

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİNAMİK LİNEER MODELLERDE PARAMETRE TAHMİNİ

Cemre DARICI

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2022**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Dinamik Lineer Modellerde Parametre Tahmini

Cemre DARICI

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN

Lineer modeller ve lineer modellerde parametre tahmini istatistik biliminin en önemli konuları arasında yer almaktadır. Günümüzde yapılan çalışmalarda, oluşturulan modeller için dinamiklik kavramı önem kazanmıştır. Bu nedenle, bu tez çalışmasında dinamik lineer model kavramı üzerinde durulmuştur. Lineer model ve dinamik lineer model arasındaki fark incelenmiş ve durum-uzay modelleri anlatılmıştır. Durum-uzay modellerine istatistikten örnekler verilmiş ve istatistik uygulamalarında kullanılan bazı modellerin durum-uzay modeli gösterimleri yazılmıştır.

Dinamik lineer modellerde parametre tahmini için kullanılan yöntemler araştırılmış ve bu yöntemlerden indirgemeli en küçük kareler yöntemi ve Kalman Filtresi yöntemi göz önüne alınmıştır. Mevcut durum ve önceki tahminlere göre bir sonraki durumu tahmin eden bir algoritma olan Kalman Filtresinin elde edilişi anlatılmıştır. Uygulama çalışmalarında ise istatistikte sıklıkla kullanılan bazı modellerin durum-uzay gösterimleri yapılarak Kalman Filtresi ve indirgemeli en küçük kareler yöntemi ile tahminler elde edilerek sonuçları karşılaştırılmıştır. Gerçek veri uygulaması olarak, Türkiye Covid-19 verileri alınmış ve kurulan modellere ilişkin parametreler Kalman Filtresi kullanılarak tahmin edilmiştir.

Şubat 2022, 91 sayfa

Anahtar Kelimeler : Parametre tahmini, dinamik lineer model, Kalman Filtresi, durum-uzay modeli, indirgemeli en küçük kareler yöntemi.

ABSTRACT

Master. D. Thesis

Parameter Estimation in Dynamic Linear Models

Cemre DARICI

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Statistics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN

Linear models and parameter estimation in linear models are among the most important subjects of statistical science. In today's studies, the concept of dynamism has gained importance for the models created. Therefore, the concept of a dynamic linear model is emphasized in this thesis. The difference between linear model and dynamic linear model is examined and state-space models are explained. Examples of state-space models from statistics are given and state-space model representations of some models used in statistical applications are written.

The methods used for parameter estimation in dynamic linear models have been investigated and among these methods, the recursive least squares method and the Kalman Filter method have been considered. The derivation of the Kalman Filter, which is an algorithm that predicts the next state according to the current state and previous predictions, is explained. In the application studies, state-space representations of some methods that are frequently used in statistics were made, and the results were compared by making predictions with the Kalman Filter and recursive least squares method. For real data application, Turkey Covid-19 data was taken and the parameters of the considered models were estimated by Kalman Filter.

February 2022, 91 pages

Key Words : Parameter estimation, dynamic linear models, Kalman Filter, state space models, recursive least squares method.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca engin bilgi ve tecrübeleri ile yol gösteren, sonsuz sabır ve ilgiyle beni her zaman çalışmaya teşvik eden, katkı ve önerileriyle daima yanımda olan, her karşılaştığım sorunda çekinmeden yanına gidebildiğim, güler yüzünü, desteğini ve samimiyetini benden esirgemeyen, birlikte çalışmaktan mutluluk duyduğum değerli danışman hocam Sayın. Doç. Dr. Esin KÖKSAL BABACAN'a en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca her zaman manevi desteklerini hissettiğim, her konuda yanımda olan ve hiçbir zaman pes etmeme izin vermeyip bana inanan değerli hocalarım Dr. Yeşim GÜNEY ve Dr. Yetkin TUAÇ'a teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca aldığım her kararda yanımda olan, attığım her adımda başarabileceğime inanan, sabırla beni dinleyen, destekleri ve sevgileriyle bana güç veren ve beni bugünlere kadar yetiştiren annem Zeynep DARICI ve babam Yılmaz DARICI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Cemre DARICI

Ankara, Şubat, 2022

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	x
1. GİRİŞ.....	1
2. LİNEER MODELLER ve DURUM-UZAY MODELLERİ.....	6
2.1 Bir Açıklayıcı Değişkenli Lineer Modeller	7
2.2 Birden Çok Açıklayıcı Değişkenli Lineer Modeller.....	10
2.3 Rastgele Katsayılı Modeller	13
2.4 Lineer Model ile Dinamik Lineer Model Arasındaki Temel Fark.....	15
2.5 Kesikli Zaman Stokastik Durum-Uzay Modelleri.....	16
3. İSTATİSTİK MODELLERİN DURUM-UZAY MODELİ GÖSTERİMİ	18
3.1 Rastgele Yürüyüş Süreci	18
3.2 Dinamik Regresyon Modeli	20
3.2.1 Hataları Otokorelasyonlu Regresyon Modelleri.....	21
3.3 Zaman Serisi Modelleri	23
3.3.1 Hareketli Ortalama Serilerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi.....	23
3.3.2 Otoregresif Zaman Serilerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi.....	25
3.3.3 Otoregresif Hareketli Zaman Serilerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi....	26
3.3.4 ARX ve ARMAX Modellerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi.....	27
4. DİNAMİK LİNEER MODELLERDE TAHMİN	30
4.1 İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi.....	31
4.2 Kalman Filtresi ile Tahmin.....	33
4.2.1 Kalman Filtresinin Elde Edilişi	35
4.3 Filtreleme, Düzgünleştirme, Öngörü Kavramları	42

5. UYGULAMA ÇALIŞMALARI	44
5.1 Basit Doğrusal Regresyon Modelinin Durum-Uzay Modeli Biçiminde Yazılması ve Parametrelerinin Tahmini.....	44
5.2 Otokorelasyonlu Hatalı Regresyon Modellerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi ve Parametrelerinin Tahmini.....	60
5.3 ARX Modelinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi ve Parametrelerinin Tahmini.....	64
5.4 ARMAX Modelinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi ve Parametrelerinin Tahmini.....	69
5.5 Gerçek Veri Uygulaması	74
6. SONUÇ	84
KAYNAKLAR	87
EKLER.....	90
EK 1 Teorem.....	90
ÖZGEÇMİŞ.....	91

SİMGELER DİZİNİ

$\underline{x}_t$	Durum vektörü
$\underline{y}_t$	Gözlem vektörü
$\underline{w}_t$	Hata vektörü
$\underline{v}_t$	Hata vektörü
$\underline{Y}$	$n \times 1$ boyutlu gözlemlerin rastgele vektörü
X	$n \times p$ ($n < p$) boyutlu bilinen sayılar matrisi
$\underline{\beta}$	$p \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametrelerin vektörü
$\underline{\varepsilon}$	$n \times 1$ boyutlu rastgele hata vektörü
V	Bilinen pozitif tanımlı bir matris
$\underline{u}_t$	Sistem kontrol vektörü

Kısaltmalar

WN	White Noise (Beyaz Gürültü)
MA	Moving Average (Hareketli Ortalama)
AR	Auto Regressive (Oto regresif)
ARMA	Auto Regressive Moving Average (Oto regresif Hareketli Ortalama)
ARX	Auto Regressive Exogeneous Inputs
ARMAX	Autoregressive Moving Average Exogenous Input
EKK	En Küçük Kareler
HKO	Hata Kareler Ortalaması

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 Rastgele yürüyüş modelinin bir gerçekleşmesi	19
Şekil 5.1 $\alpha=2$ ve $\beta=3$ parametreleri için Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK Yöntemi tahminleri	46
Şekil 5.2 $\alpha=2$ ve $\beta=3$ parametreleri için Kalman Filtresi ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri	48
Şekil 5.3 $\alpha=2$ ve $\beta=3$ parametreleri için Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK Yöntemi tahminleri	50
Şekil 5.4 α parametresi için Kalman Filtresi ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri	52
Şekil 5.5 β parametresi için Kalman Filtresi ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri	53
Şekil 5.6 Gerçek gözlemler, Kalman Filtresi, En Küçük Kareler ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri.....	54
Şekil 5.7 Gerçek değerler, Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK Yöntemi ile elde edilen tahminlere ilişkin saçılma grafiği.....	55
Şekil 5.8 α parametresi için Kalman Filtresi ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri	56
Şekil 5.9 β parametresi için Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK Yöntemi tahminleri	57
Şekil 5.10 Gerçek gözlemler, Kalman Filtresi, En Küçük Kareler ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri.....	58
Şekil 5.11 Gerçek değerler, Kalman Filtresi ve İndirgemeli En küçük Kareler Yöntemi ile elde edilen tahminlere ilişkin saçılma grafiği	58
Şekil 5.12 x ve y değişkenlerinin değerleri için saçılım grafiği.....	61
Şekil 5.13 α ve β parametreleri ve e_t için Kalman Filtresi tahminleri.....	62
Şekil 5.14 Gerçek değerler, Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlere ilişkin saçılma grafiği.....	63
Şekil 5.15 Kalman Filtresi tahminleri ve y_t 'nin gerçek değerleri	64
Şekil 5.16 Bilinen girdiler (kontroller)	66
Şekil 5.17 Çıktılar (y_t gözlemleri)	67

Şekil 5.18 Model Parametresi a_1 ' in Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini	67
Şekil 5.19 Model Parametresi a_2 ' nin Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini	68
Şekil 5.20 Model Parametresi b_1 ' in Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini	69
Şekil 5.21 Bilinen girdiler ve kontroller	70
Şekil 5.22 Çıktılar ve gözlemler	71
Şekil 5.23 Model Parametresi a_1 ve a_2 'nin Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini	72
Şekil 5.24 Model Parametresi b_1 ve b_2 'nin Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini	73
Şekil 5.25 Gözlenen vaka sayıları ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlere ilişkin grafik	76
Şekil 5.26 θ_t parametresinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminleri	77
Şekil 5.27 Gerçek ölüm sayıları ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminler	79
Şekil 5.28 Gerçek ve tahmini vaka-ölüm sayılarına ilişkin saçılım grafiği	80
Şekil 5.29 α parametresinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerine ilişkin grafik	81
Şekil 5.30 β parametresinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminleri	82

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 5.1 Durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri	45
Çizelge 5.2 $\alpha=2$, $\beta=3$ için tahmin sonuçları	47
Çizelge 5.3 Durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri	47
Çizelge 5.4 $\alpha=2$, $\beta=3$ için tahmin sonuçları	48
Çizelge 5.5 ile durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri	49
Çizelge 5.6 $\alpha=2$, $\beta=3$ için tahmin sonuçları	50
Çizelge 5.7 Durum, ölçüm gürültü matrisi ve başlangıç değerleri	51
Çizelge 5.8 $\alpha=2$, $\beta=3$ için tahmin sonuçları	55
Çizelge 5.9 Durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri	56
Çizelge 5.10 $\alpha=2$, $\beta=3$ için tahmin sonuçları	59
Çizelge 5.11 Durum ve ölçüm gürültü matris değerleri ve başlangıç değerleri.....	62
Çizelge 5.12 a_1, a_2, b_1 tahmin sonuçları	66
Çizelge 5.13 Parametre tahminlerine ilişkin hata kareler ortalamaları	74
Çizelge 5.14 θ_t parametresi için Kalman Filtresi Tahminleri Ortalaması ve HKO.....	78
Çizelge 5.15 α ve β parametrelerinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminleri, HKO ve R^2 değerleri	83

1. GİRİŞ

İstatistik biliminde modelleme oldukça önemli ve verinin açıklanabilmesi ile birlikte ileriye yönelik öngörülerin yapılabilmesi için kritik bir konudur. Herhangi bir verinin modellenebilmesi için öncelikle veriye uygun model yapısının belirlenmesi gerekir. Daha sonra, bu yapıya ait parametrelerin tahmin edilmesi istatistiğin en önemli araştırma konularından birisidir.

Yapılan çalışmalarda amaç kitle hakkında bilgi sahibi olmaktır. Bir kitlede, incelenen özelliğe ilişkin tüm değerleri gözlemek çok masraflı, zaman alıcı ve çoğu zaman olanaksız olduğundan, kitle hakkında bilgi elde etmek için kitleden örneklemeler seçilir ve kitlenin parametreleri, örneklemde elde edilen bilgiler kullanılarak tahmin edilir. Çalışılan kitle ile ilgili bilgi sahibi olma açısından parametre tahmini önemlidir. Bu nedenle literatürde modele uygun parametrelerin en iyi tahminini yapabilmek için önerilmiş birçok yöntem vardır.

Dinamik olmayan lineer modellerde, model parametrelerinin zamana bağlı olarak değişmediği, sabit kaldığı varsayılmaktadır. Dinamik lineer modeller ise, problemin çözümü için oluşturulan modelin zamana bağlı olarak değişim gösterdiği modelleme türüdür. Zamana bağlı olarak değişim gösteren durumların modellenmesi için rastgele katsayılı lineer modeller (dinamik lineer modeller) kullanılmaktadır.

Rastgele katsayılı lineer modellerle ilgili yapılan çalışmalar 50 yıl öncesine kadar uzanmaktadır. Parametrelerin gözlenen birimler boyunca değişebileceği, her zaman sabit olamayacağı ilk kez Wald (1947) tarafından ortaya konulmuştur. Parametrelerin tahminine yönelik herhangi bir yöntem önermeyen Wald'ın çalışması, daha sonraki çalışmalara öncelik etmesi açısından önemlidir (Çelik, 2008).

Günümüzde, yapılan çalışmalarda oluşturulan istatistiki ve iktisadi modellerde dinamiklik kavramı önemli bir hale gelmiştir. Yapılan çalışmaların birçoğunda ele alınan modeller zamana bağlı olarak değişim gösterdiği için zaman etkisinin önemi artmış ve rastgele katsayılı modellerin (dinamik modellerin) kullanımı yaygınlaşmıştır.

Rastgele Katsayılı Lineer Modeller ile ilgili yapılan çalışmalar Swamy (1970) ile başlayıp Kara (1981), Leeuw (1986), Beran ve Hall (1992), Beran (1995), Western (1998), Beck ve Katz (2004), Hsiao ve Pesaran (2004) ile devam etmiştir (Çelik, 2008).

Fan ve Zhang (1999), yaptıkları çalışmada hava kirliliğine sebep olan azot dioksit (mg/m^3) kükürt dioksit (mg/m^3) ve toz (mg/m^3) değişkenlerine ait günlük olarak ölçülen verileri kullanmışlardır. Solunum ve dolaşım problemi ile hastaneye başvuran hasta sayısı değişkeninin, kükürt dioksit (mg/m^3), azot dioksit (mg/m^3), toz (mg/m^3) değişkenlerinden hangilerinden etkilendiğini ortaya çıkarmak üzerine yaptıkları çalışmada rastgele katsayılı modelleri kullanmışlardır.

Cai ve Tiwari (2000), çevre üzerine yaptıkları çalışmalarda rastgele katsayılı modelleri kullanmışlardır.

Huang ve diğerleri (2004), HIV virüsü taşıyan hastaların sigara kullanma durumlarını (kullanıyor-kullanmıyor), HIV virüsü geçirdikleri yaşları ve HIV enfeksiyonu öncesi CD4 hücre yüzdelerini değişen zamana göre incelemişlerdir. Hastaların enfeksiyon öncesi ve sonrasındaki CD4 yüzdelerini rastgele katsayılı modeller ile analiz etmişlerdir.

Fan ve Huang (2005), ise rastgele katsayılı modellerin teorik çıkarımları üzerine çalışmışlardır.

Assaf ve Campostrini (2015), çalışmalarında nüfusu yaşlara göre sınıflandırmışlar ve zaman içinde nüfusun sigara içme durumunu, cinsiyet, gelir seviyesi, eğitim seviyesi, medeni hal, çalışma durumu, fiziksel aktivite, alkol tüketimi, psikolojik durum gibi değişkenlerin ne düzeyde etkilendiğini genelleştirilmiş rastgele 30 katsayılı model ile incelemişlerdir.

Kesikli-zaman stokastik durum-uzay modelleri ile ilgili çalışmalar 1960'lı yıllarda başlamıştır. Bu yıllarda hareket etme özelliği olan uzay aracı, güdümlü mermi, uydu gibi hedeflerin konumlarını izlemek ve kontrol etmek için yapılan uygulamalarla geliştirilmiştir. Daha sonra bu modellerin kullanımı artmış ve iktisat, biyoloji, tıp, mühendislik gibi farklı birçok alanda çalışılmaya başlanmıştır. Bu modeller ile yapılmak istenen şey aslında gözlenemeyen durum vektörünü tahmin etmek için gözlenmiş olan verileri kullanmaktır.

Durum-uzay modelleri gözlenemeyen $\underline{x}_t, (t = 0,1,2, \dots)$ ve gözlenebilen $\underline{y}_t, (t = 0,1,2, \dots)$ vektörlerinden oluşan

$$\underline{x}_{t+1} = A_t \underline{x}_t + B_t \underline{u}_t + G_t \underline{w}_t \quad (1.1)$$

$$\underline{y}_t = H_t \underline{x}_t + \underline{v}_t \quad (1.2)$$

şeklinde bir modeldir. $\underline{w}_t \in R^q$ ve $\underline{v}_t \in R^m$ hata terimlerini göstermek üzere, durum-uzay modelinde yer alan hata terimlerine ve başlangıç durumuna ilişkin herhangi bir dağılım varsayımı olmadan sadece beklenen değer ve kovaryans matrislerinin bulunduğu varsayımı altında, durum vektörünün dik iz düşüm yöntemi ile tahmin edilmesi Jazwinski (1970), Davis ve Winter (1985)' de ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Bu durum filtreleme olarak bilinir ve Kalman tarafından (1960) çözüldüğü için Kalman Filtresi olarak adlandırılmıştır (Kalman, 1960). Kalman Filtresi, dinamik sistemlerin durumunu tahmin etmekte kullanılan bir yöntemdir. Tanımı verilen bu durum-uzay modellerinin en önemli sınıflarından biri de dinamik lineer modellerdir. Bu modellerde yer alan A_t (qxq boyutlu), B_t (qxm boyutlu), G_t (qxq boyutlu), H_t (mxq boyutlu) matrisleri zamana bağlı olarak değişmek zorunda değildir. Fakat dinamik lineer modeller bu matrislerin de zamanla değişimine izin vermektedir. Bu matrisler zamana bağlı ise dinamik, değil ise statik model olarak adlandırılır (West and Harrison, 1997).

Wiener ve Kolmogorov'un birbirlerinden habersiz olarak geliştirdikleri kestirim teoremi, sinyal artı gürültü modellerinde yer alan sinyallerin ayrılmasına öncülük eden önemli bir çalışmadır. Bu çalışma filtreleme teorisinin kuramsal temellerini oluşturmuştur. Wiener ve Kolmogorov'un öne sürdüğü bu teoremden yararlanan Kalman ve Bucy yapmış oldukları çalışmalarda durum-uzay modellerini kullanmışlardır (Kalman ve Bucy, 1961). Dinamik lineer sistemlerin kestirimi için akışlı bir filtre düzenlemişlerdir. Kalman, problemi, en uygun filtreyi tasarlamayı olanaklı hale getiren diferansiyel denklemleri kullanarak ifade etmiştir. Elde edilen sonuç, o dönemde kontrol mühendisleri tarafından kimyasal tesislerden roketlere kadar hemen hemen her şeyin kontrol edilmesi için kullanılmış; bu alanda yürütülen çalışmalar genel olarak mühendislik dergilerinde yayınlanmıştır. Young, Kalman denklemlerinin Plackett'ın çalışmasının bir uzantısı olarak elde edilebileceğini göstermiştir. Bu gösterim aynı zamanda, Kalman Filtresi ile en küçük kareler prensibinin eşdeğerliğinin de bir gösterimi olmuştur (Gürkan, 2013).

Özbek (1998), kesikli-zaman stokastik durum-uzay modellerinde durum vektörünün tahmin edilmesi problemini ele almış ve ardışık tahmin yöntemleri ile farklı optimizasyon kriterlerine göre Kalman Filtresinin elde edilmesini anlatmıştır.

Köksal ve Öztürk (2004), Armax modellerinin parametrelerinin indirgemeli en küçük kareler yöntemi ve Kalman Filtresi kullanarak tahminine yönelik bir çalışma yapmışlardır.

Köksal (2009), lineer ve lineer olmayan durum-uzay modellerini ele alıp, kısıtlı durumda Kalman Filtresi ve İlerletilmiş Kalman Filtresinin özelliklerini açıklamış ve yakınsama problemleri üzerine çalışmalar yapmıştır.

Şenol (2006), EEG sinyallerini zaman serisi olarak modelleyip, EEG sinyallerinde zaman içinde meydana gelen değişikliklerin öngörülmesi ve modelin katsayılarının tahmin edilmesi için ardışık tahmin yöntemlerini kullanmıştır.

Bu tez çalışmasında amaç, birçok alanda uygulama alanına sahip olan dinamik lineer modellerin parametrelerini tahmin etme yöntemlerini araştırmak ve bu yöntemleri karşılaştırmaktır.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümünde lineer modeller ve durum-uzay modelleri ile ilgili bilgiler verilmiş, lineer modeller ve dinamik lineer modeller arasındaki fark açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde durum-uzay modellerine istatistikten örnekler verilmiştir. İstatistikte sıkça rastlanılan modeller durum-uzay modeli şeklinde gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde dinamik lineer modeller için parametre tahmin yöntemlerinden olan indirgemeli EKK yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Kalman Filtresi ile tahmin ve Kalman Filtresinin elde edilmesi anlatılmıştır.

Beşinci bölümde basit doğrusal regresyon ve otokorelasyonlu hatalı regresyon modelleri durum-uzay modeli şeklinde gösterilmiş ve simülasyon çalışmaları yapılarak Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemleri ile edilen tahminler karşılaştırılmıştır. ARX ve ARMAX modelleri durum-uzay modeli şeklinde gösterilmiş, simülasyon çalışmaları

yapılmıştır. Parametrelerin gerçek değerleri ve indirgemeli EKK ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminler grafiklerle gösterilmiştir. Son uygulama çalışmasında 25.11.2020-25.12.2021 tarihleri arasında ülkemizdeki Covid-19 verileri kullanılmıştır. Günlük vaka ve ölüm sayılarını tahmin etmek için birinci dereceden AR zaman serisi ve basit doğrusal regresyon modeli göz önüne alınmıştır. Gerçek veri kullanılarak elde edilen her iki model için de günlük vaka ve ölüm sayılarına ilişkin tahminler Kalman Filtresi kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen tahminlere ilişkin grafikler çizdirilmiştir.



2. LİNEER MODELLER ve DURUM-UZAY MODELLERİ

Bu bölümde, dinamik lineer modellere geçmeden önce ilk olarak lineer model kavramı üzerinde durulacaktır. Bu kısım, Akdeniz ve Öztürk (1996) Lineer Modeller kitabından derlenmiştir.

$\underline{Y}$, $n \times 1$ boyutlu gözlemlerin rastgele vektörü, X , $n \times p$ ($n < p$) boyutlu bilinen sayıların matrisi, $\underline{\beta}$, $p \times 1$ boyutlu bilinmeyen parametrelerin vektörü, $\underline{\varepsilon}$, $n \times 1$ boyutlu rastgele hata vektörü olmak üzere,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad (2.1)$$

biçiminde ifade edilen eşitliğe **lineer model** denir (Akdeniz ve Öztürk, 1996). Bu model, $\underline{\varepsilon}$ nun dağılımına, kovaryans matrisine ve X matrisinin rankına bağlı olarak özel hallere sahiptir. Lineer modellerde, $\underline{\varepsilon}$ 'nin dağılımı hakkında üç durum söz konusudur. Bunlar,

Durum 1. Her bir ε_i , 0 ortalamalı ve bilinmeyen σ^2 varyanslı birbirinden bağımsız Normal dağılıma sahiptir. Yani, $\underline{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$ dir.

Durum 2. Her bir ε_i 'nin beklenen değeri sıfır, ε_i 'ler ilişkisiz ve ε_i ' ler bilinmeyen ortak σ^2 varyansına sahiptir. Yani, $\underline{\varepsilon} \sim (0, \sigma^2 I)$ dir.

Durum 3. $Cov(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 R$, R bilinen pozitif tanımlı bir matris

İlk iki varsayım altındaki modeller **Gauss-Markov modelleri** adını alır. İkinci varsayımdaki modellere **en küçük kareler modelleri** de denilmektedir. Eğer, hata terimi Normal dağılıma sahip ise bu tür modellere de **hipotez modelleri** denir.

$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ biçiminde bir lineer model göz önüne alındığında, $X\underline{\beta}$ **modelin deterministik kısmını**, $\underline{Y}$ ve $\underline{\varepsilon}$ da **modelin stokastik kısmını** oluşturur. $\underline{Y}$, ilgilenilen rastgele değişken ile ilgili gözlemlerin bir vektörüdür. Bu vektör, bağımlı değişken, tepki değişkeni veya

açıklanan değişken olarak adlandırılabilir. X matrisi ise, gözlem matrisi, tasarım matrisi gibi isimler alır. $\underline{\varepsilon}$ vektörü ise hata vektörü olarak adlandırılır.

Gerçek dünyada karşılaşılan olayların lineer model olarak modellenmesi sırasında $\underline{Y}$, X , $\underline{\beta}$ ve $\underline{\varepsilon}$ ilgilenilen olaya bağlı olarak farklı şekillerde anlamlandırılabilir. Örneğin, $\underline{Y}$ bazı modellerde üretim miktarı, bazı modellerde boy uzunluğu, bazı modellerde ise bir ekonomi değişkeniyle ilgili gözlem vektörü olarak alınabilir (Akdeniz ve Öztürk, 1996).

2.1 Bir Açıklayıcı Değişkenli Lineer Modeller

Tek açıklayıcı değişkenli bir lineer model genel olarak,

$$Y = g(x) + \varepsilon \quad (2.2)$$

biçiminde verilir. Buradaki $g(x)$ ifadesi parametrelere göre lineer bir ifadedir. Örneğin,

$$g(x) = \beta x$$

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

$$g(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 e^x$$

gibi olabilir. Eğer, $g(x)$ fonksiyonu parametrelere göre lineer değilse **lineer olmayan bir model** söz konusudur. Tez kapsamında lineer olan modeller göz önüne alınacaktır.

Bu modellere örnek olarak, β_0 hızı ile harekete başlayan, ivmesi β olan ve doğrusal bir şekilde hareket eden cismin hızı zamana göre göz önüne alınsın. Buna göre model,

$$V_t = \beta_0 + \beta t \quad (2.3)$$

biçiminde olur. Bu şekilde hareket eden bir cisim için başlangıç hızı ve ivme bilinmek istenebilir. Bu amaçla seçilen belli $t_1, t_2, \dots, t_n$ anlarında $V_1, V_2, \dots, V_n$ gözlemleri alınır. Bu gözlemler için hareketi bozan rüzgar, yol durumu, ve benzeri gibi durumlardan dolayı

$$V_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t, \quad t = t_1, t_2, \dots, t_n \quad (2.4)$$

biçiminde bir model olarak düşünülür. Buna göre,

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} 1 & t_1 \\ 1 & t_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & t_n \end{bmatrix}, \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

gösterimleri altında yukarıda verilen model,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad (2.5)$$

biçiminde bir lineer model olarak verilebilir. Bu modelde $\underline{Y}$ gözlem vektörü olmak üzere, açıklanan ya da bağımlı değişken Y ile, X matrisinin ikinci sütununda bulunan ve hatasız gözlemlendikleri kabul edilen bağımsız değişken x ile ve hata terimi ε ile gösterilirse aralarında oluşan bağıntı,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \quad (2.6)$$

biçimindedir.

Bir başka örnek, belli bir tür elmadan elde edilen meyve suyu miktarı ile elmanın ağırlığı arasındaki ilişki incelenmek istensin. Bir elmada bulunan meyve suyu miktarını bir tek elmanın ağırlığına bağlamak çokta gerçekçi bir yaklaşım olmayacaktır. Fakat, elmanın ağırlığı ile içerdiği meyve suyu miktarı arasında fonksiyonel bir ilişkinin varlığı kabul edilerek gözlemlerin varsayılan ilişkiyi doğrulayıp doğrulamadığı, gözlemlerden yola çıkılarak bir bağıntı yapısının bulunması ve bu şekilde elmanın ağırlığına bağlı olarak içerdiği meyve suyu miktarının "**belirlenmesi**" yani (tahmin edilmesi) düşünebilir. Bu

örnekte açıklayıcı değişken olan elmanın ağırlığı ile açıklanan (bağımlı) değişken olan elmadan elde edilen meyve suyu miktarı birer rastgele değişkendir. Ağırlık X , meyve suyu miktarı Y ile gösterilirse X ile Y 'nin bir ortak dağılımı söz konusu olacaktır.

$$E(Y|X) = x = g(x) \quad (2.7)$$

ifadesi Y 'nin X üzerindeki regresyon denklemidir. X ile Y 'nin ortak dağılımı normal olduğunda,

$$E(Y|X) = x = \beta_0 + \beta_1 x \quad (2.8)$$

biçiminde ifade edilebilir. (X, Y) 'nin dağılımından alınan n birimlik örneklem, $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$ olmak üzere,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n,$$

$\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, ε_t 'ler bağımsız veya

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \underline{X} = \begin{bmatrix} 1 & X_1 \\ 1 & X_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & X_n \end{bmatrix}, \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}, \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

gösterimi altında,

$$\underline{Y} = \underline{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \quad (2.9)$$

modeline **basit lineer regresyon modeli** denir (Akdeniz ve Öztürk, 1996).

X ile Y rastgele değişkenleri arasında ortak bir dağılım olduğu düşünülmeden yalnızca Y bağımlı değişkeni ile ilgili gözlemlere dayalı olarak,

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2.10)$$

biçiminde bir ifade söz konusu olduğunda modele **basit lineer model** denir.

Elmanın ağırlığı X ile elmadan elde edilen meyve suyu miktarı Y 'nin ortak dağılımı Normal dağılım olmayabilir. Amaç, X 'in gözlenen değerine bağlı olarak Y 'nin gözlenen değerini öngörmek olduğunda

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde bir lineer model söz konusu olur. Bu durumda ε hata terimi, birinci örnekteki yol uzunluğunun ölçülmesi sırasındaki hataya benzer bir hatayı içermekle birlikte, X 'in belli bir değeri için Y 'deki rastgeleliği ve ayrıca modelin belirlenmesindeki hatayı da içerir.

Açıklayıcı değişken sayısının birden fazla olduğu lineer modellere **çoklu lineer model**, bağımlı değişken sayısının birden fazla olduğu lineer modellere de **çok değişkenli model** denir.

2.2 Birden Çok Açıklayıcı Değişkenli Lineer Modeller

Birden çok açıklayıcı değişkenli lineer modelleri bir örnek üzerinde açıklayalım. Bir malzemenin imalatında sıcaklık ile basıncın sertlik üzerindeki etkisi incelenmek istendiğinde, imalat sırasındaki sıcaklık ($^{\circ}C$) ve basınç (kg/cm^2) ile ölçülmek üzere sıcaklık (x_1), basınç (x_2) ve sertlik (Y) ile gösterildiğinde,

$$D = \{(x_1, x_2): 500 \leq x_1 \leq 1500, \quad 1000 \leq x_2 \leq 2000\}$$

bölgesinde değerler almak üzere, sertlik üzerinde etkisi,

$$Y(x_1, x_2) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + \varepsilon, \quad E(\varepsilon) = 0$$

gibi bir model ile modellenmiş olsun. β_1 katsayısı sıcaklığın sertlik üzerinde etkisini, β_2 katsayısı basıncın sertlik üzerindeki etkisini ve β_3 katsayısı da ikisinin ortak etkisini anlatmaktadır. Bu etkileri veya kısaca model parametrelerini tahmin etmek için, $(x_{1i}, x_{2i}) \in D, i = 1, 2, \dots, n$ sıcaklık ve basınç değerlerinde imal edilen parçaların sertlikleri $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ ile ölçülüp, gözlemler,

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{11} \cdot x_{12} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{21} \cdot x_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n1} \cdot x_{n2} \end{bmatrix},$$

biçiminde alınsın. $\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$ katsayılar vektörü olmak üzere, söylenilenler

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad (2.11)$$

lineer modeli ile ifade edilir.

Başka bir örnek olarak; belli bir mısır türünün verimi incelenmek istensin. Toprak, verim ve hava ile ilgili birçok tabiat şartı yanında sulama, gübreleme, toprağı işleme gibi bazı etkenlere de bağlıdır. Modelleme sırasında, bazı etkenler ihmal edilerek, verim için toplam yağış miktarı, sıcaklık ortalaması, gübre miktarı, bir metrekaredeki bitki sayısına bağlı olarak,

Y : verim;

X_1 : toplam yağış miktarı (kg/m^2),

X_2 : sıcaklık ortalaması ($^{\circ}C$, bitkinin yetişmesi boyunca her gün bir defa ölçülen sıcaklıkların ortalaması),

X_3 : gübre miktarı (kg/m^2),

X_4 : bir metrekaredeki bitki sayısı

ile gösterilmek üzere,

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + \beta_4 X_4 + \varepsilon$$

gibi bir modelin geçerli olduğu varsayalım. Modeldeki yağış miktarı ve sıcaklık ortalaması ile ilgili açıklayıcı değişkenler birer rastgele değişken, gübre miktarı ile ilgili açıklayıcı değişken bir deterministik değişken olarak görülebilir. Açıklayıcı değişkenlerin birer rastgele değişken olup olmamasına bakılmaksızın açıklayıcı değişkenler ile ilgili X matrisi, gözlem değerlerini içeren bir matris, yani sabitlerin bir matrisi olarak düşünülün. Buna göre n birimlik örneklemden elde edilen X gözlem matrisi,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & x_{n4} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Genel olarak çoklu lineer modeller,

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \quad (2.12)$$

$$\underline{Y} = \beta_1 \underline{X}_1 + \beta_2 \underline{X}_2 + \dots + \beta_p \underline{X}_p + \underline{\varepsilon} \quad (2.13)$$

$$Y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

biçiminde gösterilir ve

$$\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$$

gibi bir lineer model,

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{bmatrix}, \quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix}, \quad \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

olarak yazılır (Akdeniz ve Öztürk 1996).

2.3 Rastgele Katsayılı Modeller

Rastgele katsayılı modeller katsayılarında rastgele olduğu modellerdir. m tane birimin her birinden n tane $Y_{ij} (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ gözlemlerinin alındığı durumda

$$Y_{ij} = \beta_{i1}X_{ij1} + \beta_{i2}X_{ij2} + \dots + \beta_{ip}X_{ijp} + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde bir modelin geçerli olduğu varsayılır ve bu model,

$$Y_{ij} = \underline{X}_{ij}'\underline{\beta}_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

biçiminde de yazılabilir. $\underline{\beta}_i = (\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{ip})'$, $i = 1, 2, \dots, m$ parametre vektörleri olmak üzere, rastgele seçilen m tane birim, m birimlik bir örneklem olarak düşünülür.

$\underline{\beta}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ vektörleri, $\underline{\beta}$ ortalamalı, Δ varyans-kovaryans matrisli bir dağılımdan m birimlik bir örneklem ve ayrıca $\underline{\beta}_i$ 'ler ile ε_{ij} 'ler bağımsız olsun. Kısaca,

1. $E(\varepsilon_{ij}) = 0, Var(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$, ε_{ij} 'ler ($i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$) ilişkisiz, gözlenemeyen rastgele değişkenler,
2. $E(\underline{\beta}_i) = \underline{\beta}, Cov(\underline{\beta}_i) = \Delta$, $\underline{\beta}_i$ 'ler ($i = 1, 2, \dots, m$) bağımsız rastgele değişken vektörü,
3. $\underline{\beta}_i$ 'ler ile ε_{ij} 'ler ($i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$) bağımsız,
4. $\underline{X}_{ij}$: $p \times 1$ vektörü p tane açıklayıcı değişkenin, rastgele seçilmiş olan i .birimi üzerinde j . gözlem vektörü,

$$X_i = \begin{bmatrix} x_{i11} & x_{i12} & \cdots & x_{i1p} \\ x_{i21} & x_{i22} & \cdots & x_{i2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{in1} & x_{in2} & \cdots & x_{inp} \end{bmatrix}_{n \times p}$$

matrisi i .birim ile ilgili açıklayıcı değişkenlerin matrisi (sabitlerin matrisi),

5. Y_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$ $j = 1, 2, \dots, n$, i .birim üzerinde j . gözlemi gösteren bir rastgele değişken ve

$$\underline{Y}_i = \begin{bmatrix} Y_{i1} \\ Y_{i2} \\ \vdots \\ Y_{in} \end{bmatrix}$$

i .birim üzerinde gözlemlerin rastgele vektörü olmak üzere;

$$\underline{Y}_i = X_i \underline{\beta}_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2.15)$$

modeline ***rastgele katsayılı lineer model*** denir. Bu modelde rastgele vektörler olan $\underline{\beta}_i$ 'ler kendi ortalamaları cinsinden,

$$\underline{\beta}_i = \underline{\beta} + \underline{\delta}_i, i = 1, 2, \dots, m$$

olarak yazılıp modelde yerine koyulursa,

$$\underline{Y}_i = X_i \underline{\beta}_i + X_i \underline{\delta}_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, m$$

yazılır. Bu modelde $X_i \underline{\beta}_i$ modelin deterministik kısmını $X_i \underline{\delta}_i + \varepsilon_i$ de modelin stokastik kısmını oluşturmaktadır. $i = 1, 2, \dots, m$ için $\underline{\delta}_i$ 'ler bağımsız $Cov(\underline{\delta}_i) = \Delta$ ve $\underline{\delta}_i$ 'ler ile ε_i 'ler bağımsızdır.

$$E(\underline{Y}_i) = X_i \underline{\beta}, Cov(\underline{Y}_i) = X_i \Delta X_i' + \sigma^2 I_n$$

olmak üzere modelde amaç $\underline{\beta}_i$ ***rastgele katsayılarının*** ortalaması olan $\underline{\beta}$ vektörünü tahmin etmek olabilir.

m tane vektör alt alta yazılıp bir sütun vektörü olarak ele alınırsa ***rastgele katsayılı*** bir model genel olarak

$$\begin{bmatrix} \underline{Y}_1 \\ \underline{Y}_2 \\ \vdots \\ \underline{Y}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} \underline{\beta} + \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\delta}_1 \\ \underline{\delta}_2 \\ \vdots \\ \underline{\delta}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_1 \\ \underline{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \underline{\varepsilon}_m \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Modelin stokastik kısmında yer alan ve gözlenemeyen rastgele vektörler ile ilgili bazı dağılım varsayımları yapılabilir.

Uygulamalarda çok çeşitli durumlar ***rastgele katsayılı lineer model*** ile modellenmektedir. Örneğin bir insan grubundan rastgele kişiler ($i = 1, 2, \dots, m$) seçilsin. Seçilen kişilerin günlük harcamalarından elde edilen gözlemler de Y_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n$) olsun. Bu durumda günlük harcama Y , gelir (X_1), kişinin bakmakla yükümlü olduğu birey sayısı (X_2), oturduğu yer (X_3) gibi açıklayıcı değişkenlerin bir lineer fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Bu lineer ifadede bulunan katsayılar kişiden kişiye değişebilir. Bu değişkenlik ***rastgele katsayılı*** bir model ile modellenebilir (Akdeniz ve Öztürk, 1996).

2.4 Lineer Model ile Dinamik Lineer Model Arasındaki Temel Fark

$\underline{y}_t, \underline{y}_{t-1}, \dots, \underline{y}_1$ ile ilgilenilen değişkenin $t, t-1, \dots, 1$ zamanlarında alınmış gözlemleri gösterilsin. $\underline{y}_t$ 'nin gözlenemeyen $\underline{\beta}_t$ değişkenine bağımlı olduğu varsaylsın. Amaç, $\underline{\beta}_t$ hakkında sonuç çıkarımı yapmak olsun. $\underline{\beta}_t$, vektörde olabilir skalar bir büyüklükte olabilir ve boyutu $\underline{y}_t$ 'nin boyutundan bağımsızdır. $\underline{y}_t$ ile $\underline{\beta}_t$ arasındaki ilişkinin lineer olduğu varsayılırsa $\underline{y}_t$;

$$\underline{y}_t = H_t \underline{\beta}_t + v_t$$

biçiminde ifade edilir ve gözlem denklemi olarak adlandırılır. Burada H_t 'nin bilindiği ve v_t gözlem hatasının sıfır ortalamalı R_t bilinen varyanslı Normal dağılım olduğu varsayılabilir. Yani,

$$v_t \sim N(0, R_t)$$

dir. Dinamik lineer model ile bilinen (klasik) lineer model gösterimi arasındaki **temel fark burada ortaya çıkar**. Burada, durum sabit olarak varsayılmaz, zamanla değişebilir. Bu dinamik yapı sistem denklemi ile ifade edilebilir. Buna göre $\underline{\beta}_t$,

$$\underline{\beta}_t = A_t \underline{\beta}_{t-1} + \underline{w}_t$$

biçiminde yazılabilir. Burada, A_t bilinen matris ve sistem denklemi hatası $\underline{w}_t \sim N(0, Q_t)$, (Q_t biliniyor) biçiminde alınır. Bu gösterimde, H_t ve A_t matrisleri de zamanla değişiyor olabilir ya da olmayabilir. Bunlara ek olarak v_t ve w_t hata terimleri birbirinden bağımsızdır.

2.5 Kesikli Zaman Stokastik Durum-Uzay Modelleri

Durum-uzay modelleri, bir sistemle ilgili olarak, durumu gösteren ancak gerçekte gözlenemeyen $\{\underline{x}_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik süreciyle ilgili bir durum eşitliği ile gözlenebilen $\{\underline{y}_t, t = 0, 1, 2, \dots\}$ stokastik süreciyle ilgili bir gözlem (ölçüm) eşitliğinin meydana gelen

$$\underline{x}_{t+1} = A_t \underline{x}_t + B_t \underline{u}_t + G_t \underline{w}_t \quad (2.16)$$

$$\underline{y}_t = H_t \underline{x}_t + v_t \quad (2.17)$$

biçiminde modellerdir. Burada, $\underline{x}_t \in R^q$, sistem durum vektörünü, $\underline{y}_t \in R^m$, sistem gözlem vektörünü göstermektedir. A_t , qxq boyutlu sistem geçiş matrisi ve H_t , mxq , boyutlu gözlem matrisini ifade etmektedir. B_t , qxm ve G_t , qxq boyutlu matrislerdir. Bu matrisler zamana bağlı olarak değiştiğinde modele **dinamik** model, zamana bağlı olarak değişmediğinde ise **statik** model denir. Burada **dinamik** olarak bahsedilen model bir önceki kısımda ifade edilen **rastgele katsayılı** modele denk gelmektedir.

$\underline{w}_t \in R^q$ ve $\underline{v}_t \in R^m$ sıfır ortalamalı hata vektörlerini (beyaz gürültü süreçlerini) göstermektedir. $\underline{x}_t \in R^q$ sistem durum vektörü, $\underline{y}_t \in R^m$ sistem gözlem vektörü, $\underline{u}_t \in R^p$ sistem kontrol vektörü olmak üzere model varsayımları,

$$E(\underline{x}_0) = \underline{x}_0$$

$$E(\underline{w}_n) = \underline{0}$$

$$E(\underline{v}_n) = \underline{0}$$

$$Cov(\underline{x}_0) = E[(\underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0)(\underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0)'] = P_0$$

$$E(\underline{w}_t \underline{w}_j') = \begin{cases} Q_t, & t = j \\ 0, & t \neq j \end{cases}$$

$$Cov(\underline{v}_t \underline{v}_j') = \begin{cases} R_t, & t = j \\ 0, & t \neq j \end{cases}$$

$$E(\underline{w}_j \underline{v}_t') = 0$$

$$E(\underline{x}_0 \underline{w}_t') = 0$$

$$E(\underline{x}_0 \underline{v}_t') = 0$$

biçimindedir. Ayrıca tüm $t = 0, 1, 2, \dots$ anlarında A_t, B_t, G_t, Q_t ve R_t matrislerinin bilindiği varsayılır (Davis and Winter, 1985).

3. İSTATİSTİK MODELLERİN DURUM-UZAY MODELİ GÖSTERİMİ

3.1 Rastgele Yürüyüş Süreci

Lineer stokastik durum-uzay modellerine verilebilecek en basit örnek ***rastgele yürüyüş süreci***dir. Rastgele yürüyüş süreci fizikte, biyolojide, ekonomide, psikolojide ve diğer alanlarda yaygın olarak kullanıma sahip olan bir modeldir. Bir molekülün herhangi bir sıvı ya da gaz içinde izlediği yol, bir hayvanın yiyecek bulmak için takip ettiği yol, bir hisse senedinin bir dönem içerisindeki fiyat hareketleri, kumar oynayan bir kişinin kumardaki parasının miktarındaki değişim rastgele yürüyüş süreci olarak modellenabilir. Durum vektörü

$$x_t = x_{t-1} + w_{t-1} \quad (3.1)$$

biçiminde tanımlanmak üzere burada w_{t-1} 'ler, $t = 1, 2, \dots$ için birbiriyle ilişkisiz 0 ortalamalı ve varyansı $Var(w_t) = Q_t$ olan rastgele değişkenlerdir. (3.1) ile verilen x_t sürecine ***rastgele yürüyüş modeli*** denir (Petrakis and et. al., 2009).

Burada x süreci ile ilgili lineer durum-uzay modeli yazılmak istendiğinde, x iki bileşenden biri olan durum eşitliği olarak ifade edilebilir. Diğer bileşen, gözlem eşitliği olan z_t 'dir ve durum eşitliğinin gürültü eklenmiş hali,

$$z_t = x_t + v_t \quad (3.2)$$

biçiminde bir model olarak düşünülebilir. Burada, v_t hata terimidir ve v_t 'ler için (3.1) modelinde verilen w_t ile aynı özellikler tanımlanabilir. Yani birbirleriyle ilişkisiz sıfır ortalamalı ve varyansı $Var(v_t) = R_t$ olan rastgele değişkenlerdir. Bununla birlikte, w_t ve v_t süreçlerinin birbiriyle ilişkisiz olduğu varsayılır.

w_t ve v_t gürültü süreçlerinin

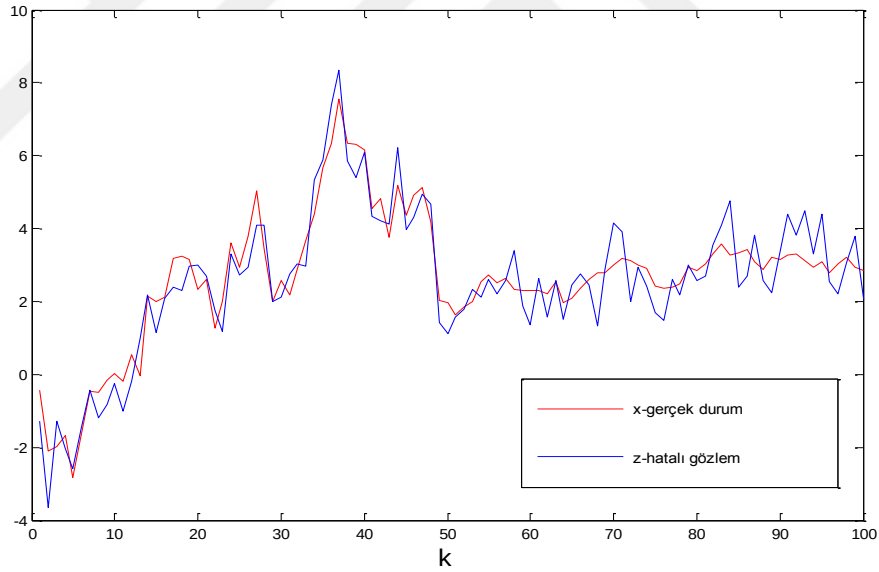
✓ ortalamaları 0'dır yani $E[w_t] = 0$

- ✓ ilişkisizdir yani $\text{Corr}[w_k, w_j] = 0$
- ✓ $\text{Var}[w_t] = Q_t, \text{Var}[v_t] = R_t$

özelliklerini sağladığı varsayılır. Örneğin, durum varyansı

$$Q_t = \begin{cases} 1, & t = 1, \dots, 50 \\ 0.1, & t = 51, 52, \dots, 100 \end{cases}$$

gözlem varyansı $R_t = 0.5$ ve başlangıç durumu $x_0 = 0$ olan bir rastgele yürüyüş süreci göz önüne alınsın. Durum ve gözlem vektörlerinin bir gerçekleşmesi için simülasyon programı yazılmış ve aşağıdaki gibi bir grafik gözlenmiştir. $Q_t = 0$ olduğunda $x_t = x_{t-1}$ olur ve x_t 'daki dalgalanma o kadar azalır. Burada, x_t 'ler gerçek gözlemken z_t 'ler onun hatalı birer gözlemidir.



Şekil 3.1 Rastgele yürüyüş modelinin bir gerçekleşmesi

3.2 Dinamik Regresyon Modeli

Geleneksel basit doğrusal regresyon modeli y_t bağımlı değişken ve x_t bağımsız değişken olmak üzere,

$$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (3.3)$$

biçiminde verilir. Burada α ve β katsayıları bilinmeyen parametreler, $e_t \sim N(0, \sigma^2)$ dağılımına sahip birbirinden bağımsız rastgele hatalardır. Model matris formunda,

$$y_t = [1 \quad x_t] \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + e_t$$

biçiminde yazılabilir. $X_t = [1 \quad x_t]$ ve $\underline{\beta} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ olarak alındığında model,

$$y_t = X_t \underline{\beta} + e_t$$

ile ifade edilir. Dinamik basit doğrusal regresyon modelinde ise parametrelerin de zaman içinde değişimi söz konusudur. Buna göre model,

$$y_t = X_t \underline{\beta}_t + e_t \quad (3.4)$$

biçiminde yazılır. t indisi ile parametrenin de zamanla değişimi ifade edilir. Buna göre parametrelerin değişimi için,

$$\underline{\beta}_t = A_t \underline{\beta}_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, Q)$$

biçiminde bir ifade yazılabilir. Uygulamalarda genellikle A_t matrisi sabit olarak alınır. Buna göre,

$$\underline{\beta}_t = A \underline{\beta}_{t-1} + w_t$$

olur. Veya A_t matrisi parametre boyutuna uygun olarak $p \times p$ boyutlu birim matris olarak alınır. Yani,

$$\underline{\beta}_t = I_p \underline{\beta}_{t-1} + w_t$$

$$\underline{\beta}_t = \underline{\beta}_{t-1} + w_t$$

biçiminde olur. Bu durumda parametreler yukarıda verilen basit rastgele yürüyüş süreci olarak modellenmiş olur. Buna göre basit dinamik lineer regresyon modeli durum-uzay modeli şeklinde yazılabilir. Ölçüm ya da gözlem denklemi

$$y_t = X_t \underline{\beta}_t + e_t \quad (3.5)$$

biçiminde, durum denklemi ise

$$\underline{\beta}_t = \underline{\beta}_{t-1} + w_t \quad (3.6)$$

biçiminde olur.

3.2.1 Hataları Otokorelasyonlu Regresyon Modelleri

Regresyon analizi göz önüne alındığında en küçük kareler yöntemi ile elde edilen tahminlerin güvenilir olması için bir takım varsayımların sağlanması gerekir. Bu varsayımlardan biri v_t hata terimlerinin birbirleriyle ilişkisiz olduğudur. Güven aralıklarının oluşturulması ve hipotez testlerinin yapılması için genellikle Normallik varsayımı da eklenerek v_t hata terimleri bağımsız ve Normal dağılıma sahip bir rastgele değişken olarak varsayılır. Oysa, gerçek dünya da karşılaşılan bazı durumlarda bu varsayım bozulabilir. Bu varsayımın bozulması genellikle regresyonun zaman serisi verilerine uygulanmasında ortaya çıkar. Bu tür verilerde model hataları zamana bağlı olduğundan genelde birbiriyle ilişkilidir. Yani, **otokorelasyonlu** yapıda olabilirler. Bir hava istasyonunda günlük toplanan hava verileri, gayri safi milli hasıla veya işsizlik gibi ekonomik değişkenlerin aylık gözlemleri bu tür verilere örnek olarak verilebilir.

Zamana bağımlı hataların modelleri genellikle doğrusaldır. Bağımsız olmayan hatalar *ilişkili* olarak adlandırılır. Bu şekilde zamana bağlı hataların **otokorelasyonlu** veya **ardışık bağımlı** olduğu söylenir. Otokorelasyon iki değişken arasındaki ilişkiyle değil aynı değişkenin ardışık değerleri arasındaki ilişkiyle ilgilenir (Aydın, 2014). Hatalarda otokorelasyon olması sıradan en küçük kareler regresyonu üzerinde birkaç etkiye sahiptir. Birincisi, parametreler için yapılan anlamlılık testleri ile elde edilen tahminlerin güven aralıkları doğru değildir. İkincisi, regresyon katsayılarına ilişkin tahminler etkin değildir. Üçüncüsü ardışık bağımlı olan model hatalarına ilişkin model tahminlerinin geliştirilmesinde ilave bilgiler sağlayabileceğini gösterir.

Genel olarak hatalar arasındaki ilişki,

$$e_t = ae_{t-1} + \varepsilon_{t-1}, \quad -1 < a < 1$$

biçiminde otoregresif süreç (AR(1)) ile belirtilir. Otokorelasyon probleminin üstesinden gelebilmek için üç yaklaşım söz konusudur. Birincisi, eğer otokorelasyon modele alınmayan değişkenlerden dolayı ortaya çıkmışsa o açıklayıcı değişken tanımlanarak modele eklenebilir. Eğer otokorelasyon problemi atılan değişken ya da değişkenler modele dahil edildiğinde çözülüyor ise o zaman özel olarak otokorelasyon yapısını ilişkilendiren bir modele dönülmesi gerekir. Son olarak, otokorelasyonun yeterli yapısı varsa ağırlıklı veya genelleştirilmiş en küçük kareler kullanılabilir.

Hataların birbirleriyle ilişkili olarak tanımlandığı regresyon modelinde bir çözüm yöntemi olarak modelin durum-uzay modeli şeklinde gösterimi ve Kalman Filtresi ile tahmini düşünülebilir. Bu durumda, durum vektörüne bir satır daha eklenerek otokorelasyon yapısı modele dahil edilir ve model durum-uzay modeli formunda yazılabilir. Buna göre durum denklemi,

$$\begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ e_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ e_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

biçiminde ele alınabilir. Gözlem denklemi ise,

$$y_t = (1 \quad x_t \quad 1) \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ e_t \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

biçiminde ifade edilir (Bolviken and et all., 1998).

3.3 Zaman Serisi Modelleri

Zaman serisi, ilgilenilen bir büyüklüğün zaman içerisinde gözlenen değerlerinin sıralanmış bir kümesidir. Genel olarak zaman serileri, n gözlem sayısı olmak üzere z_t , $t = 1, \dots, n$ şeklinde ifade edilir. Bu ifadeye göre t -inci gözlenen veri z_t ile gösterilir (Wei 1990, Akdi 2012).

Eğer zaman serileri kesin bir şekilde tahmin edilebiliyorsa “**deterministik zaman serileri**” olarak adlandırılır (Kaya, 1999). Fakat, olasılık teorisinde zaman serileri sonlu bir rastgele değişkenler kümesi olup $\{x_t: t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ stokastik sürecinden üretilir. Bu şekilde elde edilen zaman serilerine “**stokastik zaman serileri**” denir (Wei 1990, Kasap 1998, Akdi 2012,). Zaman serisine ilişkin veriler zaman içindeki belirli aralıklardan elde ediliyorsa bu serilere “**kesikli zaman serileri**”, zamanın bütün noktalarının ölçülmesiyle elde ediliyor ise “**sürekli zaman serileri**” denir (Ünsal, 2010).

Zaman serisi modelleri durum- uzay modeli şeklinde yazılabilir. Zaman serilerinin durum uzay modeli oluşturması için X_t ya da Y_t 'nin durağan olması gerekli değildir. Aşağıda bazı özel zaman serisi modellerinin durum-uzay modeli şeklinde gösterimi verilmiştir.

3.3.1 Hareketli Ortalama Serilerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi

Zaman serisindeki gecikmeli hata teriminin, şimdiki hata terimini etkilediği süreçler hareketli ortalama süreci olarak tanımlanır. Bir hareketli ortalama sürecinde değişkenin tahmin değeri hata terimlerinin tahmin değerleri ile ilgilidir. MA modelleri, modelin içerdiği geçmiş dönem hata terimi sayısına göre adlandırılır. q dereceye sahip bir hareketli ortalama sürecinde her Y_t gözlem değeri, q periyot geriye giden rastgele hataların ağırlıklı ortalaması olarak üretilir.

$e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ hata terimleri, $b_q \neq 0$ ve q sonlu değerli bir doğal sayı olmak üzere μ serinin beklenen değeridir ve buna göre q -uncu dereceden hareketli ortalama bir zaman serisi,

$$y_t - \mu = e_t + \sum_{i=1}^q b_i e_{t-i} \quad (3.9)$$

şeklinde verilir ve $y_t \sim MA(q)$ şeklinde gösterilir.

MA (1) süreci

$$y_t = e_t + b_1 e_{t-1}$$

ile tanımlanmak üzere,

$$y_t = H_t x_t + w_t$$

$$x_t = F_t x_{t-1} + v_t, \quad t = 1, 2, 3 \dots$$

ile durum uzay modeli gösterimi için,

$$H_t = (1 \quad 0), \quad F_t = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{x}_t = \begin{pmatrix} y_t \\ e_t \end{pmatrix}, \quad G_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alınarak MA(1) süreci ,

$$\underline{x}_t = \begin{pmatrix} y_t \\ e_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_t \quad (3.10)$$

$$y_t = (1 \quad 0) \underline{x}_t \quad (3.11)$$

biçiminde durum-uzay modeli olarak yazılır.

3.3.2 Otoregresif Zaman Serilerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi

Otoregresif modellerde, zaman serisinin şimdiki değeri, sürece ait geçmiş gözlem değerleri ile hata teriminin sonlu lineer toplamı olarak ifade edilir. Başka bir ifadeyle AR modellerinde, bağımlı değişken geçmişteki değerinin bir fonksiyondur.

$e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ hata terimleri, $a_p \neq 0$ ve p sonlu değerli bir doğal sayı olmak üzere, μ serinin beklenen değerini gösterir ve p -inci dereceden otoregresif bir zaman serisi,

$$y_t - \mu = \sum_{i=1}^p a_i (y_{t-i} - \mu) + e_t \quad (3.12)$$

biçiminde verilir ve $y_t \sim AR(p)$ şeklinde gösterilir.

AR(2) zaman serisi modeli için durum- uzay gösterimi yapılmak istensin. AR(2) modeli

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + e_t$$

biçiminde yazılmak üzere

$$H_t = (1 \ 0), F_t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \underline{x}_t = \begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-1} \end{pmatrix}, G_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alınarak durum uzay modeli

$$\underline{x}_t = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_t \quad (3.13)$$

$$y_t = (1 \ 0) \underline{x}_t \quad (3.14)$$

olarak elde edilir.

3.3.3 Otoregresif Hareketli Zaman Serilerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi

Arma modellerinde bir zaman serisinin herhangi bir dönemine ait değeri, belli sayıda gözlemin daha önceki değerlerinin ve hata terimlerinin bir bileşimi olarak ifade edilir. Bu modeller hem hareketli ortalama sürecinin (MA) ve hem de otoregresif sürecin (AR) özelliklerini taşır.

$e_t \sim WN(0, \sigma^2)$ hata terimleri, $a_p \neq 0$ ve $b_q \neq 0$ ve p ile q sonlu değerli doğal sayılar olmak üzere, μ serinin beklenen değeridir ve dereceleri p ve q olan bir $ARMA(p, q)$ zaman serisi

$$y_t - \mu = \sum_{i=1}^p a_i (y_{t-i} - \mu) + e_t + \sum_{i=1}^q b_i e_{t-i} \quad (3.15)$$

biçiminde yazılır ve $y_t \sim ARMA(p, q)$ şeklinde gösterilir. $ARMA(1,1)$ modelinin durum uzay gösterimi göz önüne alınsın. $ARMA(1,1)$ modeli

$$y_t = a y_{t-1} + e_t + b e_{t-1}$$

biçiminde yazılır. Buna göre,

$$H_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, F_t = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \underline{x}_t = \begin{pmatrix} y_t \\ e_t \end{pmatrix}, G_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alınarak $ARMA(1,1)$ zaman serisi modeli için durum- uzay modeli

$$\underline{x}_t = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}_{t-1} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e_t \quad (3.16)$$

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}_t \quad (3.17)$$

şeklinde yazılır.

Zaman serilerinin, zaman içinde serinin beklenen değeri etrafında dalgalanmasına veya belli bir değere yaklaşmasına **durağanlık** denir. Eğer bir zaman serisi zaman boyunca değişmeyen ve sabit kalan ortalamaya, varyansa ve kovaryansa sahipse bu zaman serisinin durağan olduğu söylenebilir. Kullanılan zaman serisinin durağan özellikler göstermesi, değişkenler arasındaki ilişkinin anlamlı olabilmesi açısından çok önemlidir. Eğer zaman serisi durağan değilse değişkenler arasında anlamlı ilişkiler olmamasına rağmen aralarında ilişki varmış gibi görünebilir. Bu yüzden durağan olmayan zaman serileri yapılan analizlerde t ve F testleri ile R^2 değeri yanıltıcı sonuçlar verir. Bu nedenle zaman serileri analizinde serinin durağan olması zorunlu bir koşuldur. Ama dinamik lineer modellerde böyle bir zorunluluk yoktur. Dinamik lineer modellerin zaman serilerine göre en güçlü ve önemli yönlerinden biri de budur.

3.3.4 ARX ve ARMAX Modellerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi

Bir sistemin çıktısı, zaman parametresi $t, (t = 0,1,2,3, \dots)$ ' ye bağlı bir y_t rastgele değişkeni ve kontrol terimi de olabilen sistem girdisi, bilinen bir u_t niceliği olmak üzere,

$$y_t + a_1y_{t-1} + a_2y_{t-2} + \dots + a_ny_{t-n} = b_1u_{t-1} + b_2u_{t-2} + \dots + b_nu_{t-n} + c_0e_t + c_1e_{t-1} + \dots + c_ne_{t-n} \quad (3.18)$$

gibi bir modele **ARMAX (Autoregressive moving average exogenous input) modeli** denir (Durbin and Koopman, 2003). e_t hata terimi, beyaz gürültü süreci olmak üzere, gösterimdeki X harfi sisteme giren dışsal bir değişkenin varlığını ifade eder. ARMAX modellerinin, ARMA modellerine sistem girdisinin n adım gecikmeli etkilerinin eklenmesi ile ortaya çıktığı düşünülebilir. Burada tüm gecikme parametreleri (dereceleri) aynı ve n olarak gösterilmiştir. Gecikme parametrelerinin farklı olmasını sağlamak için bazı katsayılar sıfır olarak alınabilir (Köksal ve Öztürk, 2004).

$$y_t + a_1y_{t-1} + a_2y_{t-2} + \dots + a_ny_{t-p} = b_1u_{t-1} + b_2u_{t-2} + \dots + b_nu_{t-n} + e_t \quad (3.19)$$

gibi bir modele **ARX (Autoregressive exogenous input)** modeli denir. Bu modelin, bir $AR(p)$ zaman serisi modeline sistem girdisinin n adım gecikmeli etkilerinin eklenmesi ile ortaya çıktığı düşünülebilir.

$n = 0, 1, 2, \dots$ için, $B, B^n y_t = y_{t-n}$ biçiminde tanımlanan gerileme operatörü olarak alınmak üzere,

$$\Phi(B) = B^0 + a_1 B^1 + a_2 B^2 + \dots + a_n B^n$$

$$\Psi(B) = b_1 B^1 + b_2 B^2 + \dots + b_n B^n$$

$$C(B) = c_0 B^0 + c_1 B^1 + c_2 B^2 + \dots + c_n B^n$$

biçiminde tanımlandığında yukarıda verilen ARMAX modeli B operatörü yardımıyla kısaca,

$$\Phi(B)y_t = \Psi(B)u_t + C(B)e_t$$

biçiminde yazılabilir. $C(B)$ nin bilinmesi durumunda bu ARMAX modeli biçimsel olarak,

$$\frac{\Phi(B)}{C(B)} y_t = \frac{\Psi(B)}{C(B)} u_t + e_t$$

gibi bir ARX modeline dönüşür.

p ve q gecikme parametreleri bilinen bir ARX modeli,

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \dots + a_p y_{t-p} + b_1 u_{t-1} + b_2 u_{t-2} + \dots + b_q u_{t-q} + e_t \quad (3.20)$$

biçiminde olmak üzere, hata teriminin bir beyaz gürültü süreci oluşturduğu ve modeldeki diğer değişkenlerden bağımsız olduğu varsayılın.

$t < 0$ için $Y_t = 0$ ve $u_t = 0$ olmak üzere,

$$\underline{Y}^t = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \end{bmatrix}, \quad \underline{e}^t = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_t \end{bmatrix}, \quad \underline{\theta} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_p \quad b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_q]$$

$$X_t = \begin{bmatrix} y_0 & y_{-1} & \dots & y_{1-p} & u_0 & u_1 & \dots & u_{1-q} \\ y_1 & y_0 & \dots & y_{2-p} & u_1 & u_0 & \dots & u_{2-q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{t-1} & y_{t-2} & \dots & y_{t-p} & u_{t-1} & u_{t-2} & \dots & u_{t-q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}'_1 \\ \underline{x}'_2 \\ \vdots \\ \underline{x}'_t \end{bmatrix}$$

gösterimleri altında X_t , t satır $p + q$ sütundan oluşan bir matris olmak üzere gözlemler,

$$\underline{Y}^t = X_t \underline{\theta} + \underline{e}^t$$

lineer modeli olarak ifade edilebilir. $\underline{Y}^t$ gösteriminde üstte bulunan t , baştan alınan gözlem sayısını ifade etmektedir.

4. DİNAMİK LİNEER MODELLERDE TAHMİN

$y_1, y_2, \dots, y_t, \dots$ gözlemleri ardışık olarak alınsın.

$\underline{Y}^t = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \end{bmatrix}$ gözlemine dayalı en iyi (gözlemlerin lineer fonksiyonu $\sum_{i=1}^t a_i y_i$ şeklinde

olacak ve $E(X - \sum_{i=1}^t a_i y_i)^2$ beklenen değerini en küçük yapacak) kestirici $\hat{X}_t$ olsun.

Buna göre,

$$\hat{X}_t = P_{L(Y^t)} X$$

dır. Burada, $P_{L(Y^t)} X$ ile X 'in Y^t üzerine dik izdüşümü gösterilir. y_{t+1} gözlemi geldiğinde $\hat{X}_{t+1}$ iki yoldan hesaplanabilir.

✓ Birincisi, X ' in $y_1, y_2, \dots, y_{t+1}$ üzerine dik izdüşümü ile hesaplanabilir. Bu durumda,

$$\hat{X}_{t+1} = P_{L(y_1, y_2, \dots, y_{t+1})} X$$

olarak hesaplanır. Bu yöntemde tüm geçmiş gözlemlerin kaydının mevcut olması ve her adımda $(Cov(\underline{Y}^{t+1})^{-1})$ hesaplanması gerekir.

✓ İkincisi, $\hat{X}_t$ ve y_{t+1} kullanılarak hesaplama yapılabilir. Bu durumda,

$$\hat{X}_{t+1} = f(\hat{X}_t, y_{t+1})$$

olup buna **indirgemeli kestirim** denir. Ayrıca,

$$\hat{X}_{t+1} = a_t \hat{X}_t + b_t y_{t+1}$$

biçiminde olduğunda **lineer indirgemeli kestirim** söz konusudur. Genel olarak bu şekilde hesaplama mümkün olmamakla birlikte $X, y_1, y_2, \dots, y_t, \dots$ rastgele değişkenleri arasındaki bağıntı yapısının bazı durumları için mümkün olmaktadır.

4.1 İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi

$$\underline{Y}^t = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \end{bmatrix} (t \times 1 \text{ boyutlu}), X_t = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_t' \end{bmatrix} (t \times p \text{ boyutlu}) \text{ ve } \underline{e}^t = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_t \end{bmatrix} (t \times p \text{ boyutlu})$$

olmak üzere,

$$\underline{Y}^t = X_t \underline{\theta} + \underline{e}^t$$

lineer modeli göz önüne alınsın. $\underline{\theta}$ (p boyutlu) parametre vektörünün en küçük kareler tahmin edicisi,

$$\min_{\underline{\theta}} \|\underline{Y}^t - X_t \underline{\theta}\|^2 = \min_{\underline{\theta}} \sum_{j=1}^t (Y_j - \underline{\theta}' \underline{x}_j)^2$$

optimizasyon probleminin çözümü olup,

$$\hat{\underline{\theta}}_t = (X_t' X_t)^{-1} X_t' \underline{Y}^t$$

dır. Bu tahmin edici için,

$$\hat{\underline{\theta}}_t = (X_t' X_t)^{-1} X_t' \underline{Y}^t$$

$$= (X_{t-1}' X_{t-1} + \underline{x}_t \underline{x}_t')^{-1} (X_{t-1}' \underline{Y}^{t-1} + X_t' Y_t)$$

olup, $P_t = (X_t' X_t)^{-1}$ gösterimi altında,

$$P_t = (P_{t-1} + \underline{x}_t \underline{x}_t')^{-1} = P_{t-1} - (1 + \underline{x}_t' P_{t-1} \underline{x}_t)^{-1} P_{t-1} \underline{x}_t \underline{x}_t' P_{t-1}$$

olmak üzere,

$$\hat{\underline{\theta}}_t = \hat{\underline{\theta}}_{t-1} + (1 + \underline{x}_t' P_{t-1} \underline{x}_t)^{-1} P_{t-1} \underline{x}_t (y_t - \underline{x}_t' \hat{\underline{\theta}}_{t-1})$$

indirgeme bağıntısı yazılabilir. Bir $P_0 = (X_0' X_0)^{-1}$ başlangıç matrisi ve $\hat{\underline{\theta}}_0$ başlangıç tahmin değeri ile başlayıp, gözlemler geldikçe,

$$\hat{\underline{\theta}}_t = \hat{\underline{\theta}}_{t-1} + K_t (Y_t - \underline{x}_t' \hat{\underline{\theta}}_{t-1})$$

$$K_t = (1 + \underline{x}_t' P_{t-1} \underline{x}_t)^{-1} P_{t-1} \underline{x}_t$$

$$P_t = P_{t-1} - (1 + \underline{x}_t' P_{t-1} \underline{x}_t)^{-1} P_{t-1} \underline{x}_t \underline{x}_t' P_{t-1}$$

algoritması ile **indirgemeli en küçük kareler tahminleri** ardışık olarak elde edilebilir (Davis and Winter, 1985).

Başka bir indirgemeli tahmin algoritması,

$$\underline{Y}^t = X_t \underline{\theta} + \underline{e}^t$$

lineer modelindeki parametre vektörünün bir durum vektörü olarak alınması ve

$$\underline{\theta}_{t+1} = \underline{\theta}_t + \underline{\xi}_t$$

$$\underline{Y}^t = X_t \underline{\theta}_t + \underline{e}^t$$

biçiminde lineer kesikli-zaman durum-uzay modeli halinde yazılması ile elde edilir. Bu kesikli durum-uzay modelinde Kalman Filtresi işletilerek tahminler elde edilebilir. $\underline{\xi}_t$ hata

vektörü sıfır ortalamalı, $Cov(\underline{\xi}_t) = Q_t$ kovaryans matrisli ve modeldeki diğer değişkenlerden bağımsız varsayılabilir ve $R_t = Cov(\underline{e}^t)$ olarak alınabilir.

4.2 Kalman Filtresi ile Tahmin

Bir önceki bölümde anlatılan durum-uzay modellerinde esas problem, $\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{n-1}, \underline{y}_n$ gözlemleri kullanılarak gözlenemeyen $\underline{x}_n$ durum vektörünün tahmin edilmesidir. Bu problem filtreleme olarak bilinir (Jazwinski, 1970). Bir önceki kısımda da ifade edildiği gibi, indirgemeli yani ardışık tahmin sadece t zamanındaki gözlenen y_t değerine ve $t - 1$ zamanında elde edilen x_{t-1} tahminine bağlı olarak t zamanındaki x_t durumu için en iyi tahmin değerini elde etme problemidir. Bu problemi, Kalman 1960 yılında dik iz düşün yöntemini kullanarak çözmüştür. Literatürde bu yöntem Kalman Filtresi olarak bilinmektedir. Farklı optimizasyon kriterlerine göre bu tahmin elde edilebilir (Özbek, 1998).

Kalman Filtresi başta havacılık alanında olmak üzere yaygın olarak kontrol mühendisleri tarafından kullanılmaktadır. Diğer fiziksel bilimlerle uğraşanlarda çok değişik alanlarda başarılı bir şekilde Kalman Filtresini kullanırlar. Örneğin sinyal süreçleri, uydu takibi, sualtı uyduları ve istatistiksel kalite kontrolü gibi. Son zamanlarda mühendislik dışı birçok uygulamada Kalman Filtresine rastlanmaktadır. Kısa dönem öngörüler, doz-yanıt deneyleri, yaşam süresi analizleri gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Kalman Filtresi ile yapılan çalışmaların pek çoğu mühendislik dergilerinde yayınlanmakta ve bu nedenle, kullanılan dil, notasyon ve stil istatistikçilere yabancı gelmektedir. Bununla birlikte aslında, model, notasyonlar ve Kalman Filtresi yöntemi, regresyon ve zaman serileri analizi gibi lineer modellere benzerliğinden dolayı istatistikle oldukça ilgilidir ve uygulamalarda oldukça büyük yarar sağlama potansiyeline sahiptir.

Kalman Filtresi, Bayesci sonuç çıkarımı açısından ele alınırsa ve çok değişkenli istatistiğin bilinen temel sonuçları uygulanırsa istatistikçiler tarafından çok daha rahat anlaşılabilir.

Daha önce ifade edildiği gibi, Kalman Filtresi pek çok alanda sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Filtre olarak isimlendirilmiş olsa da mevcut durum ve önceki tahminlere göre bir sonraki durumu tahmin eden bir algoritmadır aslında. Genel olarak Kalman Filtresi, veriler üzerinden sistemin gelecek durumu hakkında tahminde bulunur. Kalman Filtresi, dinamik sistemlerin yani zaman içinde değişen sistemlerin durumunu tahmin etmekte kullanılır.

Bir sistemi incelemekteki temel amaç, sistemin davranışı hakkında bilgi sahibi olmak, sistemi denetlemek, yenilemek, var olan sistemi korumak veya sistemi kontrol altında tutmak olabilir. Durum-uzay modeli şeklinde modellenen bir sistemin istenilen biçimde kontrol edilebilmesi gözlenemeyen durum vektörünün tahminine bağlıdır. Bu nedenle filtreleme işlemi bir sistemi incelemek için oldukça önemlidir (Özbek, 1998).

Durum uzay modeli,

$$\underline{x}_{t+1} = F_t \underline{x}_t + B_t \underline{u}_t + G_t \underline{w}_t \quad (4.1)$$

$$\underline{y}_t = H_t \underline{x}_t + \underline{v}_t \quad (4.2)$$

ve başlangıç değerleri ve varsayımlar,

$$E[\underline{v}_t] = \underline{0} \quad (4.3)$$

$$E[\underline{w}_t] = \underline{0} \quad (4.4)$$

$$E[\underline{v}_t \underline{v}_j'] = R_t \delta_{tj} \quad (4.5)$$

$$E[\underline{w}_t \underline{w}_j'] = Q_t \delta_{tj} \quad (4.6)$$

$$E[\underline{v}_t \underline{w}_j'] = 0 \quad (4.7)$$

$$E[\underline{x}_0] = \bar{\underline{x}}_0 \quad (4.8)$$

$$E[(\underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0)(\underline{x}_0 - \bar{\underline{x}}_0)'] = P_0 \quad (4.9)$$

$$E[\underline{x}_0 \underline{w}_t] = \underline{0} \quad (4.10)$$

$$E[\underline{x}_0 \underline{v}_t] = \underline{0} \quad (4.11)$$

biçiminde ele alınsın.

4.2.1 Kalman Filtresinin Elde Edilişi

(4.1) eşitliğinde kontrol değişkeninin olmadığı varsayılarak (4.2) eşitliği ile beraber yeniden ele alınsın.

$$\underline{x}_{t+1} = F_t \underline{x}_t + G_t \underline{w}_t \quad (4.12)$$

$$\underline{y}_t = H_t \underline{x}_t + \underline{v}_t \quad (4.13)$$

Düzenlenen denklemler (4.12) ve (4.13)'teki gibi olmak üzere, hata terimlerinin

$$\underline{w}_t \sim N(\underline{0}, Q_t)$$

$$\underline{v}_t \sim N(\underline{0}, R_t)$$

ve başlangıç durumunun

$$\underline{x}_0 \sim N(\underline{x}_0, P_0)$$

biçiminde Normal dağıldığı, ayrıca hata terimlerinin ve başlangıç durumunun (4.3) ve (4.11) varsayımlarını sağladığı kabul edilsin.

$\underline{Y}^t = (\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_t)$ gözlemleri verildiğinde $\underline{x}_t$ durumunun en iyi tahminini elde etme en iyi filtreleme problemidir. Yapılan varsayımların sağlandığı kabul edildiğinde, EK 1'deki teorem gereğince $X_t|Y_t$ rastgele vektörünün Normal dağıldığı söylenebilir. Bu tahmin sonsal dağılımın en büyüklenmesi kriterine göre elde edilir ve koşullu beklenen değer tahminine denk olur (Singh ve Titli, 1978, Bryson ve Ho, 1969). $\underline{Y}^t = (\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_t)$ gözlemleri verildiğinde $\underline{x}_t$ durumunun tahmini,

$$\hat{\underline{x}}_t = E(\underline{x}_t | \underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_t) = E(\underline{x}_t | \underline{Y}^t)$$

ile, hatanın kovaryans matrisi,

$$P_{t|t} = E[(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t})(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t})' | \underline{Y}^t]$$

ile, $\underline{Y}^{t-1} = (\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_t)$ gözlemleri verildiğinde $\underline{x}_t$ durumunun tahmini,

$$\hat{\underline{x}}_{t|t-1} = E(\underline{x}_t | \underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{t-1}) = E(\underline{x}_t | \underline{Y}^{t-1})$$

ile, hatanın kovaryans matrisi,

$$P_{t|t-1} = E[(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})' | \underline{Y}^{t-1}]$$

şeklinde gösterilsin. Bu değerler aşağıdaki adımlar uygulanarak bulunur.

1.Adım. $t - 1$ anında $\underline{x}_{t-1}$ durumunun, $\hat{\underline{x}}_{t-1|t-1}$ tahmininin bilindiği varsayılın ve $\hat{\underline{x}}_{t|t-1}$ belirlenmeye çalışılın. (4.12) eşitliği

$$\underline{x}_t = F_{t-1}\underline{x}_{t-1} + G_{t-1}\underline{w}_{t-1}$$

şeklinde yazılın. (4.3)-(4.11) varsayımlarına göre $\underline{w}_{t-1}$ rastgele vektörünün $\underline{v}_t, \underline{w}_{t-2}, \dots, \underline{w}_0$ rastgele vektörlerinden, $\underline{x}_0$ başlangıç durumunun $\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{t-1}$ vektörlerinden bağımsız olduğu göz önüne alınırsa,

$$E(\underline{w}_{t-1} | \underline{Y}^{t-1}) = 0$$

olacağından

$$\hat{\underline{x}}_{t|t-1} = E(\underline{x}_t | \underline{Y}^{t-1}) = F_{t-1}E(\underline{x}_{t-1} | \underline{Y}^{t-1}) + G_{t-1}E(\underline{w}_{t-1} | \underline{Y}^{t-1}) = F_{t-1}\hat{\underline{x}}_{t-1|t-1}$$

şeklinde elde edilir. Yine (4.3)-(4.11) varsayımlarına göre, hata vektörü $\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1}$; $\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{t-1}$ gözlemlerinden bağımsızdır ve bir sonraki öngörü adımı için hatanın kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} P_{t|t-1} &= E[(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})' | \underline{Y}^{t-1}] \\ &= E[(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})(\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})'] \end{aligned}$$

dır. Bir adım öngörü hatası,

$$\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1} = F_{t-1}(\underline{x}_{t-1} - \hat{\underline{x}}_{t-1|t-1}) + G_{t-1}\underline{w}_{t-1}$$

olarak yazılabileceğinden, $\underline{x}_{t-1}$ vektörü, $\underline{w}_0, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_{t-2}$ vektörlerinin bir fonksiyonu ve

$$E(\underline{x}_{t-1} | \underline{w}'_{k-1}) = 0,$$

$$E(\hat{\underline{x}}_{t-1|t-1} \underline{w}'_{k-1} | \underline{Y}^{t-1}) = 0$$

olduğundan, hatanın kovaryans matrisi,

$$P_{t|t-1} = F_{t-1}P_{t-1|t-1}F'_{t-1} + G_{t-1}Q_tG'_{t-1}$$

olarak bulunur.

2.Adım. $\underline{Y}^t = (\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_t)$ gözlemleri verildiğinde, $\underline{x}_t$ durumunun tahmin edilebilmesi için $f(\underline{x}_t | \underline{Y}^t)$ koşullu olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(\underline{x}_t | \underline{Y}^t) = f(\underline{x}_t | \underline{Y}^{t-1}, \underline{y}_t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{f(\underline{x}_t, \underline{Y}^{t-1}, \underline{y}_t)}{f(\underline{Y}^{t-1}, \underline{y}_t)} \\
&= f(\underline{y}_t | \underline{x}_t, \underline{Y}^{t-1}) \cdot \frac{f(\underline{x}_t | \underline{Y}^{t-1})}{f(\underline{y}_t | \underline{Y}^{t-1})}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

olarak yazılabilir. Gözlem eşitliği (4.13) ve $\underline{x}_t$ vektörünün $y_0, y_1, \dots, y_{t-1}$ gözlemlerinden bağımsız olduğu göz önüne alınırsa ($\underline{v}_t$; $\underline{x}_0$ ve $\underline{w}_0, \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_t$ vektörlerinden bağımsız)

$$f(\underline{y}_t | \underline{x}_t, \underline{Y}^{t-1}) = f(\underline{y}_t | \underline{x}_t)$$

elde edilir. Bu durumda (4.14) eşitliği,

$$f(\underline{x}_t | \underline{Y}^t) = \frac{f(\underline{y}_t | \underline{x}_t) f(\underline{x}_t | \underline{Y}^{t-1}) f(\underline{Y}^{t-1})}{f(\underline{y}_t, \underline{Y}^{t-1})}$$

şeklinde yazılabilir. Hata terimleri ile ilgili varsayımlar

$$E(\underline{v}_t | \underline{x}_t) = 0$$

$$E(\underline{y}_t | \underline{x}_t) = E(H_t \underline{x}_t + \underline{v}_t | \underline{x}_t) = H_t \underline{x}_t$$

$$E(\underline{y}_t - H_t \underline{x}_t)(\underline{y}_t - H_t \underline{x}_t)' = E(\underline{v}_t \underline{v}_t') = R_t$$

Bişiminde olur. Buna göre gözlem vektörünün, durum vektörüne göre koşullu dağılımı

$$f(\underline{y}_t | \underline{x}_t) = \kappa \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{y}_t - H_t \underline{x}_t)' R_t^{-1} (\underline{y}_t - H_t \underline{x}_t) \right\}$$

bişiminde olur ve Normal dağılır. Başlangıç durumunun Normal dağıldığı varsayıldığından, $f(\underline{x}_t | \underline{Y}^{t-1})$ önsel dağılımı da

$$f(\underline{x}_t | \underline{Y}^{t-1}) = \kappa' \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})' P_{t|t-1}^{-1} (\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1}) \right\}$$

şeklinde Normal dağıldığından $f(\underline{x}_t | \underline{Y}^t)$ sonsal dağılımı için EK 1’de verilen teorem kullanılırsa,

$$f(\underline{x}_t | \underline{Y}^t) = \kappa'' \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2} ((\underline{y}_t - H_t \underline{x}_t)' R_t^{-1} (\underline{y}_t - H_t \underline{x}_t) + (\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})' P_{t|t-1}^{-1} (\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1})) \right\} \quad (4.15)$$

şeklinde Normal dağılım olarak bulunur. Burada $\kappa, \kappa', \kappa''$ normalleştirme sabitleridir. Önce (4.15) sonsal dağılımının logaritması alınır ve sonra $\underline{x}_t$ vektörüne göre türev alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$H_t' R_t^{-1} (\underline{y}_t - H_t \underline{x}_t) - P_{t|t-1}^{-1} (\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t-1}) = 0$$

bulunur. Bu ifade, $\underline{x}_t$ vektörüne göre çözülüp, $\underline{x}_t$ yerine $\hat{\underline{x}}_t$ alınırsa

$$(H_t' R_t^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1}) \hat{\underline{x}}_{t|t} = H_t' R_t^{-1} \underline{y}_t + P_{t|t-1}^{-1} \hat{\underline{x}}_{t|t-1} \quad (4.16)$$

ve bu eşitliğin sağ tarafına $H_t' R_t^{-1} H_t \hat{\underline{x}}_{t|t-1}$ eklenip çıkarılırsa (4.16) eşitliği

$$\hat{\underline{x}}_{t|t} = \hat{\underline{x}}_{t|t-1} + (H_t' R_t^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1})^{-1} H_t' R_t^{-1} (\underline{y}_t - H_t \hat{\underline{x}}_{t|t-1})$$

olarak yazılır. (4.16) eşitliği

$$\hat{\underline{x}}_{t|t} = (H_t' R_t^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1})^{-1} (H_t' R_t^{-1} \underline{y}_t + P_{t|t-1}^{-1} \hat{\underline{x}}_{t|t-1})$$

biçiminde göz önüne alınıp, gözlem eşitliği (4.13) kullanıldığında

$$\underline{x}_t - \hat{\underline{x}}_{t|t} = \underline{x}_t - (H_t' R_t^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1})^{-1} (H_t' R_t^{-1} H_t \underline{x}_t + H_t' R_t^{-1} \underline{v}_t + P_{t|t-1}^{-1} \hat{\underline{x}}_{t|t-1}) \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.17) ifadesinin sağ tarafına $P_{t|t-1}^{-1}x_t$ eklenip çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapıldığında (4.17) eşitliği

$$\underline{x}_t - \hat{x}_{t|t} = (H'_t R_t^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1})^{-1} (H'_t R_t^{-1} v_t - P_{t|t-1}^{-1} (\underline{x}_t - \hat{x}_{t|t-1})) \quad (4.18)$$

olarak yazılır ve (4.18) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} P_{t|t} &= E\{(\underline{x}_t - \hat{x}_{t|t-1})(\underline{x}_t - \hat{x}_{t|t-1})\} \\ &= (H'_t R_t^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1})^{-1} \end{aligned} \quad (4.19)$$

olarak bulunur. (4.19) eşitliğine matris tersi lemması uygulanırsa,

$$(H'_t R_t^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1})^{-1} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1} H'_t (H_t P_{t|t-1} H'_t + R_t)^{-1} H_t P_{t|t-1}$$

elde edilir.

$$K_t = P_{t|t-1} H'_t (H_t P_{t|t-1} H'_t + R_t)^{-1}$$

olarak alınır

$$P_{t|t} = (I - K_t H_t) P_{t|t-1}$$

ve matris tersi lemmasının uygulanmasıyla

$$(H'_t R_t^{-1} H_t + P_{t|t-1}^{-1})^{-1} H'_t R_t^{-1} = P_{t|t-1} H'_t (H_t P_{t|t-1} H'_t + R_t)^{-1}$$

olduğundan

$$\hat{\underline{x}}_t = \hat{\underline{x}}_{t|t-1} + K_t (\underline{y}_t - H_t \hat{\underline{x}}_{t|t-1})$$

olarak bulunur. Özetlenecek olursa Kalman Filtresi,

$$P_{0|-1} = P_0$$

$$\hat{\underline{x}}_{0|-1} = \bar{\underline{x}}_0$$

başlangıç değerlerine bağlı olarak,

$$\hat{\underline{x}}_{t|t-1} = F_{t-1} \hat{\underline{x}}_{t-1} \quad (4.20)$$

$$P_{t|t-1} = F_{t-1} P_{t-1|t-1} F'_{t-1} + G_{t-1} Q_t G'_{t-1} \quad (4.21)$$

$$K_t = P_{t|t-1} H'_t (H_t P_{t|t-1} H'_t + R_t)^{-1} \quad (4.22)$$

$$P_{t|t} = [I - K_t H_t] P_{t|t-1} \quad (4.23)$$

$$\hat{\underline{x}}_t = \hat{\underline{x}}_{t|t-1} + K_t (\underline{y}_t - H_t \hat{\underline{x}}_{t|t-1}) \quad (4.24)$$

eşitlikleri ile verilir (Şenol, 2006).

Kalman Filtresi, gözlenen değişkenler ve gürültüler ilişkisi Normal dağılıma sahipse, hata kareler ortalaması anlamında en iyi tahmini verir. Bu şu demektir, başlangıç koşulları ile sisteme giren gürültülerin dağılımı Normal dağılım olarak varsayılırsa, Kalman Filtresi ***En Küçük Hata Kareler Ortalaması tahmin edicisidir.***

Eşitlik (4.22) ile verilen K_t matrisi literatürde ***Kalman Kazanç Matrisi*** olarak bilinir. Kalman Kazanç Matrisi durum öngörüsü varyansı ile doğru, inovasyon kovaryansı ile ters orantılıdır (Singh ve Titli 1978, Bryson ve Ho 1969). Buna göre, durum öngörü varyansı büyük, ölçümlerin varyansı öngörünün varyansına göre daha küçükse filtre kazancı büyüktür. Durum öngörü varyansı küçük, ölçümlerin varyansı öngörünün varyansına göre daha büyükse filtre kazancı küçüktür. Büyük kazanç ile durum tahmini güncellenirken ölçümlere daha fazla ağırlık verildiği, küçük kazanç ile durum tahmini

güncellenirken ölçümlere daha az ağırlık verildiği anlamına gelir. Bu da, optimal kazancı yüksek olan filtrede, daha az ‘*gürültü azaltımı*’ meydana geldiği ve gelen gözlemlere güvenilmesi gerektiğini gösterir.

Kalman Filtresinin iyi sonuç vermesi, durum-uzay modellerinde bulunan durum ve ölçüm gürültü matrislerinin kovaryanslarının bilinmesine bağlıdır. Ancak gerçek bir sisteme ait model oluşturulurken genellikle bu matrislerin kovaryansları bilinmez. Bu kovaryansların bilinmemesi de büyük tahmin hatalarına ve ya hatanın ıraksamasına sebep olabilir. Böyle durumlarda, Kalman Filtresinin daha iyi çalışmasını sağlamak için bazı uyarlı yöntemler mevcuttur. Bu yöntemler, *Uyarlı Kalman Filtresi* olarak adlandırılır. Uyarlı Kalman Filtresinin bir amacı da, durumun en iyi tahminini verecek biçimde beyaz gürültü süreci olan hata terimlerinin kovaryanslarını tahmin etmektir. Bunun için kullanılan farklı yöntemler vardır (Mohamed ve Schwarz, 1999, Şenol 2006). Tez kapsamında bu konuya girilmeyecektir.

4.3 Filtreleme, Düzgünleştirme, Öngörü Kavramları

Bu kısımda literatürde çok kullanılan filtreleme, düzgünleştirme ve öngörü kavramlarına kısaca değinilmiş ve farkları görülmeye çalışılmıştır.

$S(t)$ ile ilgilenilen sistemin çıktısı gösterilsin. Burada, $0 \leq t \leq 10$ (sürekli zaman) şeklinde tanımlansın.

Filtreleme :

t anında $S(t)$ için bilgi edinmek istenir. Bu amaçla, t anına kadarki gözlemler kullanılabilir ve $S(t)$ için bilgi t anında hazır olmuş olur.

$y_0, y_1, \dots, y_t$ gözlemlerine dayalı olarak $\underline{x}_t$ durum vektörünün kestirimi,

$$\hat{\underline{x}}_{t|t} = P_{L(\underline{y}^t)}(\underline{x}_t)$$

olmak üzere

$$\hat{\underline{y}}_t = H\hat{\underline{x}}_{t|t}, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

kestirimlerinin elde edilmesi işlemi aslında $\underline{y}_0, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_t$ gözlemlerinin filtrelenmesidir.

Düzenleştirme :

t anındaki $S(t)$ için bilgi edinmek istenir. Bu amaçla, t' 'ye kadar ve sonraki gözlemler kullanılabilir. Bu durumda, $S(t)$ için bilgi t anında hazır olmayabilir.

Öngörü :

t anında $S(t + \alpha)$ için bilgi edinmek istenir. Burada, $\alpha > 0$ dır. Yani, ilerisi için bilgi edinmek istenir. Bu amaçla, t anına kadar olan gözlemler kullanılır ve t anında $(t + \alpha)$ için bilgi hazır olmuş olur.

5. UYGULAMA ÇALIŞMALARI

5.1 Basit Doğrusal Regresyon Modelinin Durum-Uzay Modeli Biçiminde

Yazılması ve Parametrelerinin Tahmini

İlk uygulama çalışmasında,

$$y_t = \alpha + \beta x_t + e_t$$

biçiminde basit doğrusal regresyon modeli göz önüne alınmış, α ve β parametreleri indirgemeli EKK yöntemi ve Kalman Filtresi kullanılarak tahmin edilmiştir. Tahmin performanslarını karşılaştırmak için hata kareler ortalamaları hesaplanmıştır.

Simülasyon çalışmasında model parametreleri $\alpha = 2, \beta = 3$ olarak alınmıştır. $t = 1, 2, \dots, 100$ için X_t ler Normal(2,4) dağılımından ve e_t gürültüleri Normal(0,4) dağılımından rastgele üretilerek y_t gözlemleri elde edilmiştir. Buna göre model,

$$y_t = 2 + 3x_t + e_t, t = 1, 2, \dots, 100$$

biçiminde olmak üzere model parametrelerinin tahminleri için simülasyonlar 150 kez tekrarlanarak parametre tahminleri ve hata kareler ortalamaları elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 5.2 ile verilmiştir.

Kalman Filtresi ile parametre tahmini yapabilmek için, ilk olarak alınan model Bölüm 3.2 de anlatıldığı gibi durum-uzay modeli formuna getirilmiş ve durum denklemi, parametre vektörünün rastgele yürüyüş modeli şeklinde ele alınması ile,

$$\begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{t-1} \\ \beta_{t-1} \end{pmatrix} + \varepsilon_t \quad (5.1)$$

biçiminde ve ölçüm ya da gözlem denklemi ise regresyon denkleminin

$$y_t = (1 \quad x_t) \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \end{pmatrix} + e_t \quad (5.2)$$

biçiminde yazılması ile elde edilmiştir.

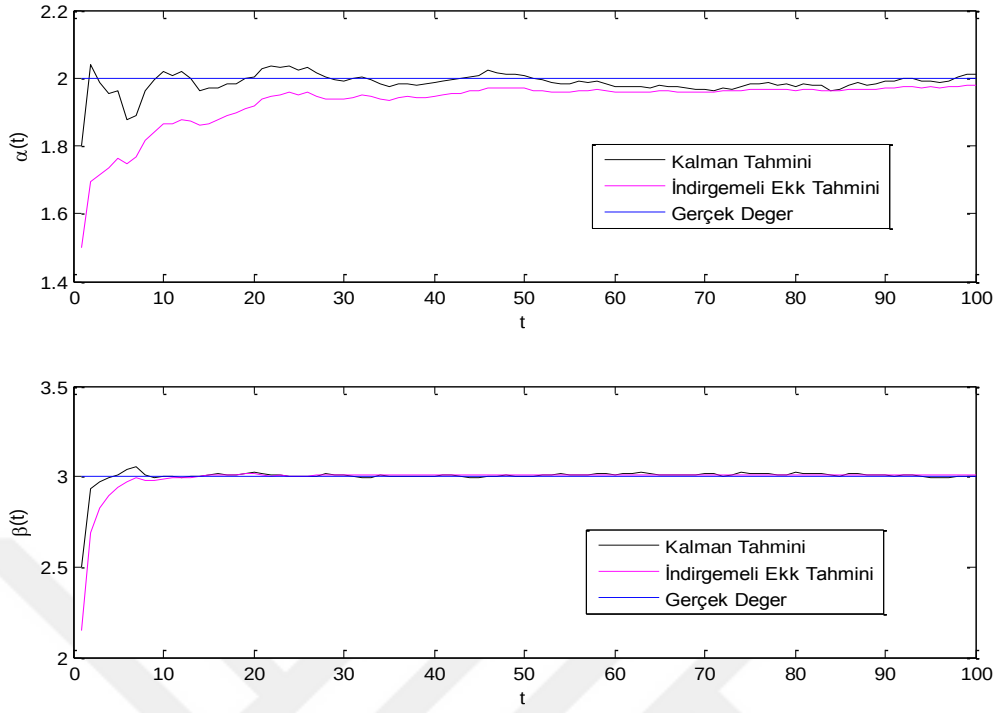
Kalman Filtresi ile tahmin yaparken, durum ve ölçüm gürültü kovaryans matrislerinin değerlerine göre sonuçlarda değişiklik olacaktır. Bu değişiklikleri gözlemleyebilmek için bu matrislerin farklı değerleri için algoritma işletilmiş ve sonuçlar bu matrislere göre verilmiştir.

Durum 1. Q ile durum gürültü kovaryans matrisi, R ile ölçüm gürültü kovaryans matrisi, P ile başlangıç durum hatası kovaryans matrisi, α_0 ile α parametresinin tahmini için başlangıç değeri ve β_0 ile β parametresinin tahmini için başlangıç değeri gösterilmek üzere simülasyon çalışması için alınan değerler Çizelge 5.1 ile verilmiştir.

Çizelge 5.1 Durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri

Q	R	P	α_0	β_0
$0.0001 \times I_2$	0.05	$I_2 \times 0.5$	1	1

Bu değerler kullanılarak indirgemeli EKK ve Kalman Filtresi algoritmaları işletilmiştir. Algoritmalar kullanılarak her bir adım için elde edilen parametre tahmin sonuçlarına ilişkin çizdirilen grafikler Şekil 5.1 ile verilmiştir.



Şekil 5.1 $\alpha=2$ ve $\beta=3$ parametreleri için Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK Yöntemi tahminleri

Şekil 5.1’de parametrelerin gerçek değerleri olan $\alpha = 2$ ve $\beta = 3$ değerleri mavi renk ile çizdirilerek, Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemi kullanılarak elde edilen tahminlerin gerçek değerlere yakınlığı görsel olarak görülmek istenmiştir. Kalman Filtresi kullanılarak elde edilen tahminlerin grafikleri siyah renk ile, indirgemeli EKK yöntemi kullanılarak elde edilen tahminlerin grafikleri pembe renk ile ifade edilmiştir. Her iki yöntem kullanılarak elde edilen tahminlerin gerçek değerlere oldukça yaklaştığı görülürken, Kalman filtresinin indirgemeli EKK yöntemine göre gerçek değerlere daha çabuk yaklaştığı ve daha iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

Çizelge 5.2 ile simülasyonla alınan gerçek parametre değerleri olan $\alpha = 2, \beta = 3$ parametreleri için Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK yöntemi ile elde edilen tahminlerin ortalaması ve tahminlere ilişkin hata kareler ortalaması sonuçları verilmiştir.

Çizelge 5.2 $\alpha=2$, $\beta=3$ için tahmin sonuçları

		İndirgemeli Ekk Tahmin Ortalaması	Kalman Filtresi Tahmin Ortalaması	İndirgemeli Ekk HKO	Kalman HKO
$n = 100$	$\alpha = 2$	1.975204	2.038754	0.175730	0.415779
$deneme = 150$	$\beta = 3$	2.972122	2.980017	0.049768	0.092022

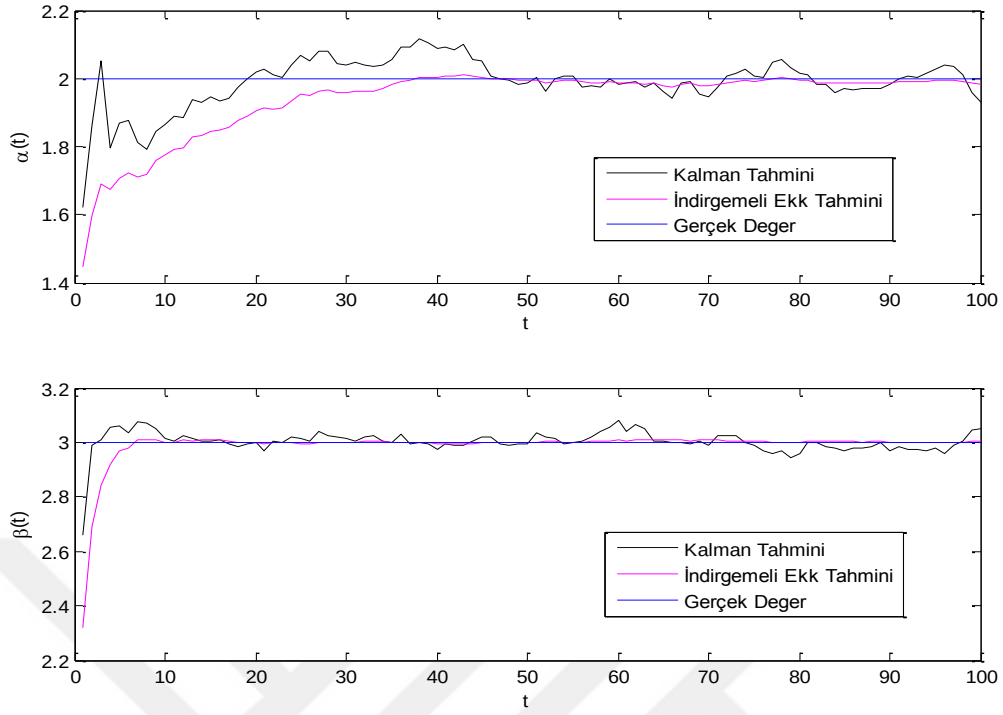
Çizelge 5.2 ile verilen sonuçlara göre, her iki parametrenin tahmininde de indirgemeli EKK yöntemi ile elde edilen hata kareler ortalaması daha düşük çıkmıştır. Buna göre, hata kareler ortalaması anlamında, verilen başlangıç değerlerine ve hata kovaryans matrislerine göre, indirgemeli EKK tahminlerinin Kalman Filtresi yöntemine göre daha iyi olduğu söylenebilir.

Durum 2. Çizelge 5.3 ile durum ve ölçüm gürültü kovaryans matrisleri için verilen değerler ve parametrelere ilişkin başlangıç değerleri verilmiştir. Durum 2 ile durum gürültü kovaryansı Q 'nun değeri bir önceki duruma göre daha büyük alınmıştır.

Çizelge 5.3 Durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri

Q	R	P	α_0	b_0
$0.001 \times I_2$	0.05	$I_2 \times 0.5$	1	1

Çizelge 5.3 ile verilen değerler kullanılarak indirgemeli EKK ve Kalman Filtresi algoritmaları işletilmiştir. Algoritmalar kullanılarak her bir adım için elde edilen parametre tahmin sonuçlarına ilişkin çizdirilen grafikler Şekil 5.2 ile verilmiştir.



Şekil 5.2 $\alpha=2$ ve $\beta=3$ parametreleri için Kalman Filtresi ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri

Şekil 5.2’de $\alpha = 2$ ve $\beta = 3$ parametreleri için Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemi kullanılarak elde edilen tahminlerin grafikleri çizdirilmiştir. Özellikle α parametresinin tahmininde Kalman Filtresi yönteminin bir önceki duruma göre daha fazla varyasyon yapmış olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.4’te $\alpha = 2$, $\beta = 3$ parametreleri için elde edilen tahmin sonuçları verilmiştir.

Çizelge 5.4 $\alpha=2$, $\beta=3$ için tahmin sonuçları

		İndirgemeli Ekk Tahmin Ortalaması	Kalman Filtresi Tahmin Ortalaması	İndirgemeli Ekk HKO	Kalman HKO
$n = 100$	$\alpha = 2$	1.940089	1.989407	0.202234	0.617421
	$\beta = 3$	2.989486	3.002653	0.053129	0.153457

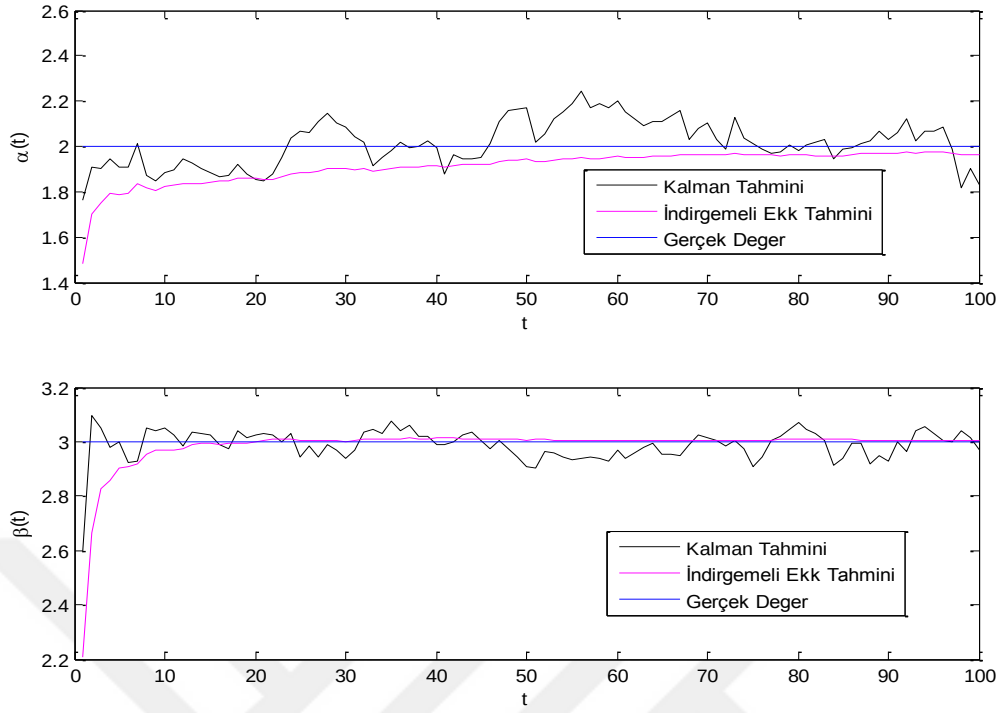
Çizelge 5.4 ile verilen sonuçlara göre, her iki yöntemle elde edilen tahminlerin ortalaması gerçek değerlere oldukça yakındır. Hata kareler ortalaması bakımından bakıldığında, her iki parametre tahmini içinde indirgemeli EKK yöntemine göre elde edilen hata kareler ortalamasının daha düşük olduğu görülmektedir. Buna göre, hata kareler ortalaması anlamında, verilen başlangıç değerlerine ve hata kovaryans matrislerine göre, indirgemeli EKK yöntemine göre elde edilen tahminlerin Kalman Filtresi yöntemine göre bu durumda da daha iyi olduğu söylenebilir.

Durum 3. Çizelge 5.5 ile durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri verilmiştir. Durum 3 ile durum gürültü kovaryansı diğer durumlara göre daha büyük olarak alınmıştır.

Çizelge 5.5 ile durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri

Q	R	P	α_0	b_0
$0.01 \times I_2$	0.05	$I_2 \times 0.5$	1	1

Çizelge 5.5 ile verilen değerler kullanılarak indirgemeli EKK ve Kalman Filtresi algoritmaları işletilmiştir. Algoritmalar kullanılarak her bir adım için elde edilen parametre tahmin sonuçlarına ilişkin çizdirilen grafikler Şekil 5.3 ile verilmiştir.



Şekil 5.3 $\alpha=2$ ve $\beta=3$ parametreleri için Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK Yöntemi tahminleri

Şekil 5.3'te $\alpha = 2$ ve $\beta = 3$ parametreleri için Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemiyle elde edilen tahminlerin grafikleri çizdirilmiştir. $Q = 0.01 \times I_2$ olarak alındığında Kalman Filtresi tahminlerinin diğer durumlara göre daha fazla dalgalanma yaptığı ve indirgemeli EKK yönteminin gerçek değerlere daha yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Çizelge 5.6'da $\alpha = 2$, $\beta = 3$ parametreleri için elde edilen tahmin sonuçları verilmiştir.

Çizelge 5.6 $\alpha=2$, $\beta=3$ için tahmin sonuçları

		İndirgemeli Ekk Tahmin Ortalaması	Kalman Filtresi Tahmin Ortalaması	İndirgemeli Ekk HKO	Kalman HKO
$n = 100$	$\alpha = 2$	1.911653	2.012120	0.046693	1.389619
	$\beta = 3$	2.986062	2.988221	0.010348	0.345326

Çizelge 5.6’da $\alpha = 2$, $\beta = 3$ parametreleri için elde edilen tahmin sonuçlarına göre her iki parametre tahmini içinde indirgemeli EKK yöntemine göre elde edilen hata kareler ortalamasının daha düşük olduğu görülmektedir.

Elde edilen sonuçlara göre, Kalman Filtresinin en iyi tahmini durum gürültü kovaryansı matrisi $Q = 0.0001 \times I_2$ olduğu durumda verdiği, Q değeri arttıkça tahminlerin varyasyonunun arttığı, buna bağlı olarak da hata kareler ortalamasının arttığı görülmüştür.

Şimdi regresyon parametrelerinin sabit olmayıp zamanla değiştiği dinamik regresyon durumu göz önüne alınsın. $t = 1, 2, \dots, 100$ için α_t ve β_t değerleri (5.3)’de verildiği gibi olmak üzere, X_t ’ler $\text{Normal}(2, 4)$ dağılımından ve e_t gürültüleri $\text{Normal}(0, 4)$ dağılımından rastgele üretilerek y_t gözlemleri elde edilmiştir. Buna göre model,

$$y_t = \alpha_t + \beta_t x_t + e_t, t = 1, 2, \dots, 100$$

şeklinde ve

$$\alpha_t = \begin{cases} 2 & , \quad 0 < t < 20, 60 \leq t \leq 100 \\ 3 & , \quad 20 \leq t < 60 \end{cases}, \beta_t = \begin{cases} 3 & , \quad 0 < t < 20, 60 \leq t \leq 100 \\ 4 & , \quad 20 \leq t < 60 \end{cases} \quad (5.3)$$

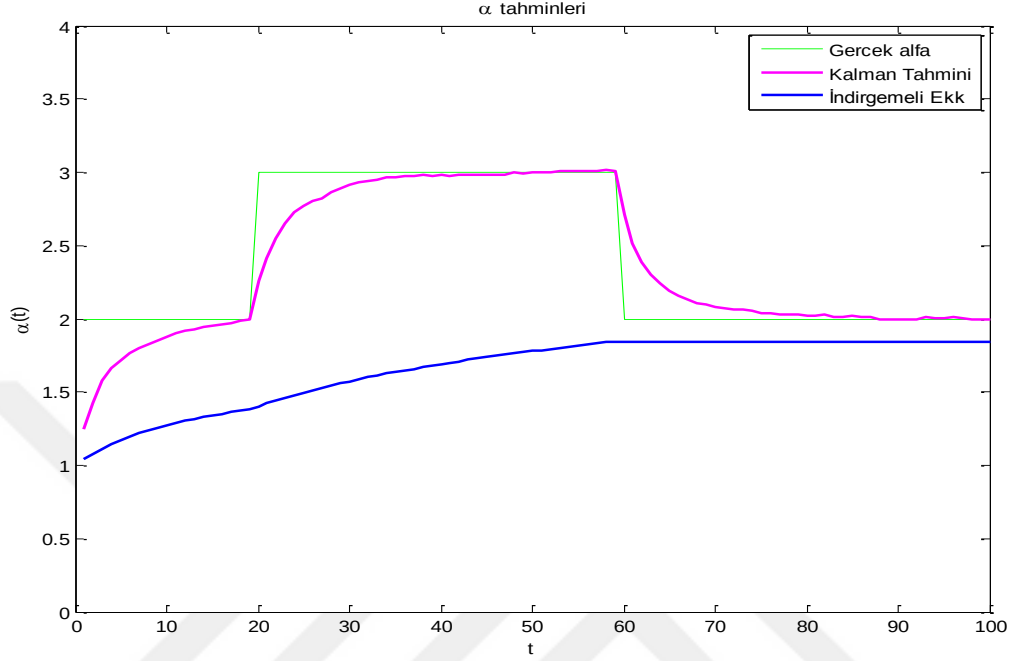
biçiminde olmak üzere α_t ve β_t parametreleri indirgemeli en küçük kareler ve Kalman Filtresi kullanılarak tahmin edilmiştir.

Durum 1. Parametrelerinin sabit olmayıp zamanla değiştiği dinamik regresyon durumu için durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri Çizelge 5.7 ile verilmiştir.

Çizelge 5.7 Durum, ölçüm gürültü matrisi ve başlangıç değerleri

Q	R	P	α_0	b_0
$0.001 \times I_2$	0.01	$I_2 \times 0.001$	1	1

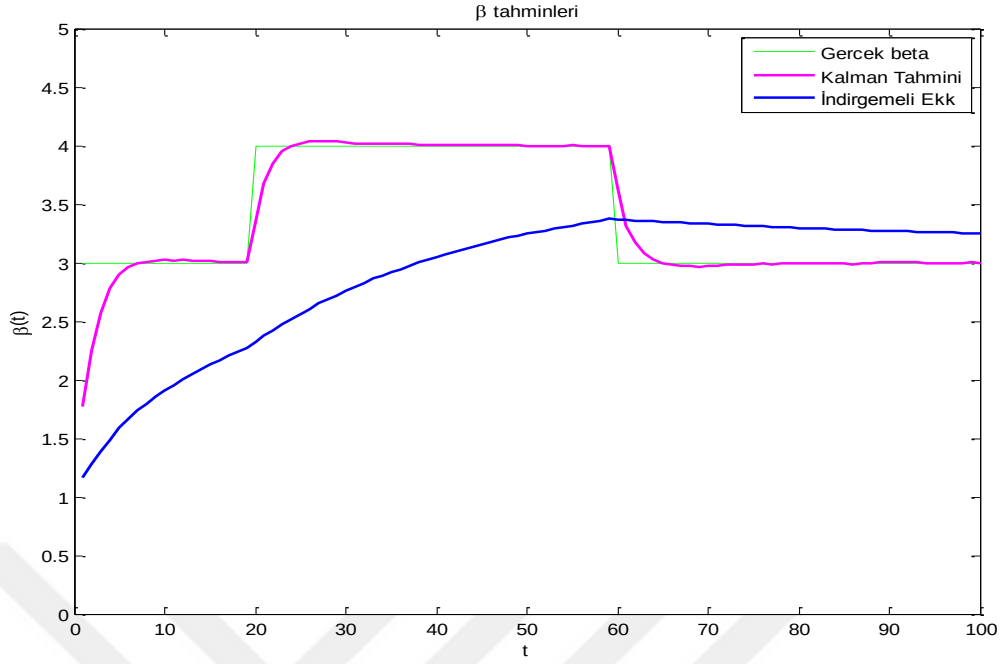
Çizelge 5.7 ile verilen değerler kullanılarak yapılan simülasyon çalışması ile α_t parametresi için Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemine göre tahminler elde edilmiş ve elde edilen değerlere ilişkin grafik Şekil 5.4 ile verilmiştir.



Şekil 5.4 α_t parametresi için Kalman Filtresi ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri

Elde edilen grafiğe göre, Kalman Filtresi Tahminleri α_t parametresini indirgemeli EKK yöntemine göre daha iyi takip etmektedir. Özellikle parametre değişim zamanlarını Kalman Filtresi çok daha iyi yakalamaktadır.

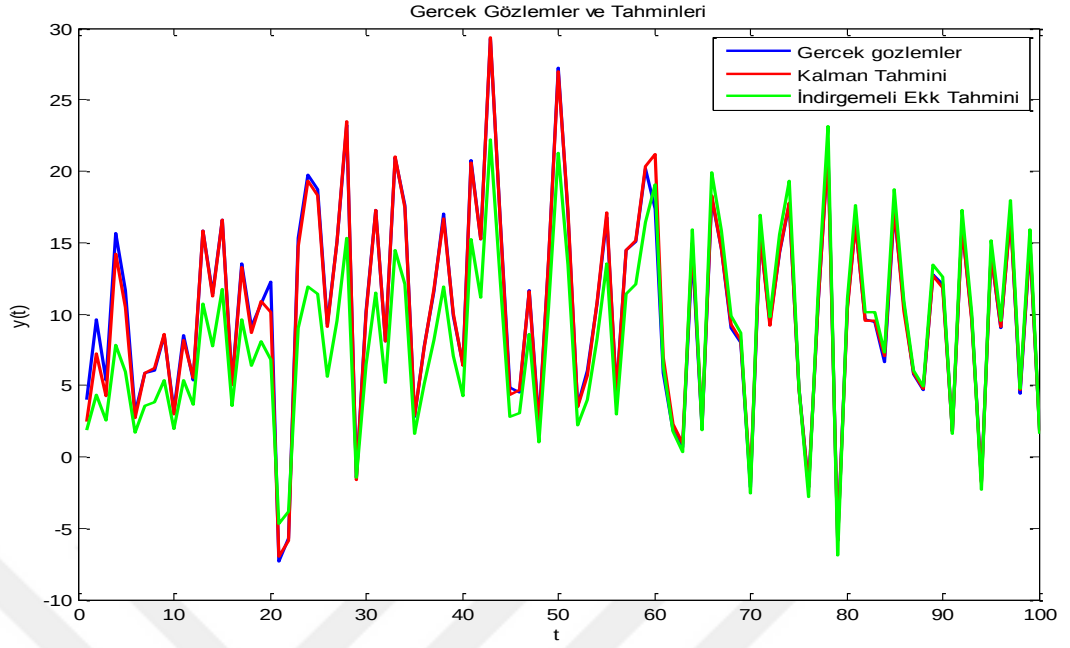
Aynı biçimde, Şekil 5.5 ile β_t parametresi için Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemi ile elde edilen tahminlere ilişkin grafik verilmiştir.



Şekil 5.5 β_t parametresi için Kalman Filtresi ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri

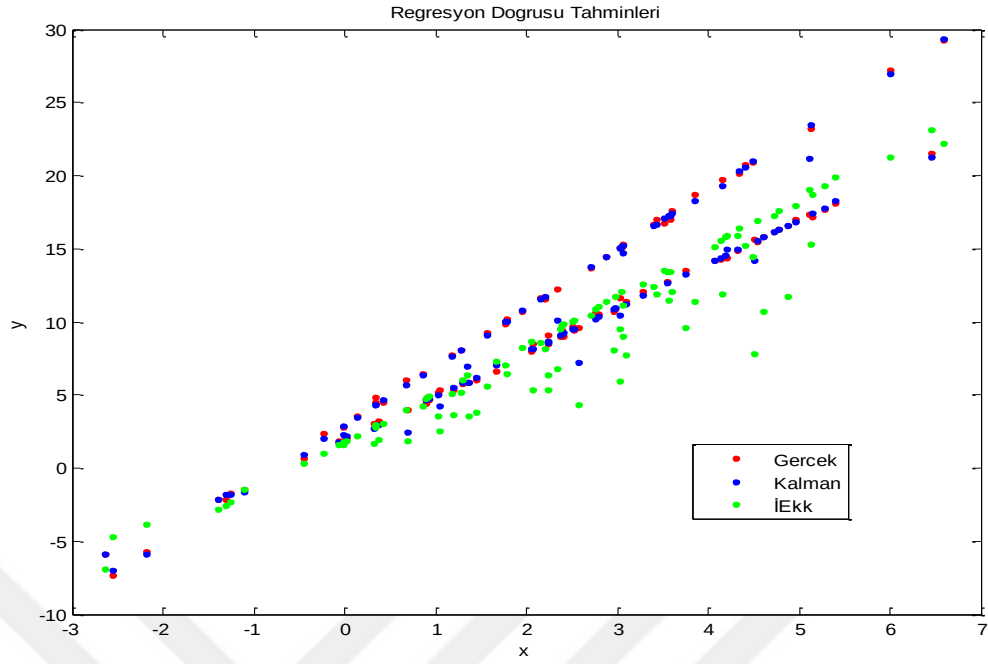
Şekil 5.5 ile verilen grafik ile, Kalman Filtresi tahminlerinin β_t parametresine daha yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Şekil 5.6 ile gerçek gözlemler, Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemleri kullanılarak elde edilen ($\hat{y}$) tahminlerine ilişkin grafikler verilmiştir. Kalman Filtresinin indirgemeli EKK yöntemine göre gerçek değerlere daha yakın tahminler verdiği görülmüştür.



Şekil 5.6 Gerçek gözlemler, Kalman Filtresi, En Küçük Kareler ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri

Şekil 5.7 ile gerçek değerlere ilişkin saçılma grafiği ile Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemiyle elde edilen tahminlere ilişkin saçılma grafiği verilmiştir. Kalman Filtresi yöntemiyle elde edilen tahminlerin indirgemeli EKK yöntemiyle elde edilen tahminlere göre gerçek değerlere daha yakın çıktığı gözlemlenmiştir.



Şekil 5.7 Gerçek değerler, Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK Yöntemi ile elde edilen tahminlere ilişkin saçılma grafiği

Çizelge 5.8 ile indirgemeli EKK ve Kalman Filtresi yöntemleri kullanılarak elde edilen tahminlerin ortalamaları ve her bir parametreye ilişkin hata kareler ortalamaları verilmiştir.

Çizelge 5.8 α_t, β_t için tahmin sonuçları

		İndirgemeli Ekk Tahmin Ortalaması	Kalman Filtresi Tahmin Ortalaması	İndirgemeli Ekk HKO	Kalman HKO
$n = 100$	$\alpha = 2$	1.659358	2.360299	0.8657	0.0517
	$\beta = 3$	2.892123	3.373859	0.7632	0.0571

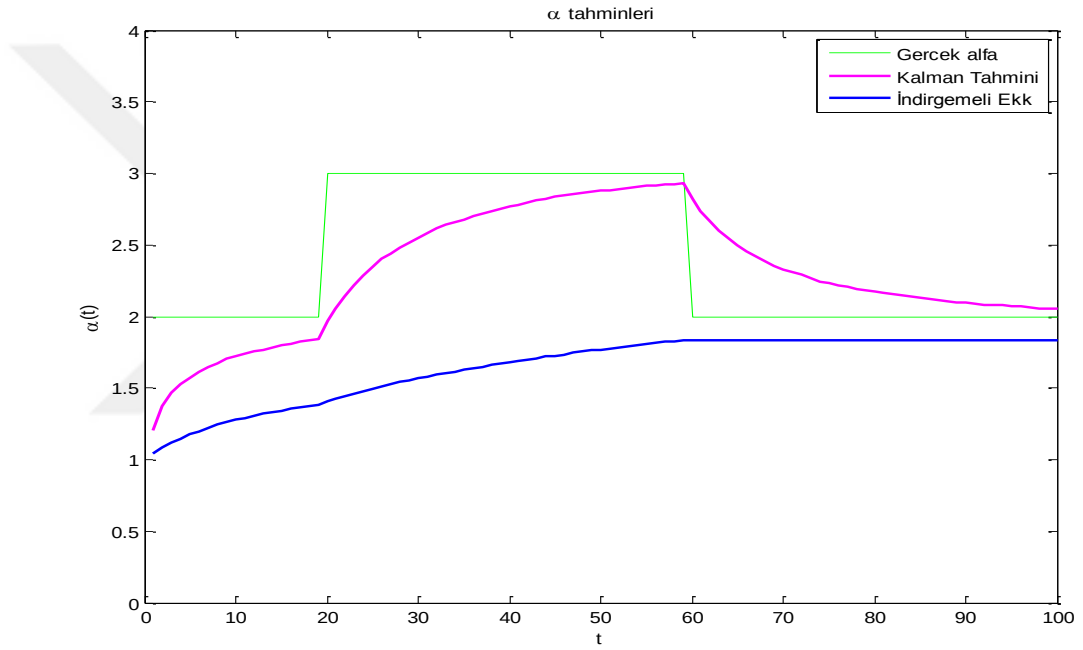
Çizelge 5.8’de α_t, β_t parametreleri için elde edilen tahmin sonuçları verilmiştir. Her iki parametre için de Kalman Filtresi kullanılarak elde edilen tahminlere ilişkin hata kareler ortalamasının daha düşük olduğu görülmüştür.

Durum 2. Çizelge 5.9 ile durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri verilmiştir. Bir önceki duruma göre durum gürültü kovaryansı daha küçük alınmıştır.

Çizelge 5.9 Durum, ölçüm gürültü kovaryans matrisi ve başlangıç değerleri

Q	R	P	α_0	b_0
$0.0001 \times I_2$	0.01	$I_2 \times 0.001$	1	1

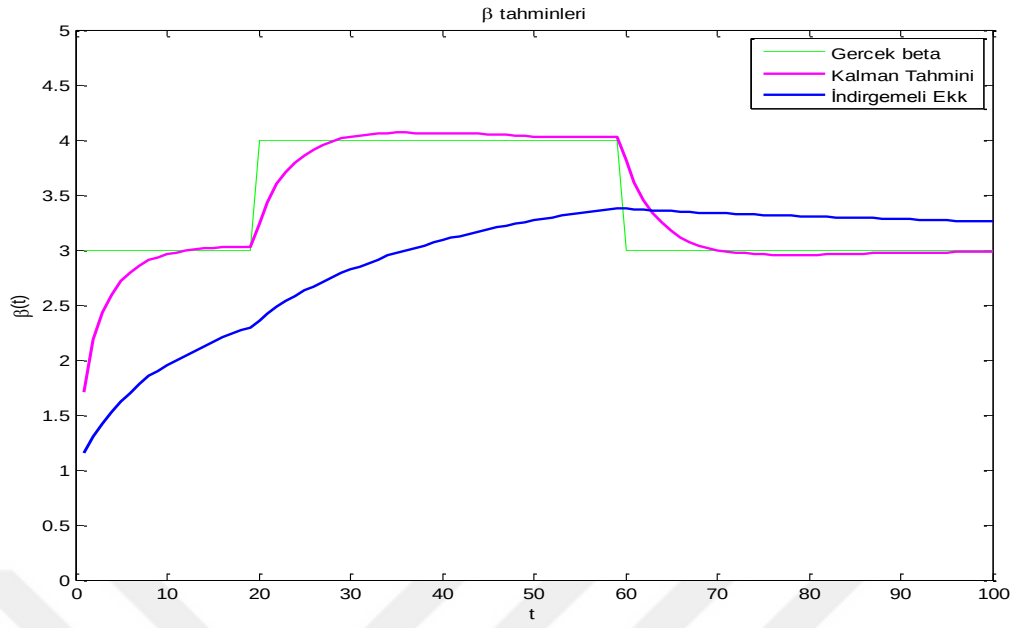
Çizelge 5.9 ile verilen değerler kullanılarak simülasyon çalışması tekrar yapılmış ve α_t parametresine ilişkin elde edilen tahminlerin grafikleri Şekil 5.8 ile verilmiştir.



Şekil 5.8 α_t parametresi için Kalman Filtresi ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri

Şekil 5.8 ile bir önceki durumda olduğu gibi yine Kalman Filtresi Tahmininin α_t parametresine indirgemeli EKK yöntemine göre daha yakın sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

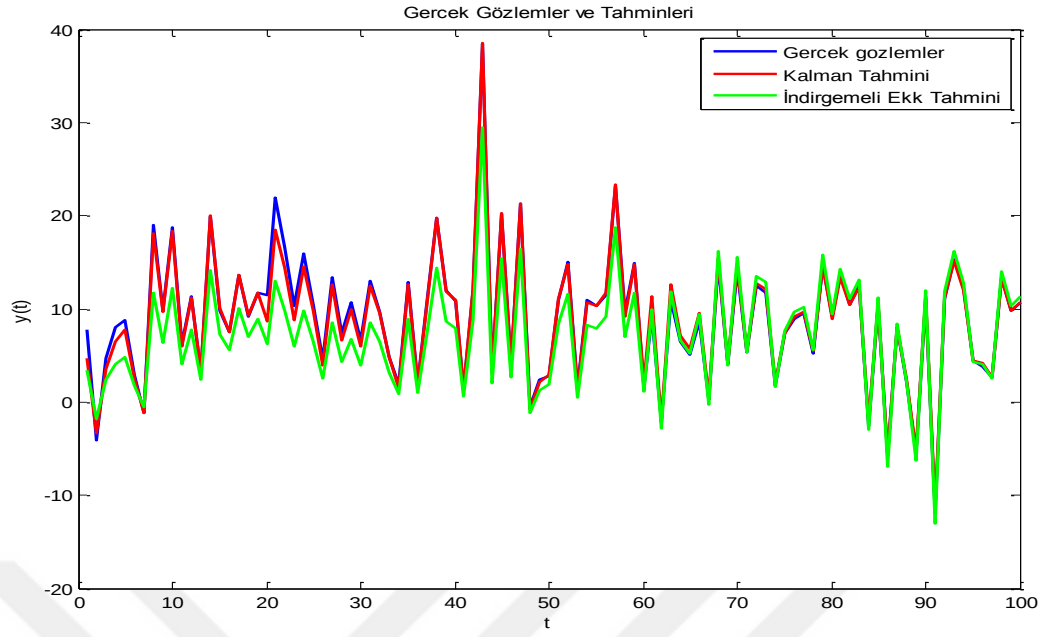
Şekil 5.9 ile β_t parametresi için Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemi ile elde edilen tahminlere ilişkin grafikler verilmiştir.



Şekil 5.9 β_t parametresi için Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK Yöntemi tahminleri

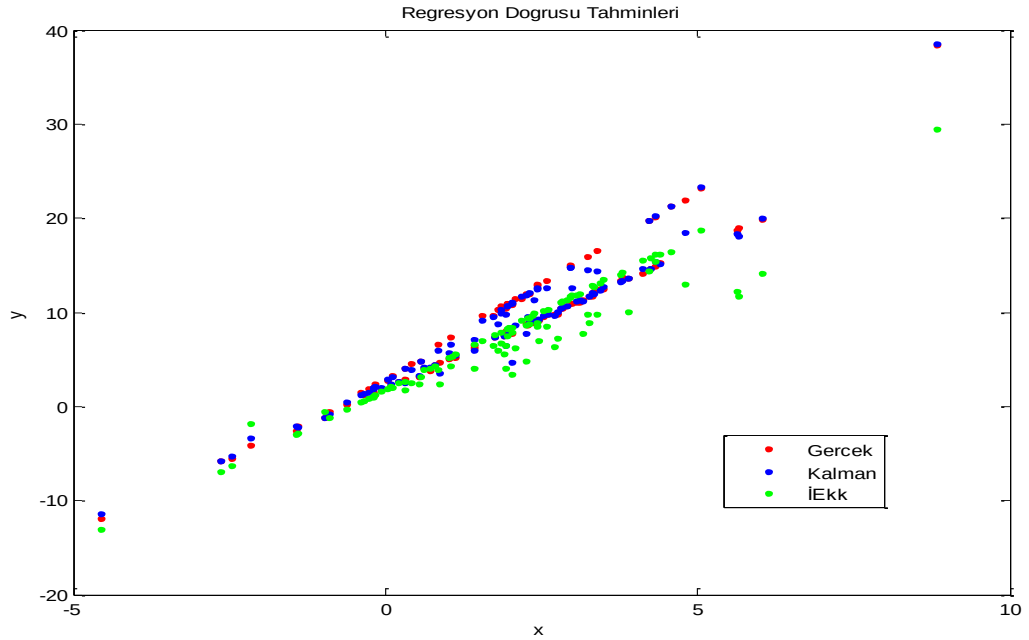
Kalman Filtresi Tahminlerinin β_t parametresini başarılı bir biçimde takip ettiği gözlemlenmiştir.

Şekil 5.10 ile gerçek gözlemler ile Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemleri kullanılarak elde edilen tahminlere ilişkin grafikler çizdirilmiştir. Kalman Filtresinin indirgemeli EKK yöntemine göre gerçek değerlere daha yakın tahmin sonuçları verdiği bu şekil ile de görülmüştür.



Şekil 5.10 Gerçek gözlemler, Kalman Filtresi, En Küçük Kareler ve İndirgemeli En Küçük Kareler Yöntemi tahminleri

Şekil 5.11 ile gerçek değerlere ilişkin saçılma grafiği ile Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemi kullanılarak elde edilen tahminlere ilişkin saçılma grafiği verilmiştir.



Şekil 5.11 Gerçek değerler, Kalman Filtresi ve İndirgemeli En küçük Kareler Yöntemi ile elde edilen tahminlere ilişkin saçılma grafiği

Kalman Filtresi yöntemiyle elde edilen tahminlerin indirgemeli EKK yöntemiyle elde edilen tahminlere göre gerçek değerlere daha yakın çıktığı gözlemlenmiştir.

Çizelge 5.10 ile indirgemeli EKK ve Kalman Filtresi yöntemleri kullanılarak elde edilen tahminlerin ortalamaları ve her bir parametreye ilişkin hata kareler ortalamaları verilmiştir.

Çizelge 5.10 $\alpha=2$, $\beta=3$ için tahmin sonuçları

		İndirgemeli Ekk Tahmin Ortalaması	Kalman Filtresi Tahmin Ortalaması	İndirgemeli Ekk HKO	Kalman HKO
$n = 100$	$\alpha = 2$	1.653654	2.306177	0.8149	0.1675
	$\beta = 3$	2.917346	3.369081	0.8063	0.0992

Her iki parametre için de Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerin hata kareler ortalaması indirgemeli EKK yöntemine göre daha düşük çıkmıştır.

Parametrelerin zamanla değiştiği durumda değişimin filtre tarafından iyi bir şekilde takip edildiği grafiklere bakılarak söylenebilir. Q küçüldükçe Kalman Filtresi tahminlerinin gerçek değerlere göre daha fazla sapma gösterdiği, parametrelere ilişkin hata kareler ortalamalarının arttığı gözlemlenmiştir. Grafiklere bakıldığında gözlem değerleri ile Kalman Filtresi kullanılarak elde edilen tahmin değerlerinin uyumunun, indirgemeli EKK yöntemine göre elde edilen tahminlerden daha iyi olduğu görülmektedir.

5.2 Otokorelasyonlu Hatalı Regresyon Modellerinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi ve Parametrelerinin Tahmini

Hatalarda otokorelasyonun varlığı en küçük kareler yöntemi üzerinde çeşitli etkilere sahiptir (Montgomery, 2013).

Bu simülasyon çalışması için Denklem (3.3) ile verilen regresyon modeli göz önüne alınsın. Model

$$y_t = 2 + 3x_t + e_t, t = 1, 2, \dots, 100$$

olmak üzere hatalar arasında

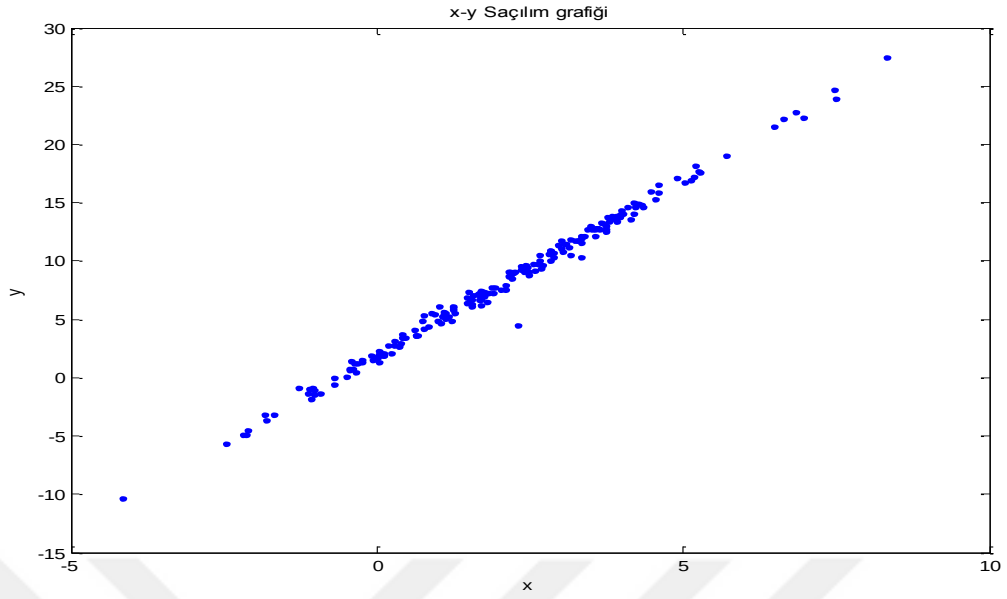
$$e_t = 0.3e_{t-1} + \varepsilon_{t-1}, -1 < a < 1$$

biçiminde bir ilişki olduğu durum göz önüne alınsın. Simülasyon çalışmasında model parametreleri $\alpha = 2, \beta = 3$ olarak alınmıştır. $t = 1, 2, \dots, 100$ için X_t ler Normal(2,4) dağılımından ve e_t gürültüleri Normal(0,4) dağılımından rastgele üretilerek y_t gözlemleri elde edilmiştir. ε_t lar da Beyaz gürültü süreci olarak $\varepsilon_t \sim N(0, 2^2)$ biçiminde alınmıştır. Buna göre model,

$$y_t = 2 + 3x_t + e_t, t = 1, 2, \dots, 100$$

biçiminde olmak üzere model parametrelerinin tahminleri için simülasyonlar 100 kez tekrarlanarak parametre tahminleri ve hata kareler ortalamaları elde edilmiştir.

Bu şekilde alınan bir modelde x ve y değişkenleri için saçılım grafiği çizdirilmiştir.



Şekil 5.12 x ve y değişkenlerinin değerleri için saçılım grafiği

Kısım 3.2.1 de verildiği gibi hata terimi durum vektörüne durum gibi eklenerek durum denklemleri,

$$\begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ e_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{t-1} \\ \beta_{t-1} \\ e_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$$

biçiminde ele alınır. Gözlem denklemleri ise

$$y_t = (1 \quad x_t \quad 0.3) \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ e_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varepsilon_{t-1} \end{pmatrix}$$

biçiminde olur. Model durum-uzay modeli haline getirildikten sonra Kalman Filtresi kullanılarak α_t ve β_t regresyon parametreleri ile hata terimi tahmin edilebilir. Hata terimine ait AR(1) sürecindeki a parametresini tahmin etmek için ise lineer olmayan durum-uzay modeline geçip tahminleri İlerletilmiş Kalman Filtresine göre yapmak gerekir. Bu parametrenin bilindiği koşulu altında regresyon parametreleri ve hata terimi Kalman Filtresi kullanılarak tahmin edilebilir. Çizelge 5.11 ile her bir simülasyon için

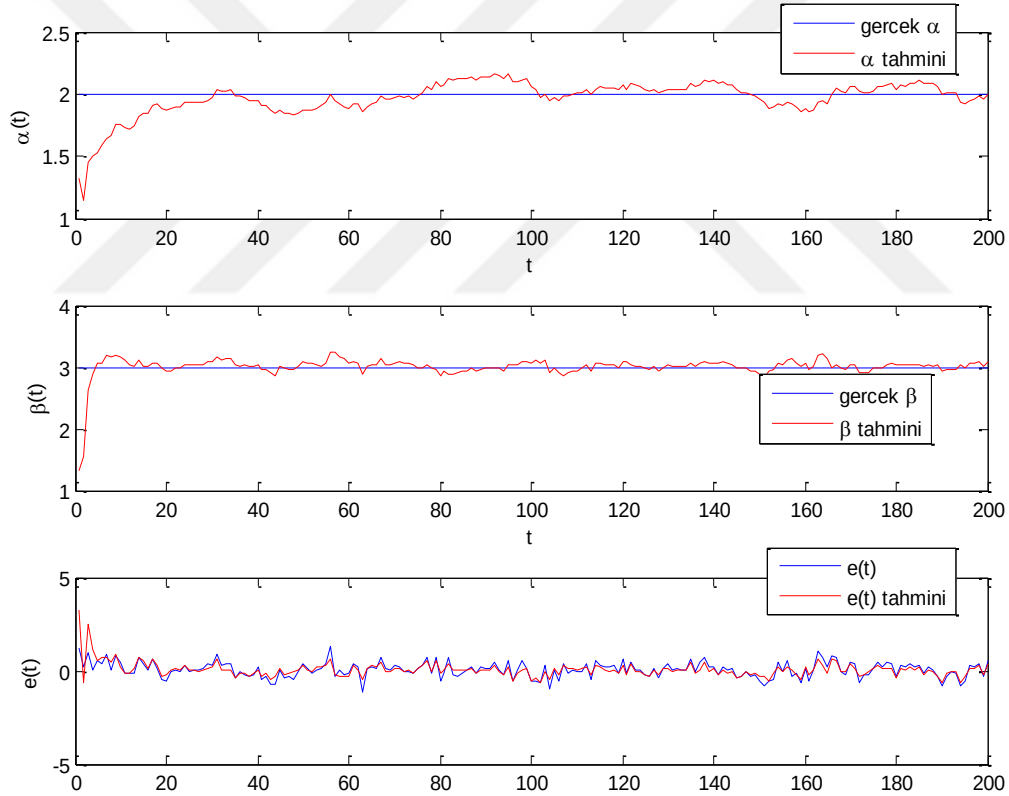
gözlem sayısı, gerçek parametre değerleri, ölçüm, gürültü ve başlangıç durum hatası kovaryansları ve parametreler için başlangıç değerleri verilmiştir.

Çizelge 5.11 Durum ve ölçüm gürültü matris değerleri ve başlangıç değerleri

n	α	β	a	Q	R	P	α_0	β_0	e_0
200	2	3	0.3	$0.0001 \times I_2$	0.0001	$I_2 \times 0.0001$	1	1	1

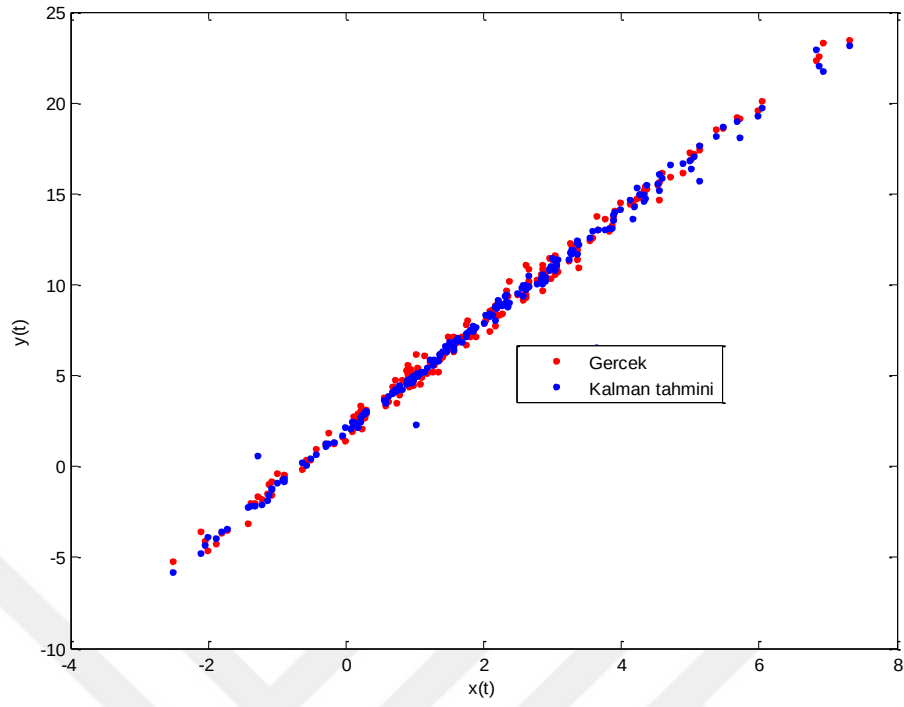
Çizelge 5.11’de durum ve ölçüm gürültü matris değerleri verilmiştir.

Verilen başlangıç değerleri ve hata kovaryans matrisleri kullanılarak parametreler ve hata terimi Kalman Filtresi kullanılarak tahmin edilmiş ve tahmin sonuçlarına ilişkin grafikler Şekil 5.13 ile verilmiştir.



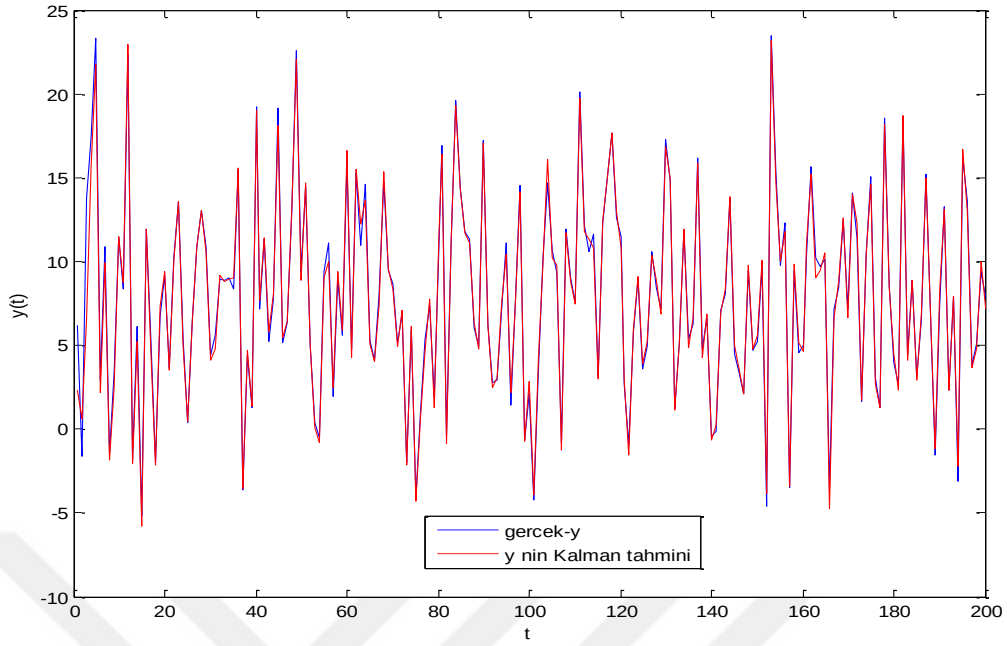
Şekil 5.13 α ve β parametreleri ve e_t için Kalman Filtresi tahminleri

Tahminlerin parametrelerin gerçek değerlerine yakın sonuçlar verdikleri görülmüştür. Şekil 5.14 ile x_t ’ye karşılık gelen y_t ’nin gerçek değerleri ve Kalman Filtresi kullanılarak elde edilen tahminlerine ilişkin saçılım grafikleri verilmiştir.



Şekil 5.14 Gerçek değerler, Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlere ilişkin saçılma grafiği

Şekil 5.15 ile Kalman Filtresi kullanılarak elde edilen $\hat{y}_t$ tahminleri ile y_t 'nin gerçek değerlerine ilişkin grafik çizdirilmiştir.



Şekil 5.15 Kalman Filtresi tahminleri ve y_t 'nin gerçek değerleri

Şekil 5.15'e bakılarak, otokorelasyonlu hataya rağmen Kalman Filtresi ile parametrelerin iyi bir şekilde tahmin edilebildiği söylenebilir.

5.3 ARX Modelinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi ve Parametrelerinin Tahmini

Bu kısımda,

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + b_1 u_{t-1} + e_t$$

biçiminde ARX(2,1) modeli göz önüne alınmıştır. Bu modelde, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$, $b_1 = 1$ ve hatalar (gürültüler) sıfır ortalamalı, 1 varyanslı Standart Normal dağılıma sahip olarak üretilip, model yapısına bağlı olarak sistem çıktıları elde edilmiştir. Buna göre model,

$$y_t = 2y_{t-1} - y_{t-2} + u_{t-1} + e_t \quad (5.4)$$

biçiminde olup elde edilen (sanki gözlenen) sistem çıktıları kullanarak model parametreleri indirgemeli en küçük kareler yöntemi ve Kalman Filtresi kullanılarak tahmin edilmiştir.

Parametre vektörünün bir durum vektörü olarak alınması ile Bölüm 3.3.4’de anlatıldığı

üzere $\underline{\theta}_t = \begin{pmatrix} (a_1)_t \\ (a_2)_t \\ (b_1)_t \end{pmatrix}$ biçiminde tanımlanırsa,

$$\begin{aligned}\underline{\theta}_{t+1} &= \underline{\theta}_t + \underline{\xi}_t \\ \underline{Y}^t &= X_t \underline{\theta}_t + \underline{e}^t\end{aligned}\tag{5.5}$$

lineer kesikli-zaman durum-uzay modeli göz önüne alınıp model parametreleri Kalman Filtresinin işletilmesi ile tahmin edilebilir. $\underline{\xi}_t$ hata vektörü sıfır ortalamalı, örneğin, $Cov(\underline{\xi}_t) = Q_t = 10^{-3}I$ kovaryans matrisli ve modeldeki diğer değişkenlerden bağımsız varsayılabilir. $R_t = Cov(\underline{e}^t) = 10^{-3}I$ olmak üzere, Kalman Filtresi

$$\hat{\underline{\theta}}_0 = m_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P(0) = P_0$$

$$\hat{\underline{\theta}}_{t+1|t} = \hat{\underline{\theta}}_{t|t-1} + K_t(\underline{Y}^t - X_t \hat{\underline{\theta}}_{t|t-1})$$

$$K(t) = P(t)X'_t[X_t P(t)X'_t + R_t]^{-1}$$

$$P(t+1) = P_t + Q_t - P_t \underline{X}'_t [X_t P_t X'_t + R_t]^{-1} X_t P_t$$

olup, burada $P(t) = Cov(\underline{\theta}_t - \hat{\underline{\theta}}_{t|t-1})$ ve K_t Kalman kazanç matrisidir.

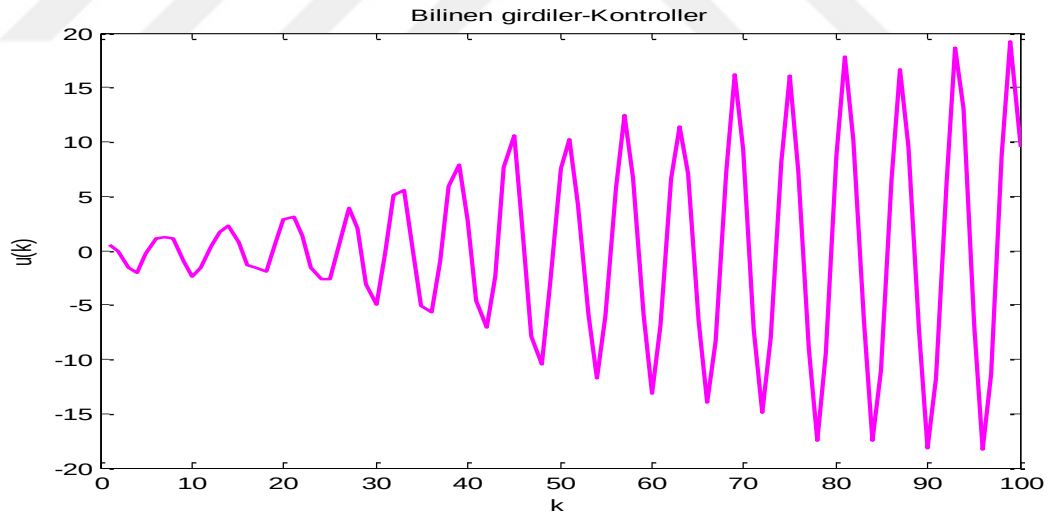
Bu şekilde yapılan simülasyon çalışması ile sistem girdi çıktıları ve parametre tahminleri elde edilmiştir. Çizelge 5.12 ile Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemi kullanılarak elde edilen tahminlerin ortalamaları ve hata kareler ortalaması sonuçları verilmiştir.

Çizelge 5.12 a_1, a_2, b_1 tahmin sonuçları

		Kalman Tahminleri Ortalaması	İndirgemeli Ekk Tahminleri Ortalaması	HKO Kalman	HKO İndirgemeli Ekk
$n = 100$	$a_1 = 2$	1.9820	1.9923	0.0015	0.0034
	$a_2 = -1$	-0.9819	-0.9924	0.002	0.0037
	$b_1 = 1$	0.9637	0.9625	0.0006	0.0013

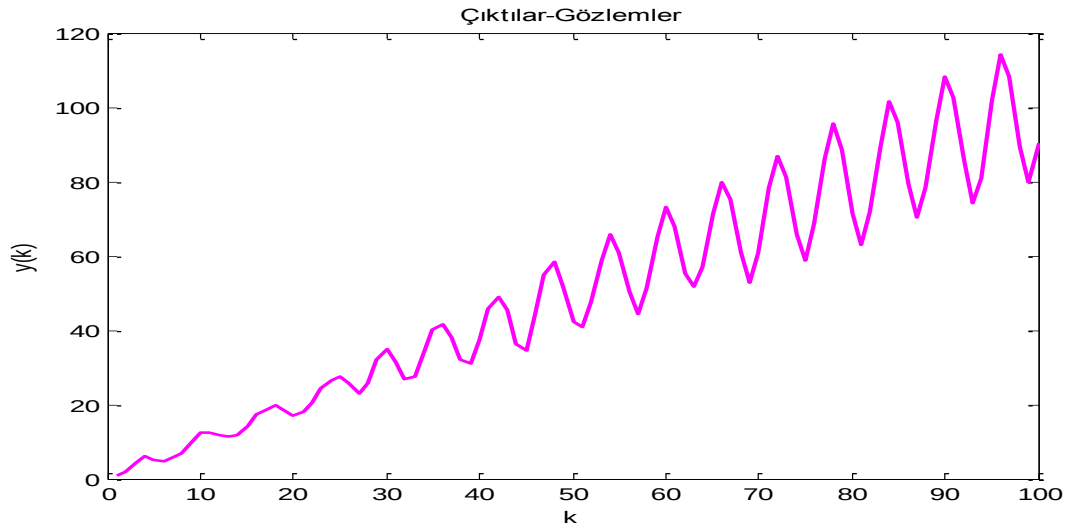
Model parametrelerine ait elde edilen tahminlerin her iki yöntemde de birbirlerine ve gerçek değerlere yakın değerler aldıkları söylenebilir. Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerin hata kareler ortalamaları indirgemeli EKK yöntemi ile elde edilenlerden daha küçük çıkmıştır.

(5.4) modelinde bilinen girdi $u(t)$ 'ler $u(t) = t - y(t), t = 1, 2, \dots, 100$ olarak sisteme eklenmiştir. Bilinen girdiler yani kontrollerin grafikleri Şekil 5.16 ile verilmiştir.



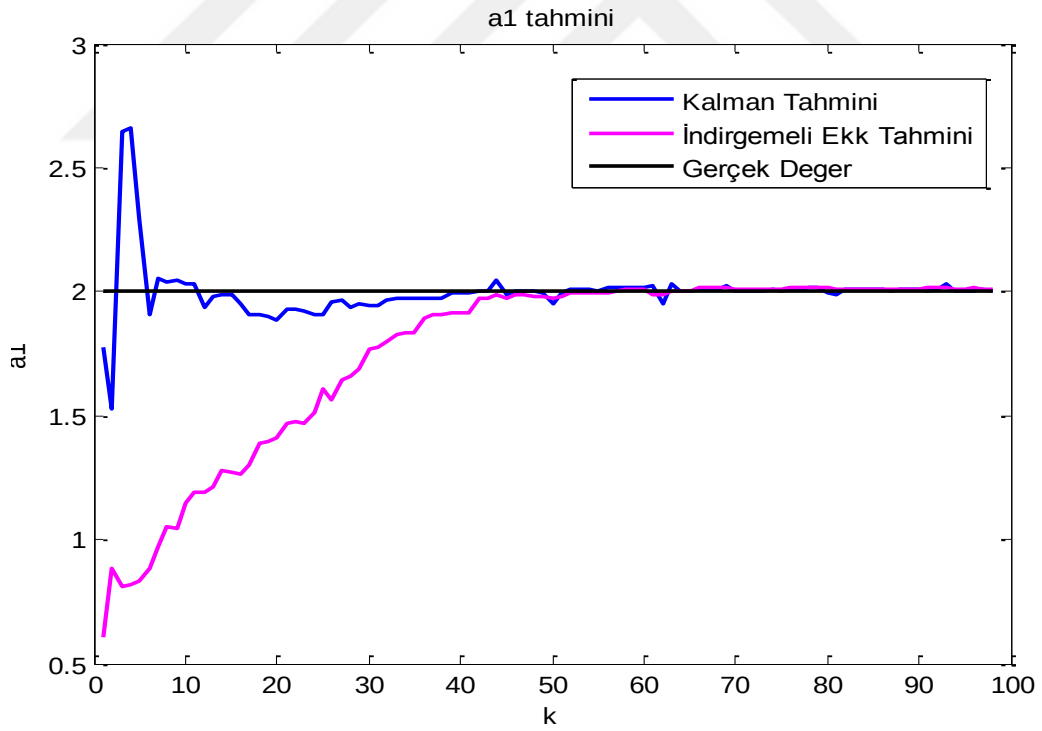
Şekil 5.16 Bilinen girdiler (kontroller)

Şekil 5.17 ile simülasyon çalışması yapılan ARX modeline ait çıktıların yani y_t gözlemlerinin grafikleri verilmiştir.



Şekil 5.17 Çıktılar (y_t gözlemleri)

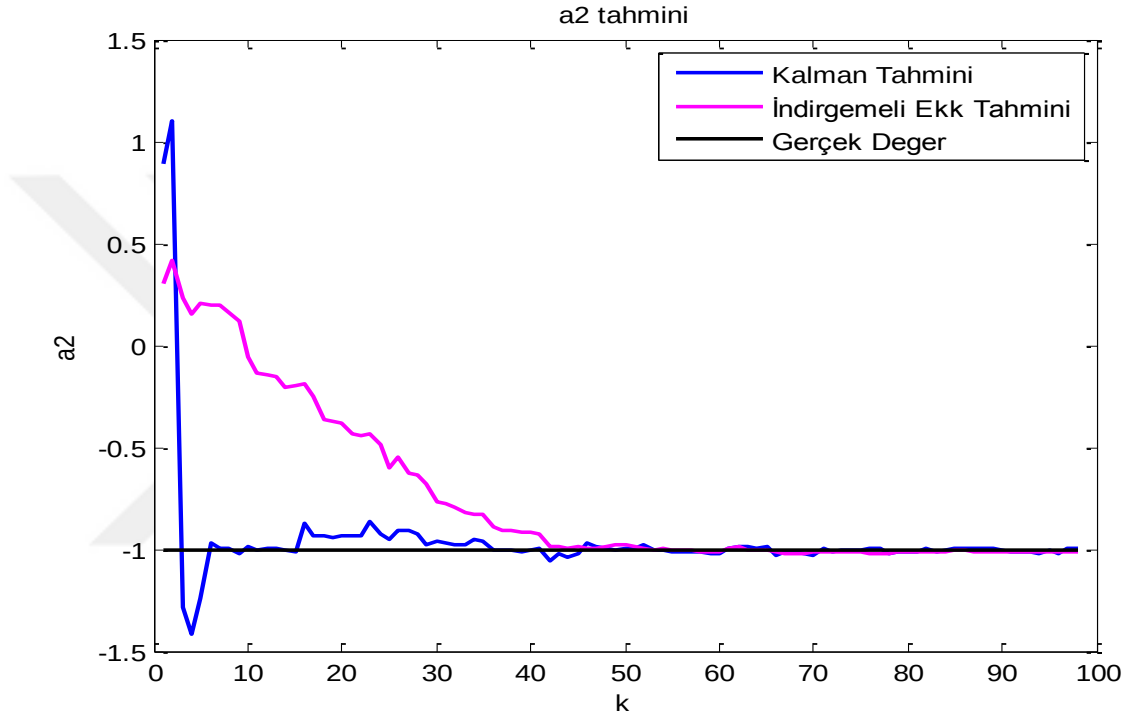
Şekil 5.18 ile model parametresi a_1 için Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemine göre elde edilen tahmin sonuçları ve gerçek değerinin grafiği verilmiştir.



Şekil 5.18 Model Parametresi a_1 ' in Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini

Mavi renk ile Kalman filtresi tahminleri, pembe renk ile indirgemeli EKK tahminleri ve siyah renk ile parametrenin gerçek değeri gösterilmiştir. İndirgemeli EKK yöntemi ve Kalman Filtresinin başlangıç değerleri farklı olmasına rağmen kısa bir süre içinde birbirlerine yakın değerler almaya başladıkları görülmektedir.

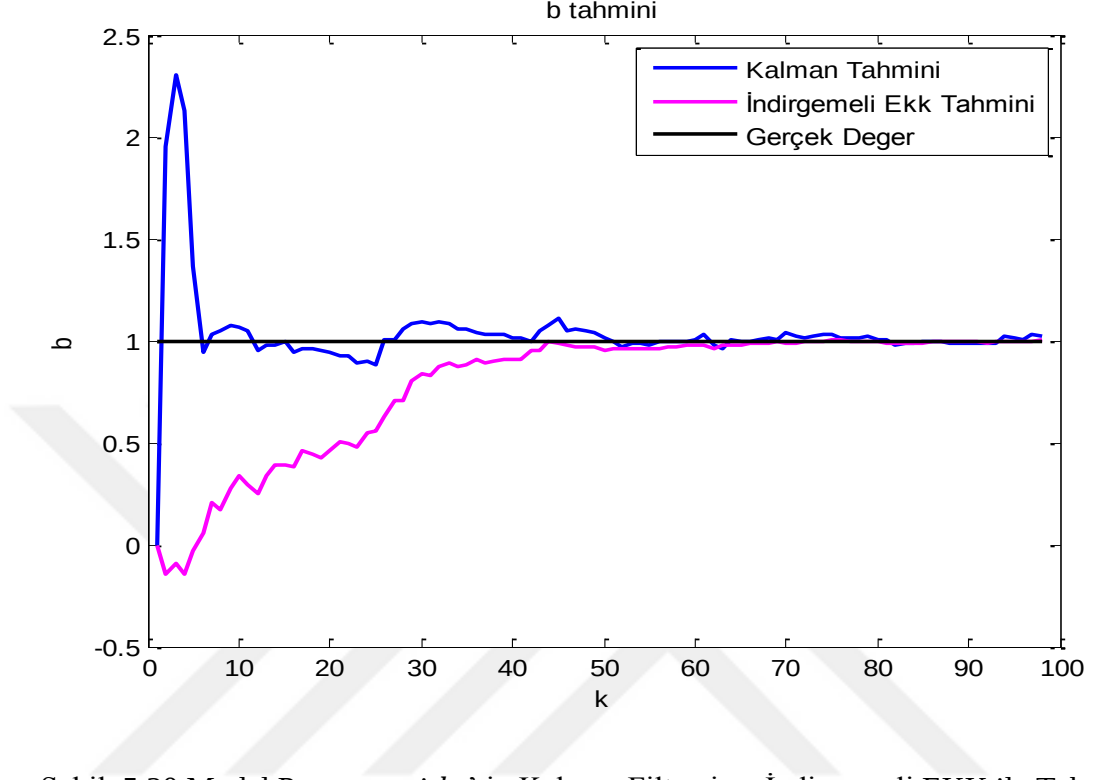
Şekil 5.19 ile model parametresi a_2 için Kalman filtresi ve indirgemeli EKK yöntemine ait tahmin sonuçları verilmiştir.



Şekil 5.19 Model Parametresi a_2 ' nin Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini

Mavi renk ile Kalman filtresi tahminleri, pembe renk ile indirgemeli EKK tahminleri ve siyah renk ile parametrenin gerçek değeri gösterilmiştir. İndirgemeli EKK yöntemi ve Kalman filtresinin tahmin değerlerinin birbirlerine yakın olduğu görülmüştür. Kalman Filtresinin gerçek değerleri daha kısa sürede yakaladığı, bu nedenle de hata kareler ortalamasının daha küçük olduğu görülmüştür.

Şekil 5.20 ile model parametresi b_1 'in gerçek değeri ile Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemi kullanılarak elde edilen tahmin sonuçlarına ait grafik verilmiştir.



Şekil 5.20 Model Parametresi b_1 ' in Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini

Mavi renk ile Kalman filtresi tahminleri, pembe ile indirgemeli EKK tahminleri ve siyah renk ile parametrenin gerçek değeri gösterilmiştir. İndirgemeli EKK yöntemi ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerin gerçek değere yakın olduğu görülmüştür. Kalman Filtresi tahminleri gerçek değeri daha çabuk yakalamaktadır.

5.4 ARMAX Modelinin Durum-Uzay Modeli Gösterimi ve Parametrelerinin Tahmini

Bu kısımda,

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + b_1 e_t + b_2 e_{t-1} + c_1 u_{t-1}$$

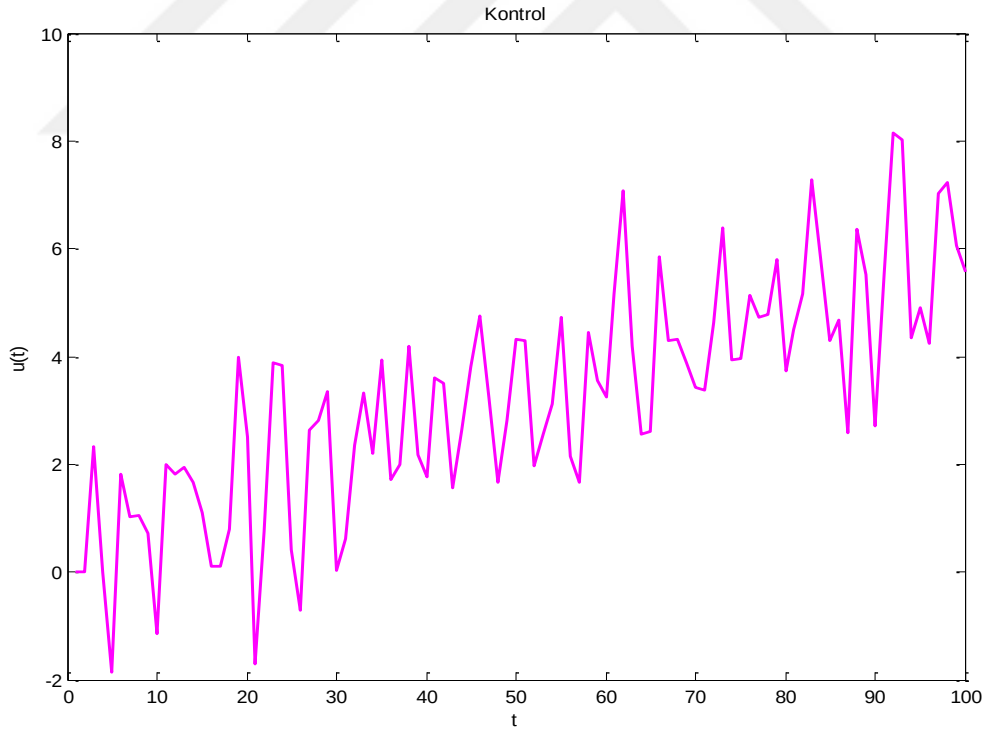
biçiminde bir Armax(2,2,1) modeli gözönüne alınmıştır. Bu modelde, $a_1 = 1.5$, $a_2 = -0.56$, $b_1 = 1$, $b_2 = -0.5$, $c_1 = 1$ ve hatalar (gürültüler) sıfır ortalamalı, 1 varyanslı Standart Normal dağılıma sahip olarak üretilip, model yapısına bağlı olarak sistem çıktıları elde edilmiştir. Buna göre simülasyon çalışması için model,

$$y_t = 1.5y_{t-1} - 0.56y_{t-2} + u_{t-1} + e_t - 0.5e_{t-1}$$

biçiminde alınmıştır. Model parametreleri indirgemeli EKK ve Kalman Filtresi ile tahmin edilmiştir. Bu modelde bilinen girdi $u(t)$ 'ler,

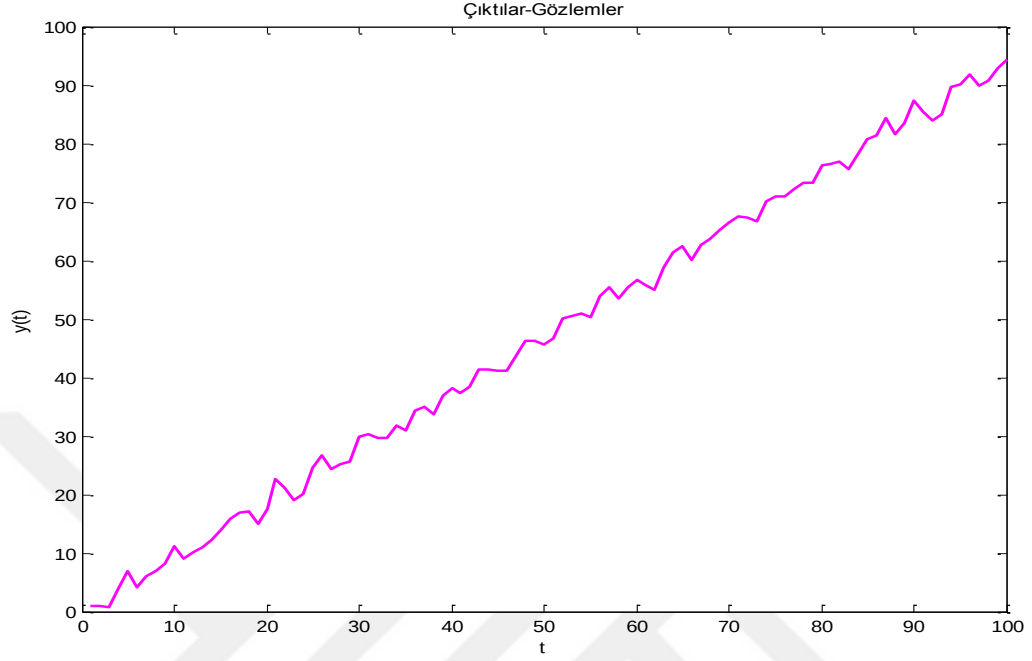
$$u_t = t - y_t, t = 1, 2, \dots, 100$$

olarak sisteme eklenmiştir. Buna göre, bilinen girdiler yani kontrollerin grafikleri Şekil 5.21 ile verilmiştir.



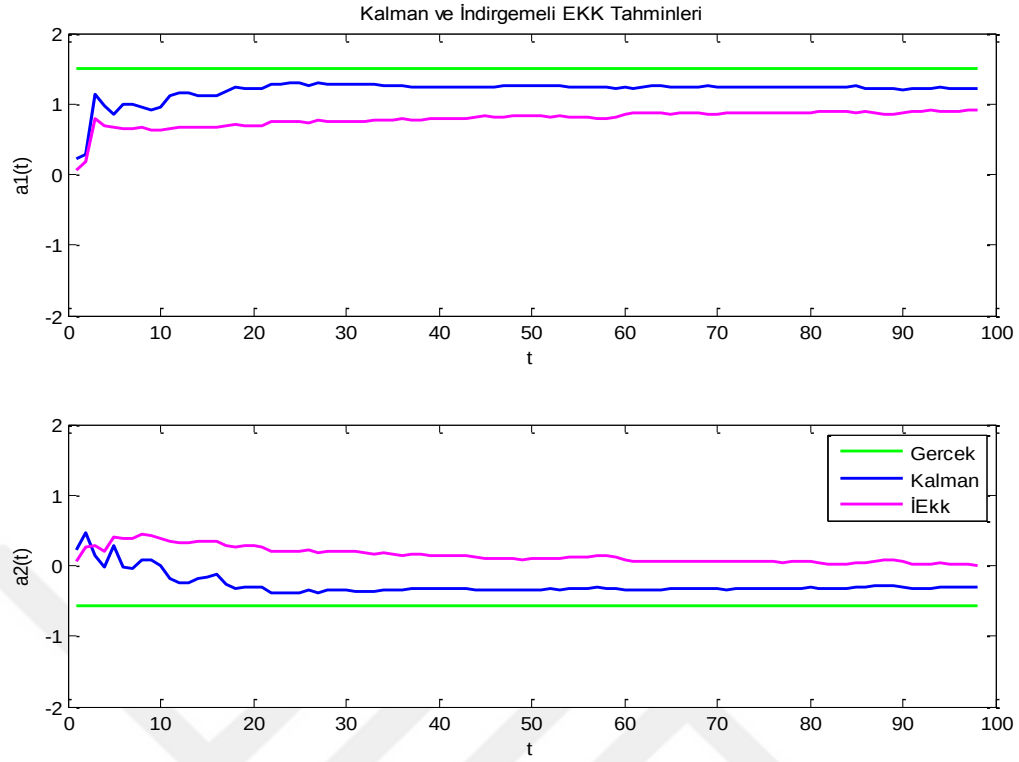
Şekil 5.21 Bilinen girdiler ve kontroller

Şekil 5.22 ile verilen Armax modeline ait çıktılar yani y_t gözlemlerinin grafikleri verilmiştir.



Şekil 5.22 Çıktılar ve gözlemler

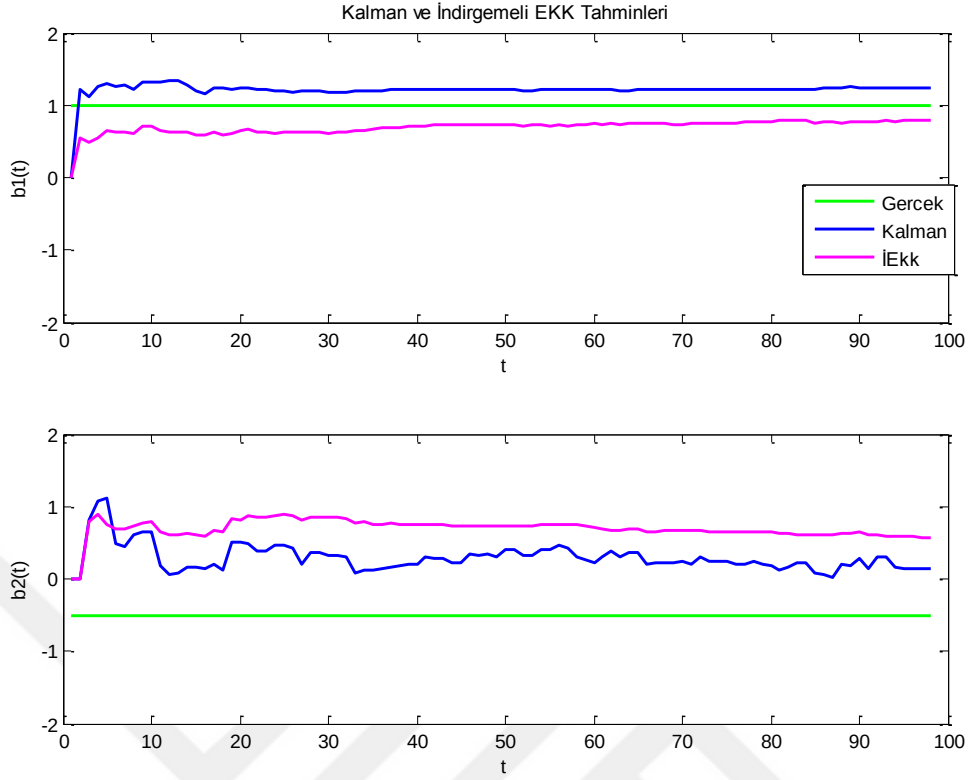
Şekil 5.23 ile model parametresi a_1 ve a_2 'nin Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemine göre elde edilen tahmin sonuçlarının grafikleri verilmiştir.



Şekil 5.23 Model Parametresi a_1 ve a_2 'nin Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini

Mavi ile Kalman filtresi tahminleri, pembe ile indirgemeli EKK tahminleri, yeşil ile tahmin edilmek istenen gerçek parametre değerleri gösterilmiştir. İndirgemeli EKK yöntemi ve Kalman Filtresinin başlangıç değerleri farklı olmasına rağmen kısa bir süre içinde gerçek değerlere yakın değerler almaya başladıkları görülmektedir. Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerin indirgemeli en küçük kareler yöntemi ile elde edilen tahminlere göre daha iyi oldukları görülmektedir.

Şekil 5.24 ile model parametresi b_1 ve b_2 'nin Kalman Filtresi ve indirgemeli EKK yöntemine göre elde edilen tahmin sonuçlarına ilişkin grafikleri verilmiştir.



Şekil 5.24 Model Parametresi b_1 ve b_2 'nin Kalman Filtresi ve İndirgemeli EKK ile Tahmini

Mavi renk ile Kalman filtresi ile elde edilen tahminler, pembe renk ile indirgemeli EKK yöntemi ile elde edilen tahminler, yeşil renk ile gerçek parametre değerleri gösterilmiştir. İndirgemeli EKK yöntemi ve Kalman Filtresinin başlangıç değerleri farklı olmasına rağmen kısa bir süre içinde gerçek değerlere yakın değerler almaya başladıkları, Kalman Filtresi tahminlerinin indirgemeli EKK yöntemiyle elde edilen tahminlere göre daha iyi oldukları görülmektedir.

Çizelge 5.13 ile her iki yönteme göre elde edilen parametre tahminlerine ilişkin hata kareler ortalamaları verilmiştir.

Çizelge 5.13 Parametre tahminlerine ilişkin hata kareler ortalamaları

	HKO Kalman	HKO İndirgemeli EKK
a_1	0.1189	0.5231
a_2	0.1021	0.5083
b_1	0.0606	0.1014
b_2	0.6608	1.4462

Çizelge 5.13 ile elde edilen sonuçlar da grafiklerle elde edilen sonuçlara benzer olarak Kalman filtresi tahminlerinin indirgemeli EKK tahminlerine göre daha iyi olduğunu söylemektedir. Kalman filtresi tahminleri hata kareler ortalaması anlamında indirgemeli EKK yöntemine göre daha iyi sonuçlar vermiştir.

5.5 Gerçek Veri Uygulaması

Yeni Covid-19 hastalığı Çin'in Hubei Eyaleti, Wuhan kentinde 2019 yılı Aralık ayı sonunda ortaya çıkmış ve Covid-19 virüsü, solunum yolu belirtileri (ateş, öksürük, nefes darlığı) gösteren hastalar üzerinde yapılan çalışmalar sonucunda 13 Ocak 2020 tarihinde tanımlanmıştır. Covid-19 virüsünün çok hızlı bir şekilde yayılması ve tüm dünyayı etkisi altına alması nedeniyle 11 Mart 2020 tarihinde Dünya Sağlık Örgütü tarafından küresel salgın (pandemi) ilan edilmiştir.

Pandemi sürecinde vaka sayısının artmasını önlemek amacıyla birçok ülke farklı tedbirler almış ve birçok alanda kısıtlamaya gitmiştir. Alınan tedbir ve kısıtlamalar ülkelere göre farklılık göstermektedir. Alınan tedbirlerin bir kısmı ile başarıya ulaşırken bir kısmında da istenen başarı elde edilememiştir. Salgınının yayılma hızının ve günlük vaka sayılarının tahmini Covid-19 ile mücadele eden bütün ülkeler için oldukça önemlidir. Çünkü bu tahminlere göre sağlık sistemine ilişkin planlamalar yapılabilir ve gerekli önlemler baştan alınarak salgının seyri daha iyi yönetilebilir.

Bir hastalık nedeniyle enfekte olan ya da hayatını kaybeden insan sayısını yaklaşık olarak tahmin etmek için matematiksel modellemeler kullanılabilmektedir. COVID-19 hastalarının sayısını tahmin etmek için de önerilen bir takım modeller vardır. Bu modeller arasında lineer olmayan büyüme modelleri ve Susceptible, Infectious or Recovered (SIR)

modeline dayanan modeller yer almaktadır. SIR modelinde S, hastalığa açık veya elverişli birey sayısını, I enfekte olan birey sayısını, R ise iyileşen veya hayatını kaybeden birey sayısını ifade etmektedir.

Tezin gerçek veri uygulaması kısmında, son iki yıldır tüm dünyanın gündemini meşgul eden Covid-19 verileri alınmış ve Türkiye için COVID-19 vaka ve ölüm sayısını tahmin etmek amacıyla dinamik lineer modelleri yani durum-uzay modellerini kullanmak amaçlanmıştır. Bu amaçla tahmin yapabilmek için tez kapsamında anlatılan Kalman Filtresi yöntemi kullanılmıştır. Veriler, Sağlık Bakanlığı tarafından açıklanan 25.11.2020-25.12.2021 tarihleri arasındaki günlük Covid-19 vaka ve ölüm sayıları olarak alınmıştır. Günlük vaka sayılarını tahmin etmek için AR(1) modeli, ölüm sayılarını tahmin etmek için ise regresyon modeli kullanılmıştır.

1. Model:

Günlük vaka sayısı y_t ile ifade edilmek üzere,

$$y_t = \theta y_{t-1} + v_t \quad (5.5)$$

şeklinde AR(1) modeli ile ifade edilsin (Özbek ve Demirtaş, 2021). Burada, $v_t \sim N(0, \sigma_v^2)$ olmak üzere korelasyonsuz rasgele hataları gösterir. θ parametresinin de zamanla değiştiği durum göz önüne alınırsa θ_t rastgele yürüyüş süreci olarak

$$\theta_t = \theta_{t-1} + w_t \quad (5.6)$$

ile ifade edilebilir. Burada, $w_t \sim N(0, \sigma_w^2)$ ve v_t hata terimlerinden bağımsız varsayılabilir. Buna göre günlük vaka sayısına ilişkin durum-uzay modeli;

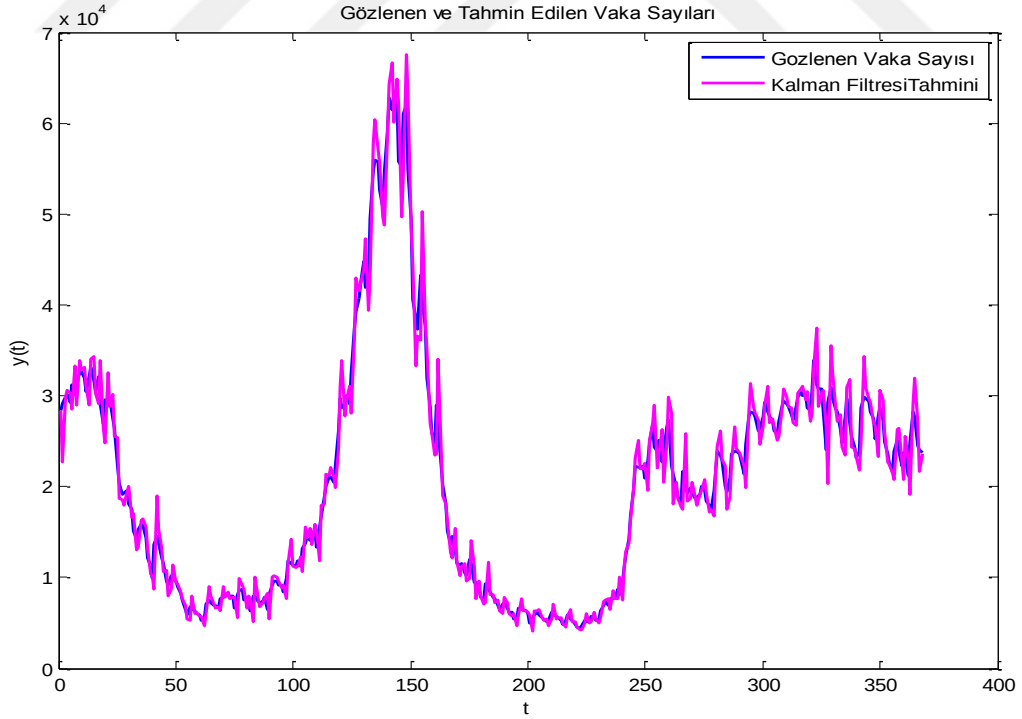
$$\theta_t = \theta_{t-1} + w_t \quad (5.7)$$

$$y_t = \theta_t y_{t-1} + v_t$$

biçiminde ifade edilebilir. (5.7) ile verilen durum-uzay modelinde amaç θ_t ile ifade edilen durumların belirlenmesidir. Bu şekilde problem aslında,

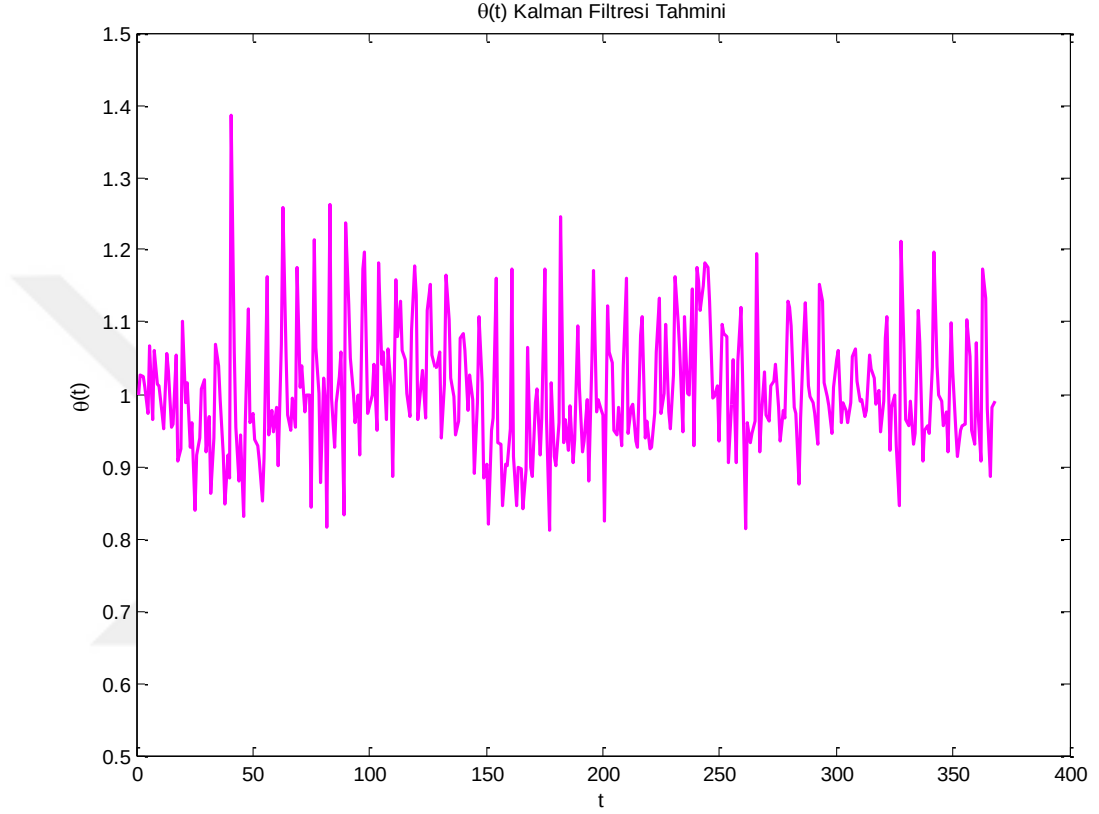
$$y_t = \theta_t y_{t-1} + v_t$$

ile verilen AR(1) modelindeki θ_t zamanla değişen parametresinin belirlenmesi (tahmin edilmesi) problemine dönüşmüş olur. Zamana bağlı θ_t parametresi belirlendiğinde de $t + 1, t + 2, \dots$ zamanlarındaki vaka sayıları da çevrimiçi olarak tahmin edilebilir. Zamana bağlı θ_t parametresini tahmin etmek için de Kalman Filtresi yöntemi kullanılabilir. Buna göre vaka sayıları ve θ_t parametresi için tahmin sonuçları aşağıdaki grafikler ile verilmiştir.



Şekil 5.25 Gözlenen vaka sayıları ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlere ilişkin grafik

Şekil 5.25’te gözlenen vaka sayıları ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlere ilişkin grafik çizdirilmiştir. Gözlenen vaka sayıları ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerin birbirlerine çok yakın değerler olduğu görülmüştür. Alınan döneme ilişkin Kalman Filtresi tahminlerinin hata kareler ortalaması ise 5.0514e+06 olarak bulunmuştur.



Şekil 5.26 θ_t parametresinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminleri

Şekil 5.26’da θ_t parametresinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerine ilişkin grafiği çizdirilmiştir. θ_t parametresi için Kalman Filtresi tahminlerinin ortalaması 0.9899 olarak bulunmuştur.

Çizelge 5.14 θ_t parametresi için Kalman Filtresi Tahminleri Ortalaması ve HKO

θ_t	Kalman Filtresi Tahminleri Ortalaması	Kalman Filtresi HKO
	0.9899	5.0514e+06

Çizelge 5.14'te θ_t parametresi için Kalman Filtresi Tahminleri Ortalaması ve HKO verilmiştir.

2. Model:

Günlük vaka sayısı x_t ve günlük vefat edenlerin sayısı y_t ile gösterilmek üzere y_t ile x_t arasında,

$$y_t = b_{0t} + b_{1t}x_t + v_t \quad (5.6)$$

biçiminde bir regresyon denklemi yazılabilir. Buna göre,

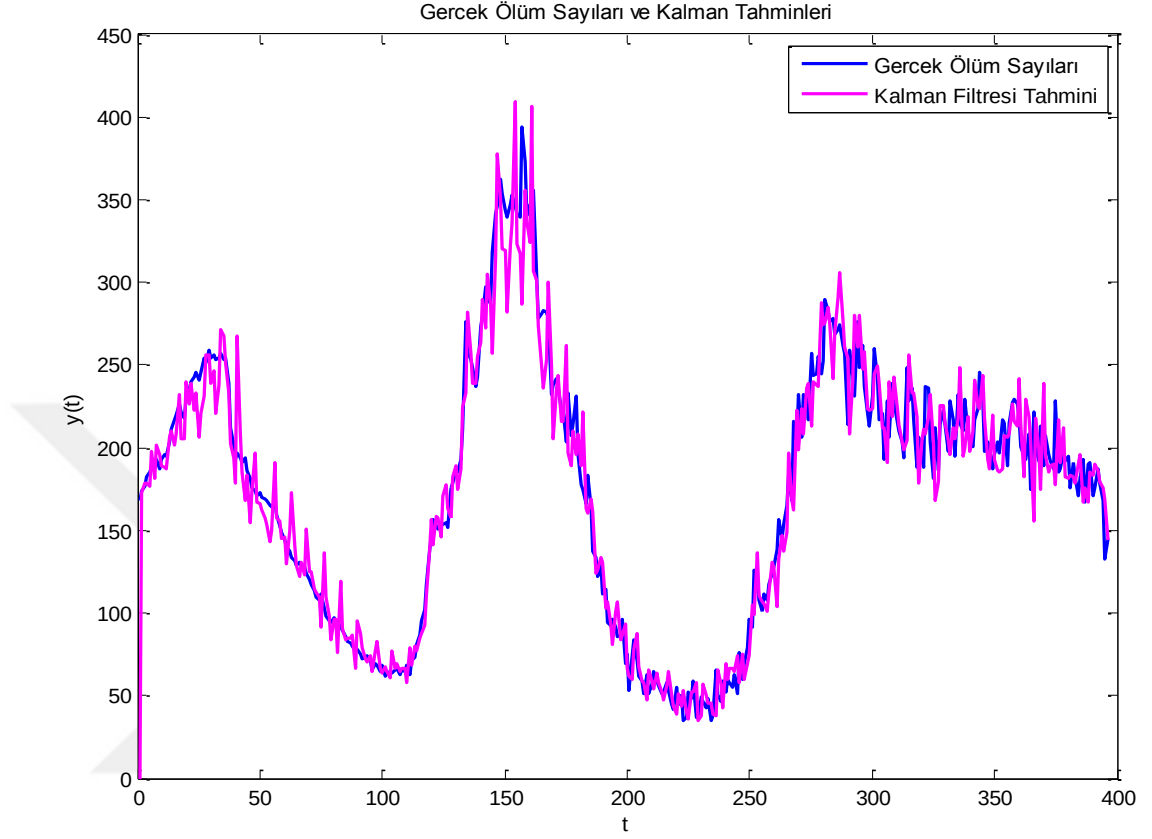
$$y_t = [1 \quad x_t] \begin{bmatrix} b_{0t} \\ b_{1t} \end{bmatrix} + v_t$$

gözlem denklemi ve

$$\begin{bmatrix} b_{0t} \\ b_{1t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{0t} \\ b_{1t} \end{bmatrix} + w_t$$

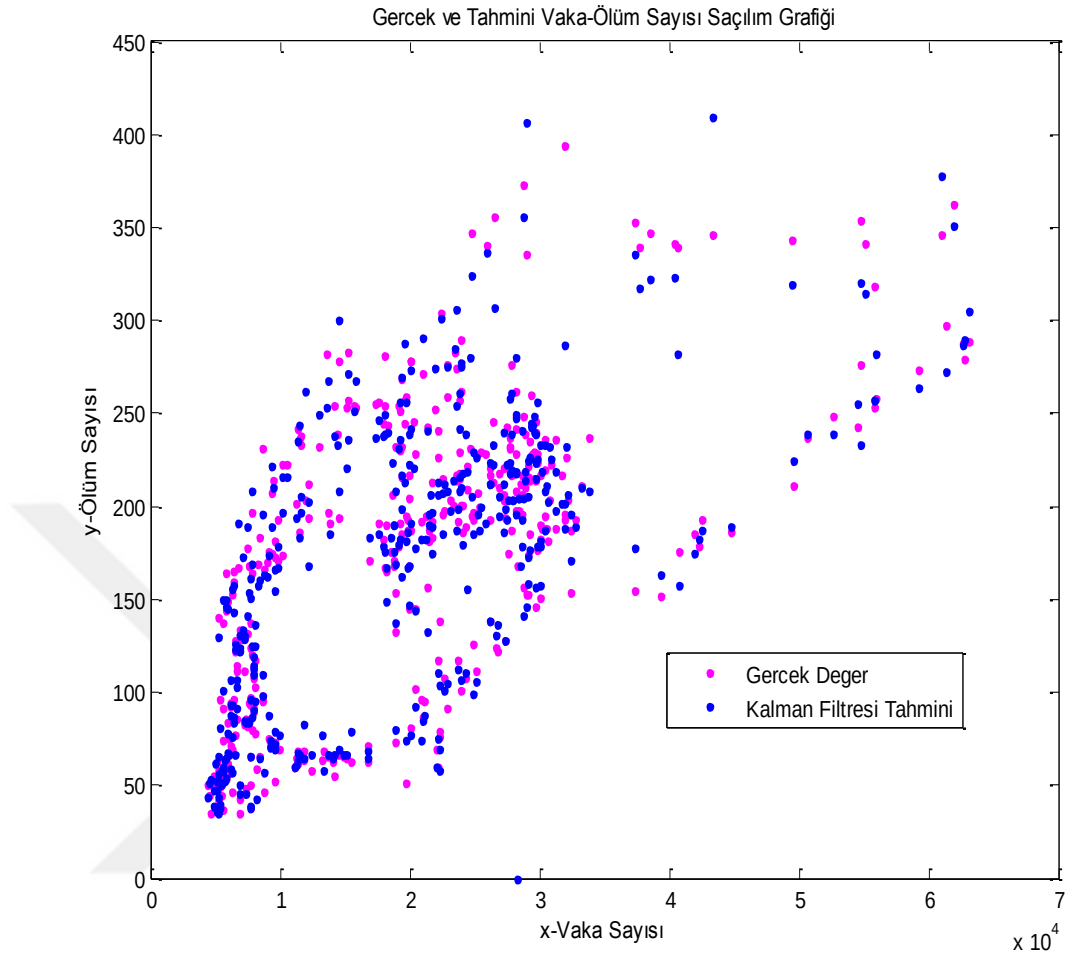
durum denklemi olarak alınıp Kalman Filtresi ile regresyon denklemine ait zamana bağlı parametreler tahmin edilerek günlük vaka sayısı tahmini yapılabilir. Burada yine hata

terimleri v_t ve w_t birbirinden bağımsız Normal dağılıma sahip rasgele değişkenler olarak alınabilirler.

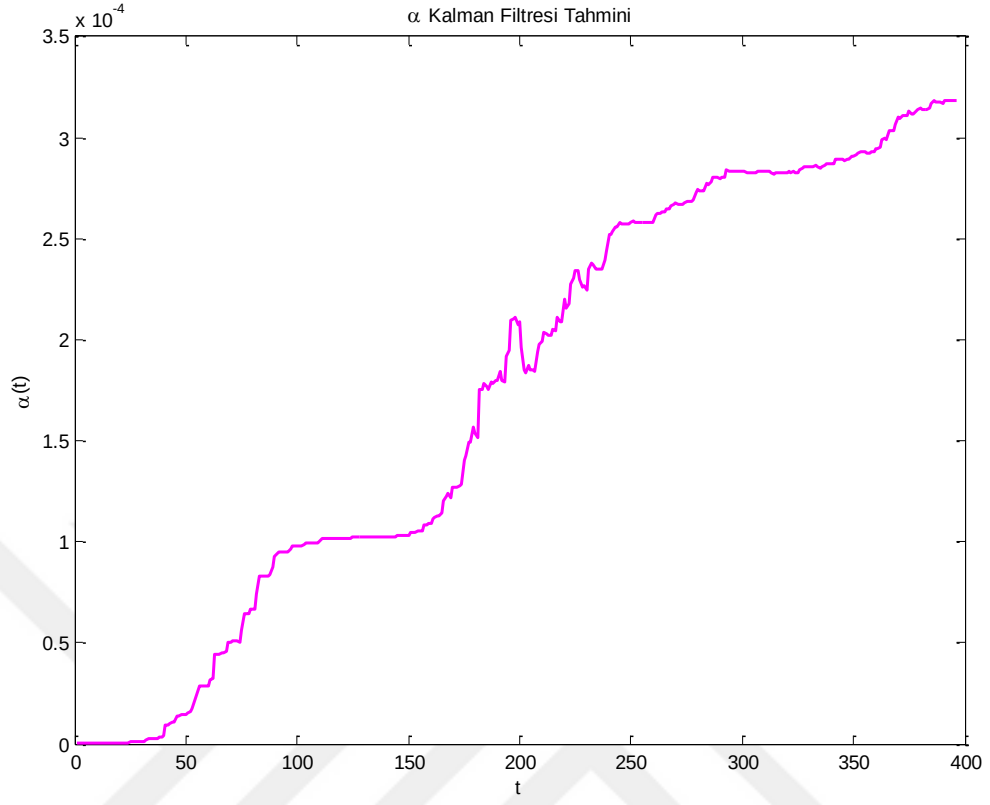


Şekil 5.27 Gerçek ölüm sayıları ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminler

Şekil 5.27’de gerçek ölüm sayıları ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlere ilişkin grafik çizdirilmiştir. Gerçek ölüm sayıları ve Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerin birbirlerine çok yakın olduğu görülmüştür.

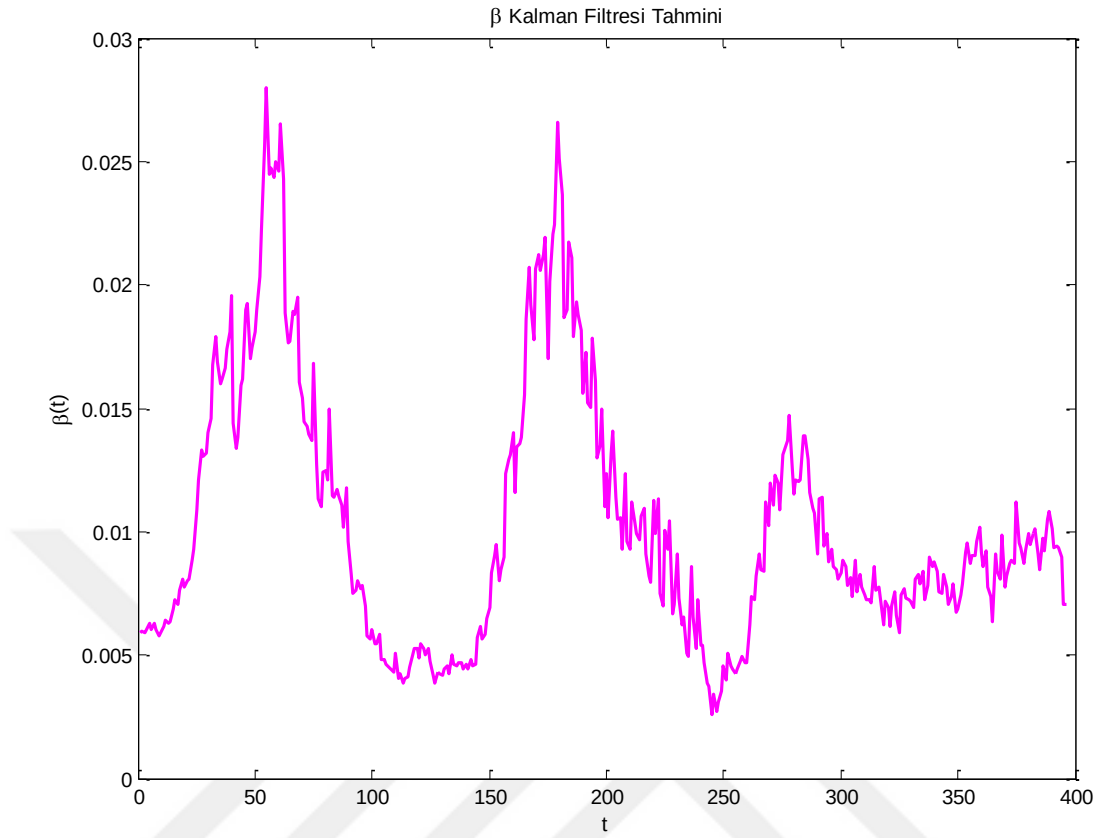


Şekil 5.28 Gerçek ve tahmini vaka-ölüm sayılarına ilişkin saçılım grafiği



Şekil 5.29 α parametresinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerine ilişkin grafik

Şekil 5.29’da α parametresinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerine ilişkin grafik çizdirilmiştir.



Şekil 5.30 β parametresinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminleri

Şekil 5.30’da β parametresinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerine ilişkin grafik çizdirilmiştir.

Çizelge 5.15 α ve β parametrelerinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminleri, HKO ve R^2 değerleri

n	396
Kalman Filtresi ile α tahmininin ortalaması	0.000174
Kalman Filtresi ile β tahmininin ortalaması	0.010258
Kalman Filtresi HKO	474.977467
R^2	0.9638

Çizelge 5.15'te α ve β parametrelerinin Kalman Filtresi ile elde edilen tahminlerinin ortalaması, HKO ve R^2 değerleri verilmiştir.

Her iki model için grafiklere bakıldığında vaka sayısı ve ölüm sayıları tahminlerinin gerçek değerlere oldukça yakın çıktığı görülmektedir.

6. SONUÇ

Bu tez çalışmasında uygulama alanı oldukça geniş olan dinamik lineer modeller için parametre tahmini konusu ele alınmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde bir açıklayıcı değişkenli lineer modeller, birden çok açıklayıcı değişkenli lineer modeller ve rastgele katsayılı lineer modeller anlatılmıştır. Durum-uzay modelleri ve kesikli zaman stokastik durum-uzay modelleri ile ilgili bilgiler verilmiştir. Lineer modeller ile dinamik lineer modeller arasındaki fark açıklanmaya çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde istatistikte sıkça kullanılan modellerin dinamik lineer model gösterimleri olan durum-uzay modelleri verilmiştir.

Dördüncü bölümde tez çalışmasının uygulama kısmında kullanılan parametre tahmin yöntemlerinden biri olan indirgemeli en küçük kareler yöntemi hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra, Kalman Filtresi ile tahmin ve Kalman Filtresinin elde edilişi anlatılmıştır.

Simülasyon çalışmalarına ayrılan beşinci bölümde, istatistikte yaygın kullanıma sahip olan ve üçüncü bölümde verilen modeller durum-uzay modeli haline getirilerek parametre tahminleri elde edilmiştir. Parametre tahminleri için İndirgemeli EKK ve Kalman Filtresi yöntemleri kullanılmış ve bu iki tahmin yöntemi ile elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

İlk olarak yapılan uygulama çalışmasında basit doğrusal regresyon modeli ele alınmış ve model durum-uzay modeli biçiminde ifade edilmiştir. Daha sonra, modelin parametreleri olan α ve β parametreleri durum vektörü olarak ele alınıp, Kalman Filtresi ve indirgemeli en küçük kareler yöntemleri ile tahmin edilmiştir. Yapılan tahminler durum ve ölçüm gürültü matrislerinin değerlerine göre değişeceğinden, farklı durum ve ölçüm gürültü matrisi değerleri için tahminler elde edilmiştir. Tahmin performanslarını karşılaştırmak için HKO ölçütü esas alınmıştır. Her iki yöntem kullanılarak elde edilen tahminler karşılaştırıldığında, Q değeri arttıkça Kalman filtresi ile elde edilen tahminlerin daha fazla salınım gösterdiği ve HKO nun giderek arttığı gözlemlenmiştir.

Gerçek hayatta regresyon parametrelerinin her zaman sabit olmayacağı, zamana bağlı olarak değişebileceği durumlarla sıkça karşılaşılacağından ikinci uygulama çalışmasında dinamik regresyon modeli ele alınmıştır. Kalman Filtresi ve indirgemeli en küçük kareler yöntemleri kullanılarak α ve β parametreleri farklı durum ve ölçüm gürültü matris değerleri için tahmin edilmiştir. Dinamik regresyon modelleri için yapılan tahminlerde, Kalman Filtresinin indirgemeli en küçük kareler yöntemine göre parametreleri daha iyi tahmin ettiği gözlemlenmiştir. Farklı Q değerleri için her iki yöntem kullanılarak elde edilen tahminler karşılaştırıldığında, Q değeri azaldıkça Kalman filtresi ile elde edilen tahminlerin daha fazla sapma yaptığı ve hata kareler ortalamasının giderek arttığı gözlemlenmiştir. Basit doğrusal regresyon ve dinamik regresyon modelleri için yapılan simülasyon çalışmaları sonucunda, Kalman Filtresinin dinamik doğrusal regresyon modellerinde indirgemeli en küçük kareler yöntemine göre daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

Sonraki uygulama çalışmasında, otokorelasyonlu hatalı regresyon modeli göz önüne alınmıştır. Hataların otokorelasyonlu olduğu durum için de model durum-uzay modeli şeklinde yazılmış ve Kalman Filtresi kullanılarak α ve β regresyon parametreleri ile hata terimi tahmin edilmiştir. Elde edilen tahminler ile gerçek değerlerin grafikleri çizdirilmiş ve Kalman Filtresi kullanılarak elde edilen tahminlerin gerçek değerlere oldukça yakın olduğu görülmüştür.

Bir diğer uygulamada $Arx(2)$ modeli, durum-uzay modeli şeklinde gösterilerek sistem çıktıları elde edilmiştir. Model parametreleri, sistem çıktıları kullanılarak indirgemeli en küçük kareler ve Kalman Filtresi yöntemleriyle tahmin edilmiştir. Elde edilen tahmin değerleri karşılaştırıldığında indirgemeli en küçük kareler yöntemi ve Kalman Filtresi tahminlerinin deneme sayısı arttıkça birbirlerine çok yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Son uygulama çalışmasında, $Armax$ modeli durum-uzay modeli şeklinde gösterilmiştir. Simülasyon çalışması ile sistem çıktıları elde edilmiş ve bu çıktılar kullanılarak model parametreleri indirgemeli en küçük kareler yöntemi ve Kalman Filtresi kullanılarak tahmin edilmiştir. İndirgemeli en küçük kareler yöntemi ve Kalman Filtresi kullanılarak

elde edilen tahminlerin birbirlerine yakın oldukları fakat Kalman Filtersinin gerçek değerlere daha yakın sonuçlar verdikleri gözlemlenmiştir.

Son olarak gerçek veriler kullanılarak bir uygulama çalışması yapılmıştır. Bu uygulama çalışmasında 25.11.2020-25.12.2021 tarihleri arasında ülkemizdeki Covid-19 verileri kullanılmıştır. Günlük vaka ve ölüm sayılarını tahmin etmek için iki farklı model göz önüne alınmıştır. İlk model ile günlük vaka sayılarını tahmin etmek için birinci dereceden AR zaman serisi göz önüne alınırken ikinci model olarak basit doğrusal regresyon modeli göz önüne alınmıştır. Her iki model için Kalman Filtresi kullanılarak günlük vaka sayıları ve ölüm sayılarına ilişkin tahminler elde edilmiştir. Elde edilen tahminlerin gerçek değerlere oldukça yakın olduğu çizilen grafikler ile gözlenmiştir. Tahminlere ilişkin hata kareler ortalamaları da elde edilmiştir. Regresyon modeli için R^2 belirtme oranının oldukça yüksek olduğu görülmüştür.

Sonuç olarak, lineer durum uzay modelleri yani dinamik lineer modeller birçok bilim dalında uygulama alanı olan ve araştırmacıların ilgisini çeken konular arasında yer almaktadır. Bu tez çalışmasında, dinamik lineer modellerde parametre tahmini için kullanılan yöntemlerden indirgemeli EKK yöntemi ve Kalman Filtresi yöntemi anlatılmış ve yapılan simülasyon çalışmaları ile bahsedilen yöntemlerin uygulamaları yapılmıştır. Elde edilen sonuçlardan her iki yöntemin de parametre tahmininde oldukça başarılı olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- Akdeniz, F., ve Öztürk, F. 1996. Lineer Modeller. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 250 s., Ankara.
- Akdi, Y. 2012. Zaman Serileri Analizi, Birim Kökler ve Kointegrasyon. Gazi Kitabevi, 373 s., Ankara.
- Aydın, D. 2014. Uygulamalı Regresyon Analizi: Kavramlar ve R Hesaplamaları. Nobel Akademik Yayıncılık, 570 S., Ankara.
- Assaf, S., ve Campostrini, S. 2015. Application of the varying coefficient model to the behaviour risk factor surveillance data in Italy: a study of changing smoking prevalence among sub-populations. BMC Public Health, 15(1), 489.
- Beck, N. ve Katz, N. 2004. Time series-cross section issues: dynamics. The Society of Political Methodology, Working Paper.
- Beran, R. ve Hall, P. 1992. Estimating coefficient distributions in random coefficient regression. The Annals of Statistics, 20(4), 1970–1984.
- Beran, R. 1995. Prediction in random coefficient regression. Journal of Statistical Planning and Inference, 43(2), 205-213.
- Bolviken, E., Christophersen, N., Storvik, G. 1998. Linear dynamical models, Kalman filtering and statistics. Lecture notes to IN-ST 259, University of Oslo.
- Bryson, A.E. ve Ho, Y.C. 1969. Applied optimal control: optimization, estimation and control. Ginn and Company, 481, Amerika Birleşik Devletleri.
- Cai, Z., ve Tiwari, R. C. 2000. Application of a local linear autoregressive model to BOD time series. Environmetrics: The Official Journal of the International Environmetrics Society, 11(3), 341-350.
- Çelik, A. 2008. Rastgele katsayılı lineer modellerde parametre tahmini. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 72, Ankara.
- Davis, M. H. A. ve Winter, R. B. 1985. Stochastic modeling and control. Chapman and Hall, 393, Amerika Birleşik Devletleri.
- Durbin, J. and Koopman S. J. 2001. Time series analysis by state space methods. Oxford University Press, 343, İngiltere.
- Fan, J., ve Zhang, W., 1999. Statistical estimation in varying coefficient models. The Annals of Statistics, 27(5), 1491-1518.
- Fan, J., ve Huang, T. 2005. Profile likelihood inferences on semiparametric varying-coefficient partially linear models. Bernoulli, 11(6), 1031-1057.

- Gürkan, H. Y. 2013. Markov zinciri monte carlo yönteminin dinamik doğrusal modellere uygulanması. Yüksek Lisans Tezi. Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 122, Ankara.
- Hsiao, C. Ve Pesaran, M.H. 2004. Random coefficient panel data models, Cesifo Working Paper Series, No. 1233 İZA Discussion Paper, No. 1236 İEPR No. 04.2.
- Huang, J. Z., Wu, C. O., ve Zhou, L. 2004. Polynomial spline estimation and inference for varying coefficient models with longitudinal data. *Statistica Sinica*, 14(3), 763-788.
- Jazwinski, A. H. 1970. Stochastic processes and filtering theory. Elsevier, 376 s., Amerika Birleşik Devletleri.
- Kalman, R. E. 1960. A new Approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of Basic Engineering*, Vol. 82; 35-45.
- Kalman, R. E. ve Bucy, R. S. 1961. New result in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering*, 83, 95-108.
- Kara, H. 1981. Rastgele katsayılı lineer regresyon modellerinde parametre kestiricilerinin incelenmesi. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı. Ankara.
- Kasap, R. 1998. İstanbul Menkul Kıymetler Borsasının İncelenmesi: İstatistikte Bir Yaklaşım. *İMKB Dergisi*, 6:27-33.
- Kaya, A. 1999. Zaman serilerinde sapan değerlerin analizi üzerine bir çalışma. Doktora Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ekonometri Anabilim Dalı, 127, İzmir.
- Köksal, E. ve Öztürk, F. 2004. ARMAX modellerinde parametre tahmini ve kontrol. *İstatistik Araştırma Sempozyumu*, Özel sayı, 10-12 Aralık, 3(2) 73-87, Ankara.
- Köksal Babacan, E. 2009. Kısıtlı durum kalman filtresi ve bazı uygulamaları. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 172, Ankara.
- Leeuw, J. 1986. Random coefficient models for multilevel analysis. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 11(1), 57-85.
- Mohamed, A.H ve Schwarz, K. P. 1999. Adaptive Kalman Filtering for INS/GPS. *Journal of Geodasy*, 73, 193-203.
- Montgomery, D. C., Peck, E. A. ve Vining, G. G. 2013. Doğrusal Regresyon Analizine Giriş. Nobel Yayınevi, 646, Ankara.
- Özbek, L. 1998. Kesikli zaman durum-uzay modelleri ve indirgemeli tahmin ve yakınsama problemleri. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Ankara.

Özbek, L. ve Demirtaş, H. 2021. A Study on The Estimation of COVID-19 Daily Cases and Reproduction Number Using Adaptive Kalman Filter For USA, Brazil, Germany, India, Russia, Italy, Spain, United Kingdom, France, Turkey. Türkiye Klinikleri Biyoistatistik Dergisi,13(1).

Petris, G., Petrone, S., ve Campagnoli, P. 2009. Dynamic linear models with R. Springer-Verlag, 177, Amerika Birleşik Devletleri.

Raj , B. 1975 .Lineer Regression with random coefficient, the finite sample and convergence properties. Journal of the American Statistical Association, 70(1), 127-137.

Singh, M.G. ve Titli, A. 1978. Systems: Decomposition optimization and control. Pergamon Press, 645, İngiltere.

Swamy, P. A. 1970. Efficient inference in a random coefficient regression model. Econometrica: Journal of the Econometric Society, 38(1), 311-323.

Şenol, C. 2006. Eeg sinyallerinin zaman serileri ile modellenmesi. Yüksek Lisans Tezi. Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, 130, Ankara.

Ünsal, M. G. 2010. Zaman serileri analizinde artık türleri ve uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitü, İstatistik Anabilim Dalı, 119, Ankara.

Wald, A. 1947. A note on regression analysis. The Annals of Mathematical Statistics, 18(4); 586-589.

Wei, W.W.S.1990. Time series analysis: univariate and multivariate analysis. Addison-Wesley Publishing Compony, 32-57, 67-84.

West, M. ve Harrison, J. 1997. Bayesian forecasting and dynamic models. Springer-Verlag, 682s., Amerika Birleşik Devletleri.

Western, Bruce. 1998. Causal heterogeneity in comparative research: a bayesian hierarchical modelling approach. American Journal of Political Science, 42, 1233–59.