁹⁶ Yani $|CD| > |AB|$ olması saçmadır. $|CD|$, $|AB|$ den uzun değildir.

Aynı şekilde, $|CD|$ 'nin $|AB|$ 'den kısa olmasının imkânsızlığını da gösterebiliriz. Benzer bir argümanla $|AC|$ 'den $|BD|$ 'ye indirilen her bir dikin $|AB|$ 'ye eşit olduğunu gösterebiliriz.⁹⁷

B.A Rosenfeld, ibn Heysem'in V. postulat ispatını şöyle tarif etmektedir: "İbn Heysem V. postulat ispatını önce dik, sonra da eğimli bir çizgi için yapmıştır. Çalışmasına $|AD|$ ve $|EDG|$ doğrularını ele alarak ve $|EDG|$ ve $|BD|$ 'yi dik olarak kesiştirmekle başlar.

⁹⁶ Heysem, Öklid'in "iki düz çizgi bir alan sınırlayamaz" aksiyomuna gönderme yapmıştır ki bu aksiyom Heysem'e göre bir postulat olmalıymış (DSB, c.6, s.201).

⁹⁷ B.A Rosenfeld, s.60-62.

Sonra ibn el-Heysem, $|KO|=|BD|$ 'yi çizmiş ve $|DG|$ 'yi $|KM|$ 'ye kadar uzatarak bunları O noktasında kesiştirmiştir. KOD dik açıdır demiş ve LMN üçgeniyle $|DO|$ doğrusu için Pasch Aksiyomunu⁹⁸ uygulamış ve $|EDG|$ 'nin uzantısının, LMN üçgeninin LN tarafında AB'nin uzantısıyla kesişeceğini söylemiştir.

Yine aynı şekli kullanarak Heysem, paralel postulatını BDG açısının dar ve geniş açı olduğu durumlar için de ispatlamıştır. Birinci durumda Heysem, B noktasından DG'ye bir dik çizer ve bu dikin G tarafına düştüğünü göstererek problemi bir önceki duruma indirger. İkinci durumda, $|BD|$ doğrusunu R noktasında yarılammıştır. R'den $|EDG|$ 'ye $|RX|$ dikini indirmiş ve bu dikin E tarafına düşeceğini kanıtlamıştır. RDT açısını DBC açısına eşit olarak çizmiş ve R'den $|DT|$ 'ye $|RU|$, $|BC|$ 'ye $|RS|$ diklerini çizmiştir. Böylece RSB üçgeninin ve RDU üçgeninin eşitliğini ispatlamıştır. Ayrıca $|RU|$ ve $|RS|$ 'nin tek bir $|SX|$ çizgisi meydana getirdiğini göstermiştir; bunun $|ABC|$ ve $|EDG|$ 'yi dar bir açıyla kestiğini göstererek problemi bir önceki duruma indirger.

Dolayısıyla, bu dik CH doğrusudur. H noktası B ve D arasındadır. CH'yi C ve H tarafından uzatırız, CH'ye eşit CF'ye kadar uzatırız, BC'yi de BC, CL'ye eşit olacak kadar uzatırız, BC ve CL doğruları eşit olduğundan, aynı zamanda CH, CF ve dikey açılar LCF ve BCH eşittir. LF tabanı BH tabanına eşittir ve diğer iki alakalı açı da birbirlerine eşittir. Dolayısıyla CFL açısı, CHB dik açısına eşittir ve CFL'de diktir. F noktasından BK'ya dik indirelim ve bu dik FK olsun. FK doğrusu HB doğrusuna eşit olsun. Öncülde ispatladığımız gibi, KFH dik açıdır. Fakat CFL de

⁹⁸ Pasch Aksiyomu olarak bilinen aksiyom, 19. yy matematikçisi M. Pasch'ın meşhur ettiği aksiyomdur. "A, B, C aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta ve d de bu noktaları içinde bulunduran düzlemde bir doğru olduğunda, eğer d doğrusu A, B ve C'nin hiçbirinden geçmiyor ve $[AB]$, $[BC]$ ve $[AC]$ kenarlarından birini kesiyorsa, öteki ikisinden birini de keser".

diktir, yani LFK doğrusaldır. LF çizgisinin BH 'ye eşit olduğunu ve LK 'nın LH nin iki katı olduğunu gösterdiğimizden. Eğer LK , BD 'den büyük değilse, BL çizgisini L tarafında uzatırız. Aynı zamanda KL 'yi de L tarafında uzatırız. LM ve LN çizgilerini uzatarak M ve N noktalarını birleştiririz. LM ve LN çizgileri sırasıyla BK ve LK çizgilerine eşit olacaktır ve düşey açılar NLM ve BLK eşittir. Dolayısıyla MN tabanı BK tabanına eşit olacaktır ve NLM üçgeni BLK üçgenine eşit olacaktır ve bu üçgenlerin kalan açılarının her biri diğer üçgende alakalı açılara eşit olacaktır. Dolayısıyla eğer bir düz çizgi diğer iki düz çizgi üzerine düşüyorsa aynı tarafa bakan açılar toplamı iki dik açıdan küçük olduğu tarafta bu çizgiler uzatıldıkları takdirde kesişirler ki bu da bizim ispatlamaya çalıştığımız şeydir.

Kitâb fî hall şukûk kitâb Uklîdis fî'l-Usul ve-şerh ma'ânîhi'de ibn Heysem, V. postulatın ispatını *Şerh Mûsâdarât kitâb Uklîdis fî' l-Usul*'de verdiğini belirtmiştir."⁹⁹

İbn Heysem, *Şerh Mûsâdarât kitâb Uklîdis fî'l-Usul* (Öklid'in kitabı *Elementler*'in öncüllerine şerh) çalışmasında, V. postulat için önermiş olduğu yeni yaklaşımı Sabit ibni Kurra'nın gibi yalın harekete (bir doğruya dik olan başka bir doğrunun hareketi) dayanıyordu. Bir ayağı bir çizgi üzerinde bulunan dikmenin diğer uç noktasının bir doğru parçası çizeceğini söylüyordu. Ancak bu varsayım, kesene göre bir doğru üzerinde hareket eden tüm noktaların benzer ve eşit çizgiler oluşturduğu varsayımına denkti¹⁰⁰ ki o da Öklid'in V. postulatına eş değerd. Dolayısıyla Heysem de, çağdaşları gibi *petitio principii* hatasına düşmekten kurtulamamıştı. Ancak Heysem kendinden sonra el-Tûsî, Hayyâm, Lambert ve

⁹⁹ B.A Rosenfeld, s.62-64.

¹⁰⁰ Roshdi Rashed, s. 466.

Saccheri gibi birçok matematikçinin kullanacağı üç dik açılı dörtgenleri keşfetmişti. Hayyâm ve Saccheri'nin dörtgenleri Heysem ve Lambert'in dörtgenlerinin simetri eksenine göre iki katıdır. Bu dörtgenlerin ortaya çıkışı ibn el-Heysem'e dayanmaktadır. Bu dörtgenler daha önceden de bahsettiğimiz gibi Lambert dörtgenleri olarak bilinmektedir. Ancak bu dörtgenleri ilk defa ele alan kişinin ibn Heysem olduğu göz önüne alındığında, bunlara *Heysem Dörtgenleri* demek daha doğru olacaktır. Heysem, yukarıda bahsi geçtiği üzere, dördüncü açının $<90^\circ$ veya $>90^\circ$ seçeneklerinin mümkün olmadığını, düşey hareket yapan uç noktanın bir doğru parçası oluşturacağı fikriyle ispatlamıştır. Dörtgenlerin varlığını tartıştıktan sonra, buradan kolayca V. postulatı türetmiştir. Aslında bu reddedilmiş iki varsayım sırasıyla, hiperbolik ve eliptik geometri kuramlarıdır.

Özellikle dikkat çekmek gerekir ki, aynı doğru üzerinde çizilen bir dikme ve eğimli bir çizginin birbirlerini keseceklerini ispatlarken, Heysem, çok önemli bir varsayımı aşikâr olarak ele almıştır. Bu varsayım 1882'de Alman geometrici M. Pasch tarafından yeniden ele alınarak gündeme getirilmiştir ve onun adıyla bilinmektedir. Ancak açıkça görüldüğü üzere bu varsayım Heysem'e dayanmaktadır.

e) Ömer Hayyâm

Ömer Hayyâm (Ömer ibn İbrahim Hayyâm) (1038/48-1123/4, Nişabur) İranlı şair, matematikçi, astronom ve filozoftur. Nişabur (Horosan), Semerkant, Buhara¹⁰¹, İsfahan şehirlerinde çalışmıştır. Özellikle *Rubailer*’iyle meşhurdur.¹⁰² Öklid’in *Elementler* kitabına bir şerh yazmıştır. Bu *Şerh-i müşkil min musâderât-ı Kitâb-ı Uklidis*’dir (Öklid’deki zorluklar üzerine şerh). Hayyâm’ın bu çalışması bugün Leyden’da, Brockelmann’da, Tahran’da ve Moskova’da bulunmaktadır.¹⁰³

1933 yılında, David Eugene Smith (1860-1944) bir İran gezisi sırasında, Tahran’daki Sipah Salar Kolejini ziyaret etmiş ve orada bir yazma keşfetmiştir. Bu yazma Nâsireddîn el-Tûsî’nin Hayyâm’a ait önemli çalışmalarını içeren bir yazmadır. Bu nüshanın müellifi Hasan ibn Muhammed ibn Matar’dır. Yazmanın tarihi 1387-88, boyutları 26,5-18,5 cm.dir. Ana başlığı *Anahtarlar* olan bu yazma toplam 184 sayfadır. Bu yazmanın bizim için önemi, Ömer Hayyâm’ın *Şerh-i müşkil min musâderât-ı Kitâb-ı Uklidis*’inin birinci bölümünü içermesidir. Nâsireddîn bu yazmada Hayyâm’ın eserini vermiş ve ona bir şerh yazmıştır.¹⁰⁴ Bahis konusu olan eserin girişinde Nasreddîn şöyle söylemiştir, "Ömer Hayyâm, Allah ona rahmet eylesin, Öklid’in kitabındaki postulatlarla dair zorlukların tefsiri adlı bir eser kaleme almıştır. Bu risalede Hayyâm yazdıklarının 28 numaralı teoremden sonrakilere değer mahiyette olduğunu söyler. Allah’ın izniyle biz burada onları Ömer’in kendi

¹⁰¹ Bugün Özbekistan sınırlarındadır.

¹⁰² B.A Rosenfeld, s.64.

¹⁰³ a. *Leyden Catalogue*: "Risale fi şerh-i mâ-uşkül min musaderât-ı-kitâb-ı-Uklidis" Kommentar zu den Schwierigkeiten in den Postulaten des Euclides. 1077-1078. Leyden: No.967.

b. *Brockelmann*: Geschichte der Arabischen litteratur. Weimar, 1898 T.I p:471.

c. Discussion of difficulties of Euclid by Omar KHayyâm, ed by Dr. T. Eranî, Tahran: 1936.

d. Istorico Matematikeskiye issledovaniya: c. VI. 1953 (Moscova) s.72 (Rosenfeld tercümesi) (Matematik tarihi araştırmaları).

e. Ömer Hayyâm, Resâil: Rosenfeld ve Yuschkevitch tercümesi Rusça S:113-145.

¹⁰⁴ David Eugene Smith, "Euclid, Hayyâm and Saccheri", *Islamic Mathematics and Astronomy*, c. 19, s. 1-2.

ifadesiyle ispat edip okuyuculara bilgi vermek amacıyla açıklayacağız".¹⁰⁵ Böylelikle daha sonra Öklid dışı geometrinin kurucusu sayılan İtalyan matematikçi Gerolamo Saccheri'nin (1667-1733) *Euclides ab omni naveo vindicatus* adlı çalışmasının temelini atmıştır. Aslında Saccheri'yle Hayyâm'ın çalışması aynıdır. Saccheri'nin Hayyâm ve El-Tûsî'den tek farkı, içinde yaşadığı zamanın avantajıyla, ispatının sonunda Öklid dışı bir geometrinin varlığını işaret etmesidir. Bu farkındalık dışında ispatlar neredeyse tıpatıp aynıdır. Saccheri çalışmasında Hayyâm'dan bahsetmemiş olsa da El-Tûsî'den söz etmektedir.

Şerh ma-askala min musâderât Kitâb Uklidis'in söz kalabalıklarından kaçınabilmek için modern notasyonlarla, Ali R. Amir Moez (1919-2007) tarafından yapılmış İngilizce çevirisi mevcuttur. Fakat maalesef Moez'in çevirisini yaptığı yazma, Hayyâm'ın çalışmasının bir kopyasıdır ve üzerinde oynamalar yapılmıştır. Moez, orijinal metinden uzaklaşmamak için kelime kelime tercüme yapmıştır. Çeviride Hayyâm'ın girişi, paralellerle ilgili görüşleri, oran orantı, bileşik oranlar ile ilgili görüşleri ve irrasyonel sayılarla ilgili bilgilerini içeren kısımlar mevcuttur. Hayyâm, kendinden önceki âlimlerin paralellerle ilgili çalışmalarını gördüğünden, ancak bunların hiç birinin ispat içermediğinden bahseder. Hayyâm'ın bahsettiği isimler arasında Heron, Autocus (Autolycus), el Hasan¹⁰⁶, el Şenni ve el Neyrîzî bulunmaktadır. Ömer, Heysem'in harekete dayanan postulasını ve ispatını şiddetli bir şekilde eleştirmiştir. Heysem'in bir doğruya dik olan başka bir doğrunun hareketini esas alan ispatındaki hareketin, Öklid'in kullandığı hareket fikrinden farklı olduğunu öne sürmüştür. Hayyâm'a göre, Öklid harekete sadece tek bir unsur için izin vermiştir. Bir noktanın hareketiyle oluşan bir doğru, bir doğrunun hareketiyle oluşan

¹⁰⁵ Hamit Dilgan, *Şair Matematikçi Ömer Hayyâm*, s. 23.

¹⁰⁶ El-Heysem.

bir yüzey veya bir doğrunun çevrilmesiyle oluşturulan bir çember, hareketle oluşturulabilecek şekillerdir. Ancak bu hareketler, bir doğrunun iki ucuyla oluşan paralel doğrulardan farklıdır. Öklid'e göre böyle bir hareket ancak bir yüzey oluşturabilir ve Öklid'in bu fikirlerinin Heysem'in fikirleriyle karşılaştırılması mümkün değildir. Hayyâm bu çalışmasında *Elementler*'in ilk 28 teoremini kabul etmiş ve bu teoremlere ek 8 tane teorem önermiştir. Fakat üçüncü teoremin birinci kısmı hatalıdır.¹⁰⁷

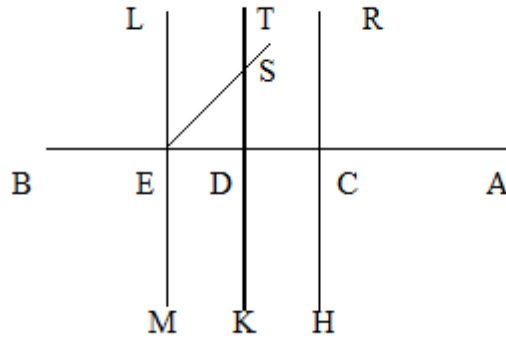
Biz tezimizin bu bölümünde Ali R. Amir Moez'in Hayyâm'ın orijinal metninden İngilizce'ye çevirdiği eserin paralellerle ilgili olan kısmını, metine müdahale etmeden Türkçe'ye çevireceğiz.

¹⁰⁷ David Eugene Smith, s.1.

Ömer Hayyâm - Öklid'deki Güçlüklerin Tartışılması

Bölüm I. Meşhur Şüphenin Tartışılması

Rahim ve rahman olan Allah'ın adıyla. Öklid'in bu konunun ispatını neden ihmal ettiğini ve aklın ilkelerine güvenmesinin ve doğrunun ve iki doğru arasındaki açının tanımından yararlanmamasının sebebini ortaya çıkarmak gerekli olmuştur.



AB bir doğru olsun. Varsayalım ki, RH, TK, LM doğruları AB doğrusuna, sırasıyla C, D ve E noktalarında dik olsunlar. RH çizgisi herhangi bir ucundan sonsuza kadar uzatıldığında, A veya B tarafına doğru eğilmesin.¹⁰⁸ Tüm bunlar TD doğrusu için de geçerli olsun. Bu durumda TD doğrusu RC doğrusuyla kesişmez, çünkü kesişmeleri için içlerinden birinin A veya B yönüne eğilmiş olması gerekirdi. Aynı şekilde, HC, KD ve ME de bu özellikleri sağlasın. Varsayalım ki, CD=DE. O halde, bu doğruları birleştiren bir alan olan RCDT düzlemi, TDEL düzlemiyle aynıdır. Eğer RC ve TD kesişirse, bu durumda TD ve EL de aynı noktada

¹⁰⁸ Burada eğik çizgilerle hiperbolik çizgileri kastediyor olabilir.

kesişecektir. Yani tüm bu doğrular AB'ye dik durumdadırlar. Aynı zamanda CH ve DK kesiştiği için onlara benzer. Bu mümkün değildir. Çünkü RC ve DT arasındaki uzaklık genişlemez veya daralmaz. Eğer genişleseydi veya daralsaydı, bu yine imkânsız olurdu. Bu doğrular AB'ye diktir ve aralarındaki uzaklık sabittir.

şimdi, TD'yi AE tarafında kesen ve eğimli bir doğru olan ES'yi izelim. Aslında ES ve EL ıraksaktır, bunlar arasındaki mesafe verilen herhangi bir değere ulaşır. SED açısı dik açıdan küçüktür. Dolayısıyla $\angle SED + \angle SDE$ iki dik açıdan küçüktür. klid bunun ES ve DT doğrularının kesişmelerinin sebebi olduğunu tahmin etti. Doğru da tahmin etti. Fakat klid'in bunun ispatını vermeden, buna dayanan ve aslında doğru olan birçok teorem vermesi ilginçtir ki bu teoremlerin ispatları tam değildir.

klid bundan daha basit birçok şeyi ispatlıyor. Örneğin nc kitabında, eşit çemberin merkezindeki eşit açıların eşit yaylar gördüğünü ispatlamıştır.¹⁰⁹ Bu teorem açıktır. Çünkü eşit çemberler ve eşit açılar üst üste getirilebilir. Ayrıca beşinci kitapta, aynı değeri veren iki oranın birbirlerine eşit olduğunu ispatlıyor. Bu gerçeğin hiç bir ispata ihtiyacı yoktur. Çünkü iki eşit şeyin arasında bir fark yoktur. Bunlardan biri diğerinin yerine kullanılabilir.

klid katı cisimlerle ilgili birkaç teoremi de ispatlamayı ihmal etmektedir. Ancak bunlar çok da önemli değildir. Oraya gelebilirsek, Allah'ın izniyle biz onları ispatlayacağız.

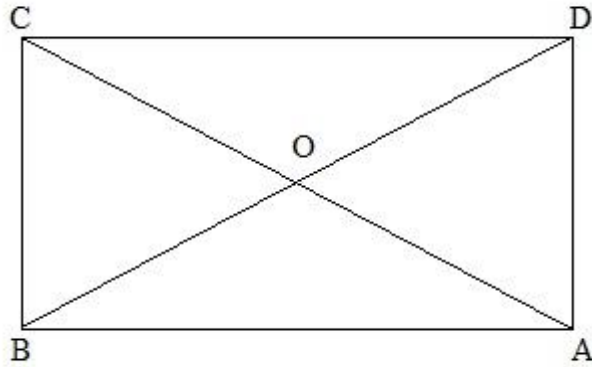
Bu şüphenin açıklanması ve çözümlenmesi eski limlerden, Mekaniki Heron, Auto(ly)cus ve daha sonraları Abbas el- Neyrîzî vb. tarafından yapılmıştır.

¹⁰⁹ mer Hayyâm, 3. kitap 29. teoremde bahsediyor.

Herhangi bir önermenin hem doğrudan hem de karşıt şeklinin ispatlanması şarttır. Eğer bunlardan biriyle yetinirsek, bu, önermenin ispatlanmadığı anlamına gelir. Fakat bu insanların bu teoremi ispatlarken, hata yapmalarının sebebi, Öklid'in I. kitabının başında akıl yoluyla verdiği prensipleri atlamaları ve Öklid'in söylediğine güvenmeleridir. Bu kâfi değildir.

Elementler'in ilk 28 teoreminde herhangi bir değişiklik yapmaya lüzum yoktur. Biz Öklid'in 29. teoremini, bu yazmadaki teorem 1 ile değiştireceğiz ve ondan sonra gelenleri de ekleyeceğiz. Umarım Allah'ın yardımıyla doğru ispatı verebilirim.¹¹⁰

Teorem I: AB verilmiş bir doğru parçası olsun. AB'den, AD ve BC dikmelerini çıkaralım. Öyle ki, $AD=BC$ olsun (Öklid'in teoreminden açıkça görülüyor ki BC ve AD paraleldir). Bu durumda ADC açısı, BCD açısına eşittir.

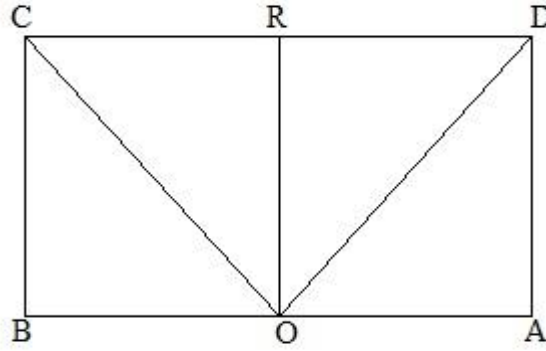


İspat: AC ve BD'yi çizelim. ABC ve ABD üçgenlerindeki, $AD=BC$, AB ortak ve $\angle BAD=\angle ABC=$ dik açıdır. Sonra $AC=DB$ ve kalan açılar da birbirlerine eşittir. $\angle OAB=\angle OBA$ eşitliği, $OA=OB$ 'yi ima eder. Buradan $OD=OC$ 'dir.

¹¹⁰ Bunlar Ömer'in kendi sözcükleridir. Hiçbir müdahale yapılmamıştır.

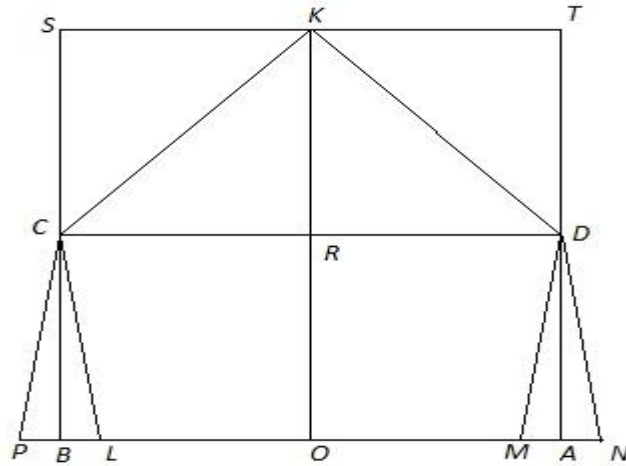
Dolayısıyla, $\angle OCD = \angle ODC$ 'dir. Nitekim $\angle ADB = \angle ACB$ 'ydi. Sonuç olarak, $\angle ADC = \angle BCD$ 'dir.

Teorem II: I. teoremdeki ABCD dörtgenini ele alalım. Varsayalım ki O, AB'nin orta noktası olsun. OR çizgisi, O noktasında AB'ye dik olsun. Bu durumda, $CR = RD$ ve OR, CD'ye diktir.



İspat: DO ve CO'yu çizelim. DAO ve CBO üçgenlerinde, $AD = BC$, $OA = OB$ ve $\angle OAD = \angle OBC = \text{dik açıdır}$. Dolayısıyla, $DO = CO$ ve $\angle BOC = \angle AOD$ 'dir. Böylece, $\angle DOR = \angle COR$ olur. Buna ek olarak, ODR ve OCR üçgenlerindeki, $DO = CO$ ve $OR = OR$ 'dir. Dolayısıyla, $DR = CR$ ve $\angle DRO = \angle CRO = \text{dik açıdır}$.

Teorem III: Teorem II ile aynı hipotezi ele alalım. Bu durumda, (aşağıdaki şekildeki) $\angle ADR = \angle BCR = \text{dik açıdır}$.



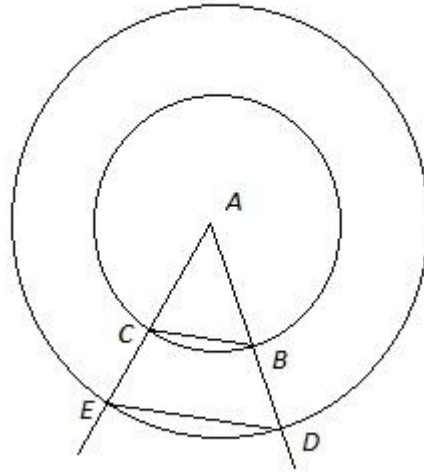
İspat: O, AB'nin orta noktası olsun ve OR, AB'ye O noktasında dik olsun. OR=RK olacak şekilde O doğrultusunda bir K noktası alalım. Birleştirildiklerinde OK'ya dik olacak bir doğru üzerinde bulunan ve sırasıyla AD ve BC doğrultusunda, T ve S noktalarını alalım (AT ve OK paraleldir ve herhangi iki paralel arasındaki uzaklık sabittir). BC'yi, OK'ya paralel olacak şekilde sonsuza kadar uzatalım ve SK'yı da RC'ye paralel olacak şekilde sonsuza kadar uzatalım, bu iki uzantı mutlaka bir noktada kesişeceklerdir. CK ve DK'yı çizelim. KDR ve KRC üçgenleri eşittir. Çünkü DR=RC, RK=RK ve DC'ye diktir. Dolayısıyla, DK=KC ve $\angle RCK = \angle RDK$ 'dır. O halde, $\angle SCK = \angle TDK$, $\angle DKR = \angle CKR$ ve böylece $\angle SKC = \angle TKD$ ve DK=CK. Dolayısıyla, CS=DT ve SK=KT. Eğer $\angle BCD$ ve $\angle ADC$ dik açılarsa, teorem doğrudur. Eğer değilse, içlerinden biri ya dar ya da geniş açı olacaklardır. Onları dik açıdan küçük varsayalım. SDCT düzlemini CDAB düzleminin üstüne, RK'yı RO üstüne, ST de AB'nin üzerine gelecek şekilde katlayalım. Sonra

$\angle SCR, \angle BCR$ 'den büyük olduğu zaman ST, PN 'ye dönüşsün. Dolayısıyla $TS > AB$ 'dir. Bu şekilde bu çizgileri sonsuza kadar uzatalım. Onları birleştiren doğru sonsuza gittikçe büyür. BC ve AD doğruları aynı doğruya diktirler ve aralarındaki uzaklık genişlemez.¹¹¹ Bu aslında filozofun inandığı şeydir.¹¹² Eğer herhangi biri dik açıdan büyükse, katlamadan sonra ST, AB 'den küçük olan LM olur. Yani tüm doğrular bu şekilde bağlantılıdır ve birbirlerine yaklaşırlar. Bu da bir önceki durumdaki gibi imkânsızdır.

Eğer bu çizgiler eşitse, bu açıların dik açı oldukları açıkça görülebilir. Uzun bir tartışmadan kaçınmak için biz bu konuya değinmiyoruz. Son zamanlarda bu konuya değinmiş insanların hatası ve bu temel teoremi ihmal etmiş olmaları, özne ve nesnenin doğru şekilde kullanımı hususunda hayal güçlerinin eksik oluşunun bir sonucudur. Eğer bu temel teorem ihmal edilmemiş olsaydı, Öklid ufak bir dikkatle, bu yazının amacı olmayan, ancak bahsedilmesinde fayda olan, şu bir sonraki teoreme ulaşabilirdi.

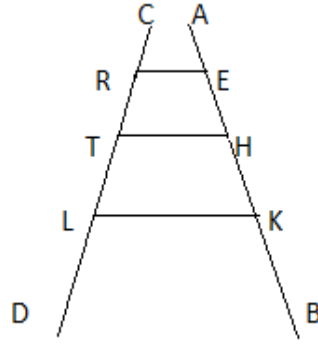
¹¹¹ Bu ifade bu iki doğru arasındaki uzaklık sabit demektir ki bu da V. postulata denk ifadelerden biridir. Bu ifadenin asıl metinden bakılması gerekilebilir.

¹¹² Öklid kastedilmektedir.



Varsayalım ki AB ve AC doğruları A noktasında kesişsin ve sonsuza kadar uzasınlar. Merkezi A ve yarıçapı AB olan bir çember çizelim. Bu çemberde bir C noktası işaretleyelim. AB doğrusundan bir D noktası seçelim. Merkezi A ve yarıçapı AD olan bir başka çember çizelim. Bu çember AC doğrusuyla E’de kesişsin. BC ve DE’yi birleştirelim. Öyle ki $DE > BC$ olsun. Bu çember, açı ve doğrularla kolaylıkla oluşturulabilecek bir şekildir. Eğer ki biri ispat vermek isterse, aynı fikirleri kullanacaktır. *Elementler*’in yazarı bu teorem üzerine şöyle söylemiştir, "iki doğru bir yüzeyi sınırlandıramaz", bu, prensiplerinden biridir.¹¹³ Kim ki sınırları hatırlarsa, ilişkileri de hatırlar.

¹¹³ Bu cümleler, kelimesi kelimesine çevrilmiştir.

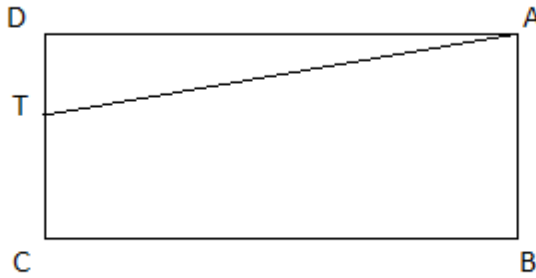


Şu da temeldir: İki çizgi arasındaki uzaklık, bunları iç açılar eşit olacak şekilde birleştiren bir çizgi dilimidir. Örneğin, AB ve CD aynı düzlemde iki doğru olsun. E, AB’de bir nokta olsun. Varsayalım ki $|ER|$, AB ve CD arasındaki uzaklık olsun ve E açısı R açısına eşit olsun. Fakat ER nasıl çizilmelidir ki bu iki iç açı eşit olsun? Fakat geometrinin temel prensiplerini düzeltmek sorumluluğu bir geometricinin işidir, bir filozofun değil. Pekiyi, böyle bir çizgiyi çizmek mümkün müdür? *Elementler*’in yazarına göre, EB’yi kesen ve E noktasından geçen sonsuz sayıda, her büyüklükte, her biri birbirinden farklı ve her açıda doğru çizmek mümkündür. Bunlardan biri mutlaka istediğimiz durumda olacaktır. Şimdi $RT=EH$ alalım ve bunu HT ile birleştirelim. Teorem 1’de söylenmiş olduğu gibi H ve T açıları eşittir ve HT uzaklıktır. Eğer HT, RE’den büyükse, doğrular birbirlerinden uzaklaşıyordur. Şimdi HK’ya eşit bir TL seçelim ve bunları LK’yla birleştirelim, LK uzaklıktır. Eğer KL, TH’den kısaysa doğrular birbirlerine yaklaşıyordur ki bu açıkça imkânsızdır. Eğer eşit olsalardı aynı şey geçerli olacaktı. Eğer HT, ER’den küçük olsaydı ve doğrular birbirlerinden uzaklaşırsalardı, bu durumda KL’nin HT’den küçük olması gerekirdi ki bu da imkânsızdır. Açıkça aynı düzlemdeki iki çizgi bir tarafta birbirine yaklaşıyorsa aynı tarafta birbirlerinden uzaklaşamazlar. Aynı şey uzaklaşma için de geçerlidir. Bu geometrik bir önermeden çok filozofik bir

durumdur. Fakat bahsi geçen örnekte faydası dokunmaktadır ve tahminimizi haklı çıkarmaktadır.

Bir doğrunun üzerindeki bir noktanın, diğer bir doğruya olan uzaklığı, bu noktadan doğruya dik olarak çizilmiş çizgidir diyen insanlar, haklı değildir. Birinci dikin ayağından, ilk doğruya çizilen dik, ilk dike eşit değildir. Fakat eğer iki iç açı eşitse ve iki doğrunun eğimleri onları birleştiren doğruya göre aynıysa, bu durumda bu, aralarındaki uzaklıktır. Bu, önceki geometricilere malum olmuş ve onlar ispata gereksinimi olan bir teorem belirlemişlerdir. Şu asla söylenmedi: Verilen bir doğru parçasının uçlarından dikler çıkarsak ve bu dikler üzerinde eşit dilimler seçersek, bu durumda bunların arasındaki uzaklık onlara dik olacaktır ve aralarındaki tüm uzaklıklar eşittir. Bu doğrular ne ıraksaktır ne de yakınsak. Biz bunlara birbirlerine yüz yüze dik olan doğrular¹¹⁴ diyoruz.

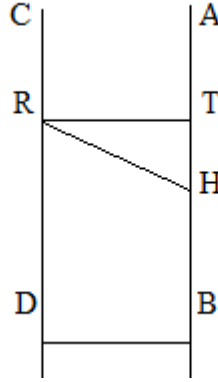
Teorem IV: Eğer bir ABCD dörtgeninin açılarının hepsi dik açıysa, bu durumda $AB=DC$ ve $AD=BC$ 'dir.



¹¹⁴ perpendicular "vis-a-vis" each other.

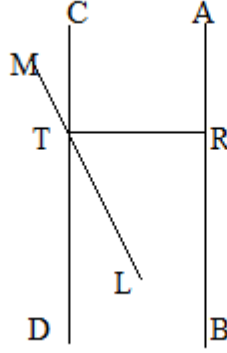
İspat: Eğer AB, DC'ye eşit değilse, bunlardan biri diğerinden daha büyük olmalıdır. Var sayalım ki büyük olan CD olsun. CD üzerinde bir T noktası seçelim. Öyle ki $CT=AB$ olsun. A ve T'yi birleştirelim. Dolayısıyla BAT açısı, CTA açısına eşittir. Nitekim BAT açısı, dik açıdan küçüktür ve CTA açısı, ADT üçgeninin dış açısı olduğundan ve D açısından büyük olduğundan, dik açıdan büyüktür. Bu imkânsızdır. Yani $AB=CD$ 'dir ve bu da teoremi ispatlar.

Teorem V: AB ve CD karşılıklı iki doğru olsun. Bu doğrulardan birine dik olan diğerine de diktir.



İspat: AB üzerindeki T noktasından CD'ye dik çizelim; buna TR diyelim. T açısı dik açıdır. AB ve CD çizgileri BD'ye diktir. Eğer BT, DR'ye eşit değilse, bunlardan biri diğerinden büyük olmalıdır. Büyük olan üzerinden küçük olana eşit bir doğru parçası seçelim ki bu BT üzerinden seçtiğimiz BH olsun. Bu durumda H açısı dik açı olmalı ve dik açıdan küçük olan HRD açısına eşit olmalı ki bu imkânsızdır. Dolayısıyla, $BT=DR$ ve T açısı dik açıdır. Bu da bizim ispatlamak istediğimiz durumdur.

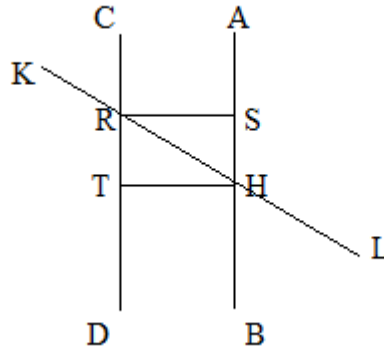
Teorem VI: Öklid'in tanımıyla herhangi iki paralel çizgi, kesişmeyen ve karşılıklı olanlardır. Örneğin AB ve CD paralellerdir ve karşılıklıdır.¹¹⁵



İspat: CD üzerinde bir T noktası seçelim. AB'ye TR dikini çizelim. Eğer T açısı dik açıysa, bu iki çizgi karşılıklıdır. Eğer T açısı dik açı değilse, RT'ye dik bir MT çizeriz. Dolayısıyla, MTL ve ARB çizgileri karşılıklı olmuş olur. Fakat DTC ve MTL kesişir ve aralarındaki uzaklık TM ve TC sonsuzluğa doğru artar ve TM ile RA arasındaki uzaklık şüphesiz sabittir. Eğer TC ve TM, karşılıklı çizgilerin birbirine uzaklığı olan, TR'den büyükse; TC, BR'yi keser. Fakat bu imkânsızdır. Çünkü biz onların paralel olduklarını varsaymıştık. CTR açısı dik açıdan küçük veya büyük değildir, yani dik açıya eşittir. Dolayısıyla, AB ve CD karşılıklıdır ki bu da bizim göstermek istediğimiz şeydir.

¹¹⁵ vis-a-vis.

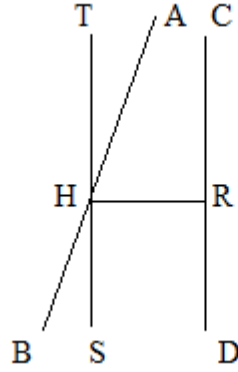
Teorem VII: Eğer bir doğru, paralel iki doğruyu keserse, karşılıklı açılar¹¹⁶ eşit ve dış açı iç açıyla aynı olur. Örneğin, AB ve CD paralel doğrular olsun. KRHL doğrusu bu doğruları kessin. Bu durumda LRD ve AHR açıları karşılıklı ve eşittir. AHR ve CRH iç açılardır ve toplamaları iki dik açı kadardır. Dış açı olan CRK da iç açı olan AHR'ye eşittir.



İspat: H'den CD'ye HT dikini çizelim. Bu çizgi aynı zamanda AB'ye de dik olacaktır. Çünkü çizgiler karşılıklıdır. R'den AB'ye RS dikini çizelim. Açıkça HTRS dörtgeninin tüm açıları dik açıdır ve karşılıklı kenarları eşit olacaktır. Dolayısıyla SHR açısı iç ters açıdan HRT açısına eşittir. CRK ve THR açıları eşittir. Dolayısıyla CRK açısı da AHR açısına eşittir. Bu da bir dış açıyı, iç açıya eşit yapar. HRT açısıyla HRC açıları toplamı iki dik açıya eşittir; AHR ve HRC açılarının toplamı da aynı şekilde iki dik açıya eşittir.

¹¹⁶ Ali R. Amir Moez'in çevirisinde *reciprocal* olarak çevrilmiştir. Burada kast edilen şey bu gün içters açılar olarak tanımladığımız açılardır. Dolayısıyla *reciprocal* kelimesini metnin devamında içters açı olarak çevireceğim.

Teorem VIII: HR bir düzgün doğru parçası olsun. HA ve RC doğruları, H ve R noktalarından geçsin öyle ki, $\angle AHR$ ve $\angle CRH$ açılarının toplamı iki dik açıdan küçük olsun. Bu durumda bu doğrular A yönünde kesişirler.



İspat: İki çizgiyi $\angle AHR$ açısı, $\angle HRC$ açısından küçük olacak şekilde çizelim.¹¹⁷ Sonra Öklid'e göre THS ve DRC doğruları paraleldir. HA doğrusu ST doğrusunu keser. Dolayısıyla DC'yi de A tarafında keser ki bu da bizim göstermek istediğimiz şeydir.

Bu, paraleller teoremlerinin gerçek ispatıdır. Eğer bu teoremleri önceden bahsettiğimiz sırayla *Elementler* kitabına eklersek, akıl ilkelerinden alınmış olanları bertaraf etmiş oluruz.¹¹⁸

Hayyâm bu şekilde son teoreminde V. postulatı ispatlayarak bu konuyu kapatmıştır. B. A. Rosenfeld'e göre bu ispat tarihin ilk *petitio principii* hatasına

¹¹⁷ Bu cümle "SHR açısını HRD açısına eşit çiz" olarak düzeltilebilir. (Ali Amir Moez)

¹¹⁸ Ali, R., Amir-Moez, "Discussion of Difficulties in Euclid by Omar ibn Abrahim al-Khayyâmi (Omar Khayyâm)", *Islamic Mathematics and Astronomy*, c. 46, s. 293-306.

düşmeden yapılmış ispatıdır ve Hayyâm'ın hatası üçüncü teoremin ilk kısmındadır. Hayyâm çalışmasının başında Heysem'in hareket kavramının Öklid'in hareket kavramına uymadığını söylerken, Heysem'in bahsettiği türden bir doğrunun hareketinin, bir düzlem oluşturacağını düşünmüştür. Heysem'in söylediği gibi paralel iki doğru oluşturamayacaktır. Ayrıca Saccheri'nin Hayyâm'ın izinden gittiğine yönelik bir başka kanıt da teorem IV'den önceki doğruya dik çıkılarak başlama meselesidir.

f) Nâsireddîn Tûsî

Nâsireddîn Tûsî (1201-1274), İran'ın Tûs kentinde doğmuştur. Eğitimini Nişabur'da tamamlamıştır. 1256'daki Moğol istilasına kadar İsmaili hükümdarların hizmetinde bulunmuş, istiladan sonra Moğol hükümdarı Hûlâgû Han'ın hizmetine geçmiş ve Meraga Rasathanesi'nin başına getirilmiştir. Hayatının geri kalanını bu görevde geçirmiştir. Astronomi, felsefe ve matematikle uğraşmıştır.¹¹⁹

Önceki bölümde bahsettiğimiz gibi Ömer Hayyâm'ın paralellerle ilgili şerhini aktaran bir çalışması vardır. Bunun dışında, kendisi de V. postulatı ispatlamaya çalışmış ve bu konuda bir şerh yazmıştır. Tûsî'nin paralellerle ilgili çalışmasının adı *el-Risâle el-Şafiye 'an el-Şekk fi'l-hutût*'dur (paralel çizgiler meselesiyle ilgili şüpheleri gideren eser).¹²⁰ Tûsî, bu esere Cevherî'nin, Heysem'in, Hayyâm'ın ve Salar'ın konuyla alakalı çalışmalarını irdeleyerek başlar. Daha sonra da kendi ispatını geliştirir. Hayyâm gibi Tûsî de *Elementler*'in ilk 28 teoremini kabul etmiş ve bu teoremlere ek 8 tane teorem önermiştir. Bu teoremlerden iki tanesi Hayyâm'ın

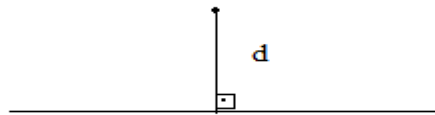
¹¹⁹ Victor Katz, *A History of Mathematics*, s.250.

¹²⁰ B.A Rosenfeld, s.74.

alışmasından alınmıştır. Tûsî'nin II. teoremi Hayyâm'ın I. teoremi, IV. Teoremi de Hayyâm'ın IV. teoremidir. Tûsî bu teoremleri aynen almıştır. Tûsî'nin V. teoremiyse, Hayyâm'ın VII. teoremine denktir. Ayrıca Nâsireddîn Tûsî'nin oğlu Sadrettin Tûsî'ye ait bir paralel postulatı ispatı da mevcuttur. Uzun zaman bu çalışmanın Nâsireddîn'in olduğu zannedilmiş, ancak daha sonraları ona ait olmadığı fark edilmiştir. Bu ispat “Sahte Tûsî'nin paralel postulatı ispatı” olarak da bilinmektedir.

B. A. Rosenfeld, Nâsireddîn Tûsî'nin *el-Risâle el-Şâfiya 'an el Şekk fi'l-hutût*'daki ispatını, kimi teoremlerin ispatını vermeden aktarmıştır. Günümüzdeki çoğu İngilizce kaynak Rosenfeld'in bu çalışmasından yararlanmıştır. Roberto Bonola *Non-Euclidean Geometry* kitabında kendi yorumuyla Tûsî'nin ispatına yer vermektedir. Fakat Bonola'da teoremlerin hepsi mevcut değildir. Biz şimdi, teoremlerin hepsine yer verdiği ve daha kapsamlı olduğu için, Rosenfeld'in kitabından faydalanacağız.

Teorem I: Bir noktadan uçları sınırsız olan bir çizgiye çizilen en kısa doğru, o noktanın o çizgiye olan uzaklığıdır ve o noktadan o çizgiye indirilen diktir.¹²¹



¹²¹ En kısa uzaklığın dik uzaklık olduğu ilk defa tanım olarak verilmiştir. Buradaki şekil, tarafımızdan eklenmiş olup özğün metinde bulunmamaktadır.

Teorem II: Eğer biri bir çizgiye iki eşit dikme çıkarsa ve uçlarını birleştirirse, (tepedeki açılar) iki eşit açı elde eder.

Teorem III: Eğer biri bir çizgiye iki eşit dikme çıkarsa ve uçlarını birleştirirse, tepedeki açılar dik olur.

Örneğin; BD çizgisine $AB=CD$ dikleri indirilsin ve bu dikmeler AC doğrusuyla birleştirilsin. Ben BAC ve DCA eşit açılarının dik açı olduğunu iddia ediyorum.¹²²

İspat: Eğer bunlar dik açılar değillerse, geniş veya dar açılar olmalıdırlar. Öncelikle geniş açı olduklarını varsayalım ve aşağıdaki şekildeki gibi bir dörtgen elde edelim.



¹²² Bunlar Tûsî'nin kendi sözleridir.

AC çizgisine A noktasında dik olan AE doğrusu, teorem 16'da ispatladığımız gibi¹²³ mutlaka AB ve CD arasında bir yerde olacaktır. AED açısı ABE üçgeninin dış açısıdır ve dik olan iç açıdan daha büyüktür. Dolayısıyla o da geniş açı olacaktır. Şimdi E noktasından BD'yi dik olarak kesen EG doğrusunu çizelim. EG, AE ve CD'nin arasına düşsün. EGC açısı EAG üçgeninin dış açısı olduğundan, dik bir iç açı olan A açısından büyük olacaktır. Dolayısıyla geniş açıdır. Sonra G noktasında AC'yi dik olarak kesen GH doğrusunu çizelim ve bu sırada sonsuz tane dikme çizmeye devam edelim. Sonra, AC üzerinde bulunan noktalardan BD'ye çizilen diklerin (AB, GE, FH) uzunlukları gitgide artacaktır. En kısılları AEB üçgeninde, AEB dar açısının karşısında olan AB diki olacaktır. AB, ABE üçgenindeki dik açının karşısında olan AE'den kısadır ki bunu teorem 19'dan biliyoruz¹²⁴. AGE dar açısının karşısında bulunan AE kenarı, AEG üçgeninde, EAG dik açısının karşısında olan GE kenarından küçüktür. Dolayısıyla $AB < GE$.'dir. Aynı şekilde devam ederek, $GE < GH$ ve $GH < FH$ ve FH kendisini bu kuralla takip eden dikmeden kısa olacaktır. Böylece AB'ye yakın olan dikler daha kısa olacak ve AC'den BD'ye çizilen dikler C yönüne doğru gittikçe uzayacaktır. Dolayısıyla AC ve BD, C yönünde birbirlerinden uzaklaşırken, A yönünde birbirlerine yaklaşacaklar. Fakat bir önceki teoremden¹²⁵ görüldüğü üzere, BAC'ye eşit olan DCA açısı da geniş açıydı. Yani biz daha önce yaptığımız gibi, CA ve DB'nin A yönünde birbirlerinden uzaklaşırken, C yönünde

¹²³ Öklid'in *Elementler* kitabındaki teorem 16: "Bir dış açı, kendisine komşu olmayan iki iç açıdan büyüktür."

¹²⁴ Öklid'in *Elementler* kitabındaki teorem 19: " Herhangi bir üçgende büyük açının karşısındaki kenar büyük kenardır."

¹²⁵ Kendi 1. teoremi.

birbirlerine yaklaşacaklarını ispat edebiliriz ki bu saçmadır. Dolayısıyla BAC ve DCA geniş açı değildir.¹²⁶

Öte yandan, varsayalım ki bu açılar dar açı olsun ve aşağıdaki şekildeki gibi bir çizim elde edelim.



B noktasından AC'ye BE dikini, 12. teoremdede¹²⁷ ispatladığımız gibi çıkaralım. A açısı dar açı olduğundan, bu doğrunun AB ve CD doğruları arasında yer alması gerekir. AEB dik üçgeninde ABE dar açıdır. Öyle ki, ABE ile birlikte ABD dik açısını oluşturan EBD açısı da dar açıdır. Daha sonra E noktasından BD'ye EG dikini indirelim. EG, AB ve CD'nin arasına düşecektir ve GEC açısı dar açı olacaktır. Sonra AC üzerindeki noktalardan BD'ye uzunlukları gittikçe azalan sonsuz sayıda AB, EG, HF, ... diklerini indirelim. Bunların arasında en uzun olanı AB'dir. Bu şekilde AC ve BD doğrularının, C yönünde birbirlerine yaklaştıklarını, A yönünde birbirlerinden uzaklaştıklarını gösterebiliriz. Nitekim bir önceki teoremden dolayı BAC açısına eşit olan DCA açısı da dar açıydı. Sonuç olarak daha önceki gibi

¹²⁶ Hayyâm-Saccheri'nin çalışmasındaki, üst açıl原因 geniş olma meselesi burada etraflıca incelenmiş oluyor.

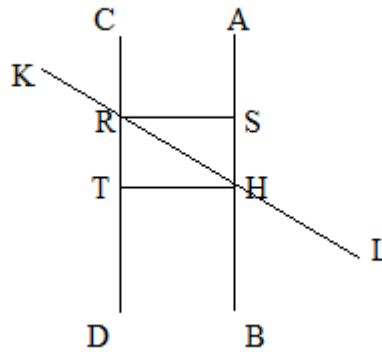
¹²⁷ Öklid'in *Elementler* kitabındaki teorem 12: "verilen bir noktadan verilen bir çizgiye dik çizmek."

AC ve BD doğrularının, A yönünde birbirlerine yaklaştıklarını, C yönünde birbirlerinden uzaklaştıklarını gösterebiliriz ki bu saçmadır. Sonuç olarak BAC açısı ve DCA açısı dar açılar değildir. BAC açısı ve DCA açısı ne dar açılardır ne de geniş açılardır, bu durumda bu açılar dik açılardır ki bu da bizim ispatlamaya çalıştığımız şeydir.¹²⁸

Teorem IV: Dik açılı bir dörtgenin karşılıklı kenarları birbirine eşittir.

Teorem V: Eğer bir düz çizgi, başka bir doğru parçası üzerine herhangi bir şekilde çizilmiş iki dikmenin üstüne düşüyorsa, bu durumda iç ters açılar eşit olur. Ayrıca her dış açı, kendisine ters olan iç açıya eşit olur, dolayısıyla dış açı içters açıya da eşit olur ve aynı tarafa bakan iç açılarının toplamı iki dik açı kadar olur.

Örneğin,¹²⁹ AB ve CD, paralel doğrular olsun. KRHL çizgisi bu doğruları kessin. Bu durumda LRD ve AHR açıları karşılıklı ve eşittir. AHR ve CRH iç açılardır ve toplamları iki dik açı kadardır. Dış açı olan CRK da iç açı olan AHR'ye eşittir.



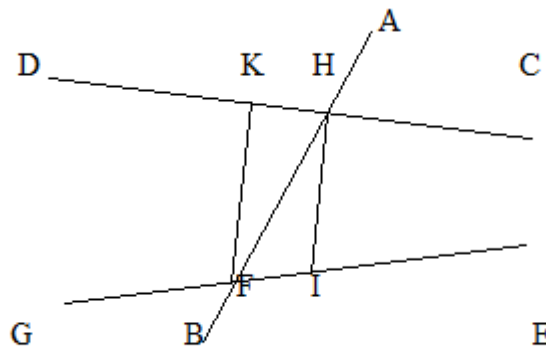
¹²⁸ Tûsî burada Hayyâm-Saccheri'nin çalışmasındaki, üst açılardan dar olma meselesini de etraflıca inceledikten sonra üstteki açılardan dik açı olması gerektiğini gösteriyor.

¹²⁹ Bu örnek ve alakalı şekil Tûsî'nin şerhinde yoktur. İfade karışıklığı sebebiyle bu teoreme denk olan Ömer Hayyâm'ın VII. teoremindeki örneği ve şekli burada tekrar verme ihtiyacı hissettim.

Rosenfeld, Tûsî'nin Teorem VI'da, Sabit ibn Kurra'nın ikinci ispatına ve ibn Heysem'in ispatına çok benzeyen bir paralel postulatı ispatı verdiğini; eğik ve düz çizgiler için V. postulatı ispatladığını söylemiş, ancak teoremin kendisini vermemiştir. Aynı şekilde Victor Katz'ın *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam* kitabında, J. L. Berggren'ın yazdığı Tûsî'nin ispatını veren bölümde de aynı teorem atlanmıştır.

Teorem VII: Eğer bir düz çizgi başka iki düz çizgi üzerine düşüyorsa ve bu çizgileri aynı tarafa bakan açılarının toplamı iki dik açıdan küçük olacak şekilde kesiyorsa; bu çizgiler, aynı tarafa bakan açılarının toplamının iki dik açıdan küçük olduğu tarafta, uzatıldıkları takdirde kesişirler.

Örneğin; AB doğrusu CD ve EG doğrularını kessin; CHF ve EFH açılarının toplamı iki dik açıdan küçükse, CD ve EG, C yönünde uzatıldıkları takdirde kesişirler.



İspat: Eğer CHF veya EFH açılarından biri dik açıysa, diğeri mutlaka dar açı olmalıdır. Dolayısıyla CD ve EG doğrularından biri AB'yi dik kesiyorsa diğeri mutlaka dik olmayan bir açıyla keser. Böylece eğer biz bu doğruları uzatırsak, bu doğrular dar açının olduğu tarafta, bir önceki teoremden gösterdiğimiz gibi kesişeceklerdir.

Eğer açılardan biri geniş açıysa, varsayalım ki bu açı CHF olsun, 11. teoremden gösterdiğimiz gibi CD'ye H noktasında dik olan HI dikini indirelim ve F noktasından 12. teoremden olduğu gibi¹³⁰ DC'ye FK dikini indirelim. Sonra, CHF ve EFH açılarının toplamı iki dik açıdan küçük olduğu için ve CHI dik açı olduğu için, IHF ve HFI'nın toplamı iki dik açıdan küçüktür. Fakat bu teoremlerin beşincisinde gösterdiğimiz üzere, IFH ve HFK açıları IH ve FK üzerine düşen AB'nin oluşturduğu iç ters açılıktan dolayı eşittir. Sonuç olarak bu tüm açı KFI dik açıdan küçüktür, yani dar açıdır. Dolayısıyla KF ve EF dik olmayan bir açıyla kesişirler, HK doğrusu bunlardan birine diktir ki o da KF'dir. Dolayısıyla önceki teoremden göstermiş olduğumuz gibi, CK ve EF uzatıldıkları takdirde C ve E yönünde kesişeceklerdir.

Eğer iki açı da dar açı olursa, 11. teoremden gösterdiğimiz gibi, F noktasından GE doğrusuna FK dikini indiririz ve 12. teoremden gösterdiğimiz gibi, H noktasından GE doğrusuna HI dikini indiririz. Bu durumda EFK dik açı olur ve KFH ve FHI açıları bu teoremlerin beşincisinde göstermiş olduğumuz üzere, HI ve KF üzerine düşen AB'nin oluşturduğu iç ters açılıktan dolayı eşittir. Sonuç olarak, FHI ve HFI açılarının toplamı dik açıya eşittir. EFH ve CHF açılarının dik açıdan küçük olduğu varsayımından dolayı, IHC açısı dik açıdan küçük, yani dar açıdır. Dolayısıyla IH ve

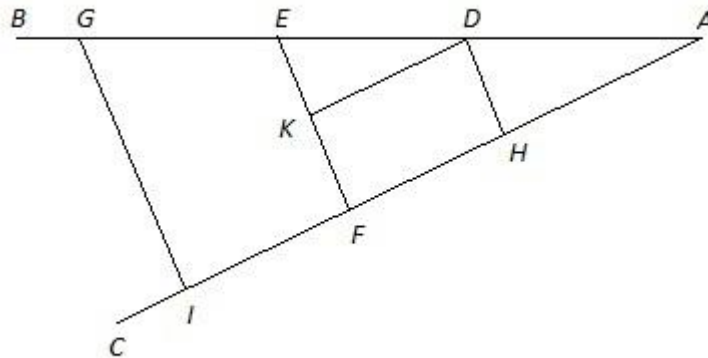
¹³⁰ 11 ve 12. teoremler *Elementler* kitabındaki teorem numaraları.

CH dik olmayan bir açıyla kesişirler ve EI doğrusu bunlardan birine diktir ki o da IH'dir. Dolayısıyla CD ve EG doğruları, bir önceki teoremden gösterdiğimiz gibi, uzatıldıkları takdirde C ve E yönünde kesişeceklerdir ki bu da bizim ispatlamaya çalıştığımız şeydir.¹³¹

Tûsî'nin VIII. teoremi, Cevherînin ispatındaki son teoremin aynısıdır. Daha sonra, Nâsireddîn Tûsî bir değişik ispat daha geliştirerek VI ve VII. teoremlerini değiştirmiştir.

VI. Teoremin yerine geçen teorem: Bir dar açı için eğer bu açıyı oluşturan kollardan biri eşit uzunlukta kısımlara ayrılmışsa, bu ayırım noktalarından öbür kola inen dikler de diğer kolu eşit kısımlara bölerler.

Örneğin; BAC dar açısında, AB üzerinde bulunan $AD=DE=EG$ olsun. Bu doğruların uçlarından AC'ye DH, EF, GI diklerini indirelim. Ben¹³² diyorum ki, bu dikmelerin ayaklarının kestiği $AH=HF=FI$ 'dir.



¹³¹ B.A. Rosenfeld, s.74-78.

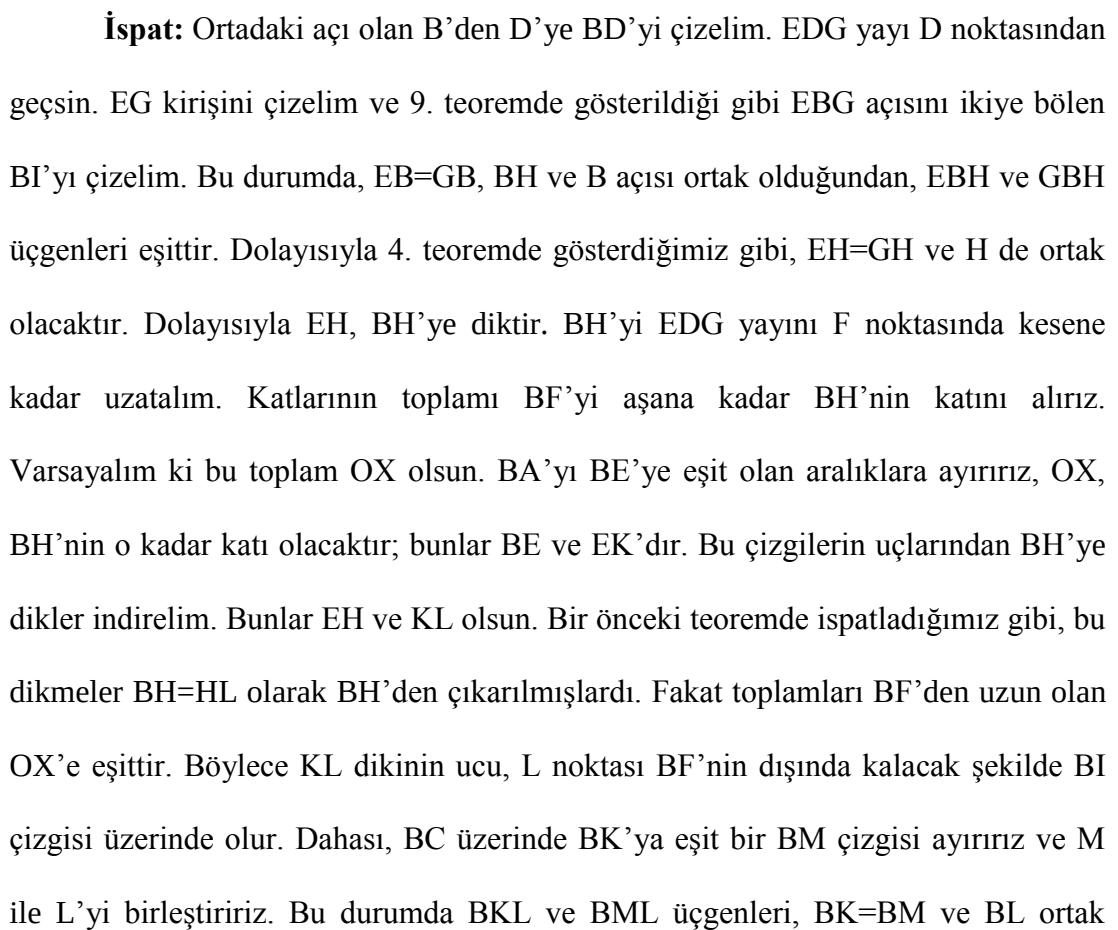
¹³² Nâsireddîn Tûsî

İspat: ED'deki D noktasından, 23. teoremden gösterildiği gibi, A açısına eşit bir EDK açısı oluşturalım. Bu durumda AHD ve DKE üçgenlerinde, bu teoremlerin beşincisinde gösterildiği gibi, DH ve EF dikmelerinin üzerine düşen AE doğrusunun oluşturduğu, biri dış biri iç açı olan D ve E açıları eşittir. AD ve DE eşittir. Dolayısıyla bu iki üçgen eşittir. 26. teoremden gösterildiği gibi $AH=DK$, H dik açısı K dik açısına eşittir. Dolayısıyla bu teoremlerin dördüncüsünde gösterdiğimiz gibi, DHFK dik açılı bir dörtgen olduğundan, karşılıklı kenarları birbirine eşittir. Dolayısıyla $AH=DK$, aynı zamanda HF'ye de eşittir ve bu şekilde $HF=FI$ olduğunu da gösterebiliriz ki bu da bizim ispat etmek istediğimiz şeydir.¹³³

VII. Teoremin yerine geçen teorem: Eğer biz bir dik üçgenin kenarları arasında bir nokta seçersek, bu noktadan geçen ve bu kenarları birleştiren bir doğru çizmek mümkündür.

Örneğin; ABC dik üçgeninden, AB ve BC kenarları arasında bir D noktası seçelim. Ben iddia ediyorum ki, AB ve BC kenarlarını D noktasından geçen bir doğruyla birleştirmek mümkündür.

¹³³ 23 ve 26. teoremler *Elementler* I. Kitaptaki teorem numaralarıdır.



olduğundan 4. teoremden gösterdiğimiz gibi eşittir.¹³⁴ Dolayısıyla MLB açısı KLB dik açısına eşittir. 14. teoreme göre, KL ve LM tek bir doğru meydana getirir. Sonra, B ve D'yi birleştiririz ve N'ye kadar uzatırız. Teorem 23 deki¹³⁵ gibi $\angle PDN = \angle DNL$ olacak şekilde DN'yi oluştururuz. Sonra PD ve NM doğruları, önceki gibi, PDN ve DNB iç ters açılarının eşitliğinden ötürü, paralel olmuş olur. PD'yi BKM üçgenini P ve Z noktalarında kesene kadar uzatırız. PZ doğrusu AB ve BC kenarlarını D'den geçerek birleştirir ki bu da bizim ispatlamak istediğimiz şeydir.¹³⁶

El-Tûsî'nin çalışması hem hiperbolik hem de eliptik geometrileri içermekteydi ve onlara yön verdi.

¹³⁴ Birbirine eş ve benzer üçgenler vardır V. postulata denk bir ifadedir. El-Tûsî doğruların katlarını alarak farklı boyutlarda olan aynı açılı üçgenler kullanmıştır. Onun hatasının sebebi budur.

¹³⁵ 9, 14, 23. teoremler *Elementler* I. Kitaptaki teorem numaralarıdır.

¹³⁶ B.A Rosenfeld, s.78-80.

SONUÇ

V. postulat konusu, İslâm bilginlerinden sonra bir süre köşesine çekilmiştir. Bu meselenin çözümünde, özellikle Tûsî'den sonra pek kayda değer bir gelişme olmamıştır. Batı'nın bu konuyla ilgilenmesi 16. y.y'da *Elementler*'in Arapça'dan ve daha sonrada orijinal Yunanca'sından tercümesiyle başlamıştır. Yunanca'dan çevrilen ilk *Elementler* Proclus'un şerhidir. 17. y.y'da P. A. Cataldi (?- 1626), paraleller teorisini ilk yayımlayan kişi olmuştur. Onu takiben sırasıyla, G. A. Borelli (1608-1679), Giordano Vitale (1633-1711) ve J. Wallis (1616-1703) paraleller üzerine çalışmışlardır. Gerolamo Saccheri (1667-1733), Öklid dışı geometrinin kurucusu sayılır. Daha önce de bahsettiğimiz gibi Saccheri'nin çalışması, Tûsî'nin, Hayyâm'ın eserini verdiği kitabından alıntıdır. Saccheri hiç bir orijinal fikir ortaya atmaksızın matematiksel olarak aynı anlama gelen ifadeleri kullanarak aynı önermeleri farklı biçimde ifade etmiştir.¹³⁷ Saccheri, Hayyâm gibi üç açısı dik olan bir dörtgende dördüncü açıyı incelemiş, dördüncü açının dik, dar veya geniş açı olması durumlarını esas alarak bir ispat geliştirmiştir. Fakat bu açının dik ve dar açı olması durumunda bir çelişki bulamamıştır. Onun asıl dehası, Hayyâm'ın çıkardığı sonuçlarla aynı sonuçlara varmış olmasına rağmen, Öklid dışı bir geometrinin var olabileceğini ilk ifade eden kişi olmasıdır. Hayyâm bunu fark edememiş veya ifade etmemiştir. Böyle bir geometrinin varlığı, matematiği korkunç bir bunalıma sürükleyecektir. Bu, matematikte bir devrim anlamına gelmektedir ve her bilimsel devrim gibi matematik devrimlerinin de metafizik bir hazırlanma sürecine ihtiyacı vardır. Öklid dışı bir geometrinin varlığı matematik için, Dünya merkezli sistemden

¹³⁷ Daha detaylı bilgi için bkz. David Eugene Smith, " Euclid Omar Khayyâm and Saccheri", *Scripta Mathematica*, NewYork 1935, S.3, s. 5-10.

çıkıp Güneş merkezli bir sisteme geçmek demektir. Bu sebeple Hayâm, içinde bulunduğu zaman diliminde Öklid dışı bir geometrinin var olduğu sonucuna varamamış olabilir.

Matematikte gerçekleşen devrimler ampirik bilimlerdeki gibi bir hazırlık sürecine tâbi olsalar da, farklı ilerlerler. Bir doğa biliminde yeni bir teoremin kanıtlanması bir önceki teoremin geçerliliğini ortadan kaldırır. Ancak böyle bir şey matematik için geçerli değildir. Karmaşık sayıların bulunması Reel sayıların geçerliliğini ortadan kaldırmamıştır. Aynı şekilde Öklid dışı geometrilerin var olması Öklid geometrisinin geçerliliğini ortadan kaldırmamaktadır. Bu sebeple hangi geometrinin gerçek veya doğru olduğunu tartışanlar bir yere varamamışlardır.

Saccheri'den sonra Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Adrien Marie Legendre (1752-1833), Wolfgang Bolyai (1775-1856), Friedrich Ludwig Wachter (1792-1817), Bernhard Friedrich Thibaut (1775-1832), Carl Friederich Gauss (1777-1855), Ferdinand Karl Schweikart (1780-1859) ve Franz Adolf Taurinus (1794-1874) paraleller üzerine kayda değer çalışmalar yapmış ve ispatlar vermiş isimlerdir. Bunların dışında özellikle iki isim vardır ki Öklid dışı geometrinin ve özellikle hiperbolik geometrinin (veya pangeometrinin) kurucuları olarak geçerler. Bunlardan birincisi Nicolai Ivanovitsch Lobatchevski (1793-1856), diğeri ise Wolfgang Bolyai'nin oğlu Johann Bolyai'dir. (1802-1860). Lobatchevski, Lambert ve Saccheri'nin (Heysem ve Hayyâm'ın) dördüncü açı meselesinden yola çıkmış, Öklid'in V. postulatını yok sayarak sanal bir geometri icat etmiştir ve buna *pangeometri* ismini vermiştir. Aynı zamanlarda Johann Bolyai de babasının mirası olan çalışmaları ilerleterek aynı sonuçlara varmıştır. Öklid geometrisinde bir doğruya, o doğru dışındaki bir noktadan geçen yalnız bir paralel çizilebilir ve

üçgenin iç açılarının toplamı 180° 'dir. Oysa Lobatchevski ve Bolyai'nin bulduğu geometriye göre bir doğruya, o doğru dışındaki bir noktadan geçen birçok paralel çizilebilir ve üçgenin iç açılarının toplamı 180° ' den küçüktür. 1854 yılında Bernhard Riemann'ın (1826-1866) geliştirdiği geometride ise bir doğruya, o doğru dışındaki bir noktadan geçen hiçbir paralel çizilemez ve üçgenin iç açılarının toplamı 180° ' den büyüktür. Bu geometriler sırasıyla düzlemsel, hiperbolik ve eliptik geometrilerdir. Hepsi geçerlidir ve matematiğin farklı alanlarında işlevlerini sürdürmektedirler.

Bu geometrilerin ortaya çıkışı matematiğin kesinliğine ve hatasızlığına darbe indirmiştir. O zamana kadar yanlışsız ilerleyen matematikte yanlış çıkmıştır. Matematikte çok önemli olan sağduyu ve sezgi gücünün hiç bir anlam ifade etmediği ortaya çıkmış, geometri sentetik bir bilim olmaktan çıkarak analitik bilimler sınıfına girmiştir. Çünkü mutlaka kesişeceği sezilen çizgilerin kesişmemesi ya da bir doğruya, o doğru dışındaki bir noktadan geçen hiçbir paralel çizilememesi sağduyuya tamamen aykırıdır. Fakat yine de bu yeni geometriler kendi içinde tutarlı ve tamamen mantıksaldır. Ayrıca, bu yeni geometrilerin keşfi, uygulamadaki başarının matematiksel olarak yetersiz bir başarı olduğunu göstermektedir. Aksiyom ve postulat kavramlarının apaçık doğrular olmadığı ve apaçık görünen her şeyin ispat edilmesi gerektiği ortaya çıkmıştır. Sezgiye güvenin azalmasıyla matematik ve geometrideki sözelliğin azalarak yerini tamamen simgeselliğe bırakması da birbirini takip eden olaylardır. Şunu da unutmamak gerekir ki, sezgi her ne kadar matematiksel bir yargıya varmak için yetersiz olsa da, herhangi bir ispata başlarken gereklidir. Matematiksel ilerlemede sezginin gücü hafife alınmamalıdır. Neticede matematikçilerin V. postulatın üzerinde bu kadar durmaları, onun önemli ve ispat

edilmesi gereken bir husus olduğunu fark etmeleri de sezgi güçleri sayesinde gerçekleşmiştir.

Matematiğin paradokslardan sonraki en büyük sıkıntısı olan V. postulat meselesi, ünlü düşünürleri matematiğin temellerini düşünmeye itmiş ve bunun sonucunda mantıkçılık, sezgicilik ve formalizm gibi kavramlar ortaya çıkmıştır.¹³⁸

İslâm coğrafyası bilginleri, bu yolda çok önemli bir yer teşkil etmişlerdir. Gerek bilgilerin aktarılması gerek ilerlemesi açısından çalışmalarının önemi yadsınamaz. Yaptıkları iş salt bir tercüme çalışması değildir, yazdıkları şerhler kendilerinden sonraki bilim adamlarının başvuru kitapları olmuştur. İki doğru arasındaki en kısa mesafenin dik uzaklık olduğunu ilk defa İslâm dünyası bilginleri belirtmiştir. Ayrıca Saccheri Hayyâm'ın, Lambert Heysem'in çalışmalarını ilerletmiş ve pangeometrinin kurulmasına öncülük etmişlerdir. Ayrıca, incelediğimiz ispatlarda Playfair ve Pasch aksiyomlarının da İslâm Dünyasında sıklıkla kullanılmış olduğunu görüyoruz. Playfair aksiyomunun Proclus'a dayandığını bilmekteyiz. Pasch aksiyomunun ise ilk defa hangi dönemde kullanıldığını araştırmanın bilim tarihinde önemli gelişmelere yol açacağı kanısındayım.

¹³⁸ Cemal Yıldırım, s.86-101.

KAYNAKLAR

Alpay, Şafak, "Paralellik Aksiyomu Üzerine", *Matematik Dünyası*, 1996-1, s. 2-6.

Amir- Moez, Ali Rıza, "A Paper of Omar Khayyâm", *Scripta Mathematica*, S. 26, New York 1961, s. 323-337.

Amir- Moez, Ali Rıza, "Discussion of difficulties in Euclid by Omar ibn Abraham al Khayyâmi (Omar Khayyâm)", *Islamic Mathematics and Astronomy*, ed. Fuat Sezgin, Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science, c. 46, Frankfurt am Main 1998, s. 293-323.

Besthorn ve Heiberg, "Euclidis Elementa Ex Interpretatione Al-Hadschdschadschii Cum Commentariis Al-Narizii", *Islamic Mathematics and Astronomy*, ed. Fuat Sezgin, Publications of the Institute for the History of Arabic-Islamic Science, , c. 14-15, Frankfurt am Main 1997.

Bonola, Roberto, *Non Euclidean Geometry*, Dover Publications, New York 1955.

Cohen and Drabkin, *A Source Book in Greek Science*, Harward University Press, Cambridge 1966.

Dicks, D. R. , "Geminus", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. Emil Fischer ve Gottlieb Haberlant, Charles Scribner's Sons, c. 5, New York 1981, s. 344-347.

Dilgan, Hamit, *Şair Matematikçi Ömer Hayyâm*, Şirketi Mürettibiye Basımevi, İstanbul 1964.

Euclid, "The Thirteen Books of Euclid's Elements", çev. T. L. Heath, *Great Books of the Western World*, Encyclopaedia Britannica, Chicago 1952.

Gregorian ve Rosenfeld, "Thabit ibn Qurra", *Dictionary of Scientific Biography*, , ed. Hermann Staudinger ve Giuseppe Veronese, Charles Scribner's Sons, c. 13, New York 1981, s. 288-295.

Gökdoğan, Dosay, Melek, *Öklid'in Elementleri*, Yayınlanmamış Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara 1983.

Heath, Thomas, *A History of Greek Mathematics*, Oxford At the Clarendon Press, London 1921.

Heath, Thomas, *A Manual of the Greek Mathematics*, Oxford At the Clarendon Press, London 1931.

Heath, Thomas, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, Dover Publications, New York 1956.

İbn Nedim, *El Fihrist*, çev. Bayard Dodge, Columbia University Press, New York & London 1970.

Katz, Victor, J. , *A History of Mathematics (an Introduction)*, Harper Collins College Publishers, New York 1993.

Katz, Victor, J. , *The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India, and Islam (a Sourcebook)*, Princeton University Press, New Jersey 2007.

Keneddy, E.S, "Bîrûnî", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. Pierre Abailard ve L. S. Berg, Charles Scribner's Sons, c. 1, New York 1981, s. 147-158.

Kline, Morris, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York 1972.

Kutuzov, B.V. , *Geometri*, Türk Matematik Derneği Yayınları, çev. Hüseyin Demir, c. 3, S. 21, İstanbul 1964.

Morrow, Glenn R. , "Proclus", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. A. Pitcairn ve B. Rush, Charles Scribner's Sons, c. 11, New York 1981, s. 160-162.

Müftüoğlu, Ferruh, "Cevherî", *İslâm Ansiklopedisi*, Türkiye Diyanet Vakfı, c. 7, İstanbul 1993, s. 458.

Nasr, Seyyed Hossein, "Nâsîreddîn el-Tûsî", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. Hermann Staudinger ve Giuseppe Veronese, Charles Scribner's Sons, c. 13, New York 1981, s. 508-514.

Proclus, *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*, çev. Glenn R. Morrow, Princeton University Press, Princeton N. J. 1992.

Rashed, Roshdi, *Encyclopedia of the History of Arabic Science; Mathematics and the Physical Sciences*, Routledge, c. 2. , London ve New York 1996.

Rosenfeld, B. A, *A History of Non-Euclidean Geometry Evolution of the Concept of a Geometric Space*, Springer-Verlag, New York 1988.

Rosenfeld, B. A, İhsanoğlu, E. , *Mathematics Astronomers and other Scholars of Islamic Civilisation and Their Works (7th- 9th c.)*, IRCICA, İstanbul 2003.

Sabra, A. I. , "Thabit ibn Qurra on Euclid's parallels postulate", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, S. 31, London 1968, s. 12-32.

Sabra, A. I. , "Simplicius's Proof of Parallels Postulate", *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes*, S. 32, London 1969, s. 1-24.

Sabra, A. I. , "Al-Jawharî", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. Iamblichus ve Karl Landsteiner, Charles Scribner's Sons, c. 7, New York 1981, s. 79-80.

Sabra, A. I. , "Al Nayrizi", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. S. G. Navashin ve W. Piso, Charles Scribner's Sons, c. 10, New York 1981, s. 5-7.

Sabra, A. I. , *Optics, Astronomy and Logic*, Variorum, Hampshire 1994.

Scott, J. F. , "İbn Al-Haytham", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. Jean Hachette ve Joseph Hyrtl, Charles Scribner's Sons, c. 6, New York 1981, s. 189-210.

Smith, David Eugene," Euclid Omar Khayyâm and Saccheri", *Scripta Mathematica*, S. 3, NewYork 1935, s. 5-10.

Smith, David Eugene, *History of Mathematics*, Dover Publications, NewYork 1958.

Struik, D. J. , "Saccheri", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. ibn Rushd ve Jean-Servais Stas, Charles Scribner's Sons, c. 12, New York 1981, s. 155-57.

Toomer, G. L. , "Ptolemy", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. A. Pitcairn ve B. Rush, Charles Scribner's Sons, c. 11, New York 1981, s. 186-206.

Topdemir, H.G. ve Unat, Y. , *Bilim Tarihi*, Pegem Akademi, Ankara 2009.

Verbeke, G. , "Simplicius", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. ibn Rushd ve Jean-Servais Stas, Charles Scribner's Sons, c. 12, New York 1981, s. 440-443.

Warmington, E. R. , "Posidonius", *Dictionary of Scientific Biography*, ed. A. Pitcairn ve B. Rush, Charles Scribner's Sons, c. 11, New York 1981, s. 103-106.

Yıldırım, Cemal, *Matematiksel Düşünce*, Remzi Kitabevi, İstanbul 1988.

Youschkevitch ve Rosenfeld, "Al Khayyâmi", ed. Iamblichus ve Karl Landsteiner, *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Scribner's Sons, c. 7, New York 1981, s. 323-331.

Zacharies, Max, *Düzlemde ve Uzayda Elementer Geometri*, çev. Berki Yurtsever, Kenan matbaası, İstanbul 1947.

ÖZET

Öklid'in V. postulatı tarih boyunca matematiğin karşılaştığı birkaç bunalımdan biri olmuştur. Geometri bilimi başta olmak üzere tüm bilimlerde bilimsel yöntemin ne olması gerektiği ile ilgili tartışmalara yol açmıştır. Gerek ifadesinin karışıklığı gerekse içerdiği sonsuzluk iması onu matematikçilerin gözde problemi haline getirmiştir. Sorunun neticeye kavuşması 17. y.y'a kadar beklemiştir. Bu neticelendirmede ve problemin sonraki yüzyıllara aktarılmasında İslâm Dünyası bilginlerinin yeri çok mühimdir.

ABSTRACT

During the history of mathematics, Euclid's fifth postulate has been one of the most crucial problem which mathematics has to cope with. It causes the methodological problem not only in mathematics, but also in other natural sciences. The complexness of the statement and the implicity of the infinity arouse the interest of many scholars to this topic. After 17th century the problem has finally concluded satisfactory. The conclusion and the transmission of this problem happened under auspices of the Islamic scholars.