

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

RIESZ POTANSİYELİ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN AĞIRLIKLİ
GLOBAL MORREY TİPLİ UZAYLARDA İKİ AĞIRLIKLİ
EŞİTSİZLİKLER VE BAZI UYGULAMALARI

Cahit AVŞAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2023

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Doktora Tezi

RIESZ POTANSİYELİ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN AĞIRLIKLIL GLOBAL MORREY
TİPLİ UZAYLARDA İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER VE BAZI UYGULAMALARI

Cahit AVŞAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda Riesz potansiyeli ve komütatörlerinin iki ağırlıklı eşitsizlikler yardımıyla sınırlılığı elde edilmiştir. Dördüncü bölümde genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında genelleştirilmiş kesirli integral operatör ve komütatörleri için iki ağırlıklı eşitsizlikler yardımıyla sınırlılıkları elde edilmiştir. Beşinci bölümde elde edilen sonuçların uygulamalarına yer verilmiştir. Altıncı bölüm ise tartışma ve sonuç kısmına ayrılmıştır.

Eylül 2023, 55 sayfa

Anahtar Kelimeler: Maksimal operatör, Morrey tipli uzay, ağırlıklı global Morrey tipli uzay, iki ağırlıklı eşitsizlik, genelleştirilmiş kesirli integral operatör, komütatör, Riesz potansiyeli, BMO uzayı.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

TWO WEIGHTED INEQUALITIES FOR RIESZ POTENTIAL AND ITS COMMUTATORS IN WEIGHTED GLOBAL MORREY TYPE SPACES AND SOME APPLICATIONS

Cahit AVŞAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI

This thesis consists of six chapters. The first chapter is dedicated to the introduction. The second chapter includes some fundamental definitions and theorems. In the third chapter, the boundedness of the Riesz potential and commutators in weighted global Morrey-type spaces is obtained using two-weight inequalities. In the fourth chapter, the boundedness of the generalized fractional integral operators and their commutators in generalized weighted Morrey spaces is established through two-weight inequalities. The fifth chapter presents the applications of the obtained results. The sixth chapter is reserved for discussion and conclusion.

September 2023, 55 pages

Key Words: Maximal operator, Morrey-type space, weighted global Morrey-type space, two-weight inequality, generalized fractional integral operator, commutator, Riesz potential, BMO space.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında katkılarından dolayı; tez danışmanım Doç. Dr. Canay AYKOL KOCAKUŞAKLI'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) teşekkür ederim.

Yüksek lisans ve doktora çalışmasında desteğini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Erdal GÜNER'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ayrıca teşekkür etmek istiyorum.

Tez çalışması sırasında maddi ve manevi desteklerinden dolayı aileme ve dostlarıma da teşekkür etmek istiyorum. Sizlerin moral desteği ve anlayışı benim için çok değerliydi.

Son olarak, bu tezin hazırlanmasında ve yazılmasında emeği geçen tüm arkadaşlarıma ve katkı sağlayan herkese teşekkürlerimi sunarım.

Cahit AVŞAR
Ankara, Eylül 2023

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	6
3. AĞIRLIKLIL GLOBAL MORREY TİPLİ UZAYLARDA RIESZ POTANSİYELİ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİKLER	15
3.1 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Riesz Potansiyelleri İçin İki Ağırlıklı Eşitsizlikler	23
3.2 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Riesz Potansiyeli Komü- tatörleri İçin İki Ağırlıklı Eşitsizlikler	25
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLIL MORREY UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLIL EŞİTSİZLİK- LER	31
4.1 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörleri İçin İki Ağırlıklı Eşitsizlikler	31
4.2 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatör Komütatörleri İçin İki Ağırlıklı Eşit- sizlikler	36
5. BAZI UYGULAMALAR	43
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	46
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^n$	n -boyutlu Öklid uzayı
$B(x, r)$	x merkezli r yarıçaplı yuvar
$L_p(\mathbb{R}^n)$	Lebesgue uzayı
$L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$	Ağırlıklı Lebesgue uzayı
$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Morrey uzayı
$LM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Lokal Morrey uzayı
$WLM_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$	Zayıf lokal Morrey uzayı
$LM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$	Lokal Morrey tipli uzay
$GM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$	Global Morrey tipli uzay
$M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Genelleştirilmiş Morrey uzayı
$GM_{\omega}^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$	Ağırlıklı global Morrey tipli uzaylar
M_{α}	Kesirli maksimal operatör
$I_{\alpha}f$	Riesz potansiyeli
Mf	Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
M	Maksimal operatör
$M^{\#}$	Sharp (keskin) maksimal operatör
A_{β}	Hardy operatörü
$\mathcal{A}_{\beta}$	Eşlenik Hardy operatörü
BMO	Sınırlı ortalama salınım
ω_n	R^n de birim kürenin hacmi
I_{ρ}	Genelleştirilmiş kesirli integral operator
b	Ölçülebilir b fonksiyonu
M_b	Maksimal komütatör
$[M, b]$	Maksimal operatör komütatörü
$[I_{\alpha}, b]$	Riesz potansiyeli komütatörü
$[I_{\rho}, b]$	Genelleştirilmiş kesirli integral operatörün komütatörü

1. GİRİŞ

Morrey uzaylarını, Charles B. Morrey, ikinci mertebeden kısmi diferensiyel denklemlerin lokal çözümlerinin incelenmesi çalışmalarıyla tanımlamıştır (Morrey, 1938). Morrey uzayları kısmi diferensiyel denklem (KDD) çalışmalarında, Schrödinger denklemleri, potansiyel teorisi, KDD çözümlerinin regülerlik özelliklerinin araştırılmasında uygulamalara sahiptir. Morrey uzayları birçok matematikçi tarafından çalışılmış ve genişlemiştir. Türkiye özelinde de birçok matematikçi tarafından çalışılmış ya da tez konusu olmuştur (Küçükaslan, 2015), (Tüystüz, 2015), (Ağcayazı, 2015), (Çelik, 2020). $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları Guliyev, Mizuhara ve Nakai tarafından tanıtılmıştır (Guliyev, 1994a), (Mizuhara, 1991), (Nakai, 1994). Komori ve Shirai $L_{\omega}^{p,\kappa}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı Morrey uzaylarını tanıtmış, bu uzayda, Hardy-Littlewood maksimal operatör ve Calderon-Zygmund operatörü gibi bazı klasik operatörlerin sınırlılığını çalışmışlardır (Komori vd., 2009). Guliyev 2012 de $M_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları tanımını matematik literatürüne kazandırmıştır ve bu uzayda Riesz potansiyeli ve Calderon-Zygmund operatörleri ile türetilen alt lineer operatörler ve bu alt lineer operatörlerin yüksek mertebeden komütatörlerinin sınırlılığını çalışmıştır (Guliyev, 2012).

$1 \leq p < \infty$ olsun. Normu

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

olan tüm Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıfı $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayını göstermektedir.

$L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı L_p uzaylarını göstermektedir. $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı Lebesgue uzayları, f ölçülebilir fonksiyon, ω ağırlık fonksiyonu ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, sonlu normu

$$\|f\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

olan fonksiyonlardır.

$L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayları, $0 < \lambda < n$, $p \geq 1$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\|f\|_{p,\lambda} &= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(x,r)} |f(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{L_p(B(x,r))} \\
&< \infty
\end{aligned} \tag{1.1}$$

olacak biçimdeki tüm fonksiyon sınıflarının uzayıdır. Burada $B(x, r)$, x merkezli r yarıçaplı açık yuvarı belirtmektedir.

$M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_p^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, normu

$$\|f\|_{M_{p,\varphi}} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \frac{r^{-n/p}}{\varphi(x, r)} \|f\|_{L_p(B(x,r))} < \infty \tag{1.2}$$

olan fonksiyonların sınıfıdır, burada $\varphi(x, r)$, $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ da negatif olmayan, ölçülebilir fonksiyonları belirtmektedir.

Buna göre eğer φ ağırlık fonksiyonu $\varphi(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ alınırsa, $M_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları, klasik $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayına denk gelir.

Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları $M_\omega^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, sonlu normu

$$\|f\|_{M_\omega^{p,\varphi}} = \sup_{r > 0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x,r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,r))}$$

olan tüm $f \in L_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonların sınıfını göstermektedir, burada supremum, $\mathbb{R}^n$ kümesi içinde tüm $B(x, r)$ açık yuvarları üzerinden alınmaktadır.

$GM_\omega^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı global Morrey tipli uzayları, $0 < p, \theta \leq \infty$ ve $\varphi(r)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon, $\omega(r)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir negatif olmayan bir fonksiyon, $f \in L_{p,\varphi_1}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, sonlu quasi normu

$$\|f\|_{GM_\omega^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\varphi(r)}{\|\omega\|_{L_p(B(x,r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,t))}^\theta dt \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

olan fonksiyonlar sınıfını göstermektedir.

$BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı;

$$f_{B(x,r)}(x) = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y) dy$$

2

olmak üzere, normu

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}(\cdot)| dy < \infty,$$

veya

$$\|f\|_{BMO} = \inf_C \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - C| dy < \infty$$

olan tüm lokal integrallenebilen fonksiyonların sınıfı olarak tanımlanır. Tezin ana teoremlerinin ispatında bu uzaydan yararlanılır.

$f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 \leq \alpha < n$ olmak üzere Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \quad (1.3)$$

$f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 \leq \alpha < n$ olmak üzere M_α kesirli maksimal operatörü

$$(M_\alpha f)(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \quad (1.4)$$

şeklindedir. $\alpha = 0$ alındığında Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu elde edilir.

$M^\#$ keskin maksimal fonksiyonu;

$$M^\# f(x) = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}(x)| dy$$

şeklinde tanımlanır.

$I_\alpha f$ Riesz potansiyel operatörü $0 < \alpha < n$ olmak üzere,

$$(I_\alpha f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlanır.

$f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $\rho : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ alınırsa, $I_\rho f$ genelleştirilmiş kesirli integral operatörü,

$$I_\rho f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x - y|)}{|x - y|^n} f(y) dy \quad (1.6)$$

olarak tanımlanır. Özel olarak eğer $\rho(t) \equiv t^\alpha$, $0 < \alpha < n$ ise $I_\alpha f$ elde edilir.

$[A, B]$, A ve B nin komütatörü;

$$[A, B] = A(B(f)) - B(A(f))$$

olarak tanımlanır. Burada A ve B birer operatör, f de bir fonksiyondur.

$M_b(f)$ maksimal komütatör; $x \in \mathbb{R}^n$ ve b ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$M_b f(x) = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

olarak tanımlanır.

Ölçülebilir bir b fonksiyonu için; Hardy-Littlewood maksimal operatör M nin komütatörü, tüm $x \in \mathbb{R}^n$ ler için

$$[M, b] f(x) = M(bf)(x) - b(x) Mf(x)$$

olarak tanımlanır.

$0 < \alpha < n$, b ölçülebilir bir fonksiyon ve f de $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere; $[b, I_\alpha] f$, Riesz potansiyeli komütatörü,

$$[b, I_\alpha] f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(b(x) - b(y)) f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy \quad (1.7)$$

olarak tanımlıdır.

Genelleştirilmiş kesirli integral operatör komütatörü, $0 < \alpha < n$, b ölçülebilir bir fonksiyon ve f de $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$[b, I_\rho] f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x - y|)}{|x - y|^n} (b(x) - b(y)) f(y) dy$$

şeklinde tanımlanır.

b ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $|b, I_\rho|$ operatörü

$$|b, I_\rho| f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x - y|)}{|x - y|^n} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlıdır.

Maksimal operatör üzerindeki çalışmalar, harmonik analizin en önemli konularından biridir. Bu operatör özel olarak diferensiyel denklemlerin çözümlerinde, singüler ve potansiyel operatörlerin genel sınıflarının anlaşılmasında esin kaynağı olacak bilgiler sağlar. Klasik Morrey uzaylarında ve alt uzaylarında, maksimal operatör ve Riesz

potansiyelinin sınırlılığı, Morrey (1938), Peetre (1969), Fefferman ve Stein (1971), Adams (1975), Chiarenza ve Frasca (1987), Fazio ve Ragusa (1991), Guliyev (2009) gibi birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Genelleştirilmiş kesirli integral operatör I_ρ , ilk olarak (Gadjiev, 1997), (Guliyev vd. 2001) ve (Nakai, 2001) tarafından araştırılmıştır. I_ρ nun, genelleştirilmiş Morrey uzayları, $M_{1,\varphi}$ den $M_{1,\psi}$ uzayına sınırlılığını ispatlamıştır (Nakai, 2001). Günümüzde bir çok yazar, I_ρ hakkında, özellikle Morrey uzayları ile ilgili (Gadjiev, 1997), (Mizuhara, 1991), (Gunawan, 2003) önemli çalışmalar yapmıştır.

Tezin amacı, $GM_\omega^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda, Riesz potansiyeli ve komütatörlerinin iki ağırlıklı sınırlılığını ispatlamaktır. Bu operatörlerin $GM_\omega^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, uzaylarında sınırlı olması için gerekli koşullar elde edilecektir. Daha sonra $\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarda genelleştirilmiş kesirli integral operatör I_ρ ve komütatörü için iki ağırlıklı eşitsizlikler ispatlanacaktır, elde edilen sonuçların uygulamalarına yer verilecektir. Son kısımda tartışma ve sonuca ayrılmıştır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 $0 \leq p < \infty$ olsun. Normu

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

olan tüm Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıfına $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayı denir.

Tanım 2.2 $0 \leq p < \infty$ ve f ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, $L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı Lebesgue uzayları, sonlu normu

$$\|f\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

olan fonksiyonlardır.

Tanım 2.3 $B(x, r)$, $\mathbb{R}^n$ de Lebesgue ölçülebilir, x merkezli r yarıçaplı açık yuvar olmak üzere $B(x, r)$ nin Lebesgue ölçüsü

$$|B(x, r)| = \int_{B(x, r)} dy$$

dir.

Tanım 2.4 $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilir fonksiyonların kümesi;

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| dy$$

sonlu olacak biçimde fonksiyonların sınıfı olarak ifade edilir ve $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir, burada $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir kompakt küme ve f Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyondur.

Tanım 2.5 $0 < p, \theta \leq \infty$ ve $\omega(r) > 0$ fonksiyonu, $(0, \infty)$ kümesinde, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Sırasıyla $LM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$, $GM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)$ lokal ve global Morrey tipli uzayları, sonlu quasi normu

$$\|f\|_{LM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left\| \omega \|f\|_{L_p(B(0,t))} \right\|_{L^\theta(0,\infty)}$$

$$\|f\|_{GM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \|f(x + \cdot)\|_{LM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

olan tüm fonksiyonların uzayıdır. Eğer tüm $t > 0$ sabitleri için;

$$\|\omega(r)\|_{L^\theta(t,\infty)} = \infty \text{ ise, } LM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n) = GM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n) = \Theta \text{ olur.}$$

Burada Θ , $\mathbb{R}^n$ de sifıra denk olan fonksiyonlardır.

Tüm $t > 0$ sabitleri için eğer;

$$\|\omega(r)r^{\frac{n}{p}}\|_{L^\theta(0,t)} = \infty \text{ ise, } 0 < p < \infty \text{ için, } f(0) = 0 \text{ ve } GM^{p,\theta,\omega}(\mathbb{R}^n) = \Theta \text{ olur.}$$

Tanım 2.6 $0 < p, \theta < \infty$ ve $\varphi(r)$ fonksiyonu $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı bir negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon, $\omega(r)$ fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir negatif olmayan bir fonksiyon, $f \in L_{p,\varphi_1}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $GM_\omega^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı global Morrey tipli uzayları, sonlu quasi normu

$$\|f\|_{GM_\omega^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\varphi(r)}{\|\omega\|_{L_p(B(x,r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,t))}^\theta dt \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

olan tüm fonksiyonların sınıfıdır.

$\omega(r) = 1$ özel durumunda $\|f\|_{GM^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)}$ global Morrey tipli uzaylar elde edilir (Burenkov, 2004).

$\theta = \infty$ durumunda $GM_\omega^{p,\infty,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ global Morrey tipli uzaylar, sonlu normu

$$\|f\|_{GM_\omega^{p,\infty,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{\varphi(r)}{\|\omega\|_{L_p(B(x,r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,t))} dt$$

olan tüm fonksiyonların sınıfı genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları olarak tanımlanır.

Burada $B(x, r)$, $\mathbb{R}^n$ de x merkezli r yarıçaplı açık yuvardır.

Tanım 2.7 f , $\mathbb{R}^n$ de lokal integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere, Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu;

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $|B(x, r)|$, $B(x, r)$ açık yuvarının Lebesgue ölçüsüdür. Maksimal operatör, harmonik analizin önemli operatörlerinden biridir. Özel olarak diferensiyel teoride, singüler ve potansiyel operatörlerin genel sınıflarının anlaşılmasında ve gelişiminde esin kaynağı olacak bilgiler sağlar.

Tanım 2.8 $0 < \alpha < n$, $f \in \mathbb{R}^n$ de olmak üzere, $I_\alpha f$, Riesz potansiyeli

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.9 $0 < \alpha < n$, b ölçülebilir bir fonksiyon ve f de $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere; $[b, I_\alpha] f$, Riesz potansiyeli komütatörü, aşağıdaki eşitlikle tanımlanmıştır.

$$[b, I_\alpha] f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(b(x) - b(y)) f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy \quad (2.2)$$

Tanım 2.10 $0 < \alpha < n$, b ölçülebilir bir fonksiyon, f de $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere; $|b, I_\alpha|$ operatörü

$$|b, I_\alpha| f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|b(x) - b(y)| |f(y)|}{|x - y|^{n-\alpha}} dy \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 2.11 Eğer $1 \leq p < \infty$ için

$$\sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

ifadesi sonlu ise, ağırlık fonksiyonu ω , $A_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfındandır.

Eğer her $x \in \mathbb{R}^n$ ve $r > 0$ için

$$\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega^p(y) dy \leq C \operatorname{ess\,sup}_{y \in B(x, r)} \frac{1}{\omega(y)}$$

sağlayacak biçimde bir pozitif C sabiti varsa, ω , $A_1(\mathbb{R}^n)$ sınıfındandır denir.

Eğer $1 \leq p < \infty$ için

$$\sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_2^p(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} \omega_1^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

ifadesi sonlu ise (ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonu $\tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ sınıfındandır denir.

Eğer $1 \leq p, q < \infty$ için

$$\sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|^{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}} \left(\int_{B(x, r)} \omega_2^q(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{B(x, r)} \omega_1^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}}$$

ifadesi sonlu ise (ω_1, ω_2) ağırlık fonksiyonu $A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ sınıfındandır denir.

Sonuç 2.1 $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ olmak üzere, $1 \leq p < \infty$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $(\omega_2^{-1}, \omega_1^{-1}) \in \tilde{A}_{p'}(\mathbb{R}^n)$ olur.

Teorem 2.1 $1 \leq p < \infty$ ve $\varphi, (0, \infty)$ üzerinde tanımlı, negatif olmayan ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda M , maksimal operatörü olmak üzere,

1. $M : L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\text{sınırlıdır}} L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) \iff \varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$
2. $M : L_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\text{sınırlıdır}} WL_{1,\varphi}(\mathbb{R}^n) \iff \varphi \in A_1(\mathbb{R}^n)$

gerçeklenir (Muckenhoupt, 1972b).

Tanım 2.12 $f, \mathbb{R}^n$ de tanımlı lokal integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda kesirli maksimal fonksiyon

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1+\alpha/n} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy, \quad 0 \leq \alpha < n,$$

şeklinde tanımlanır.

M_α kesirli maksimal fonksiyonu ile I_α Riesz potansiyeli arasında

$$M_\alpha f(x) \leq \omega_n^{\frac{\alpha}{n}-1} (I_\alpha |f|)(x) \quad (2.4)$$

şeklinde bir bağıntı vardır, burada $\omega_n, \mathbb{R}^n$ de birim kürenin hacmini belirtmektedir.

Tanım 2.13 $M^\#$, keskin maksimal fonksiyonu

$$M^\# f(x) = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}(x)| dy$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$f_{B(x, r)}(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

dir.

Tanım 2.14 b ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere; maksimal komütatör, $M_b(f)$, tüm $x \in \mathbb{R}^n$ için;

$$M_b f(x) = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

olarak tanımlanır.

Bu operatör, BMO kısaltması ile gösterilen singüler integral operatörleri komütatörlerinin çalışmalarında önemlidir.

Tanım 2.15 Ölçülebilir bir b fonksiyonu için; Hardy-Littlewood maksimal operatör M nin komütatörü, $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$[M, b] f(x) = M(bf)(x) - b(x) Mf(x)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.16 $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı, normu aşağıda verilen bütün lokal integrallenebilir fonksiyonların sınıfıdır (John ve Nirenberg, 1961).

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}(\cdot)| dy < \infty,$$

veya

$$\|f\|_{BMO} = \inf_C \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - C| dy < \infty.$$

Tanım 2.17 $1 \leq p < \infty$ için $BMO(\mathbb{R}^n)_{p, \varphi}$ uzayı; normu aşağıda verilen bütün lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır.

$$\|f\|_{BMO_{p, \varphi}} = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|(f(\cdot) - f_{B(x, r)}) \chi_{B(x, r)}\|_{L_{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)}}{\|\varphi\|_{L_p(B(x, r))}} < \infty$$

ya da

$$\|f\|_{BMO_{p, \varphi}} = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \|(f(\cdot) - f_{B(x, r)}) \chi_{B(x, r)}\|_{L_{p, \varphi}(\mathbb{R}^n)} \|\varphi^{-1}\|_{L_{p'}(B(x, r))} < \infty.$$

Teorem 2.2 $1 \leq p \leq \infty$ ve φ Lebesgue ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ ise, $\|\cdot\|_{BMO_{p,\varphi}}$ ve $\|\cdot\|_{BMO}$ normları denktir (Ho, 2016).

Lemma 2.1 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $0 < 2r < t$, koşullarında

$$|b_{B(x,r)} - b_{B(x,t)}| \leq C \|b\|_{BMO} \ln \frac{t}{r}$$

olacak şekilde b, x, r ve t den bağımsız bir $C > 0$ sabiti vardır (Janson, 1978).

Tanım 2.18 $L_{\infty,v}(\mathbb{R}_+)$, normu

$$\|g\|_{\infty,v}(\mathbb{R}_+) = \operatorname{ess\,sup}_{t>0} v(t)g(t)$$

olan ağırlıklı L_∞ uzayı olsun. A konisi,

$$A = \left\{ \varphi \in m^+(\mathbb{R}_+; \uparrow) : \lim_{t \rightarrow 0+} \varphi(t) = 0 \right\}$$

şeklinde gösterilir. Burada $m^+(\mathbb{R}_+; \uparrow)$, $(0, \infty)$ da azalmayan fonksiyonlar anlamındadır.

Tanım 2.19 u fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı sürekli bir pozitif fonksiyon olsun. $\hat{S}_u$ supremal operatör,

$$\left(\hat{S}_u g \right) (t) := \|ug\|_{L_\infty(0,t)}, \quad t \in (0, \infty)$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki teoremin ispatı (Burenkov vd., 2010)' de verilmiştir.

Teorem 2.3 v_1 ve v_2 fonksiyonları ölçülebilir pozitif fonksiyonlar olsun, öyle ki her $t > 0$ için, $0 < \|v_1\|_{L_\infty(0,t)} < \infty$ olsun, u fonksiyonu, $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli pozitif bir fonksiyon olsun. Böylece $\hat{S}_u$ operatörü $\check{A}$ konisi üzerinde $L_{v_1}^\infty(\mathbb{R}_+)$ uzayından $L_{v_2}^\infty(\mathbb{R}_+)$ uzayına sınırlıdır, ancak ve ancak

$$\left\| v_2 \hat{S}_u \left(\|v_1\|_{L_\infty(0,\cdot)}^{-1} \right) \right\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} < \infty$$

dir (Burenkov vd., 2010).

Tanım 2.20 $0 < t < \infty$ ve ω ağırlık fonksiyonu olmak üzere ağırlıklı Hardy ve eşlenik Hardy operatörleri, sırasıyla

$$H_{\omega}g(t) := \int_0^t g(s)\omega(s)ds$$

$$H_{\omega}^*g(t) := \int_t^{\infty} g(s)\omega(s)ds$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.4 v_1, v_2 ve ω fonksiyonları, $(0, \infty)$ üzerinde ağırlık fonksiyonları olsun. $v_1(t)$, orijin dışındaki bir komşulukta sınırlı olsun. Bu durumda, bazı $C > 0$ sabitleri için, $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı bütün pozitif ve azalmayan g fonksiyonları için

$$\sup_{t>0} v_2(t) H_{\omega}^*g(t) \leq C \sup_{t>0} v_1(t)g(t)$$

gerçeklenir, ancak ve ancak

$$B := \sup_{t>0} v_2(t) \int_t^{\infty} \frac{\omega(s)ds}{\operatorname{ess\,sup}_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty$$

(Guliyev, 2013a).

Teorem 2.5 v_1, v_2 ve ω fonksiyonları, $(0, \infty)$ üzerinde ağırlık fonksiyonları olsun. $v_1(t)$, orijin dışındaki bir komşulukta sınırlı olsun. Bu durumda, bazı $C > 0$ sabitler için, $(0, \infty)$ üzerinde tanımlı bütün pozitif ve azalmayan g fonksiyonları için

$$\sup_{t>0} v_2(t) H_{\omega}g(t) \leq C \sup_{t>0} v_1(t)g(t) \quad (2.5)$$

gerçeklenir, ancak ve ancak

$$B := \sup_{t>0} v_2(t) \int_0^t \frac{\omega(s)ds}{\operatorname{ess\,sup}_{s<\tau<\infty} v_1(\tau)} < \infty.$$

(Guliyev, 2013a).

(2.5) için en iyi sabit $C = B$ dir.

Tezin ana teoremlerini ispatlamak için aşağıdaki iki lemma (genelleştirilmiş Hardy eşitsizlikleri) kullanılacaktır. Bunlar sırası ile,

Lemma 2.2 $1 \leq r \leq s \leq \infty$ olsun. v ve ω fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde hemen her yerde ölçülebilir pozitif fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^t h(\tau) d\tau \right)^s \omega(t) dt \right)^{1/s} \leq C \left(\int_0^\infty h(t)^r v(t) dt \right)^{1/r} \quad (2.6)$$

olacak şekilde h den bağımsız bir C sabiti vardır, ancak ve ancak

$$K = \sup_{t>0} \left(\int_t^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{1/s} \left(\int_0^t v(\tau)^{1-r'} d\tau \right)^{1/r'} < \infty. \quad (2.7)$$

Burada, $r + r' = rr'$ dir.

Eğer C , (2.6) in en iyi sabitiyse ve K , (2.7) ile tanımlı ise

$$K \leq C \leq k(r, s)K \quad (2.8)$$

olur.

(2.8) deki $k(r, s)$ sabiti çeşitli formlarda yazılabilir.

$$\begin{aligned} k(r, s) &= r^{1/s} (r')^{1/r'} \\ k(r, s) &= s^{1/s} (s')^{1/r'} \\ k(r, s) &= (1 + s/r')^{1/s} (1 + r'/s)^{1/r'} \end{aligned}$$

Lemma 2.3 $1 \leq r \leq s \leq \infty$ olsun. v ve ω fonksiyonları $(0, \infty)$ üzerinde hemen her yerde ölçülebilir pozitif fonksiyonlar olsun. Böylece

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty h(\tau) d\tau \right)^s \omega(t) dt \right)^{1/s} \leq C \left(\int_0^\infty h(t)^r v(t) dt \right)^{1/r} \quad (2.9)$$

olacak şekilde h den bağımsız bir C sabiti vardır, ancak ve ancak

$$K_1 = \sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega(\tau) d\tau \right)^{1/s} \left(\int_t^\infty v(\tau)^{1-r'} d\tau \right)^{1/r'} < \infty. \quad (2.10)$$

Eğer C , (2.9) ün en iyi sabitiyse ve K , (2.10) ile tanımlı ise

$$K \leq C \leq k(r, s)K \quad (2.11)$$

olur. Bunun yanında (2.11) daki en iyi C sabiti

$$K_1 \leq C \leq k(r, s)K_1$$

eşitsizliğini sağlar.

Lemma 2.2 ve Lemma 2.3 G. Talenti, G. Tomaselli, B. Muckenhoupt tarafından, $1 \leq r = s < \infty$ için ispatlanmış, V.M. Kokilashvili, V. G. Maz'ya tarafından da $r < s$ için ispat yapılmıştır.



3. AĞIRLIKLI GLOBAL MORREY TIPLİ UZAYLARDA RIESZ POTANSİYELİ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde $GM_{\omega}^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda Riesz potansiyeli ve komütatörleri için iki ağırlıklı eşitsizlikler elde edilecektir.

Öncelikle $GM_{\omega}^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda maksimal operatörün sınırlılığı elde edilecektir.

Teorem 3.1 $1 < p < \infty$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Böylece her $f \in L_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|Mf\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,r))} \leq C \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} ds}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))} s} \quad (3.1)$$

gerçeklenir. Burada C ; f , x ve t ye bağlı değildir.

İspat. $t > 0$ olmak üzere, f ;

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 \\ f_1(y) &= f(y) \chi_{B(x,2t)}(y) \\ f_2(y) &= f(y) \chi_{B^c(x,2t)}(y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

şeklinde gösterilirse;

$$\|Mf\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} \leq \|Mf_1\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} + \|Mf_2\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))}$$

eşitsizliği vardır. $f_1 \in L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ olduğu dikkate alınarak, maksimal opeatörün ağırlıklı Lebesgue uzaylarındaki sınırlılığından

$$\begin{aligned} \|Mf_1\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} &\leq \|Mf_1\|_{L_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \|f_1\|_{L_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &= C \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,2t))} \end{aligned}$$

gerçeklenir (Mizuhara, 1991). Böylece

$$\|Mf_1\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,2t))} \leq C \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,2t))} \quad (3.3)$$

olur. Bu eşitsizlikte C , f den bağımsızdır.

$$\|Mf\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,2t))} \leq C \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s}$$

eşitsizliği ve (3.3) eşitsizliğinden

$$\|Mf\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} \leq C \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.4)$$

elde edilir. $z \in B(x,t)$ olmak üzere $Mf_2(z)$ yi hesaplayabilmek için,

$$\begin{aligned} \int_{^c B(x,2t)} |x-y|^{-n} |f(y)| dy &= C \int_{^c B(x,2t)} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty s^{-n-1} ds \right) dy \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) ds \\ &\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} \|\chi_{B(x,s)} \varphi_1^{-1}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} ds \quad (3.5) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $z \in B(x,t)$ için

$$\begin{aligned} Mf_2(z) &= \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(z,r)|} \int_{B(z,r)} |f_2(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2t,} \int_{^c B(x,2t) \cap B(z,r)} |y-z|^{-n} |f(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2t,} \int_{^c B(x,2t) \cap B(z,r)} |x-y|^{-n} |f(y)| dy \\ &\leq C \sup_{r \geq 2t,} \int_{^c B(x,2t)} |x-y|^{-n} |f(y)| dy \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int_{^c B(x,t)} |x-y|^{-n} |f(y)| dy \leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} ds$$

eşitsizliği (3.5) de ispatlandı. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\|Mf_2\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} &\leq C \left\| \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} ds \right\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} \\
&\leq C \int_t^\infty s^{-n-1} \|\varphi_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} ds \|\chi_{(B(x,t))}\|_{L_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq C \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.4) ve (3.6) den

$$\|Mf_2\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} \leq C \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s}$$

olur. Burada C , f den bağımsızdır. ■

Teorem 3.2 $1 < p < \infty$ ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ olsun. φ_1 ve φ_2

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega_2(s) \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))}^{\theta_2} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \omega_1(r)^{1-\theta'_1} r^{-\theta'_1} \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,r))}^{-\theta'_1} dr \right)^{\theta_1-1} < \infty \tag{3.7}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda M , maksimal operatörü $G\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\theta_1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı global Morrey tipli uzayından $G\mathcal{M}_{\omega_2}^{p,\theta_2,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı global Morrey tipli uzayına sınırlıdır.

İspat. $f \in G\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\theta_1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Böylece Teorem 3.1 ve Lemma 2.3 den

$$\begin{aligned}
\|Mf\|_{G\mathcal{M}_{\omega_2}^{p,\theta_2,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|Mf\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))}^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_2} \left(\int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \right)^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
&\leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,t))}^{\theta_1}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1}} t^{-\theta_1} \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
&= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_1(t) \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
&= C \|f\|_{G\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\theta_1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Lemma 3.1 b , lokal integrallenebilen herhangi bir pozitif fonksiyon olsun. Böylece;

$$|[M, b] f(x)| \leq M_b f(x), x \in \mathbb{R}^n$$

eşitsizliği tüm $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ için gerçekleşir (Ağcayazı vd., 2015).

Teorem 3.3 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere; $X, \mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların Banach uzayı ve M, X üzerinde sınırlı olsun. Bu durumda M_b operatörü X üzerinde sınırlıdır ve

$$\|M_b f\|_X \leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_X$$

eşitsizliği f den bağımsız C sabiti ile gerçekleşir (Ağcayazı vd., 2015).

Sonuç 3.1 $1 \leq p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ ve $\varphi \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_b operatörü $L_{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ uzayında sınırlıdır.

Teorem 3.4 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$; $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\varphi_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda M_b operatörü $L_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ den $L_{p,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ e sınırlıdır.

İspat. $f \in L_{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Böylece

$$M_b f(x) \leq C \|b\|_{BMO} M^2 f(x)$$

eşitsizliği gerçekleşir (Ağcayazı vd., 2015). Bu eşitsizlik, Teorem 3.4, Sonuç 3.1 ve $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ koşullarıyla

$$\begin{aligned} \|M_b f\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,r))} &\leq C \|b\|_{BMO} \|M^2 f\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,r))} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|M f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,r))} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,r))} \end{aligned} \tag{3.8}$$

olur. Burada $M^2 f(x) = M(M f(x))$ dir. ■

Teorem 3.5 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Böylece her $f \in L_{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ için

$$\|M_b f\|_{L_{p, \varphi_2}(B(x, t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|\varphi_2\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p, \varphi_1}(B(x, s))}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x, s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.9)$$

eşitsizliği gerçekleşir. Burada C ; f , x ve t den bağımsızdır.

İspat. f , (3.2) deki gibi tanımlanmak üzere

$$\|M_b f\|_{L_{p, \varphi_2}(B(x, t))} \leq \|M_b f_1\|_{L_{p, \varphi_2}(B(x, t))} + \|M_b f_2\|_{L_{p, \varphi_2}(B(x, t))}$$

eşitsizliği vardır. Teorem 3.4 ile

$$\begin{aligned} \|M_b f_1\|_{L_{p, \varphi_2}(B(x, t))} &\leq \|M_b f_1\|_{L_{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f_1\|_{L_{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &= C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p, \varphi_1}(B(x, 2t))} \end{aligned} \quad (3.10)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır. (3.10) eşitsizliğinden

$$\|M_b f_1\|_{L_{p, \varphi_2}(B(x, t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|\varphi_2\|_{L_p(B(x, t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{r}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p, \varphi_1}(B(x, r))}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x, r))}} \frac{dr}{r} \quad (3.11)$$

elde edilir. $\|f\|_{L_{p, \varphi_1}(B(x, 2t))}$, t değişkenine göre azalmayandır, dolayısıyla (3.10) da

$\|f\|_{L_{p, \varphi_1}(B(x, 2t))}$ nin sağ tarafı (3.11) in sağ tarafıyla sınırlanır.

$z \in B(x, t)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
M_b f_2(z) &= \sup_{r>0} |B(z, r)|^{-1} \int_{B(z, r)} |b(z) - b(y)| |f_2(y)| dy \\
&\leq C \sup_{r \geq 2t} \int_{{}^c B(x, 2t) \cap B(z, r)} |z - y|^{-n} |b(z) - b(y)| |f(y)| dy \\
&\leq C \sup_{r \geq 2t} \int_{{}^c B(x, 2t) \cap B(z, r)} |x - y|^{-n} |b(z) - b(y)| |f(y)| dy \\
&= -n \int_{{}^c B(x, 2t)} |b(z) - b(y)| |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} s^{-n-1} ds \right) dy \\
&\leq C \int_t^{\infty} s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(z) - b(y)| |f(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_t^{\infty} s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x, s)}| |f(y)| dy \right) ds \\
&\quad + C \int_t^{\infty} s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(z) - b_{B(x, s)}| |f(y)| dy \right) ds \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

diyelim.

Hölder eşitsizliği ve Teorem 3.4 yardımı ile

$$\begin{aligned}
I_1 &= C \int_t^{\infty} s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x, s)}| |f(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_t^{\infty} s^{-n-1} \|f\|_{L_{p, \varphi_1}(B(x, s))} \|b(\cdot) - b_{B(x, s)}\|_{L_{p', \varphi_1^{-1}}(B(x, s))} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_t^{\infty} s^{-n-1} \|f\|_{L_{p, \varphi_1}(B(x, s))} \|\varphi_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x, s))} ds
\end{aligned}$$

elde edilir. I_2 için Lemma 2.1 yardımı ile

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_t^\infty s^{-n-1} |b(z) - b_{B(x,s)}| \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) ds \\
&\leq |b(z) - b_{B(x,t)}| \int_t^\infty s^{-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) ds \\
&\quad + \int_t^\infty s^{-n-1} |b_{B(x,t)} - b_{B(x,s)}| \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) ds \\
&\leq CM_{b\chi B(x,t)}(z) \int_t^\infty s^{-n-1} \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} \|\varphi_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \\
&\quad + C \|b\|_{BMO} \int_t^\infty s^{-n-1} \ln \frac{s}{t} \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} \|\varphi_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 3.4 den

$$\begin{aligned}
\|M_b f_2\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} &\leq \|I_1\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} + \|I_2\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} ds}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))} s} \\
&\quad + C \|M_{b\chi B(x,t)}\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} ds}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))} s} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))} ds}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))} s} \\
&\hspace{15cm} (3.12)
\end{aligned}$$

olur.

Böylece (3.11) ve (3.12) den (3.9) elde edilir. ■

Teorem 3.6 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$; $(\varphi_1, \varphi_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_1, \varphi_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ ve

$1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ olsun. ω_1 ve ω_2 ağırlık fonksiyonları

$$\begin{aligned}
& \sup_{t>0} \left(\int_0^t \omega_2(s) \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))}^{\theta_2} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \\
& \times \left(\int_t^\infty (1 + \ln \frac{s}{t})^{\theta_1'} \omega_1(r)^{1-\theta_1'} r^{-\theta_1'} \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,r))}^{-\theta_1'} dr \right)^{\theta_1-1} \\
& < \infty
\end{aligned} \tag{3.13}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda M_b operatörü $G\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\theta_1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı global Morrey tipli uzayından $G\mathcal{M}_{\omega_2}^{p,\theta_2,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı global Morrey tipli uzayına sınırlıdır.

İspat. $f \in G\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\theta_1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Böylece Teorem 3.5 ve Lemma 2.3 den

$$\begin{aligned}
& \|M_b f\|_{G\mathcal{M}_{\omega_2}^{p,\theta_2,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \\
& = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|M_b f\|_{L_{p,\varphi_2}(B(x,t))}^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_2(t) \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_2} \left(\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,s))}^{\theta_1}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,s))}^{\theta_1}} \frac{ds}{s} \right)^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
& \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right)^{\theta_1} \frac{\|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,t))}^{\theta_1}}{\|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1}} t^{-\theta_1} \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right)^{-\theta_1} \omega_1(t) t^{\theta_1} \|\varphi_2\|_{L_p(B(x,t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\
& = C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \omega_1(t) \|f\|_{L_{p,\varphi_1}(B(x,t))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\
& = C \|f\|_{G\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\theta_1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

3.1 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Riesz Potansiyelleri İçin İki Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu kesimde $GM_{\omega}^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda I_{α} Riesz potansiyeli için iki ağırlıklı eşitsizlikler ispatlanacaktır.

Teorem 3.7 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda I_{α} operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ den $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır (Sawyer ve Wheeden, 1992).

(2.4) eşitsizliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir .

Sonuç 3.2 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Böylece M_{α} kesirli maksimal operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ den $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

Teorem 3.8 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, her $f \in L_{p,\omega_1}(B(x,t))$ fonksiyonu için

$$\|I_{\alpha}f\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^{\infty} \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))} s} \quad (3.14)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $C > 0$ sabiti bulunur (Avşar vd., 2023).

İspat. f fonksiyonu

$$f = f_1 + f_2, \quad (3.15)$$

$$f_1(y) = f(y)\chi_{B(x,2t)}(y), \quad (3.16)$$

$$f_2(y) = f(y)\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)}(y), \quad t > 0 \quad (3.17)$$

şeklinde gösterilirse,

$$I_{\alpha}f(x) = I_{\alpha}f_1(x) + I_{\alpha}f_2(x)$$

elde edilir.

Teorem 3.7 ile

$$\begin{aligned} \|I_{\alpha}f_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,2t))} &\leq \|I_{\alpha}f_1\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|f_1\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \\ &= C \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2t))} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bu durumda

$$\|I_\alpha f_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,2t))} \leq C \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2t))}$$

gerçeklenir. Burada C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır.

Böylece

$$\|I_\alpha f_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,2t))} \leq C \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.18)$$

elde edilir.

Eğer $|x - z| \leq t$, $|z - y| \geq 2t$, ise $\frac{1}{2}|z - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|z - y|$, eşitsizliği vardır.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |I_\alpha f_2(z)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} |z - y|^{\alpha-n} |f(y)| dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} |x - y|^{\alpha-n} |f(y)| dy \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} |x - y|^{\alpha-n} |f(y)| dy &= (\alpha - n) \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^\infty s^{\alpha-n-1} ds \right) dy \\ &\leq C \int_t^\infty s^{\alpha-n-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|I_\alpha f_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \int_t^\infty s^{\alpha-n-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} ds \left\| \chi_{B(x,t)} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece

$$\|I_\alpha f_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (3.19)$$

elde edilir. (3.18) ve (3.19) eşitsizliklerinden (3.14) eşitsizliği elde edilir. ■

Teorem 3.9 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$ ve $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(r)$ ve $\varphi_2(r)$ fonksiyonları

$$\sup_{t>0} \left(\int_0^t \varphi_2(s) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{\theta_2-1} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \left(\int_t^\infty \frac{\varphi_1(r)^{1-\theta_1'} \|\omega_1\|_{L_p(B(x,r))}^{\theta_1'-1}}{r^{\theta_1'} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,r))}^{\theta_1'}} dr \right)^{\theta_1-1} < \infty \quad (3.20)$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda I_α operatörü $GM_{\omega_1}^{p,\theta_1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ den $GM_{\omega_2}^{q,\theta_2,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır (Avşar vd., 2023).

İspat. $f \in GM_{\omega_1}^{p,\theta_1,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ağırlıklı global Morrey tipli uzayları norm tanımından

$$\|I_\alpha f\|_{GM_{\omega_2}^{q,\theta_2,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\varphi_2(t)}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}} \|I_\alpha f\|_{L_{q,\omega_2}^{\theta_2}(B(x,t))}^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \quad (3.21)$$

yazılır. (3.21) eşitliğinde $\|I_\alpha f \chi_{B(x,t)}\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)}$ normu, Teorem 3.7, 3.8 ve Lemma 2.3 yardımıyla hesaplanırsa

$$\begin{aligned} & \|I_\alpha f\|_{GM_{\omega_2}^{q,\theta_2,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \\ & \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \varphi_2(t) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{\theta_2-1} \left(\int_t^\infty \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \frac{ds}{s} \right)^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\ & \leq C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,t))}^{\theta_1}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{\theta_1}} t^{-\theta_1} \varphi_1(t) t^{\theta_1} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{\theta_1} \|\omega_1\|_{L_p(B(x,t))}^{-1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\ & = C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\varphi_1(t)}{\|\omega_1\|_{L_p(B(x,t))}} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,r))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} = C \|f\|_{GM_{\omega_1}^{p,\theta_1,\varphi_1}} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

3.2 Ağırlıklı Global Morrey Tipli Uzaylarda Riesz Potansiyeli Komütatörleri İçin İki Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu kesimde $GM_{\omega}^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, ağırlıklı global Morrey tipli uzaylarda I_α Riesz potansiyelinin $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları ile komütatörleri için iki ağırlıklı eşitsizlikler ispatlanacaktır.

Lemma 3.2 $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $1 < s < \infty$ olsun. Böylece

$$M^\#(|b, I_\alpha| f(x)) \leq C \|b\|_{BMO} \left[(M |I_\alpha f(x)|^s)^{\frac{1}{s}} + (M_\alpha^s |f(x)|^s)^{\frac{1}{s}} \right]$$

gerçeklenir. Burada $C > 0$ sabiti, f fonksiyonu ve x değişkeninden bağımsızdır (Di Fazio, 1991).

Lemma 3.3 $1 < p < \infty$ ve $\omega \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Böylece, f fonksiyonundan bağımsız bir $C > 0$ sabitiyle

$$\|f\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|M^\sharp f\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği gerçekleşir (Stein, 1993).

Teorem 3.10 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. Böylece M_b , maksimal komütatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{p,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Aykol vd., 2022).

Aşağıdaki teoremden $|b, I_\alpha|$, Riesz potansiyeli komütatörünün $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı ispatlanmıştır.

Teorem 3.11 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in A_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda $|b, I_\alpha|$ operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Avşar vd., 2022).

İspat. $f \in L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olsun. Lemma 3.3 yardımıyla

$$\| |b, I_\alpha| f \|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|M^\sharp([b, I_\alpha] f)\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)}$$

eşitsizliği vardır. Lemma 3.2 den

$$\begin{aligned} \|M^\sharp(|b, I_\alpha| f)\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|b\|_{BMO} \left\| (M |I_\alpha f|^s)^{\frac{1}{s}} + (M_\alpha^s |f|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \left[\left\| (M |I_\alpha f|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} + \left\| (M_\alpha^s |f|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \right]. \end{aligned}$$

vardır. Teorem 2.1 ve 3.7 den

$$\begin{aligned} \left\| (M |I_\alpha f|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|I_\alpha f\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|f\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 3.2 den

$$\left\| (M_\alpha^s |f|^s)^{\frac{1}{s}} \right\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)}$$

elde edilir. Böylece

$$\|[b, I_\alpha] f\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} \quad (3.22)$$

eşitsizliği gerçekleşir. ■

Teorem 3.12 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, $2t \leq s$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_2 \in A_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned} \| |b, I_\alpha| f \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} &\leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \\ &\times \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \frac{ds}{s}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

gerçeklenir. Burada $t > 0$ olmak üzere, C sabiti; f fonksiyonundan, x ve t değişkeninden bağımsızdır (Avşar vd., 2022).

İspat. f fonksiyonu (3.15) de olduğu gibi gösterildiğinde

$$|b, I_\alpha| f(x) \leq |b, I_\alpha| f_1(x) + |b, I_\alpha| f_2(x)$$

eşitsizliğinin varlığı aşıkardır.

Teorem 3.11 yardımıyla

$$\begin{aligned} \| |b, I_\alpha| f_1 \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} &\leq \| |b, I_\alpha| f_1 \|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|b\|_{BMO} \|f_1\|_{L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)} = C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2t))} \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan

$$\| |b, I_\alpha| f_1 \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2t))}$$

elde edilir. Burada C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır.

Buradan da

$$\begin{aligned} \| |b, I_\alpha| f_1 \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} &\leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \\ &\times \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \end{aligned} \quad (3.24)$$

elde edilir.

$|x - z| \leq t$, $|z - y| \geq 2t$, alındığında $\frac{1}{2}|z - y| \leq |x - y| \leq \frac{3}{2}|z - y|$ elde edilir.

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |b, I_\alpha| f_2(z) &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} |b(y) - b(z)| |z - y|^{\alpha-n} |f(y)| dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} |b(y) - b(z)| |x - y|^{\alpha-n} |f(y)| dy. \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, 2t)} |b(y) - b(z)| |x - y|^{\alpha-n} |f(y)| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, 2t)} |b(y) - b(z)| |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} s^{\alpha-n-1} ds \right) dy \\
&\leq C \int_{2t}^{\infty} s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,t)}| |f(y)| dy \right) ds \\
&+ C |b(z) - b_{B(x,t)}| \int_{2t}^{\infty} s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) ds = J_1 + J_2
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
J_1 &= C \int_{2t}^{\infty} s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,t)}| |f(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_t^{\infty} s^{\alpha-n-1} \|\omega_2^{-1}\|_{L_q(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds \\
&+ C \|b\|_{BMO} \int_t^{\infty} s^{\alpha-n-1} \ln \frac{s}{t} \|\omega_2^{-1}\|_{L_q(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_t^{\infty} \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s}.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
J_2 &= C |b(z) - b_{B(x,t)}| \int_{2t}^{\infty} s^{\alpha-n-1} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) ds \\
&\leq C |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(z) - b(y)| dy \int_t^{\infty} s^{\alpha-n} \|\omega_2^{-1}\|_{L_q(B(x,s))} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq C M_b \chi_{B(x,t)}(z) \int_t^{\infty} \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Burada C sabiti x ve t değişkeninden bağımsızdır. Teorem 3.10, (3.25) ve (3.26) ile

$$\begin{aligned}
& \| |b, I_\alpha| f_2 \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq \|J_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} + \|J_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^{\infty} \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&+ C \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^{\infty} \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^{\infty} \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

vardır.

Buradan

$$\begin{aligned}
& \| |b, I^\alpha| f_2 \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\times \int_t^{\infty} \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (3.24) ile beraber (3.23) sonucuna ulaşılır. ■

Aşağıdaki iki teoremden $|b, I_\alpha|$, Riesz potansiyel operatörünün $GM_{\omega_1}^{p_1, \theta_1, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$, ağırlıklı global Morrey tipli uzaydan, $GM_q^{\theta_2, \varphi_2, \omega_2}(\mathbb{R}^n)$ ağırlıklı global Morrey tipli uzayına sınırlılığı ispatlanmıştır. $|b, I_\alpha|$ operatörünün $GM_{\omega_1}^{p, \theta_1, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $GM_{\omega_2}^{q, \theta_2, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlılığı için, $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonlarının sağlaması gereken koşullar bulunmuştur.

Teorem 3.13 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p, q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_2 \in A_q(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(r)$ ve $\varphi_2(r)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} & \sup_{t>0} \left(\int_0^t \varphi_2(s) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{\theta_2-1} ds \right)^{\frac{\theta_1}{\theta_2}} \\ & \times \left(\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right)^{\theta_1} \frac{\varphi_1(r)^{1-\theta_1} r^{-\theta_1}}{\|\omega_1\|_{L_p(B(x,r))}^{1-\theta_1'} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,r))}^{\theta_1'}} dr \right)^{\theta_1-1} \\ & < \infty \end{aligned} \quad (3.27)$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda $|b, I_\alpha|$ operatörü $GM_{\omega_1}^{p, \theta_1, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $GM_{\omega_2}^{q, \theta_2, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır (Avşar vd., 2022).

İspat. $f \in GM_{\omega_1}^{p, \theta_1, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ağırlıklı global Morrey tipli uzayların norm tanımından

$$\| |b, I_\alpha| f \|_{GM_{\omega_2}^{q, \theta_2, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\varphi_2(t)}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{\theta_2}} \| |b, I_\alpha| f \|_{L_{q, \omega_2}(B(x,t))}^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \quad (3.28)$$

yazılır.

(3.28) deki $\| |b, I_\alpha| f \chi_{B(x,r)} \|_{L_{q, \omega_2}(\mathbb{R}^n)}$ normu Teorem 3.12 ve Lemma 2.3 yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \| |b, I_\alpha| f \|_{G\mathcal{M}_{\omega_2}^{q, \theta_2, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \varphi_2(t) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{\theta_2-1} \left(\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} ds}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))} s} \right)^{\theta_2} dt \right)^{\frac{1}{\theta_2}} \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right)^{\theta_1} \frac{\|f\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,t))}^{\theta_1}}{t^{\theta_1} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{\theta_1}} \frac{\varphi_1(t) t^{\theta_1} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{\theta_1}}{(1 + \ln \frac{s}{t})^{\theta_1} \|\omega_1\|_{L_p(B(x,r))}} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\
& = C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \frac{\varphi_1(r)}{\|\omega_1\|_{L_p(B(x,r))}} \|f\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,r))}^{\theta_1} dt \right)^{\frac{1}{\theta_1}} \\
& = C \|b\|_{BMO} \|f\|_{G\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \theta_1, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ AĞIRLIKLI MORREY UZAYLARINDA GENELLEŞTİRİLMİŞ KESİRLİ İNTEGRAL OPERATÖRÜ VE KOMÜTATÖRLERİ İÇİN İKİ AĞIRLIKLI EŞİTSİZLİKLER

4.1 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatörleri İçin İki Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu kesimde $\mathcal{M}_{\omega}^{p,\varphi}$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında, I_{ρ} genelleştirilmiş kesirli integral operatörü için iki ağırlıklı eşitsizlikler ispatlanacaktır.

Guliyev 2012 de $M_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları tanımını matematik literatürüne kazandırmıştır. $M_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları; normu

$$\|f\|_{M_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))}$$

olan tüm $f \in L_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonların sınıfıdır.

Burada $1 \leq p < \infty$, $\varphi, \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ üzerinde tanımlı ölçülebilir bir pozitif fonksiyon, $\omega, \mathbb{R}^n$ de tanımlı ölçülebilir negatif olmayan bir fonksiyon, $B(x, r), \mathbb{R}^n$ de tanımlı açık yuvardır. $L_{p,\omega}(B(x, r))$, ağırlıklı L_p uzayını göstermektedir ve bu fonksiyonların normu

$$\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))} \equiv \|f\chi_{(B(x, r))}\|_{L_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{B(x, r)} |f(y)|^p \omega(y) dy \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\omega(x) = \chi_{B(x, r)}$ alınırsa, $M_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = M^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, genelleştirilmiş Morrey uzayları elde edilir. $\omega(x, r) = r^{\frac{n-\lambda}{p}}$ olması durumunda, $M_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n) = L_{p,\lambda}(\omega)$ ağırlıklı Morrey uzayı olur.

$\rho : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ de uygun f fonksiyonları için ;

M_{ρ} , genelleştirilmiş kesirli maksimal operatör

$$M_{\rho}f(x) = \sup_{t>0} \frac{\rho(t)}{t^n} \int_{B(x, t)} |f(y)| dy$$

ve I_ρ , genelleştirilmiş kesirli integral operatör

$$I_\rho f(x) = \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y) dy$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $\rho(t) = t^\alpha$ alınırsa $M_\alpha = M_{t^\alpha}$ kesirli maksimal operatör, ve $I_\alpha = I_{t^\alpha}$ alınırsa, Riesz potansiyeli elde edilir. Bunlar sırasıyla

$$M_\alpha f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{\alpha}{n}}} \int_{B(x,r)} |f(y)| dy, 0 \leq \alpha < n$$

$$I_\alpha f(x) = \sup_{t>0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} f(y) dy, 0 < \alpha < n$$

olur. Burada $|B(x,r)|$, $B(x,r)$ açık yuvarın Lebesgue ölçüsüdür.

Bu kısımda $M_\omega^{p,\varphi}$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında, genelleştirilmiş kesirli integral operatörler için iki ağırlıklı eşitsizlikler ispatlanacaktır.

$$\int_1^\infty \frac{\rho(t)}{t^n} \frac{dt}{t} < \infty \quad (4.1)$$

kabul edilecektir. Dolayısıyla I_ρ , genelleştirilmiş kesirli integral operatörü, yuvarın dışında tanımlı

$$\frac{1}{|x|^{2n}}, f(x) = \frac{\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,r)}(x)}{|x|^{2n}} \quad (4.2)$$

karakteristik fonksiyonu için iyi tanımlıdır.

Bundan başka, ρ fonksiyonunun büyüme koşullarını sağladığı kabul edilecektir.

$0 < 2k_1 < k_2 < \infty$ olmak üzere

$$\sup_{\frac{r}{2} < t < 3\frac{r}{2}} \frac{\rho(t)}{t^n} \leq C \int_{k_1 r}^{k_2 r} \frac{\rho(t)}{t^n} \frac{dt}{t} \quad (4.3)$$

olacak şekilde bir $C > 0$ sabiti vardır. Bu durum $\frac{\rho(t)}{t^n}$ fonksiyonu için alışımlı doubling koşulundan daha zayıftır:

$r, t > 0$ ve $\frac{t}{2} \leq r \leq 2t$ koşullarında

$$\frac{1}{C} \frac{\rho(t)}{t^n} \leq \frac{\rho(r)}{r^n} \leq C \frac{\rho(t)}{t^n}, \quad r > 0 \quad (4.4)$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır.

Tez boyunca, $I\rho$, genelleştirilmiş kesirli integral operatörünün (4.3) koşulunu sağladığı varsayılacaktır.

Teorem 4.1 $1 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda I_ρ , genelleştirilmiş kesirli integral operatörü $L_p(\mathbb{R}^n)$ Lebesgue uzayından $L_q(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır, ancak ve ancak

$$\rho(r) \leq Cr^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q}} \quad (4.5)$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır (Edmunds, 1995).

Teorem 4.2 $1 < p < q < \infty$ olsun ve ρ fonksiyonu (4.1) ve (4.4) koşullarını sağlasın. Eğer (4.5) koşulu var ve $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ ise, bu durumda herhangi bir $f \in L_{p,\omega_1}(B(x,t))$ için

$$\|I_\rho f\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{q,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.6)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır.

İspat.

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 \\ f_1(y) &= f(y) \chi_{B(x,2t)}(y) \\ f_2(y) &= f(y) \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)}(y), \quad t > 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

şeklinde gösterelim. Bu durumda

$$I_\rho f(x) = I_\rho f_1(x) + I_\rho f_2(x) \quad (4.8)$$

vardır.

Önce $|I_\rho f_1(x)|$ ifadesini hesaplayalım. Hölder eşitsizliği ile

$$\begin{aligned}
|I_\rho f_1(x)| &\leq \int_{B(x,t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^j t)}{(2^j t)^n} \int_{B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t)} |f(y)| dy \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^j t)}{(2^j t)^n} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t))} \\
&\leq C \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^j t)}{(2^j t)^n} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t))} \|\omega_2^{-1}\|_{L_q(B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t))} \\
&\leq C \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,t))} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{-1} \tag{4.9}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\|I_\rho f_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2t))}$$

bulunur. C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır. Böylece f_1 için

$$\|I_\rho f_1\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|\omega_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \tag{4.10}$$

eşitsizliğinin elde edildiği kolaylıkla görülür.

Eğer, $|x-z| \leq t$, $|z-y| \geq t$ alınırsa, $\frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$ eşitsizliği gerçekleşir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|I_\rho f_2(z)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} \frac{\rho(|z-y|)}{|z-y|^n} |f(y)| dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)| dy
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, 2t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)| dy &= C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, 2t)} |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^{n+1}} ds \right) dy \\
&= C \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^{n+1}} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^{n+1}} \|\chi_{B(x,s)} \omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} ds \\
&\leq C \int_t^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^{n+1}} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(\mathbb{R}^n)} ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\|I_\rho f_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\rho(s)}{s^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+1}} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))} ds$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\|I_\rho f_2\|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \quad (4.11)$$

eşitsizliği ve (4.10) ile birlikte (4.6) elde edilir. ■

Teorem 4.3 $1 < p < \infty$, ρ fonksiyonu, (4.1) ve (4.4) koşullarını sağlasın. $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere (4.5) koşulları sağlansın. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ ağırlık fonksiyonları

$$\sup_{t>0} \int_t^\infty \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s<r<\infty} \varphi_1(x, r) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,r))}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \leq C \varphi_2(x, t) \quad (4.12)$$

koşulunu sağlasın. Böylece I_ρ operatörü $M_{\omega_1}^{p,\varphi_1}$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morey uzayından, $M_{\omega_2}^{q,\varphi_2}$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayına sınırlıdır.

İspat. $f \in M_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarındaki norm tanımından,

$$\|I_\rho f\|_{M_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}} \|I_\rho f \chi_{B(x,t)}\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \quad (4.13)$$

yazılır.

Teorem 4.2 ve Teorem 2.5 kullanılarak (4.13) deki $\|I_\rho f \chi_{B(x,t)}\|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)}$ normunu hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \|I_\rho f\|_{M_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}}{\varphi_2(x,t) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}} \int_t^\infty \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\ &\leq C \sup_{t>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\varphi_1(x,t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,t))}} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,t))} \\ &= C \|f\|_{M_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.1 $1 < p < \infty$, ρ fonksiyonu, (4.1) ve (4.4) koşullarını sağlasın. $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere (4.5) koşulları sağlansın. Bu durumda I_ρ operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$, den $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ 'e sınırlıdır.

Sonuç 4.2 $1 < p < \infty$, ρ fonksiyonu, (4.1) ve (4.4) koşullarını sağlasın. $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere (4.5) koşulu sağlansın. Bu durumda M_ρ operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$, den $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ 'e sınırlıdır.

4.2 Genelleştirilmiş Ağırlıklı Morrey Uzaylarında Genelleştirilmiş Kesirli İntegral Operatör Komütatörleri İçin İki Ağırlıklı Eşitsizlikler

Bu kesimde $\mathcal{M}_\omega^{p,\varphi}$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarında, I_ρ genelleştirilmiş kesirli integral operatörünün $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonları ile komütatörleri için iki ağırlıklı eşitsizlikler ispatlanacaktır.

İyi bilinmektedir ki komütatör önemli bir integral operatördür ve özel olarak harmonik analizde çok kullanılır.

Harmonik analiz, sıklıkla çeşitli frekans bileşenlerinin sinyaldeki rolünü incelediği için, lineer olmayan sistemlerde çalışırken kullanışlıdır. Lineer olmayan sistemler, girişlerine göre lineer olmayan bir şekilde davranırlar, bu nedenle bu tür sistemlerin

matematiksel analizi daha karmaşıktır. Komütatörler, lineer olmayan terimlerin ortaya çıkmasını ve bu terimlerin nasıl işlendiğini anlamak için kullanılır. Bu kesimde genelleştirilmiş kesirli integral operatörünün komütatörleri

$$[b, I_\rho]f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} (b(x) - b(y)) f(y) dy.$$

şeklinde tanımlanır. b ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $|b, I_\rho|$ operatörü

$$|b, I_\rho|f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlıdır.

Maksimal komütatör, her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$M_b(f)(x) := \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Teorem 4.4 $1 < p < \infty$, $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, $\varphi_1(x, r)$ and $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\sup_{t>r} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x, t))}} \leq C \varphi_2(x, r), \quad (4.14)$$

koşulunu sağlasın. Burada C sabiti x ve t değişkenlerine bağımlı değildir (Aykol vd., 2022).

Teorem 4.5 Böylece M operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

Teorem 4.6 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun, Böylece M_b operatörü $L_{p, \omega_1}(\mathbb{R}^n)$ den $L_{p, \omega_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır (Aykol vd., 2022).

Teorem 4.7 $1 < p < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\omega_1, \omega_2) \in \tilde{A}_p(\mathbb{R}^n)$ ve $\omega_1, \omega_2 \in A_p(\mathbb{R}^n)$ olsun. $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\sup_{t>r} \left(1 + \ln \frac{t}{r}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{t<s<\infty} \varphi_1(x, s) \|\omega_1\|_{L_p(B(x, s))}}{\|\omega_2\|_{L_p(B(x, t))}} \leq C \varphi_2(x, r), \quad (4.15)$$

koşulunu sağlasın.

Bu durumda M_b operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathcal{M}_{\omega_2}^{p, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır. Burada C sabiti x ve t değişkenlerinden bağımsızdır (Aykol vd., 2022).

Teorem 4.8 $1 < p < q < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, ρ fonksiyonu (4.1)-(4.4) koşullarını sağlasın. Eğer (4.5) koşulu sağlamıyorsa ve $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_2 \in A_q(\mathbb{R}^n)$ ise,

$$\begin{aligned} \| |b, I_\rho| f \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} &\leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \\ &\times \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \frac{ds}{s} \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitsizlikleri gerçekleşir. Burada $t > 0$, C sabiti f , x ve t den bağımsızdır.

İspat. f fonksiyonu (4.7) deki gibi gösterilirse

$$|b, I_\rho| f(x) \leq |b, I_\rho| f_1(x) + |b, I_\rho| f_2(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Hölder eşitsizliği kullanılarak $|b, I_\rho| f_1(x)$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} |b, I_\rho| f_1(x) &= \int_{B(x,t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |b(y) - b(x)| |f(y)| dy \\ &\leq |b(x) - b_{B(x,t)}| \int_{B(x,t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\ &+ \int_{B(x,t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |b(y) - b_{B(x,t)}| |f(y)| dy \\ &= F_1(x) + F_2(x) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.9) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} F_1(x) &= |b(x) - b_{B(x,t)}| \int_{B(x,t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |f(y)| dy \\ &\leq CM_b \chi_{B(x,t)}(x) |I_\rho f_1(x)| \\ &\leq CM_b \chi_{B(x,t)}(x) \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,t))} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{-1} \end{aligned} \quad (4.17)$$

elde edilir. Hölder eşitliği ile

$$\begin{aligned}
F_2(x) &= \int_{B(x,t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |b(y) - b_{B(x,t)}| |f(y)| dy \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^j t)}{(2^j t)^n} \int_{B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t)} |b(y) - b_{B(x,t)}| |f(y)| dy \\
&\leq \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^j t)}{(2^j t)^n} |b_{B(x,2^{j+1}t)} - b_{B(x,t)}| \int_{B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t)} |f(y)| dy \\
&+ \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^j t)}{(2^j t)^n} \int_{B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t)} |b(y) - b_{B(x,2^{j+1}t)}| |f(y)| dy \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \sum_{j=-\infty}^{-1} \frac{\rho(2^j t)}{(2^j t)^n} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t))} \|\omega_1^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t))} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \sum_{j=-\infty}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t))} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,2^{j+1}t) \setminus B(x,2^j t))}^{-1} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,t))} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}^{-1}. \tag{4.18}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.17) ve (4.18) eşitsizlikleri ve Teorem 4.6 ile

$$\| |b, I_\rho| f_1 \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C \|b\|_{BMO} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,2t))}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada C sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır. Böylece

$$\begin{aligned}
\| |b, I_\rho| f_1 \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} &\leq C \|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \\
&\times \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$|x-z| \leq t$ ve $|z-y| \geq 2t$ olması durumunda, $\frac{1}{2}|z-y| \leq |x-y| \leq \frac{3}{2}|z-y|$ eşitsizliği olur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
|b, I_\rho| f_2(z) &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} \frac{\rho(|z-y|)}{|z-y|^n} |b(y) - b(z)| |f(y)| dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x,2t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |b(y) - b(z)| |f(y)| dy
\end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Buradan

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, 2t)} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} |b(y) - b(z)| |f(y)| dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, 2t)} |b(y) - b(z)| |f(y)| \left(\int_{|x-y|}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^{n+1}} ds \right) dy \\
&\leq C \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^{n+1}} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b(z)| |f(y)| dy \right) ds \\
&\leq C \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,t)}| |f(y)| dy \right) \frac{ds}{s} \\
&+ C |b(z) - b_{B(x,t)}| \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) \frac{ds}{s} = J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
J_1 &= C \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |b(y) - b_{B(x,t)}| |f(y)| dy \right) \frac{ds}{s} \\
&\leq C \int_t^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n} \|b(y) - b_{B(x,s)}\|_{L_{p', \omega^{-1}}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p, \omega}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&+ C \int_t^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n} |b_{B(x,t)} - b_{B(x,s)}| \left(\int_{B(x,s)} |f(y)| dy \right) \frac{ds}{s} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_t^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n} \|\omega^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p, \omega}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&+ C \|b\|_{BMO} \int_t^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n} \ln \frac{s}{t} \|\omega^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p, \omega}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \int_t^{\infty} \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right) \frac{\rho(s)}{s^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q}}} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p, \omega}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \quad (4.20)
\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}
J_2 &= C |b(z) - b_{B(x,t)}| \int_{2t}^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n} \left(\int_{\{y \in \mathbb{R}^n : 2t \leq |x-y| \leq s\}} |f(y)| dy \right) \frac{ds}{s} \\
&\leq C |B(x,t)|^{-1} \int_{B(x,t)} |b(z) - b(y)| dy \int_t^{\infty} \frac{\rho(s)}{s^n} \|\omega^{-1}\|_{L_{p'}(B(x,s))} \|f\|_{L_{p, \omega}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
&\leq C M_b \chi_{B(x,t)}(z) \int_t^{\infty} \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right) \frac{\rho(s)}{s^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q}}} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p, \omega}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

olur. Burada C sabiti x ve t değişkenlerinden bağımsızdır. Böylece (4.5), (4.20), (4.21) ve Teorem 4.6 ile

$$\begin{aligned}
& \| |b, I_\rho| f_2 \|_{L_{q, \omega_2}(B(x,t))} \leq \|J_1\|_{L_{q, \omega_2}(B(x,t))} + \|J_2\|_{L_{q, \omega_2}(B(x,t))} \\
&\leq C \|b\|_{BMO} \|\chi_{B(x,t)}\|_{L_{q, \omega_2}} \int_t^{\infty} \left(1 + \ln \frac{s}{t} \right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p, \omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +C\|M_b\chi_{B(x,t)}\|_{L_{q,\omega_2}} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
& \leq C\|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
& +C\|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s} \\
& \leq C\|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
& \| |b, I_\rho| f_2 \|_{L_{q,\omega_2}(B(x,t))} \leq C\|b\|_{BMO} \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))} \\
& \times \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}^{-1} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,s))} \frac{ds}{s}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (4.19) ile birlikte (4.16) eşitsizliğini verir. ■

Aşağıdaki teoremdede, $|b, I_\rho|$, genelleştirilmiş kesirli integral operatör komütatörünün, $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarından, $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$, genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarına sınırlılığı ispatlanacaktır. $|b, I_\rho|$ nin $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlılığı için, $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları üzerindeki koşullar bulunacaktır.

Teorem 4.9 $1 < p < q < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, ρ fonksiyonu (4.1)

- (4.4) koşullarını sağlasın. (4.5) koşulu ve $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_2 \in A_q(\mathbb{R}^n)$ ise, $\varphi_1(x, r)$ ve $\varphi_2(x, r)$ fonksiyonları

$$\int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\operatorname{ess\,inf}_{s < t < s} \varphi_1(x, r) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,r))}}{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \leq C\varphi_2(x, t) \quad (4.22)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda $|b, I_\rho|$ operatörü $\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

İspat. $f \in \mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzaylarının norm tanımından

$$\| |b, I_\rho| f \|_{\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} \frac{1}{\varphi_2(x, t) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}} \| |b, I_\rho| f \chi_{B(x,r)} \|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)} \quad (4.23)$$

yazılır. Teorem 4.8 ve 2.5 ile (4.23) deki $\| |b, I_\rho| f \chi_{B(x,r)} \|_{L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)}$ normu hesaplanarak

$$\begin{aligned}
& \| |b, I_\rho| f \|_{\mathcal{M}_{\omega_2}^{q,\varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{\|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}}{\varphi_2(x,t) \|\omega_2\|_{L_q(B(x,t))}} \int_t^\infty \left(1 + \ln \frac{s}{t}\right) \frac{\|f\|_{L_{p,\omega}(B(x,s))}}{\|\omega_2\|_{L_{p'}(B(x,s))}} \frac{ds}{s} \\
& \leq C \|b\|_{BMO} \sup_{x \in \mathbb{R}^n, t > 0} \frac{1}{\varphi_1(x,t) \|\omega_1\|_{L_p(B(x,t))}} \|f\|_{L_{p,\omega_1}(B(x,t))} = C \|b\|_{BMO} \|f\|_{\mathcal{M}_{\omega_1}^{p,\varphi_1}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

Sonuç 4.3 $1 < p < q < \infty$ ve $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, ρ fonksiyonu (4.1) - (4.4) koşullarını sağlasın. Eğer (4.5) koşulu sağlamıyorsa, $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, $\omega_1 \in A_p(\mathbb{R}^n)$, $\omega_2 \in A_q(\mathbb{R}^n)$ ise, Bu durumda $|b, I_\rho|$ operatörü $L_{p,\omega_1}(\mathbb{R}^n)$ den $L_{q,\omega_2}(\mathbb{R}^n)$ ye sınırlıdır.

5. BAZI UYGULAMALAR

Bu bölümde, ispatı yapılan teoremlerin bazı uygulamalarına yer verilecektir.

Ana teoremlerden elde edilen sonuçlar sırası ile , $L^{-\alpha/2}$, $A = ((a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n})$ (kompleks değerli $n \times n$ matris, $a_{ij} \in L_\infty$) kesirli kuvvetlere ve $\vec{a}$, manyetik potansiyele uygulanacaktır.

L operatörünün $L^{-\alpha/2}$ ($0 < \alpha < n$), kesirli kuvvetleri

$$L^{-\alpha/2}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^\infty e^{-tL} f(x) \frac{dt}{t^{-\alpha/2+1}}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada L operatörü, $t > 0$ olmak üzere, $x, y \in \mathbb{R}^n$ için Gaussian üst sınır koşulunu sağlayan $p_t(x, y)$ çekirdekli, e^{-tL} analitik yarı grubunu üreten L_2 uzayında tanımlı bir lineer operatördür.

$$|p_t(x, y)| \leq \frac{c_1}{t^{n/2}} e^{-c_2 \frac{|x-y|^2}{t}} \quad (5.1)$$

$c_1, c_2 > 0$ sabitleri, x, y ve t den bağımsızdır.

$L = -\Delta$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir laplasyen ise, $L^{-\alpha/2}$ operatörü, I_α Riesz potansiyeline karşılık gelir (Stein, 1993).

Teorem 5.1 $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{n}$, $1 \leq \theta_1 \leq \theta_2 < \infty$, $b \in BMO(\mathbb{R}^n)$, $(\omega_1, \omega_2) \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Ayrıca (φ_1, φ_2) fonksiyonları (3.19) koşulunu sağlasın.

Bu durumda $L^{-\alpha/2}$ operatörü $GM_{\omega_1}^{p, \theta_1, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)$ uzayından $GM_{\omega_2}^{q, \theta_2, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)$ uzayına sınırlıdır.

İspat. Tüm $x \in \mathbb{R}^n$ değerleri için

$$|L^{-\alpha/2}f(x)| \leq CI_\alpha|f|(x)$$

eşitsizliği mevcut olup, burada $C > 0$ sabiti x den bağımsızdır (Duong, 2004). e^{-tL} yarı grubunun $p_t(x, y)$ çekirdeği (5.1) koşulunu sağlasın.

Bu durumda Teorem 3.9 den

$$\begin{aligned} \|L^{-\alpha/2}f\|_{GM_{\omega_2}^{q, \theta_2, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} &\leq C \|I_\alpha|f|\|_{GM_{\omega_2}^{q, \theta_2, \varphi_2}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|f\|_{GM_{\omega_1}^{p, \theta_1, \varphi_1}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C > 0$ sabiti f fonksiyonundan bağımsızdır. ■

Birçok diferensiyel operatör (5.1) eşitsizliğini sağlar. Bunlardan iki tanesi;

(i) $A = (a_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$, $n \times n$ tipinde kompleks değerli $a_{ij} \in L_\infty$ olacak şekilde girdileri olan bir matris olsun. A matrisi, tüm $x \in \mathbb{R}^n$, $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n$ için ve bazı $\lambda > 0$ için

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \zeta_i \zeta_j \geq \lambda |\zeta|^2$$

koşulunu sağlasın.

$$Lf \equiv -\operatorname{div}(A \nabla f)$$

operatörü düşünüldüğünde;

eğer A matrisinin reel değerli girdileri varsa, ya da $n = 1, 2$ için kompleks değerli girdiler varsa, (Auscher, 1998) e^{-tL} çekirdeği için Gauss sınırlaması (5.1) geçerlidir (Arendt W., 1997).

(ii) Manyetik potansiyel $\vec{a}$, bir reel değerli potansiyel ($\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$) ve V , elektrik potansiyeli olmak üzere, L , manyetik Schrödinger operatörü

$$L = -(\nabla - i\vec{a})^2 + V(x)$$

olarak bilinir. Burada $k = 1, 2, \dots, n$, $a_k \in L_2^{loc}(\mathbb{R}^n)$ ve $0 \leq V \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^n)$ olduğu varsayılmıştır.

Aşağıdaki noktasal kestirim, iyi bilinen diyamanyetik eşitsizlikten (Stein, 1993) yapılmıştır.

Keyfi $t > 0$ ve $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$, için aşağıdaki eşitsizlik gerçekleşir.

$$|e^{-tL} f| \leq e^{-t\Delta} |f|$$

Bu eşitsizlik, e^{-tL} , yarı grubunun (5.1) üst sınır koşulunu sağlayan bir $p_t(x, y)$ çekirdeğine sahip olduğunu belirtir.

Ayrıca, uygun koşullarda (McIntoch, 1986), (Stein, 1993), Teorem 5.1 ile, L_2 deki $2m$ mertebesinde diverjens formu

$$Lf = (-1)^m \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta f)$$

olan bir L , homojen eliptik operatör için benzer sonuçlar elde edilebilir.

Bu durumda (5.1) kestirimi

$$|p_t(x, y)| \leq \frac{c_3}{t^{n/2m}} e^{-c_4 \left(\frac{|x-y|}{t^{1/(2m)}} \right)^{2m/(2m-1)}}$$

eşitsizliği ile değiştirilmelidir. Burada tüm $t > 0$ ve tüm $x, y \in \mathbb{R}^n$, olmak üzere $c_3, c_4 > 0$ sabitleri x, y ve t değişkeninden bağımsızdır.



6. TARTIŞMA VE SONUÇ

$L_{p,\lambda}$ Morrey uzayları L_p uzaylarının genişlemesi olarak 1938 yılında C. B. Morrey tarafından tanımlanmıştır.

$M_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları, $1 \leq p < \infty$ ve $f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, normu

$$\|f\|_{M_{p,\omega}} = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r > 0}} \frac{r^{-n/p}}{\omega(x, r)} \|f\|_{L_p(B(x, r))}$$

olan fonksiyon uzaylarıdır. Buna göre eğer ω ağırlık fonksiyonu $\omega(x, r) = r^{\frac{\lambda-n}{p}}$ alınırsa, $M_{p,\omega}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş Morrey uzayları, klasik $L_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ Morrey uzayına denk gelir.

$M_{\omega}^{p,\varphi}(\mathbb{R}^n)$ genelleştirilmiş ağırlıklı Morrey uzayları, normu

$$\|f\|_{M_{\omega}^{p,\varphi}} = \sup_{r > 0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{\varphi(x, r) \|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x, r))} < \infty$$

olan tüm $f \in L_{p,\omega}^{loc}(\mathbb{R}^n)$ fonksiyonların sınıfıdır.

$GM_{\omega}^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)$, ağırlıklı global Morrey tipli uzaylar, sonlu normu

$$\|f\|_{GM_{\omega}^{p,\theta,\varphi}(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\infty} \frac{\varphi(r)}{\|\omega\|_{L_p(B(x, r))}} \|f\|_{L_{p,\omega}(B(x, t))}^{\theta} dt \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

olan fonksiyonlar sınıfını göstermektedir.

$BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı;

$$f_{B(x, r)}(x) = \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) dy$$

olmak üzere, normu

$$\|f\|_{BMO} = \sup_{r > 0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}(\cdot)| dy < \infty$$

olan fonksiyon sınıfıdır.

Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlıdır.

M_α kesirli maksimal operatörü

$$(M_\alpha f)(x) = \sup_{r>0} |B(x, r)|^{-1+\frac{\alpha}{n}} \int_{B(x, r)} |f(y)| dy \quad (6.1)$$

şeklindedir. $\alpha = 0$ alındığında Mf Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu elde edilir. $\alpha = 0$ durumu dışında M_α kesirli maksimal operatörünü maksimal operatörden ayıran, integrant Lebesgue ölçüsünün bir köklü ifade olmasıdır. Esasen M_α operatörü $\alpha \neq 0$ olmak üzere tanımlanması daha isabetli olacaktır.

$M^\#$, keskin maksimal fonksiyonu;

$$M^\# f(x) = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f_{B(x, r)}(x)| dy$$

şeklinde tanımlıdır. Görüleceği gibi, $M^\#$ keskin maksimal fonksiyonunu sonlu olması durumu $BMO(\mathbb{R}^n)$ uzayı ile çakışmaktadır.

$I_\rho f$ genelleştirilmiş kesirli integral operatörü,

$$I_\rho f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x-y|)}{|x-y|^n} f(y) dy \quad (6.2)$$

olarak tanımlanır. Burada $\rho(t) \equiv t^\alpha$ alındığında $I_\alpha f$ Riesz potansiyelinin elde edileceği aşıkardır. Burada $t = |x-y|$ alındığında $I_\alpha f$ Riesz potansiyeli operatörü

$$(I_\alpha f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \quad (6.3)$$

formunda elde edilir.

$[A, B]$ komütatörü en genel haliyle; A ve B birer operatör ve f bir fonksiyon olmak üzere,

$$[A, B] = A(B(f)) - B(A(f))$$

olarak tanımlanır.

$M_b(f)$ maksimal komütatör;

$$M_b f(x) = \sup_{r>0, x \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

olarak tanımlanırken, maksimal operatör M nin komütatörü,

$$[M, b] f(x) = M(bf)(x) - b(x) Mf(x)$$

olarak tanımlanır. Esasen M_b ve $[M, b]$ operatörleri birbirinden farklı iki operatördür. Örneğin M_b , pozitif ve alt lineer operatördür, fakat $[M, b]$ ne pozitif ne de alt lineerdir. Ancak, eğer b fazladan bazı koşulları sağlıyorsa, M_b operatörü, $[M, b]$ operatörünü kontrol eder.

$[b, I_\alpha] f$, Riesz potansiyeli komütatörü,

$$[b, I_\alpha] f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(b(x) - b(y)) f(y)}{|x - y|^{n-\alpha}} dy \quad (6.4)$$

olarak tanımlıdır.

Genelleştirilmiş kesirli integral operatör komütatörü, $0 < \alpha < n$, b ölçülebilir bir fonksiyon ve f de $\mathbb{R}^n$ üzerinde lokal integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere

$$[b, I_\rho] f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x - y|)}{|x - y|^n} (b(x) - b(y)) f(y) dy$$

şeklinde tanımlanır.

b ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $|b, I_\rho|$ operatörü

$$|b, I_\rho| f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\rho(|x - y|)}{|x - y|^n} |b(x) - b(y)| |f(y)| dy$$

şeklinde tanımlıdır.

Komütatörler bilimsel çalışmalarda birçok alanda kullanılmaktadır. Cebirsel yapılarda, gruplar, halkalar ve cebirlerin daha iyi anlaşılması için kullanılan önemli araçlardır. Operatör teorisinde, operatörlerin özelliklerinin araştırılmasında, özel olarak operatörlerin spektral özelliklerinin, komütatif ilişkilerinin, cebirsel yapılarının, simetri ve özuyumluluk (self-adjointness) gibi temel özelliklerinin araştırılmasında kullanım önemine sahiptir. Komütatörler kuantum mekaniğinin temel yapılarından, belirsizlik ilkesinin tanımlanmasında, korunum yasalarının formülasyonu gibi temel alanlarda kullanılır. Kuantum biyolojisinde benzer şekilde kuantum süperpozisyonunun etkilerini incelemek, kuantum tünelleme olasılıklarını hesaplamak ve bu fenomenin biyolojik süreçler üzerindeki etkisini değerlendirmede, kuantum koherensin (uyum) analizinde ve biyolojik sistemlerin matematiksel modellenmesinde kullanılan önemli araçlardır. Bu birkaç örnekte olduğu gibi komütatörler, ekonomi, geometri, kuantum bilgisayar ve kuantum bilişim, matematiksel fizik, istatistiksel mekanik, kuantum

alan teorisi, elektromanyetizma, optik, diferensiyel denklemler, moleküler kimya, sistem teorisi, robotik gibi disiplinlerde kullanılır.

BMO (Bounded Mean Oscillation) uzayları, harmonik analizin önemli konularındandır. BMO uzayları, sınırlı bir aralıkta fonksiyonların salınımlarının ya da dalgalanmalarının ortalamasının sınırlı olduğu fonksiyon uzaylarını kapsar. Bu anlamda, harmonik analiz, matematiksel fizik, kuantum mekaniği, matematiksel biyoloji, genetik, kuantum biyoloji gibi alanlarda başvurulabilir bir fonksiyon uzayıdır. Esasen kısmi türevli diferensiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılması için önemli olduklarından, birçok bilim dalında varlık gösterir.

BMO uzaylarının temelleri 20. yüzyılın ortalarında Alberto P. Calderón tarafından atılmıştır. İlk anlamlı tanımlamayı 1961 yılında John-Nirenberg yapmışlardır. Daha sonra birçok matematikçi tarafından geliştirilmiştir. Charles Fefferman, Elias M. Stein, Loukas Grafakos, José L. Rubio, Michael Frazier, Yum-Tong Siu, Xavier Tolsa bunlara birer örnek olarak verilebilir.

Genelleştirilmiş kesirli integral operatör I_ρ , kesirli kalkülüsün (fractional calculus) konuları arasında olduğu gibi fonksiyonel analizde özellikle kesirli Sobolev uzayları teorisinde kullanılır. Kısmi diferensiyel denklemlerin analizinde ve bu denklemlerin çözümünde kullanılan önemli bir operatördür. Harmonik analizde, kesirli Fourier dönüşümleri teorisinde kullanım alanına sahiptir. Genelleştirilmiş kesirli integral operatör I_ρ , kuantum mekaniği, istatistiksel fizik, elektrodinamik ve dalga mekaniği gibi alanlarda kullanılır ve bu alanlarda matematiksel modelleme çalışmalarında önemli bir yere sahiptir. Mühendisliğin birçok alanında kullanılan genelleştirilmiş kesirli integral operatör I_ρ , ekonomi ve finans alanında, finans piyasasındaki zamanla değişen verilerin analizi, ve fiyat hareketlerinin tahmininde kullanılır.

Genelleştirilmiş kesirli integral operatör I_ρ biyomedikal mühendislikte, elektrokardiyografi (EKG) sinyallerinin analizi, beyin sinyallerinin işlenmesi ve görüntüleme alanlarında kullanılır.

KAYNAKLAR

- Adams, D. R., 1971. A note on Riesz potentials, *Duke Math. J.* 42 (1975), 765-778.
- Adams, D. R., Xiao, J., 2016. Restrictions of Riesz–Morrey potentials, *Institut Mittag-Leffler, Ark. Mat.*, 54 (2016), 201–231, DOI: 10.1007/s11512-016-0238-2.
- Ağcayazı M., 2015. Maksimal fonksiyonların komütatörü ve bazı uygulamaları, Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kırıkkale
- Ağcayazı M., Gogatishvili A., Koca K., 2015. Mustafayev R., A note on maximal commutators and commutators of maximal functions, *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 67, No. 2 (2015) pp. 581–593.
- Arendt W. and A.F.M. ter Elst, Gaussian estimates for second order elliptic operators with boundary conditions, *J. Operator Theory*, 38 (1997), 87–130.
- Auscher P. and Tchamitchian P., Square root problem for divergence operators and related topics, *Astérisque*, 249, Soc. Math. France, 1998.
- Avşar C., 2019. Lokal Morrey-Lorentz uzaylarında Calderon-Zygmund operatörlerinin sınırlılığı, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 43, Ankara
- Avşar C., Musayev M. A., Safarov Z. V., 2022. Two -weighted inequalities for generalized fractional integral operator and its commutators in generalized weighted Morrey spaces, *J. Math. Anal.*, ISSN: 2217-3412, www.iliaris.com/JMA, volume 13 issue 4(2022), pages 1-14., <http://doi.org/10.54379/JMA-2022-4-1>.
- Avşar C., Aykol C., Hasanov J.J., Musayev A.M, 2023. Two-weight inequalities for Riesz potential and its commutators on weighted global Morrey-type spaces, *Adv. Studies: Euro-Tbilisi Math. J.* 16(1): 33-50 (March 2023). DOI: 10.32513/asetmj/19322008236.
- Aykol, C., Hasanov, J.J., 2020. On the boundedness of B-maximal commutators, commutators of B-Riesz potentials and B-singular integral operators in modified B-Morrey spaces, *Acta Universitatis Szegediensis. Acta Sci. Math.* 86 (3-4).
- Aykol, C., Badalov, X.A., Hasanov, J.J., 2020. Maximal and singular operators in the local “complementary” generalized variable exponent Morrey spaces on unbounded sets, *Quaest. Math.*, 43 (10), 1487-1512.
- Aykol, C., Azizova, Z.O., Hasanov, J.J., 2021. Weighted Hardy operators in local generalized Orlicz-Morrey spaces, *Carpathian Math. Publ.*, 13 (2), 522-533.
- Aykol C., J.J. Hasanov and Z.V. Safarov, 2022. A characterization of two-weighted inequalities for maximal, singular operators and their commutators in generalized weighted Morrey spaces, *Funct. Approx. Comment. Math.* 67 (2), 145-167, DOI: 10.7169/facm/1924.

- Aykol C., J.J. Hasanov and Z.V. Safarov, 2023. Two-weighted inequalities for Riesz potential and its commutators in generalized weighted Morrey spaces, *Matematički Vesnik by Društvo matematičara Srbije*. Volume 75, p37-49.
- Bradley J.S., 1978. Hardy inequalities with mixed norms. *Canad. Math. Bull.*, 21 (4) (1978), 405-408.
- Burenkov V.I., Guliyev H.V., Necessary and sufficient conditions for boundedness of the maximal operator in local Morrey-type spaces, *Studia Math.* 163 (2) (2004), 157-176.
- Burenkov V., A. Gogatishvili, V.S. Guliyev and R. Mustafayev, Boundedness of the fractional maximal operator in local Morrey-type spaces, *Complex Var. Elliptic Equ.* 55 (8-10) (2010), 739-758.
- Chiarenza, F., Frasca, M., 1987. Morrey spaces and Hardy- Littlewood maximal function, *Rend.Math.* 7.
- Çelik A., Ayşegül, 2020. Vanishing Morrey uzaylarında klasik operatörlerin ve komutatörlerinin sınırlılığı, Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 88, Diyarbakır.
- Di Fazio, G., Ragusa, M. A., 1991 Commutators and Morrey spaces, *Bollettino U.M.I.* 7 5-A, 323-332.
- Duong X.T, Yan L.X., On commutators of fractional integrals, *Proc. Amer. Math. Soc.* 132 (2004), 12, 3549-3557.
- Edmunds D.E., Kokilashvili V.M., Two weighted inequalities for singular integrals, *Canad. Math. Bull.* 38 (3) (1995), 295-303.
- Fefferman, C., Stein, E. M., 1971. Some Maximal Inequalities. *Am. J. Math.*, 93(1), 107-115. <https://doi.org/10.2307/2373450>.
- Gadjiev A.D., 1997. On generalized potential-type integral operators, Dedicated to Roman Taberski on the occasion of his 70th birthday, *Funct. Approx. Comment. Math.*, 25 (1997), 37-44.
- Guliyev V. S., 1994. Integral operators on function spaces on the homogeneous groups and on domains in R^n (Russian), Doctor degree dissertation, Mat. Inst. Steklov, Moscow 1994.
- Guliev V. S., 1994. Two-weighted L_p inequalities for singular integral operators on Heisenberg groups, *Georgian Math. J.* 1(4), 367-376.
- Guliyev V.S., R.Ch. Mustafaev, On generalized fractional integrals, *Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, 21 (4) (2001), *Math. Mech.*, 63-71, 237.
- Guliyev, V.S., 2009. Boundedness of the maximal, potential and singular operators in the generalized Morrey spaces, *J. Inequal. Appl.* Art. ID 503948, (2009), 20 pp.

- Guliyev V. S., Generalized weighted Morrey spaces and higher order commutators of sublinear operators, *Eurasian Math. J.*, 2012, Volume 3, Number 3, 33–61
- Guliyev V.S., Generalized local Morrey spaces and fractional integral operators with rough kernel, *J. Math. Sci. (N. Y.)* 193 (2) (2013), 211-227.
- Guliyev V.S., Local generalized Morrey spaces and singular integrals with rough kernel, *Azerb. J. Math.* 3 (2), 2013, 79-94.
- Guliyev, V.S., Samko, S.G., 2013. Maximal, Potential, and Singular Operators in the Generalized Variable Exponent Morrey Spaces on Unbounded Sets. *J Math Sci*, 193(2), 228–248.
- Guliyev V.S., Karaman T., Mustafayev R.Ch., Serbetci A., 2014. Commutators of sublinear operators generated by Calderón-Zygmund operator on generalized weighted Morrey spaces, *Czechoslovak Math. J.* 64(2), 365-386.
- Guliyev V.S., A.F. Ismayilova, A. Kucukaslan, A. Serbetci, Generalized fractional integral operators on generalized local Morrey spaces, *Journal of Function Spaces*, Article ID 594323, 2015 (2015), 1-8. <https://doi.org/10.1155/2015/594323>.
- Guliyev V. S., Akbulut A., Hamzayev Vugar H., Kuzu O., 2016. Commutators of Marcinkiewicz integrals associated with Schrödinger operator on generalized weighted Morrey spaces. *J. Math. Inequalities*, 10(4), 947–970.
- Gunawan H., A note on the generalized fractional integral operators, *J. Indones. Math. Soc.*, 9 (2003), no. 1, 39-43.
- Hasanov J. J., Musayev M. A., 2019. Oscillatory integral operators and their commutators in modified weighted Morrey spaces with variable exponent, *Int. J. Appl. Math.*, 32(3), 521-535.
- Ho, K.P., 2016. Singular integral operators, John-Nirenberg inequalities and Triebel-Lizorkin type spaces on weighted Lebesgue spaces with variable exponents, *Rev. de la Union Mat. Argentina* 57 (1), 85-101.
- Janson, S., 1978. Mean oscillation and commutators of singular integral operators, *Ark. Mat.* 16, 263-270.
- John F., Nirenberg L. On Functions of Bounded Mean Oscillation, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol. XIV. 415-426 (1961).
- Kokilashvili, V., Meskhi, A., 2011. Two-weight inequalities for fractional maximal functions and singular integrals in L spaces, *J. Math. Sci. (N.Y)* 173, no 6, 656-673.
- Komori Y., Shirai S., Weighted Morrey spaces and a singular integral operator, *Math. Nachr.* 282(2), 219-231 (2009).

- Küçükaslan A., 1015. Genelleştirilmiş kesirli integral operatörlerinin genelleştirilmiş Morrey uzaylarında sınırlılığı, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 64, Ankara.
- Küçükaslan, A., Hasanov, S.G., Aykol C., 2017. Generalized Fractional Integral Operators on Vanishing Generalized Local Morrey Spaces, *Int. J. Math. Anal.*, Vol. 11, 2017, no. 6, 277 - 299.
- Maz'ya, V.G., 1985. Sobolev Spaces, Springer-Verlag, Berlin.
- McIntosh A., Operators which have an H^1 -calculus, in *Proc. Centre Math. Analysis*, Vol. 14, Miniconference on Operator Theory and Partial Differential Equations, A. N. U., Canberra, 1986, 210-231.
- Mizuhara T., Boundedness of some classical operators on generalized Morrey spaces, *Harmonic Analysis* (S. Igari, Editor), ICM 90 Satellite Proceedings, Springer - Verlag, Tokyo 183-189 (1991).
- Morrey, C. B., 1938. On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* 43 (1938), 126-166.
- Muckenhoupt, B. Hardy's inequality with weights. *Studia Math.*, 44(1972), 1, 31-38.
- Muckenhoupt B., Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function, *Trans. Amer. Math. Soc.* 165 (1972), 207-226.
- Musayev M. A., 2021. Boundedness of commutators of an oscillatory integral operators in variable exponent Morrey spaces, *Int. J. Appl. Math.*, 34(4), 745-760.
- Nakai E., Hardy-Littlewood maximal operator, singular integral operators and Riesz potentials on generalized Morrey spaces, *Math. Nachr.* 166, 95-103 (1994).
- Nakai E., On generalized fractional integrals, *Taiwanese J. Math.*, 5 (2001), 587-602.
- Peetre, J. 1969. On the theory of $L_{p,\lambda}$ spaces, *J. Funct. Anal.* 4 (1969), 71-87.
- Rakotondratsimba, Y., 1998. On the boundedness of classical operators on weighted Lorentz spaces, *Georgian Math. J.*, 5(2):177-200.
- Samko, S., 2003. Hardy inequality in the generalized Lebesgue spaces, *Fract. Calc. and Appl. Anal.*, vol. 6, no 4, 355-362.
- Samko, N., 2009. Weighted Hardy and singular operators in Morrey spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, 350:56-72.
- Sawyer E. T., and R.L. Wheeden, Weighted inequalities for fractional integrals on Euclidean and homogeneous spaces, *Amer. J. Math.* 114(1992), 813-874.
- Scott Bradley, J., 1978. Hardy's inequalities with mixed norms, *Canad. Math. Bull.* Vol. 21 (4).

- Shao, X., Tao, S., 2021. Weighted Estimates of Variable Kernel Fractional Integral and Its Commutators on Vanishing Generalized Morrey Spaces with Variable Exponent. *Chin. Ann. Math. Ser. B* 42(3), 451–470.
- Stein E. M., Harmonic analysis: Real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- Tomaselli, G., 1969. A class of inequalities, *Boll. Un. Mat. Ital.* 2, 622-631.
- Tüystüz N., 2015. Genelleştirilmiş Morrey uzaylarında harmonik analizin integral operatörlerinin sınırlılığı, Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 37, Kırşehir.
- Wang H., 2017. Endpoint estimates for commutators of sublinear operators in the Morrey-type spaces, *J. Math. Inequalities*, 11(3), 607–639.

