

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

W-EĞRİLERİNİN GEOMETRİK UYGULAMALARI

Emre ÖZTÜRK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2017

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Emre ÖZTÜRK tarafından hazırlanan “W-Eğrilerinin Geometrik Uygulamaları” adlı tez çalışması 19/06/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof.Dr. Yusuf YAYLI

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof.Dr. Mustafa ÇALIŞKAN
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof.Dr. F.Nejat EKMEKÇİ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof.Dr. Yusuf YAYLI
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç.Dr. İsmail GÖK
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç.Dr. Ayşe ALTIN
Hacettepe Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Atila YETİŞEMİYEN
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

19/06/2017



Emre ÖZTÜRK

ÖZET

Doktora Tezi

W-EĞRİLERİNİN GEOMETRİK UYGULAMALARI

Emre ÖZTÜRK

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tez içinde kullanılacak temel kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Chen vd. (2006) ve Kim D.S. ve Kim Y.H. (2010) çalışmalarında W -eğrileri ve izoparametrik yüzeylere ilişkin ifade edilen kavram ve özellikler, Öklid uzayında açıklanmaya çalışılmıştır. Ayrıca bu bölümde, ilk kez N ve N yıldız-eğrileri tanımlanarak bu eğriler ile izoparametrik yüzeylerin ilgisi verilmiştir.

Son bölümde, Kim D.S. ve Kim Y.H. (2010) çalışması esas alınarak bazı özel eğriler için Lorenz uzayında karakterizasyonlar elde edilmiştir. Lorenz uzayında sabit eğrilikli eğrilerin denklemleri, Ünal (2007) çalışması doğrultusunda belirlenmiştir. Özel olarak üç boyutlu Lorenz uzayında sabit eğrilikli eğrilerin denklemleri lineer cebirsel teknikler ile elde edilmiştir. Yine Kim D.S. ve Kim Y.H. (2010) çalışması esas alınarak n -boyutlu Lorenz uzayında izoparametrik yüzeyler belirlenmiş ve bu yüzeylere ait bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Son olarak Munteanu ve Nistor (2012) ve Lopez (2014) çalışmaları referans alınarak, pseudoküresel silindir ve pseudohiperbolik silindir yüzeyinin geodezikleri elde edilmiştir.

Haziran 2017, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler: W -eğrisi, İzoparametrik Yüzey, Geodezik, Küresel Silindir, Lorenz Uzayı

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

GEOMETRIC APPLICATIONS OF W-CURVES

Emre ÖZTÜRK

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consist of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, basic concepts which will be used in further chapters are presented.

In the third chapter, the concepts and properties which are expressed about W–curves and isoparametric surfaces in Chen et al. (2006) and Kim D.S. and Kim Y.H. (2010) have been tried to be explained in Euclidean space. Furthermore, in this chapter, N and N star–curves have been defined for the first time, and these curves have been given attention to isoparametric surfaces.

In the last chapter, characterizations have been obtained in Lorentz space for some special curves, based on study Kim D.S. and Kim Y.H. (2010). Equations of constant curvature curves in Lorentz space have been determined according to the study Ünal (2007). In particular, equations of constant curvature curves in three dimensional Lorentz space are obtained by linear algebraic techniques. In addition, isoparametric surfaces are obtained in n–dimensional Lorentz space and some characterizations related to these surfaces are given, based on study Kim D.S. and Kim Y.H. (2010). Finally, the geodesics of pseudospherical cylinder and pseudohyperbolic cylinder are obtained by references of Munteanu and Nistor (2012) and Lopez (2014).

June 2017, 75 pages

Key Words: W–curve, Isoparametric Surface, Geodesic, Spherical Cylinder, Lorentz Space

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca, her türlü destek ve yardımlarını esirgemedi, fikirleri ve yardımseverliği ile gelişmeme katkıda bulunan, her zaman kendisini örnek alacağım çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya en içten saygı ve şükranlarımı sunarım.

Doktora eğitimim boyunca yardım ve desteklerini esirgemedi, bilgileriyle bana yön veren Sayın Prof. Dr. F.Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ye, Sayın Prof. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'a ve Sayın Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, bu çalışma boyunca her türlü fedakarlığı esirgemedi, moral ve motivasyon kaynağım olan sevgili iş arkadaşlarım Perihan ÇINAR'a, Seher KONCA'ya ve Ceren CİHAN'a çok teşekkür ederim. Bu zamana kadar maddi ve manevi desteğini esirgemedi yanımda duran aileme, bugünlere gelmemde en büyük pay sahibi olan ve hayatı boyunca üzerimdeki destek, yardım ve dualarını esirgemeyen en büyük moral ve motivasyon kaynağım, sevgili biricik anneme en içten duygularıyla sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.

Emre ÖZTÜRK
Ankara, Haziran 2017

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI	
ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	6
2.1 Öklid Uzayı	6
2.2 Lorenz Uzayı	7
3. ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL EĞRİLER VE YÜZEYLER	10
3.1 Öklid Uzayında W–Eğrileri ve C–Eğrileri	10
3.2 Öklid Uzayında N ve N*–Eğrilerinin Geometrisi	18
3.3 Öklid Uzayında G–Yüzeylerinin İfadesi	25
4. LORENZ UZAYINDA ÖZEL EĞRİLER VE YÜZEYLER	35
4.1 Lorenz Uzayında C–Eğrilerine Ait Karakterizasyonlar	35
4.2 Lorenz Uzayında Kinematik Uygulamalar.....	41
4.3 Lorenz Uzayında Özel Eğriler ve G–Yüzeyleri.....	53
4.4 $S_1^2 \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}_1^2 \times \mathbb{R}$ Yüzeylerinin Geodezikleri.....	64
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	71
KAYNAKLAR.....	73
ÖZGEÇMİŞ	75

SİMGELER DİZİNİ

$V^\perp$	Dik (Normal) Uzay
G	Gauss Dönüşümü
$\overrightarrow{\nabla} f$	Gradyent f
π	İzdüşüm Fonksiyonu
∇	Levi-Civita Koneksiyonu
$\mathbb{R}_1^n$	Lorenz Uzayı
$\mathbb{R}^n$	Öklid Uzayı
S	Şekil Operatörü
$\chi(M)$	Yüzey Üzerinde Vektör Alanların Cümlesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	Çember ve Dairesel Helis Eğrisi Üzerinde (C) Koşulu	1
Şekil 3.2	Çember ve Dairesel Helis Eğrisi Üzerinde (N) Koşulu	9
Şekil 3.3	Küresel Spiral.....	24
Şekil 3.4	$S^2 \times R$ Yüzeyinin Geodezikleri	34
Şekil 4.1	Kübik Spacelike W-Eğrisi	52
Şekil 4.2	Kübik Timelike W-Eğrisi	53
Şekil 4.3	Hiperbol Eğrisi Üzerinde (N) Koşulu	54
Şekil 4.4	Sabit Presesyonlu Eğri	56

1. GİRİŞ

Eğriler günlük hayatta, bilim ve teknikte, sanatta birçok uygulamaya sahip kullanışlı nesnelerdir. Eğriler mimaride ve mühendislikte yapıların inşasında kullanılırken sanatta daha çok dekoratif ve görsel amaçlı olarak kullanılır. Bunun yanısıra bir fizikçi için eğri kavramı bir parçacığın bir t zaman parametresine bağımlı olarak izlediği yol-yörünge olarak düşünülebilir. Hızla gelişen bilgisayar bilimi ve yazılımı gibi alanlar için grafik tasarımları, modelleme, matematiksel modelleme gibi kavramlar eğri vb. matematiksel nesneler sayesinde geliştirilebilmektedir. Bunun yanısıra eğriler veri analizlerinde, çan eğrisi gibi istatistiksel kavramlarda da karşımıza çıkmaktadır.

Geometride ise eğriler başlı başına önemli nesneler olmalarının yanısıra yüzeyleri ve manifoldları karakterize etmede önemli rol oynarlar. Tarihte birçok eğri çok önceleri yunanlı geometriciler tarafından çalışılmıştır. Örneğin Pergeli Apollonius konik kesitleri (parabol, elips, hiperbol), Arşimet ise spiral eğrileri incelemiştir. Matematiksel olarak eğriler reel bir I aralığından $\mathbb{R}^n$ e sürekli bir dönüşüm olarak düşünülebilir. Burada $n = 2$ ise eğri düzlemsel eğri, $n \geq 3$ ise eğri uzay eğrisi olarak adlandırılır. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regüler bir eğri yani her $t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ olsun. Her $t \in I$ için $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(r)}(t)\}$ cümlesi lineer bağımsız iken $\{\alpha'(t), \alpha''(t), \dots, \alpha^{(r+1)}(t)\}$ cümlesi lineer bağımlı oluyorsa α eğrisi rankı r olan Frenet eğrisi olarak adlandırılır. Bu eğrinin $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{r-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ Frenet eğrilikleri sabit ise α eğrisine rankı r olan bir W -eğrisi denir. Öklid uzayında çember ve dairesel helis eğrileri bilinen tipik W -eğri örnekleridir. Bu eğrilerden farklı olarak Kühnel (2006) çalışmasında verilen, a, b, α, β sabit olmak üzere

$$\gamma(t) = (a \cos(\alpha t), a \sin(\alpha t), b \cos(\beta t), b \sin(\beta t))$$

$a, b \neq 0, \alpha \neq \beta \neq 0, \mathbb{R}^4$ Öklid uzayında bir W -eğrisidir. $a = b = 1$ ve α, β aralarında asal iki sayı ise eğri kapalı bir eğri olur ve Clifford torusu üzerinde bir düğüm (knot) oluşturur. Kinematik ve Fizik biliminde sıkça rastlanılan bu eğriler uzayda ani hareketlerin yörüngeleri olmaları bakımından önemlidir. Genel görelilik kuramında ifade edildiği üzere partiküller (serbest parçacıklar) uzayda W -eğrileri boyunca hareket eder. Şimdi bu eğrilerin, izoparametrik yüzeyler (asli eğrilikleri

sabit olan yüzeyler) ile birlikte Öklid uzayında, tarihsel gelişiminden bahsedelim:

İlk olarak Rademacher ve Toeplitz (1957) çalışmasında aşağıdaki fikir ifade edilmiştir:

“Çember, herhangi iki noktası bir kiriş ile birleştirildiğinde, kiriş ile eğrinin bu noktalarda eşit ölçüde açı yaptığı kapalı düzlemsel tek eğridir.”

Kerzman ve Stein (1978) çalışmasında yukarıdaki fikir, Szegő çekirdeği (kernel) ile Cauchy çekirdeği (kernel) nin çakıştığı düzlemsel kapalı tek bölgenin ancak ve ancak daire olması olarak yorumlanmıştır.

Boas (1980) çalışması bu çalışmayı n –küreye genelleştirilmiş ve $\mathbb{R}^n$ deki hiperkürelerin herhangi iki noktasını birleştiren kirişin, yüzeyin normali ile bu noktalarda eşit ölçüde açı yaptığı ispat edilmiştir.

Boas (1984) çalışmasında, Öklid uzayında bu özelliğe sahip yüzeylerin, izoparametrik yüzeylerden (düzlem, hiperküre, silindir, küresel silindir) ibaret olduğu ispatlanmıştır.

Wegner (1988), Boas’ın lokal karakterizasyon teoremi için daha kısa bir ispat vermiştir.

Aminov (2000) çalışmasında, $\mathbb{R}^{2n+1}$ Öklid uzayında W –eğrileri, eğrinin Frenet formüllerinde Frenet eğrilikleri sabit alınarak, birinci mertebeden diferensiyel denklem sistemin çözümleri olarak elde edilmiştir.

Torgasev ve Sucurovic (2002) çalışmasında, $\mathbb{R}^{2n+1}$ Öklid uzayında W –eğrilerinin denklemi ifade edilerek bu eğrilerin ranklarına göre nerede yattıkları ifade edilmiştir.

Chen vd. (2006) çalışmasında, Boas’ın 1980 ve 1984 te yüzeyler için elde ettiği sonuçlar, n –boyutlu Öklid uzayında, eğriler için elde edilmeye çalışılmıştır ve Rademacher ve Toeplitz (1957) çalışmasında ifade edilen fikir yardımıyla çemberler

$$\langle X(t) - X(s), T(t) - T(s) \rangle = 0 \quad (\text{C})$$

koşulunu sağlayan eğriler olarak yorumlanmıştır. Burada $X(s)$ birim hızlıdır ve $T(s) = X'(s)$ eğrinin birim teğet vektör alanıdır. Chen vd. (2006) çalışmasında aşağıdaki soruya cevap aranmıştır:

“Öklid uzayında (C) koşulunu hangi eğriler sağlar?”

Bu sorunun cevabı bir teorem ile aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Teorem 1.1 n –boyutlu Öklid uzayında birim hızlı düzgün bir eğri bir W –eğrisidir ancak ve ancak eğrinin iki noktasını birleştiren kiriş, eğri ile bu noktalarda eşit ölçüde açı yapar.

Böylece Chen vd. (2006) çalışmasında kiriş özelliği yüksek boyutlu uzayda tüm eğrilere genelleştirilmiş ve ispatlar için ağırlıklı olarak matematiksel analiz teknikleri kullanılmıştır.

Kim and Kim (2010) çalışmasında (C) koşulu, lineer cebirsel teknikler kullanılarak yorumlanmış ve daha elementer ispatlar verilmiştir. Yine aynı çalışmada W –eğrilerinin birim teğet vektör alanı, antisimetrik bir A matrisi yardımıyla $T(s) = AX(s) + b$ şeklinde ifade edilebileceği gösterilmiştir. Ayrıca bu eğrilerin her $k, 1 \leq k \leq n$ değeri için $\|X^{(k)}(s)\|$ in sabit olduğu ifade edilmiştir. Yine bu çalışmada önceki çalışmalara benzer olarak hiperkürelerin

$$\langle y - x, G(x) + G(y) \rangle = 0 \quad (\mathbf{G})$$

koşulunu sağladığı ifade edilmiştir. Burada x ve y hiperküre üzerinde herhangi iki nokta ve G de M nin Gauss dönüşümüdür. Daha sonra aşağıdaki şu soru sorulmuştur:

“Öklid uzayında (G) koşulunu hangi yüzeyler sağlar?”

Bu soru izoparametrik yüzeyler olarak cevaplanmış ve bu yüzeylerin Gauss dönüşümü simetrik bir A matrisi yardımıyla $G(x) = Ax + b$ şeklinde ifade edilmiştir.

Lorenz uzayı iç çarpımın negatif definit olarak tanımlanabildiği uzaylar olması bakımından, Öklid uzayından farklı olarak, vektör, eğri ve yüzeyler farklı türlere sahiptir. Fizikte, özellikle Einstein’ın görelilik kuramını inşa ederken yararlandığı relativistik uzay-zaman modeli, kaynağını bu kuramdan almaktadır. Dolayısıyla evrensel birçok Fizik yasasının anlaşılması için bu kuramın temel kavramları büyük önem arz etmektedir. Uzayda ani hareketlerin yörünge eğrileri bu uzaydaki sabit eğrilikli eğrilere karşılık gelmektedir. Dolayısıyla bu eğriler çemberler, hiperboller; kübik, dairesel ve hiperbolik helisler olarak karşımıza çıkmaktadır.

Lorenz uzayında W –eğrileri birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır (Walrave 1995, Torgasev ve Sucurovic 2002, İlarslan ve Boyacıoğlu 2007, Ünal 2007).

Walrave (1995) çalışmasında W –eğrileri, $\mathbb{R}_1^3$ Lorenz uzayında sınıflandırılmıştır.

Torgasev ve Sucurovic (2002) çalışmasında 4–boyutlu Minkowski uzayında yatan tüm spacelike W –eğrileri ifade edilmiştir.

İlarslan ve Boyacıoğlu (2007) çalışmasında, 3–boyutlu Minkowski uzayında, $\mathbb{H}_0^2$ pseudo hiperbolik uzay ve $\mathbb{S}_1^2$ Lorentz küresi üzerinde yatan spacelike W –eğrileri, konum vektörleri yardımıyla karakterize edilmiştir.

Ünal (2007) çalışmasında Lorenz uzayında sabit eğrilikli eğriler, helikoidal vektör alanların integral eğrileri ile Lie cebirinin elemanları eşlenerek yorumlanmış ve bu eğriler, aşağıdaki matrisin rankı sınıflandırılmak üzere elde edilmiştir:

$$Q = \begin{bmatrix} w & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

(1.1) de $w \in \mathbb{R}_{2n+1}^{2n+1}$ semi anti-simetrik matris, $v \in \mathbb{R}_1^{2n+1}$ sütun vektörü ve Q da $\mathbb{R}_1^{2n+1}$ Lorenz uzayında, $\{0; u_1, u_2, \dots, u_{2n+1}\}$ ortonormal bazına göre X helikoidal vektör alanının matrisidir. Ünal (2007), Lorenz uzaydaki W –eğrilerini aşağıdaki diferensiyel denklem sisteminin çözümleri olarak ele almıştır:

$$\begin{bmatrix} X(M) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

(1.2) eşitliğinde $M = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) \in \mathbb{R}_1^{2n+1}$ ve X de Lorenz uzayda bir helikoidal vektör alanıdır. Böylece (1.2) de M ile bir

$$\alpha = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_{2n+1}(t))$$

eğrisinin konum vektörü ve $X(M) = \frac{d\alpha}{dt}$ alınarak, $\mathbb{R}_1^{2n+1}$ Lorenz uzayında W –eğrilerinin denklemleri elde edilmiştir.

Magid (1985) çalışmasında, Lorenz uzayında izoparametrik yüzeyler, Cartan tipi özdeşliklerin çözümü ile elde edilmiştir.

Alias vd. (1992) ve Ferrandez ve Lucas (1992) çalışmalarında 3–boyutlu Lorenz-Minkowski uzayında, tüm izoparametrik yüzeyler sınıflandırılmıştır.

Bu alışmada (C) koşulunu sağlayan eğriler C-eğrileri olarak adlandırılmıştır. Lorenz uzayda, W-eğrilerinin kiriş özellikleri ile ilgili sonuçlar ve bu eğriler ile C-eğrileri arasındaki ilişkiler elde edilmiştir. Kiriş fikrinden esinlenerek N-eğrileri ve N*-eğrileri tanımlanarak Öklid ve Lorenz uzayında bu eğrilerin C-eğrileri ile ilişkisi incelenmiştir. Öklid ve Lorenz uzayda, N-eğrileri ile izoparametrik yüzeylerin ilgisi verilmiştir. Son olarak Lorenz uzayında, $S_1^2 \times \mathbb{R}$ ve $H_1^2 \times \mathbb{R}$ yüzeylerinin geodezikleri elde edilmiştir.



2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde konuya temel oluşturan tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

2.1 Öklid Uzayı

Tanım 2.1 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında, eğriliği hiçbir yerde sıfır olmayan birim hızlı bir eğri γ olsun. Bu durumda,

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

eşitlikleri yazılır ve bu eşitlikler Frenet-Serret formülleri olarak adlandırılır (Pressley 2010).

Tanım 2.2

$$\begin{aligned} \text{Grad}: C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) &\rightarrow \chi(\mathbb{R}^n) \\ f &\rightarrow \text{Grad}(f) \end{aligned}$$

şeklinde verilsin. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere

$$\text{Grad}(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı Grad fonksiyonuna $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ koordinat sistemine göre gradient fonksiyonu denir ve ∇ sembolü ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3 $L : V \rightarrow V$ lineer dönüşümü verilsin. $L(v) = \lambda v$ olacak biçimde bir λ sayısı ve sıfırdan farklı bir $v \in V$ vektörü varsa bu λ sayısına, L lineer dönüşümünün bir karakteristik değeri denir. λ bir karakteristik değer olmak üzere $L(v) = \lambda v$ eşitliğini sağlayan her v vektörüne, L lineer dönüşümünün λ sayısına karşılık gelen bir karakteristik vektörü denir (Sabuncuoğlu 2006).

Tanım 2.4 $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrik bir eğri olsun. γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki hızı $\|\gamma'(t)\|$ ile verilir. Eğer her $t \in (\alpha, \beta)$ için $\gamma'(t)$ birim vektör ise γ eğrisine birim hızlı eğridir denir (Pressley 2010).

Tanım 2.5 Bir M yüzeyi üzerinde bulunan bir γ eğrisi için eğer $\gamma''(t)$ sıfır veya $\gamma''(t)$ yüzeyin $\gamma(t)$ noktasındaki tanjant düzleme dik, yani t parametresinin her değeri için birim normal vektörüne paralel ise γ eğrisine bir geodezik eğri denir (Pressley 2010).

Tanım 2.6 M ve N Riemann manifoldları olmak üzere M, N manifoldunun alt-manifoldu olsun. M ve N manifoldları üzerindeki Levi-Civita koneksiyonu sırasıyla ∇ ve $\bar{\nabla}$ olsun. $X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

şeklinde verilen denkleme Gauss denklemi denir. Buradaki $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ ifadeleri $\bar{\nabla}_X Y$ vektörünün sırasıyla teğet ve normal bileşenleridir (Hacısalihoglu ve Ekmekci 2003).

Tanım 2.7 Z, M yüzeyi üstünde birim dik vektör alanı olmak üzere M nin bir p noktasında

$$S_p(v_p) = -D_{v_p} Z$$

eşitliğiyle tanımlı $S_p : T_p M \rightarrow T_p M$ fonksiyonuna, M yüzeyinin p noktasında, Z birim dik vektör alanına bağlı şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir (Sabuncuoğlu 2006).

Teorem 2.1 Bir yüzeyin şekil operatörü self-adjointtir. Her $v_p, w_p \in T_p M$ için

$$\langle S(v_p), w_p \rangle = \langle v_p, S(w_p) \rangle$$

eşitliği geçerlidir (Sabuncuoğlu 2006).

Tanım 2.8 F bir immersiyon olmak üzere her $X, Y \in T_p M$ için

$$g(F(X), F(Y)) = g(X, Y)$$

şartını sağlayan F fonksiyonuna izometrik immersiyon denir. Burada g metriği $T_p M$ tanjant uzayından indirgenmiş metriktir (Hacısalihoglu ve Ekmekci 2003).

2.2 Lorenz Uzayı

Tanım 2.9 $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında bir vektör v olsun. $\langle v, v \rangle > 0$ veya $v = 0, \langle v, v \rangle < 0, \langle v, v \rangle = 0$ ve $v \neq 0$ ise sırasıyla bu vektöre spacelike, timelike ve lightlike (null) vektör denir (O'Neill 1983).

Tanım 2.10 V vektör uzayının ortonormal bazında yer alan timelike vektörlerin sayısına o uzayın indeksi adı verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.11 n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayında sıfırdan farklı $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektörleri için tanımlanan

$$\langle X, Y \rangle_L = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^n x_i y_i$$

eşitliği Lorenz anlamında iç çarpım olarak adlandırılır. Ayrıca $\{\mathbb{R}^n, \langle, \rangle_L\}$ ikilisi Lorenz uzayı olarak adlandırılır ve $\mathbb{L}^n$ ile gösterilir. Özel olarak uzayın indeksi 1 ise bu uzay $\mathbb{R}_1^n$ ile gösterilir (İyigün ve Arslan 2005).

Tanım 2.12 Bir $v \in \mathbb{R}_1^n$ vektörünün normu $\|v\| = \sqrt{|\langle v, v \rangle_L|}$ eşitliği ile verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.13 Bir regüler $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^3$ eğrisi için $\langle \gamma', \gamma' \rangle_L > 0$, $\langle \gamma', \gamma' \rangle_L < 0$ veya $\langle \gamma', \gamma' \rangle_L = 0$ ise bu eğri sırasıyla spacelike, timelike veya lightlike eğri olarak adlandırılır (Kühnel 2006).

Tanım 2.14 γ birim hızlı spacelike veya timelike eğri olsun öyle ki $\langle \gamma'', \gamma'' \rangle_L \neq 0$ olsun. Eğrinin Frenet çatısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere, bu eğrinin Frenet formülleri aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\eta & 0 \\ -\kappa\epsilon & 0 & -\tau\epsilon\eta \\ 0 & -\tau\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}$$

Burada $\langle T, T \rangle_L = \epsilon$, $\langle N, N \rangle_L = \eta$ ve $\langle B, B \rangle_L = -\epsilon\eta$ olarak belirlidir (Kühnel 2006).

Tanım 2.15 n -boyutlu V vektör uzayının indeksi $0 \leq v \leq n$ olsun. $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \dots = \epsilon_v = -1$ ve $\epsilon_{v+1} = \epsilon_{v+2} = \dots = \epsilon_n = 1$ olmak üzere $(\delta_{ij}\epsilon_j)$ diagonal matrisine V vektör uzayının işaret matrisi adı verilir. Burada

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ile verilir (O'Neill 1983).

Tanım 2.16 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$, Lorenz uzayında bir eğri olsun. Eğer $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_L > 0$ ise eğri spacelike, $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_L < 0$ ise timelike, $\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle_L = 0$ ise lightlike (null) eğri olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

Tanım 2.17 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$, n -boyutlu Lorenz uzayında non-null bir eğri ve eğri boyunca hareketli Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ olsun. i -yinci eğrilik fonksiyonu κ_i olmak üzere bu eğrinin Frenet formülleri

$$\begin{aligned} V_1' &= \nabla_{V_1} V_1 = \varepsilon_2 \kappa_1 V_2 \\ V_2' &= \nabla_{V_1} V_2 = -\varepsilon_1 \kappa_1 V_1 + \varepsilon_3 \kappa_2 V_3 \\ &\vdots \\ V_i' &= \nabla_{V_1} V_i = -\varepsilon_{i-1} \kappa_{i-1} V_{i-1} + \varepsilon_{i+1} \kappa_i V_{i+1} \\ V_{i+1}' &= \nabla_{V_1} V_{i+1} = -\varepsilon_i \kappa_i V_i \end{aligned}$$

olarak verilir. Burada $\varepsilon_i = \langle V_i, V_i \rangle_L = \pm 1$ ve ∇ koneksiyonu $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayının Levi-Civita koneksiyonudur (İyigün ve Arslan 2005).

Tanım 2.18 $M \subset \overline{M}$ semi-Riemann hiperyüzeyi üzerinde tanımlı birim normal vektör alanı U olsun. Her $V, W \in \chi(M)$ için

$$\langle S(V), W \rangle_L = \langle II(V, W), U \rangle_L$$

eşitliğini sağlayan $(1, 1)$ tipinde S tensör alanına, $M \subset \overline{M}$ nin U dan elde edilen şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir. Burada $II(V, W)$ yüzeyin ikinci temel formudur (O'Neill 1983).

Tanım 2.19 $n \geq 2$ ve $0 \leq \nu \leq n$ olsun. n -boyutlu, ν indeksli ve $r > 0$ yarıçaplı pseudoküre ve pseudohiperbolik uzay sırasıyla

$$\mathbb{S}_\nu^n(r) = \{P \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} : \langle P, P \rangle_L = r^2\}$$

ve

$$\mathbb{H}_\nu^n(r) = \{P \in \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1} : \langle P, P \rangle_L = -r^2\}$$

şeklinde verilir (O'Neill 1983).

3. ÖKLİD UZAYINDA ÖZEL EĞRİLER VE YÜZEYLER

Bu bölümde, Öklid uzayında, Kim ve Kim (2010) çalışmasında eğriler ve yüzeyler için elde edilen sonuçlar ifade edildi. Aynı çalışmadan esinlenerek, ilk kez $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{N}^*$ -eğrisi tanımlandı. İzoparametrik yüzeylere ait karakterizasyonlar ifade edilerek bu yüzeylerle $\mathbf{N}$ -eğrilerinin ilişkisi elde edildi.

3.1 Öklid Uzayında W -Eğrileri ve C -Eğrileri

Tanım 3.1 $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bir eğri olsun. Eğer her $s \in I$ için $\kappa_1(s), \kappa_2(s), \dots, \kappa_{n-1}(s)$ Frenet eğrilikleri sabit ise γ eğrisine rankı n olan bir W -eğrisi denir. Bu eğriler Öklidyen dönüşümlerin 1-parametrelili gruplarının yörünge eğrileridir (Öztürk vd. 2008).

Teorem 3.1 $\mathbb{R}^{2n+1}$ Öklid uzayında birim hızlı bir W -eğrisi

$$\gamma(s) = \vec{\gamma}_0 + as\vec{e}_0 + \sum_{i=1}^n r_i (\cos(a_i s) \vec{e}_{2i-1} + \sin(a_i s) \vec{e}_{2i}) \quad (3.1)$$

vektörel denkleminde sahiptir öyle ki $\{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{2n}\}$ cümlesi $\mathbb{R}^{2n+1}$ uzayının bir or-tonormal bazıdır. Burada $\vec{\gamma}_0$ sabit bir vektör, $a \in \mathbb{R}$ ve $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ pozitif reel sayıları

$$a^2 + \sum_{i=1}^n (r_i a_i)^2 = 1 \quad (3.2)$$

eşitliğini sağlar. (3.1) ve (3.2) eşitliklerinde $a \neq 0$ ise γ eğrisinin rankı tektir ve bu eğri tamamen $\mathbb{R}^{2n+1}$ Öklid uzayında; eğer $a = 0$ ise eğrinin rankı çifttir ve eğri $\mathbb{R}^{2n}$ Öklid uzayında, hiperküre üzerinde yatar (Torgasev ve Sucurovic 2002).

Tanım 3.2 $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Her $t \in I$ için

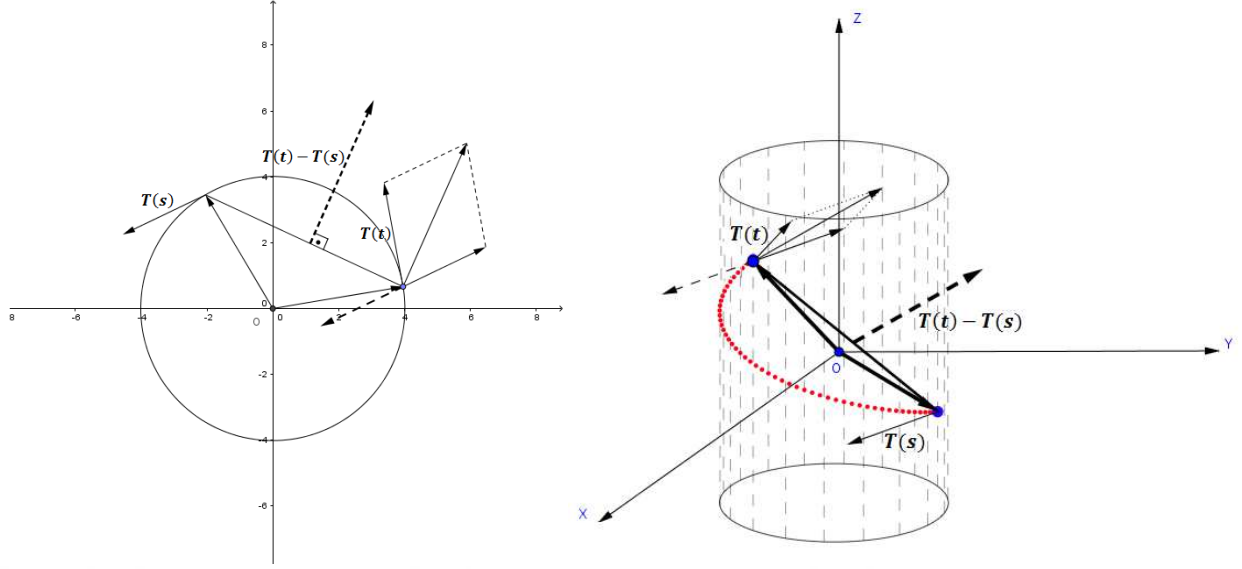
$$\langle X(t) - X(s), T(t) - T(s) \rangle = 0 \quad (\mathbf{C})$$

eşitliği sağlanıyorsa bu eğriye Öklid uzayında bir C -eğrisidir denir.

Örnek 3.1 Öklid uzayında $X(s) = (\cos s, \sin s)$ ve $X(s) = \left(\cos \frac{s\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{s\sqrt{2}}{2}, \frac{s\sqrt{2}}{2} \right)$

denklemleriyle verilen birim hızlı çember ve dairesel helis eğrisi birer C -eğrisidir.

Bu eğrilere ait özelliğin geometrik temsili aşağıdaki şekilde verilmiştir;



Şekil 3.1 Çember ve Dairesel Helis Eğrisi Üzerinde (C) Koşulu

Teorem 3.2 X eğrisi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında birim hızlı bir **C**–eğrisi olsun. Bu eğrinin birim teğet vektör alanı,

$$T(s) = AX(s) + b$$

olacak şekilde anti-simetrik bir A matrisi ve $b \in \mathbb{R}_1^n$ sütun vektörü bulunur (Kim ve Kim 2010).

İspat. X eğrisi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir **C**–eğrisi olsun. Genelliği bozmadan X eğrisinin tümüyle n –boyutlu Öklid uzayında yattığını kabul edelim. Bu eğri üzerinde $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$ gibi $(n+1)$ –nokta bulunur öyle ki

$$\{X(t_j) - X(t_0) \mid 1 \leq j \leq n\}$$

cümlesi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayını gerer. (C) koşulunda $t = t_0$ değeri yerine yazılırsa

$$\langle T(s), X(t_0) \rangle = \langle T(s), X(s) \rangle + \langle T(t_0), X(t_0) \rangle - \langle T(t_0), X(s) \rangle \quad (3.3)$$

eşitliği ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $t = t_j$ değeri yerine yazılırsa

$$\langle T(s), X(t_j) \rangle = \langle T(s), X(s) \rangle + \langle T(t_j), X(t_j) \rangle - \langle T(t_j), X(s) \rangle \quad (3.4)$$

eşitliği elde edilir. Burada $T(t_0) = \frac{dX(t)}{dt} \big|_{t=t_0}, T(t_1) = \frac{dX(t)}{dt} \big|_{t=t_1}, \dots, T(t_n) = \frac{dX(t)}{dt} \big|_{t=t_n}$ olarak hesaplanır. (3.4) eşitliğinden (3.3) çıkarılırsa

$$\langle T(s), \alpha_j \rangle = \langle \beta_j, X(s) \rangle + c_j \quad (3.5)$$

eşitliği elde edilir öyle ki burada

$$\alpha_j = X(t_j) - X(t_0)$$

$$\beta_j = T(t_0) - T(t_j)$$

$$c_j = \langle T(t_j), X(t_j) \rangle - \langle T(t_0), X(t_0) \rangle$$

şeklinde verilir. α_j ve β_j vektörlerini j -yinci sütun kabul eden matrisler sırasıyla A_j ve B_j olsun. $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$ olmak üzere

$$A_j = \begin{pmatrix} X_1(t_1) - X_1(t_0) & X_1(t_2) - X_1(t_0) & \dots & X_1(t_n) - X_1(t_0) \\ X_2(t_1) - X_2(t_0) & . & \dots & X_2(t_n) - X_2(t_0) \\ \dots & . & . & \dots \\ X_n(t_1) - X_n(t_0) & X_n(t_2) - X_n(t_0) & \dots & X_n(t_n) - X_n(t_0) \end{pmatrix}$$

ve

$$B_j = \begin{pmatrix} X'_1(t_0) - X'_1(t_1) & X'_1(t_0) - X'_1(t_2) & \dots & X'_1(t_0) - X'_1(t_n) \\ X'_2(t_0) - X'_2(t_1) & . & \dots & X'_2(t_0) - X'_2(t_n) \\ \dots & . & . & \dots \\ X'_n(t_0) - X'_n(t_1) & X'_n(t_0) - X'_n(t_2) & \dots & X'_n(t_0) - X'_n(t_n) \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir. A_j ve B_j matrisleri yardımıyla A matrisi

$$A^T = B_j A_j^{-1} \quad (3.6)$$

ve b vektörü

$$b = \sum_{k=1}^n b_k \alpha_k \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanır. (3.7) eşitliğinde $\alpha_k = X(t_k) - X(t_0)$ ile b_k sayıları da

$$\begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, \alpha_n \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & . & \dots & \langle \alpha_2, \alpha_n \rangle \\ \dots & . & . & \dots \\ \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_n, \alpha_2 \rangle & \dots & \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanır. (3.8) gereğince

$$c_j = \langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle b_1 + \langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle b_2 + \dots + \langle \alpha_j, \alpha_n \rangle b_n$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\langle \alpha_j, b \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle b_k = c_j \quad (3.9)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.6) gereği her $1 \leq j \leq n$ için $\beta_j = A^T \alpha_j$ olduğundan

$$\langle \beta_j, X(s) \rangle = \langle \alpha_j, AX(s) \rangle \quad (3.10)$$

yazılır. (3.9) ve (3.10) gereği

$$\langle \beta_j, X(s) \rangle + c_j = \langle \alpha_j, AX(s) + b \rangle \quad (3.11)$$

elde edilir. (3.5) ve (3.11) gereğince

$$\langle \alpha_j, T(s) \rangle = \langle \alpha_j, AX(s) + b \rangle$$

yazılır ve buradan

$$T(s) = AX(s) + b \quad (3.12)$$

olarak elde edilir. (3.12) eşitliği ve (C) koşulu gereği

$$\langle A(X(t) - X(s)), X(t) - X(s) \rangle = 0 \quad (3.13)$$

yazılır. (3.13) ifadesi düzenlenirse

$$\langle X(t) - X(s), A^T (X(t) - X(s)) \rangle = 0 \quad (3.14)$$

olur. (3.13) ve (3.14) taraf tarafa toplanırsa

$$\langle B(X(t) - X(s)), X(t) - X(s) \rangle = 0 \quad (3.15)$$

elde edilir öyle ki burada $B = A^T + A$ simetrik matristir. (3.15) eşitliğinde $t = t_0$ değeri yerine yazılırsa

$$\langle BX(s), X(t_0) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle BX(s), X(s) \rangle + \langle BX(t_0), X(t_0) \rangle \} \quad (3.16)$$

eşitliği ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $t = t_j$ değerleri yerine yazılırsa

$$\langle BX(s), X(t_j) \rangle = \frac{1}{2} \{ \langle BX(s), X(s) \rangle + \langle BX(t_j), X(t_j) \rangle \} \quad (3.17)$$

eşitliği elde edilir. (3.17) eşitliğinden (3.16) çıkarılırsa

$$\langle BX(s), \alpha_j \rangle = d_j \quad (3.18)$$

elde edilir öyle ki burada

$$\begin{aligned} \alpha_j &= X(t_j) - X(t_0) \\ d_j &= \frac{1}{2} \{ \langle BX(t_j), X(t_j) \rangle - \langle BX(t_0), X(t_0) \rangle \} \end{aligned}$$

ile verilir. (3.18) de $d_j \in \mathbb{R}$ ve $\alpha_j, \mathbb{R}^n$ Öklid uzayı için baz olduğundan $BX(s)$ sabit bir vektör olur. Böylece

$$B\alpha_j = BX(t_j) - BX(t_0) = 0$$

ve B matrisi sıfır matrisi olarak elde edilir. $B = A^T + A = 0$ ve böylece $A^T = -A$ olacağından A anti-simetrik bir matris olur. ■

Sonuç 3.1 A ve A_j matrisleri Teorem 3.2 deki gibi tanımlansın. A_j matrisinin türev matrisi $\dot{A}_j$ olmak üzere

$$A = \dot{A}_j A_j^{-1}$$

olarak yazılır.

İspat. Teorem 3.2 gereği $A^T = -A$ yazılırsa $B_j A_j^{-1} = -A$ ve böylece $-B_j = A A_j$ olur. Fakat $B_j = -\dot{A}_j$ olduğundan $A A_j = \dot{A}_j$ elde edilir. Böylece

$$A = \dot{A}_j A_j^{-1}$$

olarak yazılır. ■

Uyarı 3.1 Sonuç 3.1 de A_j matrisi özel olarak ortogonal alınırsa A matrisi ani hareketlerin dönme matrisine (Darboux matrisine) karşılık gelir.

Örnek 3.2 $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında birim hızlı dairesel helis eğrisinin parametrik denklemi

$$X(s) = \left(\cos \frac{s\sqrt{2}}{2}, \sin \frac{s\sqrt{2}}{2}, \frac{s\sqrt{2}}{2} \right)$$

ile verilsin. Bu durumda

$$T(s) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{s\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{s\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

olarak yazılır. X eğrisi üzerinde $X(0) = (1, 0, 0)$, $X(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi) = (0, 1, \frac{\pi}{2})$, $X(\sqrt{2}\pi) = (-1, 0, \pi)$ ve $X(\frac{3\sqrt{2}}{2}\pi) = (0, -1, \frac{3\pi}{2})$ noktalarını alalım. Bu değerler yardımıyla

$$A_j = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{\pi}{2} & \pi & \frac{3\pi}{2} \end{pmatrix}$$

ve

$$B_j = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $A^T = B_j A_j^{-1}$ eşitliğinden A anti-simetrik matrisi hesaplanırsa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $i, j \in \{1, 2, 3\}$ için $\alpha_j = X(t_j) - X(t_0)$ ve $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ olmak üzere $P = [a_{ij}]$ matrisi hesaplanırsa;

$$P = \begin{pmatrix} 2 + \frac{\pi^2}{4} & 2 + \frac{\pi^2}{2} & \frac{\pi^2}{4} \\ 2 + \frac{\pi^2}{2} & 4 + \pi^2 & 2 + \frac{3\pi^2}{2} \\ \frac{3\pi^2}{4} & 2 + \frac{3\pi^2}{2} & 2 + \frac{9\pi^2}{4} \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Gerekli hesaplamalar yapılsa $c_j = \left(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ olarak elde edilir. $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ olmak üzere $P\bar{b} = c_j$ denklem sistemi çözülürse

$$b_1 = b_3 = \frac{1}{\pi}, \quad b_2 = -\frac{1}{\pi}$$

olur. $b = \sum_{i=1}^3 b_i \alpha_i$ toplamında gereken değerler yerine yazılırsa $b = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olarak bulunur. Böylece $T(s) = AX(s) + b$ olacak şekilde uygun A anti-simetrik matrisi ve b kolon vektörü hesaplanmış olur.

Uyarı 3.2 Örnek 3.2 de görüldüğü üzere b öteleme vektörünü Teorem 3.2 ışığında hesaplamak zordur. Burada b vektörünü bulmanın daha kolay bir yolu $X'(s) = AX(s) + b$ eşitliğinde s yerine uygun bir değer yazmaktır. Gerçekten Örnek 3.2 de $s = 0$ alınırsa $X'(0) = AX(0) + b$ eşitliği gereğince $b = \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ olarak bulunur.

Teorem 3.3 $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında birim hızlı bir X eğrisi için aşağıdaki ifadeler denktir:

- 1) X bir $\mathbf{C}$ – eğrisidir.
- 2) $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $\|X^{(k)}(s)\|$ sabittir.
- 3) X bir W – eğrisidir.

(Kim ve Kim 2010).

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) X bir $\mathbf{C}$ –eğrisi olsun. Teorem 3.2 gereği

$$X'(s) = AX(s) + b$$

yazılır. A matrisi sabit bir matris olduğundan $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$X^{(k+1)}(s) = AX^{(k)}(s) \tag{3.19}$$

olarak elde edilir. $A^T = -A$ olduğundan

$$\langle AX^{(k)}(s), X^{(k)}(s) \rangle = -\langle X^{(k)}(s), AX^{(k)}(s) \rangle$$

olur ve böylece

$$\langle AX^{(k)}(s), X^{(k)}(s) \rangle = 0 \tag{3.20}$$

yazılır.

$$\langle X^{(k)}(s), X^{(k)}(s) \rangle' = 2 \langle X^{(k+1)}(s), X^{(k)}(s) \rangle \tag{3.21}$$

olduğundan (3.19), (3.20) ve (3.21) gereği

$$\langle X^{(k)}(s), X^{(k)}(s) \rangle' = 0 \tag{3.22}$$

elde edilir. (3.22) gereği $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$\|X^{(k)}(s)\| \tag{3.23}$$

sabit olur.

(2) $\Rightarrow$ (3) $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $\|X^{(k)}(s)\|$ sabit olsun. Kısalık için $X^{(k)}(s)$ yerine $X^{(k)}$ ifadesi kullanılsın. (3.23) gereğince

$$\langle X', X' \rangle = sbt, \langle X'', X'' \rangle = sbt, \dots, \langle X^{(k)}, X^{(k)} \rangle = sbt \quad (3.24)$$

yazılır ve (3.24) de her bir iç çarpımın yay parametresine göre türevi alınır

$$\langle X', X'' \rangle = \langle X'', X''' \rangle = \dots = \langle X^{(k)}, X^{(k+1)} \rangle = 0 \quad (3.25)$$

elde edilir. (3.25) de tekrar yay parametresine göre türev alınır

$$\langle X', X''' \rangle = sbt, \langle X'', X^{(4)} \rangle = sbt, \dots, \langle X^{(k)}, X^{(k+2)} \rangle = sbt \quad (3.26)$$

olduğu kolayca görülür. Benzer işlemler tekrar edilerek $i, j \leq n$ olmak üzere $j - i$ çift ise $\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle$ iç çarpımı sabit, tek ise sıfıra eşit olur. Şimdi $1 \leq r \leq n$ olmak üzere $X', X'', \dots, X^{(r)}$ türevleri bir I aralığında lineer bağımsız olsun. $\{X', X'', \dots, X^{(r)}\}$ cümlesine Gramm-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi uygulanırsa

$$E_i = X^{(i)} - \sum_{j < i} \frac{\langle X^{(i)}, E_j \rangle}{\langle E_j, E_j \rangle} E_j$$

yazılır. Burada $\langle X^{(i)}, E_j \rangle$ ve $\langle E_j, E_j \rangle$ iç çarpımları sabit olduğundan

$$E_i \in Sp \{X', X'', \dots, X^{(r)}\}$$

ve $\|E_i\|$ sabit olur. $V_i = \frac{E_i}{\|E_i\|}$ olmak üzere bu eğrinin Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ cümlesi ile belirlidir. Böylece $1 \leq i \leq n - 1$ olmak üzere

$$V_i = c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} \quad (3.27)$$

olacak şekilde $c_i \in \mathbb{R}$ bulunur. (3.27) eşitliği gereği

$$V_i' = c_1 X'' + c_2 X''' + \dots + c_i X^{(i+1)}$$

ve

$$V_{i+1} = c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} + c_{i+1} X^{(i+1)}$$

yazılır. Eğrinin $\kappa_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle$, i -yinci eğrilik fonksiyonu hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle &= \langle c_1 X'', c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} + c_{i+1} X^{(i+1)} \rangle \\ &+ \langle c_2 X''', c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} + c_{i+1} X^{(i+1)} \rangle \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &+ \langle c_i X^{(i+1)}, c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} + c_{i+1} X^{(i+1)} \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

olur. İç çarpımın lineerlik özelliği kullanılarak (3.28) eşitliği hesaplanırsa

$$\kappa_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle \quad (3.29)$$

değerleri sabit olur. Böylece X eğrisi bir W -eğrisidir.

(3) $\Rightarrow$ (1) X eğrisi bir W -eğrisi olsun. Teorem 3.1 gereği bu eğri rankı tek ise

$$X(s) = (a_1 \cos c_1 s, a_1 \sin c_1 s, \dots, a_n \cos c_n s, a_n \sin c_n s, bs, 0, \dots, 0)$$

eşitliğiyle, eğer rankı çift ise

$$X(s) = (a_1 \cos c_1 s, a_1 \sin c_1 s, \dots, a_n \cos c_n s, a_n \sin c_n s, 0, \dots, 0) \quad (3.30)$$

eşitliğiyle verilir. Eğrinin rankının çift olduğunu kabul edelim. (3.30) gereği

$$T(s) = (-a_1 c_1 \sin c_1 s, a_1 c_1 \cos c_1 s, \dots, -a_n c_n \sin c_n s, a_n c_n \cos c_n s, 0, \dots, 0)$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle X(t) - X(s), T(t) - T(s) \rangle = 0$$

olduğu görülür. Rankı tek olan W -eğrileri için benzer şekilde aynı sonuç elde edilir.

Böylece W -eğrileri birer $\mathbf{C}$ -eğrisidir. ■

3.2 Öklid Uzayında $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{N}^*$ -Eğrilerinin Geometrisi

Önceki kesimde $\mathbf{C}$ -eğrileri karakterize edilirken, eğrinin iki noktasını birleştiren kirişin eğri ile bu noktalarda eşit ölçüde açı yaptığı ifade edilmişti. Bu kesimde ilk kez, eğrinin iki noktasını birleştiren kirişin bu noktalardaki normal vektörlerin

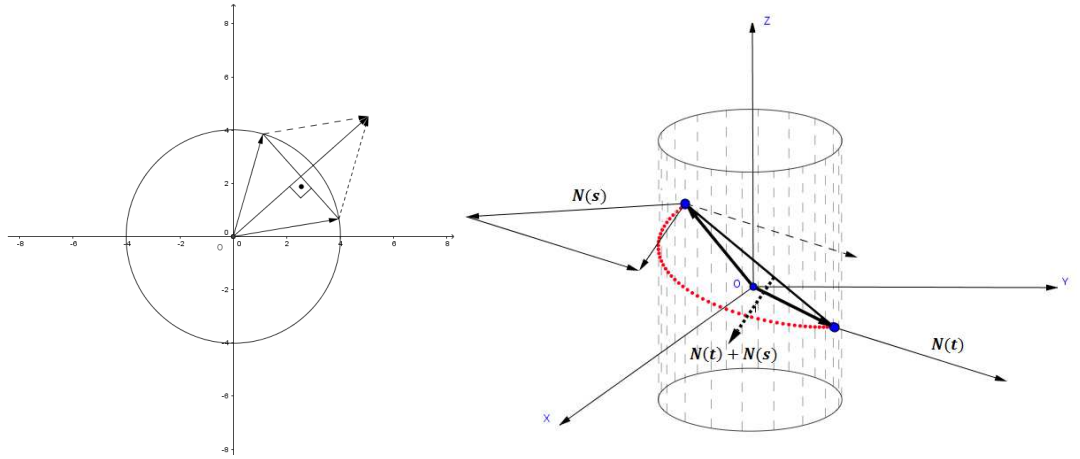
toplamına dik olması fikri ile $\mathbf{N}$ –eğrileri tanımlandı. Daha sonra eğrinin herhangi iki noktasının belirlediği yer vektörlerinin toplamı ile farkının birbirine dik olması kullanılarak $\mathbf{N}^*$ –eğrileri ifade edilmiştir.

Tanım 3.3 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Öklid uzayında birim hızlı bir eğri olsun. Eğrinin birim normal vektör alanı N olmak üzere her $t \in I$ için

$$\langle X(t) - X(s), N(t) + N(s) \rangle = 0 \quad (\mathbf{N})$$

eşitliği sağlanıyorsa X eğrisine Öklid uzayında bir $\mathbf{N}$ –eğrisidir denir.

Örnek 3.3 $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında verilen birim hızlı çember ve dairesel helis eğrisi birer $\mathbf{N}$ –eğrisidir. Bu eğrilere ait özelliğin geometrik temsili aşağıdaki şekilde verilmiştir;



Şekil 3.2 Çember ve Dairesel Helis Eğrisi Üzerinde $(\mathbf{N})$ Koşulu

Teorem 3.4 X eğrisi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında birim hızlı bir $\mathbf{C}$ –eğrisi olsun. Bu durumda X bir $\mathbf{N}$ –eğrisidir. Ayrıca simetrik bir B matrisi ile $c \in \mathbb{R}_1^n$ sütun vektörü için eğrinin birim normal vektör alanı $N(s) = BX(s) + c$ şeklinde yazılır.

İspat. X bir $\mathbf{C}$ –eğrisi olsun. Bu durumda

$$T(s) = AX(s) + b \quad (3.31)$$

olacak şekilde anti-simetrik bir A matrisi ve $b \in \mathbb{R}_1^n$ sütun vektörü bulunur. (3.31) eşitliğinde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$T'(s) = AX'(s) = AT(s) \quad (3.32)$$

elde edilir. Tanım 2.1 gereğince

$$T'(s) = \kappa(s)N(s) \quad (3.33)$$

yazılır. X , $\mathbf{C}$ –eğrisi olduğundan $\kappa(s) = \kappa \neq 0$ bir sabittir.

(3.32) ve (3.33) eşitliğinden

$$N(s) = \frac{1}{\kappa}AT(s) \quad (3.34)$$

yazılır. (3.34) kullanılarak

$$\langle X(t) - X(s), N(t) + N(s) \rangle = \frac{1}{\kappa} \langle A^T (X(t) - X(s)), T(t) + T(s) \rangle$$

olur. A matrisinin antisimetrikliği ve (3.31) gereğince

$$\langle X(t) - X(s), N(t) + N(s) \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece X bir $\mathbf{N}$ –eğrisidir. (3.31) ve (3.34) gereğince

$$N(s) = \frac{1}{\kappa}A^2X(s) + \frac{1}{\kappa}Ab \quad (3.35)$$

yazılır. A matrisi anti-simetrik olduğundan A^2 matrisi simetriktir. (3.35) eşitliğinde $\frac{1}{\kappa}A^2 = B$ ve $\frac{1}{\kappa}Ab = c$ yazılırsa

$$N(s) = BX(s) + c$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.5 $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında birim hızlı bir X eğrisi için aşağıdaki ifadeler denktir:

- 1) X – eğrisi bir $\mathbf{N}$ –eğrisidir.
- 2) $N(s) = AX(s) + b$ olacak şekilde simetrik A matrisi vardır.
- 3) X – eğrisi bir $\mathbf{C}$ –eğrisidir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) X bir $\mathbf{N}$ –eğrisi olmak üzere bu eğri tümüyle $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayında yatsın. X üzerinde

$$X(t_0), X(t_1), X(t_2), X(t_3)$$

gibi noktalar bulunur öyle ki $\{X(t_j) - X(t_0) \mid j = 1, 2, 3\}$ cümlesi $\mathbb{R}^3$ Öklid uzayını gerer. (N) koşulu gereği $t = t_0$ değeri için

$$\langle N(s), X(t_0) \rangle = \langle N(s), X(s) \rangle + \langle N(t_0), X(s) \rangle - \langle N(t_0), X(t_0) \rangle \quad (3.36)$$

ve $1 \leq j \leq 3$ olmak üzere $t = t_j$ değerleri için

$$\langle N(s), X(t_j) \rangle = \langle N(s), X(s) \rangle + \langle N(t_j), X(s) \rangle - \langle N(t_j), X(t_j) \rangle \quad (3.37)$$

yazılır. (3.37) eşitliğinden (3.36) eşitliği çıkarılırsa

$$\langle N(s), \alpha_j \rangle = \langle X(s), \beta_j \rangle + c_j \quad (3.38)$$

elde edilir öyle ki burada

$$\alpha_j = X(t_j) - X(t_0)$$

$$\beta_j = N(t_j) - N(t_0)$$

$$c_j = \langle N(t_0), X(t_0) \rangle - \langle N(t_j), X(t_j) \rangle$$

şeklinde verilir. $X(t_j) - X(t_0)$ ve $N(t_j) - N(t_0)$ vektörlerini j -yinci sütun kabul eden matrisler sırasıyla A_j ve B_j olsun. $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ ve birim normal vektör alanı $N(t) = (N_1(t), N_2(t), N_3(t))$ olsun. Burada $1 \leq j \leq 3$, $0 \leq k \leq 3$ ve $X_j(t_k) = X_{jk}$ ve $N_j(t_k) = N_{jk}$ olmak üzere;

$$A_j = \begin{pmatrix} X_{11} - X_{10} & X_{12} - X_{10} & X_{13} - X_{10} \\ X_{21} - X_{20} & X_{22} - X_{20} & X_{23} - X_{20} \\ X_{31} - X_{30} & X_{32} - X_{30} & X_{33} - X_{30} \end{pmatrix}$$

ve

$$B_j = \begin{pmatrix} N_{11} - N_{10} & N_{12} - N_{10} & N_{13} - N_{10} \\ N_{21} - N_{20} & N_{22} - N_{20} & N_{23} - N_{20} \\ N_{31} - N_{30} & N_{32} - N_{30} & N_{33} - N_{30} \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir. A matrisi A_j ve B_j matrisleri yardımıyla

$$A^T = B_j A_j^{-1} \quad (3.39)$$

şeklinde b vektörü ise $b = \sum_{k=1}^3 b_k \alpha_k$ şeklinde tanımlanır. Burada b_k katsayıları

$$\begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle & \langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle \\ \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle & \langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

eşitliğiyle hesaplanır. (3.40) gereği $1 \leq j \leq 3$ olmak üzere

$$c_j = \langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle b_1 + \langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle b_2 + \langle \alpha_j, \alpha_3 \rangle b_3$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\langle \alpha_j, b \rangle = \sum_{k=1}^3 \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle b_k \quad (3.41)$$

olur. (3.40) ve (3.41) gereği

$$c_j = \langle \alpha_j, b \rangle \quad (3.42)$$

olarak elde edilir. (3.39) gereği her $1 \leq j \leq 3$ için $\beta_j = A^T \alpha_j$ olduğundan

$$\langle \beta_j, X(s) \rangle = \langle \alpha_j, AX(s) \rangle \quad (3.43)$$

yazılır. (3.42) ve (3.43) gereği

$$\langle \beta_j, X(s) \rangle + c_j = \langle \alpha_j, AX(s) + b \rangle \quad (3.44)$$

yazılır. (3.38) ve (3.44) gereğince

$$\langle \alpha_j, N(s) \rangle = \langle \alpha_j, AX(s) + b \rangle$$

yazılır ve böylece

$$N(s) = AX(s) + b \quad (3.45)$$

olarak elde edilir. Şimdi A matrisinin simetrik olduğunu gösterelim:

$$A_j = \begin{pmatrix} X_{11} - X_{10} & X_{12} - X_{10} \\ X_{21} - X_{20} & X_{22} - X_{20} \end{pmatrix}$$

ve

$$B_j = \begin{pmatrix} N_{11} - N_{10} & N_{12} - N_{10} \\ N_{21} - N_{20} & N_{22} - N_{20} \end{pmatrix}$$

yazılsın.

$$c = (X_{11} - X_{10})(X_{22} - X_{20}) - (X_{12} - X_{10})(X_{21} - X_{20})$$

olmak üzere

$$A_j^{-1} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} X_{22} - X_{20} & X_{10} - X_{12} \\ X_{20} - X_{21} & X_{11} - X_{10} \end{pmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$B_j A_j^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

olsun. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$a_{12} = \frac{1}{c} ((X_{10} - X_{12})N_{11} + (X_{12} - X_{11})N_{10} + (X_{11} - X_{10})N_{12})$$

ve

$$a_{21} = \frac{1}{c} ((X_{22} - X_{20})N_{21} + (X_{21} - X_{22})N_{20} + (X_{20} - X_{21})N_{22})$$

olarak yazılır. **(N)** koşulunda $\{t_0, t_1\}$, $\{t_0, t_2\}$ ve $\{t_1, t_2\}$ değerleri kullanılarak sırasıyla

$$(X_{11} - X_{10})N_{10} + (X_{11} - X_{10})N_{11} + (X_{21} - X_{20})N_{20} + (X_{21} - X_{20})N_{21} = 0 \quad (3.46)$$

ile

$$(X_{12} - X_{10})N_{10} + (X_{22} - X_{10})N_{12} + (X_{22} - X_{20})N_{20} + (X_{22} - X_{20})N_{22} = 0 \quad (3.47)$$

ve

$$(X_{12} - X_{11})N_{11} + (X_{12} - X_{11})N_{12} + (X_{22} - X_{21})N_{21} + (X_{22} - X_{21})N_{22} = 0 \quad (3.48)$$

eşitlikleri elde edilir. (3.46) ve (3.48) eşitlikleri toplanarak (3.47) den çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $a_{12} = a_{21}$ elde edilir. Böylece A^T dolayısıyla A matrisi simetrik olur. İspat 3×3 tipinde A matrisi için benzerdir.

(2)⇒(3) A matrisi simetrik olmak üzere $N(s) = AX(s) + b$ olsun. (3.45) ve Tanım 2.1 gereğince

$$N'(s) = AT(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \quad (3.49)$$

yazılır. (3.49) eşitliğinde her iki tarafın s yay parametresine göre türevi alınır

$$AT'(s) = -\kappa'(s)T(s) - (\kappa^2(s) + \tau^2(s))N(s) + \tau'(s)B(s) \quad (3.50)$$

elde edilir. (3.49), (3.50) eşitlikleri ve A matrisinin simetrikliği kullanılarak

$\kappa'(s) = 0$ olarak hesaplanır. Böylece $\kappa(s)$ sabittir. $\kappa(s) = \kappa$ ve $\tau(s) \neq 0$ olsun. (3.50) eşitliğinde her iki tarafın s yay parametresine göre türevi alınır

$$\begin{aligned} N'''(s) &= \kappa (\kappa^2 + \tau^2(s)) T(s) - 3\tau(s)\tau'(s)N(s) \\ &\quad + (\tau''(s) - \tau(s)(\kappa^2 + \tau^2(s))) B(s) \end{aligned} \quad (3.51)$$

yazılır. (3.51) eşitliği $N(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle N'''(s), N(s) \rangle = -3\tau(s)\tau'(s) \quad (3.52)$$

elde edilir. Tanım 2.1 gereğince

$$N'''(s) = -\kappa^2 AT(s) + \kappa\tau(s)AB(s) \quad (3.53)$$

olarak yazılır. (3.53) eşitliği $N(s)$ ile iç çarpılırsa

$$\langle N'''(s), N(s) \rangle = \tau(s)\tau'(s) \quad (3.54)$$

elde edilir. (3.52) ve (3.54) eşitlikleri gereğince $\tau(s)$ sabit olur. $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$ sabit olduğundan X bir **C**-eğrisidir.

(3)⇒(1) Teorem 3.4 gereği **C**-eğrileri birer **N**-eğrisidir. ■

Tanım 3.4 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir eğri olsun. Her $t, s \in I$ için

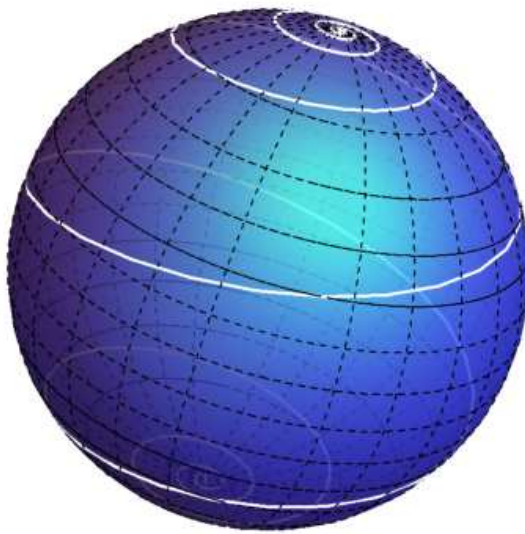
$$\langle \gamma(t) - \gamma(s), \gamma(t) + \gamma(s) \rangle = 0 \quad (\mathbf{N}^*)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu eğriye **N***-eğrisi adı verilir.

Örnek 3.4 $\mathbb{S}^2$ küresi üzerinde verilen

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{1+a^2t^2}}, \frac{\sin t}{\sqrt{1+a^2t^2}}, -\frac{at}{\sqrt{1+a^2t^2}} \right), \quad a \in \mathbb{R}$$

küresel spiral eğrisi bir **N***-eğrisidir. Bu eğrinin geometrik temsili aşağıdaki şekilde verilmiştir:



Şekil 3.3 Küresel Spiral

Teorem 3.6 $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere Öklid uzayındaki tüm $\mathbf{N}^*$ -eğrileri r -yarıçaplı $\mathbb{S}^n$ hiperküresi üzerinde yatar.

İspat. $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzayında O merkezli r -yarıçaplı $\mathbb{S}^n$ hiperküresinin kartezyen denklemi

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = r^2$$

ile verilsin. Böylece yüzey üzerindeki noktalar $(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ ile belirlidir. $\mathbb{S}^n$ üzerinde bir eğri γ ve bu eğri üzerindeki iki nokta P ve Q olsun.

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OQ}\| = r \quad (3.55)$$

olduğu aşikardır. (3.55) gereğince

$$\langle \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} \rangle = r^2 - r^2 = 0$$

yazılır. Böylece γ bir $\mathbf{N}^*$ -eğrisidir. ■

3.3 Öklid Uzayında $\mathbf{G}$ -Yüzeylerinin İfadesi

Bu kesimde, Öklid uzayında, W -eğrilerini karakterize ederken kullanılan yöntem ve teknikler yardımıyla izoparametrik yüzeylere ait karakterizasyonlar ifade edilmiştir.

Tanım 3.5 $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir hiperyüzey M ve G de yüzeyin Gauss dönüşümü olsun. $P, Q \in M$ noktaları için

$$\langle Q - P, G(P) + G(Q) \rangle = 0 \quad (\mathbf{G})$$

eşitliği sağlanıyorsa M hiperyüzeyine Öklid uzayında bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi denir.

Teorem 3.7 $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında M hiperyüzeyi bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi olsun. $x \in M$ ve G de M hiperyüzeyinin Gauss dönüşümü olmak üzere $G(x) = Ax + b$ olacak şekilde simetrik bir A matrisi ve $b \in \mathbb{R}_1^n$ sütun vektörü vardır (Kim ve Kim 2010).

İspat. M yüzeyi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi olsun. Genelliği bozmadan M hiperyüzeyinin $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında yattığını kabul edelim. M üzerinde öyle $y_0, y_1, \dots, y_n$ noktaları vardır ki $\{y_j - y_0 \mid 1 \leq j \leq n\}$ cümlesi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayını gerer. Böylece $(\mathbf{G})$ koşulu gereği $y_0, x \in M$ noktaları için

$$\langle y_0 - x, G(y_0) + G(x) \rangle = 0 \quad (3.56)$$

yazılır. (3.56) düzenlenirse;

$$\langle G(y_0), y_0 \rangle + \langle G(x), y_0 \rangle - \langle G(y_0), x \rangle - \langle G(x), x \rangle = 0$$

ve böylece

$$\langle G(x), y_0 \rangle = \langle G(x), x \rangle - \langle G(y_0), y_0 \rangle + \langle G(y_0), x \rangle \quad (3.57)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\langle G(x), y_j \rangle = \langle G(x), x \rangle - \langle G(y_j), y_j \rangle + \langle G(y_j), x \rangle \quad (3.58)$$

yazılır. (3.58) eşitliğinden (3.57) çıkarılırsa

$$\langle G(x), \alpha_j \rangle = \langle \beta_j, x \rangle + c_j \quad (3.59)$$

elde edilir öyle ki burada

$$\alpha_j = y_j - y_0$$

$$\beta_j = G(y_j) - G(y_0)$$

$$c_j = \langle G(y_0), y_0 \rangle - \langle G(y_j), y_j \rangle$$

şeklinde verilir. α_j ve β_j vektörlerini j -yinci sütun kabul eden matrisler sırasıyla A_j ve B_j olmak üzere A matrisi

$$A^T = B_j A_j^{-1} \quad (3.60)$$

olarak tanımlanır. Aynı zamanda $b = \sum_{k=1}^n b_k \alpha_k$ olarak hesaplanır. Bu toplamda b_k katsayıları

$$\begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, \alpha_n \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & . & \dots & \langle \alpha_2, \alpha_n \rangle \\ \dots & . & . & \dots \\ \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_n, \alpha_2 \rangle & \dots & \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

eşitliğiyle hesaplanır. (3.61) eşitliği gereğince

$$c_j = \langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle b_1 + \langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle b_2 + \dots + \langle \alpha_j, \alpha_n \rangle b_n$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\langle \alpha_j, b \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle b_k = c_j \quad (3.62)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (3.60) gereği $\beta_j = A^T \alpha_j$ olduğundan

$$\langle \beta_j, x \rangle = \langle \alpha_j, Ax \rangle \quad (3.63)$$

olur. (3.62) ve (3.63) eşitlikleri kullanılarak

$$\langle \beta_j, x \rangle + c_j = \langle \alpha_j, Ax + b \rangle \quad (3.64)$$

elde edilir. Son olarak (3.59) ve (3.64) eşitlikleri kullanılarak

$$\langle \alpha_j, G(x) \rangle = \langle \alpha_j, Ax + b \rangle$$

yazılır ve buradan

$$G(x) = Ax + b \quad (3.65)$$

olarak elde edilir. $X \in T_x M$ ve yüzeyin birim normal vektör alanı $\vec{n}$ olsun. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayının Levi-Civita koneksiyonu ∇ ve $S(X) = -\nabla_X \vec{n}$ olmak üzere (3.65) eşitliği gereğince;

$$\nabla_X G(x) = AX = -S(X) \quad (3.66)$$

yazılır. Burada S dönüşümü M hiperyüzeyinin şekil operatörüdür. Teorem 2.1 gereği $\forall X, Y \in T_x M$ için

$$\langle S(X), Y \rangle = \langle X, S(Y) \rangle \quad (3.67)$$

yazılır. (3.66) ve (3.67) gereğince

$$\begin{aligned} \langle -AX, Y \rangle = \langle X, -AY \rangle &\Leftrightarrow \langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle X, A^T Y \rangle = \langle X, AY \rangle \\ &\Leftrightarrow A = A^T \\ &\Leftrightarrow A \text{ simetriktir.} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.8 Öklid uzayında bir M hiperyüzeyi için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) M hiperyüzeyi $\mathbf{G}$ -yüzeyidir.
- (2) M izoparametrik bir hiperyüzeydir.
- (3) M aşağıdaki hiperyüzeylerden birinin açık parçasıdır:
 - Hiperdüzlem,
 - $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ hiperküre,
 - $\mathbb{S}^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ küresel silindir.

(Kim ve Kim 2010).

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) M bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi olsun. M hiperyüzeyi üzerinde $\{E_1, E_2, \dots, E_{n-1}\}$ ortonormal çatısı seçelim öyle ki $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ vektörleri S şekil operatörünün $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik vektörleri olsun. O zaman her $1 \leq j \leq n-1$ için $S(E_j) = \mu_j E_j$ yazılır. Ayrıca Teorem 3.7 gereğince simetrik bir A matrisi için $G(x) = Ax + b$ yazılır. (3.66) gereği her $x \in M$ için

$$AE_j(x) = -S(E_j(x)) = -\mu_j(x)E_j(x) \quad (3.68)$$

elde edilir. (3.68) gereğince $(A + \mu_j I)E_j(x) = 0$ olur. Sıfırdan farklı karakteristik vektörlerin varlığı için

$$\det(A + \mu_j I) = 0 \quad (3.69)$$

yazılır. A matrisi sabit olduğundan (3.69) nin çözümünden $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ asli eğriliklerinin sabit olduğu görülür. Böylece M izoparametrik bir hiperyüzeydir.

(2) $\Rightarrow$ (3) M izoparametrik bir hiperyüzey olsun.

$$f(x) = \langle Ax + b, Ax + b \rangle$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunda her $x \in M$ için $f(x) = 1$ yazılabileceğinden $f^{-1}(1) = x$ olur. Böylece $x \in f^{-1}(1)$ ve $M \subset f^{-1}(1)$ olur. A simetrik olduğundan

$$f(x) = \langle x, A^2 x \rangle + 2 \langle x, Ab \rangle + \langle b, b \rangle$$

olarak elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$\overrightarrow{\nabla} f(x) = 2A(Ax + b)$$

olarak bulunur. $\overrightarrow{\nabla f}$ vektörü ile G lineer bağımlı olduğundan bazı $\lambda(x)$ fonksiyonları için

$$A(Ax + b) = \lambda(x)(Ax + b) \quad (3.70)$$

yazılır. (3.70) gereği

$$(A - \lambda(x)I)(Ax + b) = 0 \quad (3.71)$$

elde edilir. A matrisi sabit olduğundan her $x \in M$ için $\lambda(x)$ sabittir. $\lambda(x) = \lambda$ alabiliriz. Böylece (3.70) gereği

$$V = \{Ax + b \mid x \in M\}$$

cümlesi A matrisinin λ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik uzay tarafından kapsanır. Burada $Sp\{V\}$ cümlesi M yüzeyinin normal uzayını oluşturur. Ayrıca Teorem 3.7 gereği

$$\text{Im } A = \text{Span}\{A\alpha_j \mid 1 \leq j \leq n\} \subset V \quad (3.72)$$

yazılır. Şimdi V cümlesinin boyuna bağlı olarak M hiperyüzeyini belirleyelim:

Durum 1. $\text{boy}V = 1$ olsun. Bu durumda yüzeyin birim normali $G(x) = b$ sabit vektör ve M yüzeyi hiperdüzlemin açık bir parçası olur.

Durum 2. $\text{boy}V = n$ olsun. (3.70) gereği λ, A matrisinin karakteristik değeri olduğundan ($x = 0$ alınırsa) $b \in \mathbb{R}_1^n$ için $Ab = \lambda b$ yazılır. Böylece $\lambda \neq 0$ olmak üzere

$$b = \frac{1}{\lambda}Ab \in \text{Im } A$$

yazılır. Böylece $V \subset \text{Im } A$ ve (3.72) gereği $V = \text{Im } A$ olur. $r > 0$ ve $\lambda = \pm \frac{1}{r}$ olmak üzere

$$A|_V = \pm \frac{1}{r}I$$

ve böylece $G(x) = \pm \frac{1}{r}x + b$ yazılır. Bu durumda M yüzeyi $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ hiperküresidir.

Durum 3. $2 \leq p \leq n - 1$ olmak üzere $\text{boy}V = p$ olsun. V nin dik komplemanı $V^\perp$ uzayı $n - p$ boyutlu olur ve bu uzay her $x \in M$ için $T_x M$ teğet uzay tarafından içerilir. $x_0 \in M$ civarında $E_1(x), E_2(x), \dots, E_{n-1}(x)$ ortonormal çatısı seçilsin öyle ki $E_1, E_2, \dots, E_{n-p}$ vektörleri $V^\perp$ uzayında sabit vektörler olsun. Bu durumda

$$\{E_{n-p+1}(x), \dots, E_{n-1}(x), G(x)\}$$

cümlesi V yi üretir. $\{E_{n-p+1}(x), E_{n-p+2}(x), \dots, E_{n-1}(x)\}$ cümlesi tarafından gerilen teğet altuzay integrallenebilir ve bu uzayın x_0 noktasından geçen M_1 integral altmanifoldu için

$$M_1 = M \cap (x_0 + V)$$

yazılır. Böylece $\mathbb{R}^{n-p} = V^\perp$ olmak üzere

$$M = M_1 \times \mathbb{R}^{n-p}$$

olarak düzenlenebilir. $M_1, V = \mathbb{R}^p$ uzayında bir hiperyüzeydir. M_1 in $\mathbb{R}^p$ deki $G_1(x)$ Gauss dönüşümü

$$G_1(x) = G(x) \quad (3.73)$$

eşitliğini sağlar. Böylece $x \in M_1$ için $A_1, p \times p$ lik $A|_V$ matrisini göstermek üzere

$$G_1(x) = A_1x + b \quad (3.74)$$

olur. (3.73) ve (3.74) gereğince $A_1 = \pm \frac{1}{r}I$ yazılır. Durum 2 ye benzer şekilde M_1 hiperyüzeyi $\mathbb{S}^{p-1}(r)$ hiperküresi olur. Böylece M hiperyüzeyi $\mathbb{S}^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ küresel silindirin açık bir parçası olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) M yüzeyi $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında bir hiperdüzlem olsun. $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ dikdörtgenel koordinat sisteminde M hiperdüzlemini, f bir izometrik immersiyon olmak üzere $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ daldırması olarak tanımlarsak, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ için

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = c$$

yazılır. Burada $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ dir. Bu yüzey üzerinde alınan iki nokta P ve Q olmak üzere $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ diyelim. Gerekli hesaplamalar yapılırsa bu yüzeyin birim normali,

$$G := \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\|\overrightarrow{\nabla f}\|} = \frac{1}{m} (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

olur öyle ki burada $m = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ ile verilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\langle Q - P, G(P) + G(Q) \rangle = 0$$

olduğu görülür. Böylece hiperdüzlemler $\mathbf{G}$ –yüzeyidir. Öklid uzayında, merkezi x_0 , yarıçapı r olan hiperküre yüzeyi

$$\mathbb{S}^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = r^2\}$$

ile verilir. Genelliği bozmadan $x_0 = (0, 0, \dots, 0)$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ alalım. Bu yüzeyi, f bir izometrik immersiyon olmak üzere $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ daldırması olarak tanımlarsak;

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2 \quad (3.75)$$

yazılır. (3.75) yardımıyla

$$G := \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\|\overrightarrow{\nabla f}\|} = \frac{1}{r} (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.76)$$

elde edilir. (3.76) kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa, $P, Q \in M$ için

$$\langle Q - P, G(P) + G(Q) \rangle = 0$$

elde edilir ve böylece $\mathbb{S}^{n-1}(r)$ hiperküresi $\mathbf{G}$ –yüzeyi olur. $\mathbb{S}^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ küresel silindir yüzeyinin $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ dikdörtgensel koordinat sisteminde denklemi

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 = r^2, \quad x_{p+1} = u_{p+1}, x_{p+2} = u_{p+2}, \dots, x_n = u_n$$

olarak verilsin. $\pi : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}^p \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{S}^{p-1}(r)$ üzerine) doğal Öklid projeksiyonu yardımıyla bu yüzeyin birim normal vektör alanı

$$G := \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\|\overrightarrow{\nabla f}\|} = \frac{1}{r} (x_1, x_2, \dots, x_p, 0, 0, \dots, 0)$$

şeklinde yazılır. $P, Q \in \mathbb{S}^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ olmak üzere gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\langle Q - P, G(P) + G(Q) \rangle = 0$$

olarak bulunur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.9 $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında M bir $\mathbf{G}$ –yüzeyi ve $\alpha = \alpha(s)$ de M üzerinde birim hızlı bir geodezik eğri olsun. O zaman α bir $\mathbf{N}$ –eğrisidir.

İspat. α eğrisi M yüzeyi üzerinde birim hızlı geodezik eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin N birim normal vektör alanı ile M yüzeyinin n birim normal vektör alanı lineer bağımlı olur. Böylece bir $\lambda \neq 0$ reel sayısı için $n = \lambda N$ yazılır. M bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi olduğundan Tanım 3.5 gereğince

$$\langle \alpha(t) - \alpha(s), n(t) + n(s) \rangle = 0 \quad (3.77)$$

yazılır. (3.77) eşitliğinde $n = \lambda N$ yazılırsa

$$\langle \alpha(t) - \alpha(s), N(t) + N(s) \rangle = 0$$

elde edilir. Böylece α bir $\mathbf{N}$ -eğrisidir. ■

Teorem 3.10 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ küresel silindiri üzerinde yatan birim hızlı geodezikler doğrular, orijinden geçen düzlem tarafından ihtiva edilen büyük çemberler ve büyük çemberleri dayanak eğrisi kabul eden silindir üzerindeki dairesel helislerdir (Munteanu ve Nistor 2012).

İspat. $\mathbb{R}^4$ Öklid uzayında ($\mathbb{S}^2$ üzerine) doğal projeksiyon

$$\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4, \pi(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1, v_2, v_3, 0)$$

dönüşümü ile tanımlansın. $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ üzerindeki geodezik eğriler

$$\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s), t(s))$$

ve bu yüzey üzerindeki koneksiyon ∇ olsun. γ geodezik olduğundan

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \quad (3.78)$$

yazılır. Gauss denklemi gereğince bu eğri

$$\ddot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} - \left\langle \pi(\dot{\gamma}), \pi(\dot{\gamma}) \right\rangle \pi(\gamma) \quad (3.79)$$

eşitliğini sağlar. Dolayısıyla geodezikler (3.79) diferensiyel denklem sisteminin çözümleridir. (3.78) ve (3.79) gereğince

$$\begin{aligned} \ddot{x}(s) &= -(1 - \dot{t}(s)^2)x(s) \\ \ddot{y}(s) &= -(1 - \dot{t}(s)^2)y(s) \\ \ddot{z}(s) &= -(1 - \dot{t}(s)^2)z(s) \\ \ddot{t}(s) &= 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

yazılır. (3.80) gereğince $t(s) = \zeta_0 s + t_0$ alınırsa ζ_0 değerlerine bağlı olarak üç durum söz konusu olur:

Durum 1. $\dot{t}(s) = \zeta_0 = \pm 1$ olsun. Bu durumda

$$\ddot{x}(s) = 0$$

$$\ddot{y}(s) = 0$$

$$\ddot{z}(s) = 0$$

$$\ddot{t}(s) = 0$$

eşitlikleri yazılır. Eğri birim hızlı olduğundan $\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 = 0$ ve böylece $\dot{x}(s) = \dot{y}(s) = \dot{z}(s) = 0$ yazılır. Böylece bu eğri

$$\gamma(s) = (x_0, y_0, z_0, t_0 \pm s)$$

eşitliği ile verilen $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ küresel silindirin doğruları olur. Burada $x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0), t_0 = t(0)$ dır.

Durum 2. $\dot{t}(s) = \zeta_0 = 0$ olsun. Bu durumda

$$\ddot{x}(s) = -x(s)$$

$$\ddot{y}(s) = -y(s)$$

$$\ddot{z}(s) = -z(s)$$

$$\ddot{t}(s) = t_0$$

eşitlikleri yazılır. Böylece bu eğri

$$\gamma(s) = (x_0 \cos s + u_0 \sin s, y_0 \cos s + v_0 \sin s, z_0 \cos s + \omega_0 \sin s, t_0)$$

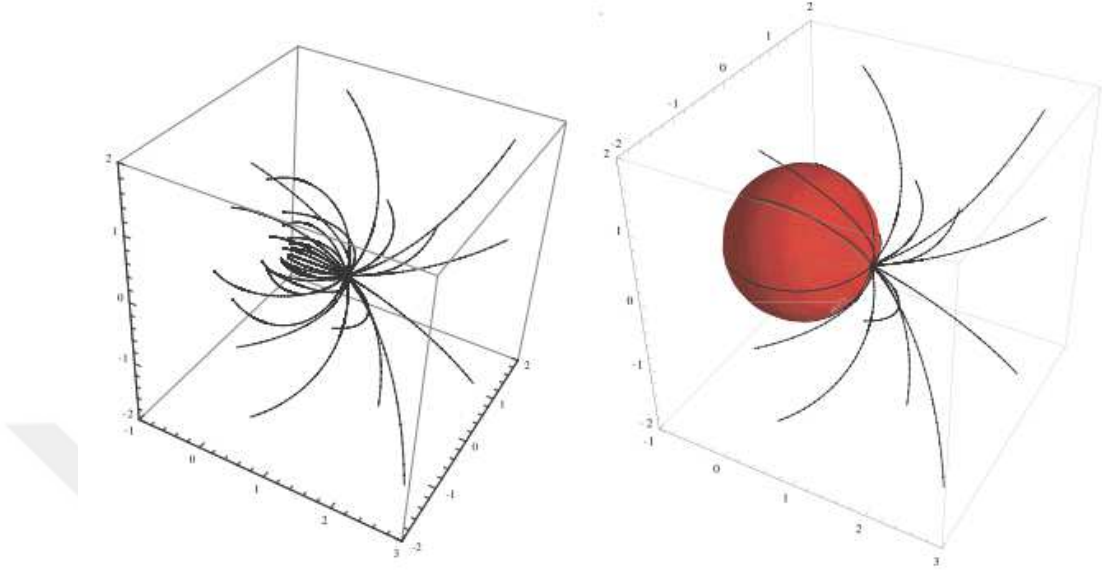
eşitliği ile verilen ve orijinden geçen bir düzlem tarafından ihtiva edilen, $\mathbb{S}^2$ küresinin büyük çemberleridir. Burada $u_0 = \dot{x}(0), v_0 = \dot{y}(0), \omega_0 = \dot{z}(0)$ dır.

Durum 3. $\dot{t}(s) = \zeta_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ olsun. Bu durumda bu eğri

$$\begin{aligned} \gamma(s) = & (x_0 \cos(\lambda_0 s) + \frac{u_0}{\lambda_0} \sin(\lambda_0 s), y_0 \cos(\lambda_0 s) + \frac{v_0}{\lambda_0} \sin(\lambda_0 s), \\ & z_0 \cos(\lambda_0 s) + \frac{\omega_0}{\lambda_0} \sin s, \zeta_0 s + t_0) \end{aligned}$$

eşitliği ile verilen $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ silindiri üzerindeki dairesel helislerdir. Burada $\lambda_0 = \sqrt{1 - \zeta_0^2}$ $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbb{S}^1$ de $\mathbb{S}^2$ küresinin büyük çemberleridir. ■

Teorem 3.10 da elde edilen geodeziklerin geometrik bir temsili aşağıdaki gibi verilebilir:



şekil 3.4 $S^2 \times \mathbb{R}$ Yüzeyinin Geodezikleri (Pallagi vd. 2010)

Sonuç 3.2 Teorem 3.10 ile ifade edilen geodezik eğriler birer **N**–eğrisidir.

İspat. Teorem 3.8 gereğince $S^2 \times \mathbb{R}$ yüzeyi bir **G**–yüzeyidir. Teorem 3.9 gereğince bu yüzey üzerindeki geodezik eğriler **N**–eğrisi olur. ■

4. LORENZ UZAYINDA ÖZEL EĞRİLER VE YÜZEYLER

Bu bölümde Kim ve Kim (2010) çalışmasında, Öklid uzayı için ifade edilenler, n -boyutlu Lorenz uzayına taşınarak bu uzayda $\mathbf{C}$ -eğrilerinin tanımı verildi. Ünal (2007) çalışmasında elde edilen helikoidal vektör alanların integral eğrilerinin birer $\mathbf{C}$ -eğrisi ve W -eğrisi olduğu gösterildi. 3-boyutlu Lorenz uzayında bir $\mathbf{C}$ -eğrisinin teğet vektör alanının integral eğrileri ve eğrilikler arasındaki ilişki özel olarak incelendi. $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında izoparametrik yüzeyler Kim ve Kim (2010) esas alınarak belirlendi. Bu yüzeyler ile $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{N}^*$ -eğrilerinin ilgisi kuruldu. Özel olarak $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}_1^2 \times \mathbb{R}$ yüzeylerinin geodezik denklemleri elde edildi.

4.1 Lorenz Uzayında $\mathbf{C}$ -Eğrilerine Ait Karakterizasyonlar

Tanım 4.1 $X : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında bir eğri olsun. Her $s \in I$ için

$$\langle X'(s), X'(s) \rangle_L = \pm 1$$

oluyorsa X eğrisine Lorenz uzayında birim hızlı bir eğri denir (O'Neill 1983).

Tanım 4.2 X eğrisi birim hızlı spacelike veya timelike bir eğri olsun. Uygun aralıkta seçilen bir t parametresi için

$$\langle X(t) - X(s), T(t) - T(s) \rangle_L = 0 \quad (\mathbf{C})$$

oluyorsa bu eğriye Lorenz uzayında bir $\mathbf{C}$ -eğrisidir denir.

Teorem 4.1 $X(s)$ eğrisi $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında birim hızlı spacelike veya timelike bir $\mathbf{C}$ -eğrisi ise bu eğrinin birim teğet vektör alanı

$$T(s) = AX(s) + b$$

olacak şekilde bir $n \times n$ tipinde semi anti-simetrik A matrisi ve $b \in \mathbb{R}_1^n$ sütun vektörü vardır.

İspat. X eğrisi $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında $\mathbf{C}$ -eğrisi olsun. Genelliği bozmadan X eğrisinin tümüyle n -boyutlu Lorenz uzayında yattığını kabul edelim. Bu eğri üzerinde $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$ gibi $(n+1)$ -nokta bulunur öyle ki

$$\{X(t_j) - X(t_0) \mid j = 1, 2, \dots, n\}$$

cümlesi $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayını gerer. (C) koşulu gereği $t = t_0$ için

$$\langle T(s), X(t_0) \rangle_L = \langle T(s), X(s) \rangle_L + \langle T(t_0), X(t_0) \rangle_L - \langle T(t_0), X(s) \rangle_L \quad (4.1)$$

ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere $t = t_j$ için

$$\langle T(s), X(t_j) \rangle_L = \langle T(s), X(s) \rangle_L + \langle T(t_j), X(t_j) \rangle_L - \langle T(t_j), X(s) \rangle_L \quad (4.2)$$

eşitlikleri yazılır. Bu eşitliklerde $T(t_0) = \frac{dX(t)}{dt} \big|_{t=t_0}, T(t_1) = \frac{dX(t)}{dt} \big|_{t=t_1}, \dots, T(t_n) = \frac{dX(t)}{dt} \big|_{t=t_n}$ olarak hesaplanır. (4.2) eşitliğinden (4.1) çıkarılırsa

$$\langle T(s), \alpha_j \rangle_L = \langle \beta_j, X(s) \rangle_L + c_j \quad (4.3)$$

elde edilir öyle ki burada

$$\alpha_j = X(t_j) - X(t_0)$$

$$\beta_j = T(t_0) - T(t_j)$$

$$c_j = \langle T(t_j), X(t_j) \rangle_L - \langle T(t_0), X(t_0) \rangle_L$$

şeklinde verilir. α_j ve β_j ifadelerini j -yinci sütun kabul eden matrisler sırasıyla A_j ve B_j olsun. $X_1, X_2, \dots, X_n$ koordinat fonksiyonları olmak üzere

$$X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t))$$

şeklinde verilsin. Bu durumda

$$A_j = \begin{pmatrix} X_1(t_1) - X_1(t_0) & X_1(t_2) - X_1(t_0) & \dots & X_1(t_n) - X_1(t_0) \\ X_2(t_1) - X_2(t_0) & . & . & X_2(t_n) - X_2(t_0) \\ \dots & . & . & \dots \\ X_n(t_1) - X_n(t_0) & X_n(t_2) - X_n(t_0) & \dots & X_n(t_n) - X_n(t_0) \end{pmatrix}$$

ve

$$B_j = \begin{pmatrix} X'_1(t_0) - X'_1(t_1) & X'_1(t_0) - X'_1(t_2) & \dots & X'_1(t_0) - X'_1(t_n) \\ X'_2(t_0) - X'_2(t_1) & . & . & X'_2(t_0) - X'_2(t_n) \\ \dots & . & . & \dots \\ X'_n(t_0) - X'_n(t_1) & X'_n(t_0) - X'_n(t_2) & \dots & X'_n(t_0) - X'_n(t_n) \end{pmatrix}$$

şeklinde verilir. Bu durumda A matrisi A_j ve B_j matrisleri yardımıyla

$$A^T = \varepsilon (B_j A_j^{-1}) \varepsilon \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\varepsilon = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ işaret matrisidir. b vektörü de $b = \sum_{k=1}^n b_k \alpha_k$ olacak şekilde tanımlanır. Burada $\alpha_k = X(t_k) - X(t_0)$ eşitliği ile b_k sayıları da

$$\begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle & \dots & \langle \alpha_1, \alpha_n \rangle \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle & . & . & \langle \alpha_2, \alpha_n \rangle \\ \dots & . & . & \dots \\ \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_n, \alpha_2 \rangle & \dots & \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

eşitliğiyle hesaplanır. (4.5) gereğince

$$c_j = \langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle_L b_1 + \langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle_L b_2 + \dots + \langle \alpha_j, \alpha_n \rangle_L b_n$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapırsa

$$\langle \alpha_j, b \rangle_L = \sum_{k=1}^n \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle_L b_k = c_j \quad (4.6)$$

olarak elde edilir. (4.4) gereği her $1 \leq j \leq n$ için $\beta_j = (\varepsilon A^T \varepsilon) \alpha_j$ olduğundan

$$\langle \beta_j, X(s) \rangle_L = \langle \alpha_j, AX(s) \rangle_L \quad (4.7)$$

yazılır. (4.6) ve (4.7) yardımıyla

$$\langle \beta_j, X(s) \rangle_L + c_j = \langle \alpha_j, AX(s) + b \rangle_L \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.3) ve (4.8) eşitlikleri gereğince

$$\langle \alpha_j, T(s) \rangle_L = \langle \alpha_j, AX(s) + b \rangle_L$$

yazılır ve son eşitlikten

$$T(s) = AX(s) + b \quad (4.9)$$

olarak elde edilir. Şimdi A matrisinin semi anti-simetrik olduğunu gösterelim:

(4.9) eşitliği ve (C) koşulu gereği

$$\langle A(X(t) - X(s)), X(t) - X(s) \rangle_L = 0 \quad (4.10)$$

yazılır. (4.10) ifadesi düzenlenirse

$$\langle X(t) - X(s), (\varepsilon A^T \varepsilon) (X(t) - X(s)) \rangle_L = 0 \quad (4.11)$$

olur. (4.10) ve (4.11) taraf tarafa toplanır

$$\langle B(X(t) - X(s)), X(t) - X(s) \rangle_L = 0 \quad (4.12)$$

elde edilir öyle ki burada $B = \varepsilon A^T \varepsilon + A$ matrisi semi simetrik matristir. (4.12) ifadesi $t = t_0$ değeri için düzenlenirse

$$\langle BX(s), X(t_0) \rangle_L = \frac{1}{2} \{ \langle BX(s), X(s) \rangle_L + \langle BX(t_0), X(t_0) \rangle_L \} \quad (4.13)$$

ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere

$$\langle BX(s), X(t_j) \rangle_L = \frac{1}{2} \{ \langle BX(s), X(s) \rangle_L + \langle BX(t_j), X(t_j) \rangle_L \} \quad (4.14)$$

olur. (4.14) eşitliğinden (4.13) çıkarılırsa

$$\langle BX(s), \alpha_j \rangle_L = d_j \quad (4.15)$$

elde edilir öyle ki burada α_j ve d_j

$$\alpha_j = X(t_j) - X(t_0)$$

$$d_j = \frac{1}{2} \{ \langle BX(t_j), X(t_j) \rangle_L - \langle BX(t_0), X(t_0) \rangle_L \}$$

eşitlikleri ile verilir. $\alpha_j, \mathbb{R}_1^n$ için baz olduğundan (4.15) gereği $BX(s)$ sabit bir vektör olur. Böylece

$$B\alpha_j = BX(t_j) - BX(t_0) = 0$$

ve B sıfır matrisi olarak elde edilir. Son eşitlik gereği $B = \varepsilon A^T \varepsilon + A = 0$ ve $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$ olarak elde edilir. Böylece A semi anti-simetrik bir matris olur. ■

Teorem 4.2 $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında birim hızlı bir non-null X eğrisi için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) X eğrisi $\mathbb{R}_1^n$ uzayında bir $\mathbf{C}$ – eğrisidir.
- (2) $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $\|X^{(k)}(s)\|$ sabittir.
- (3) X eğrisi $\mathbb{R}_1^n$ uzayında bir W – eğrisidir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) X bir $\mathbf{C}$ –eğrisi olsun. Teorem 4.1 gereği

$$X'(s) = AX(s) + b$$

yazılır. Burada semi anti-simetrik A matrisi sabit bir matris olduğundan $1 \leq k \leq n$ için eğrinin yüksek mertebeden türevleri

$$X^{(k+1)}(s) = AX^{(k)}(s) \quad (4.16)$$

olarak elde edilir. $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$ olduğundan

$$\langle AX^{(k)}(s), X^{(k)}(s) \rangle_L = -\langle X^{(k)}(s), AX^{(k)}(s) \rangle_L$$

olur ve böylece

$$\langle AX^{(k)}(s), X^{(k)}(s) \rangle_L = 0 \quad (4.17)$$

yazılır.

$$\langle X^{(k)}(s), X^{(k)}(s) \rangle'_L = 2 \langle X^{(k+1)}(s), X^{(k)}(s) \rangle_L \quad (4.18)$$

olduğundan (4.16), (4.17) ve (4.18) gereği

$$\langle X^{(k)}(s), X^{(k)}(s) \rangle'_L = 0 \quad (4.19)$$

elde edilir. (4.19) gereği

$$\|X^{(k)}(s)\| \quad (4.20)$$

sabit olur.

(2)⇒(3) $1 \leq k \leq n$ sayıları için $\|X^{(k)}(s)\|$ sabit olsun. $X^{(k)}(s)$ yerine kısaca $X^{(k)}$ ifadesi kullanılsın. (4.20) gereğince

$$\langle X', X' \rangle_L = sbt, \langle X'', X'' \rangle_L = sbt, \dots, \langle X^{(k)}, X^{(k)} \rangle_L = sbt \quad (4.21)$$

yazılır ve (4.21) de herbir iç çarpımın yay parametresine göre türevi alınırsa

$$\langle X', X'' \rangle_L = \langle X'', X''' \rangle_L = \dots = \langle X^{(k)}, X^{(k+1)} \rangle_L = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir. (4.22) de yine yay parametresine göre türev alınırsa

$$\langle X', X''' \rangle_L = sbt, \langle X'', X^{(4)} \rangle_L = sbt, \dots, \langle X^{(k)}, X^{(k+2)} \rangle_L = sbt \quad (4.23)$$

olarak hesaplanır. Bu algoritma böylece devam ettirilirse $i, j \leq n$ olmak üzere $j - i$ çift ise $\langle X^{(i)}, X^{(j)} \rangle_L$ iç çarpımı sabit bir sayıya, tek ise sifıra eşit olur. Şimdi

$r = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere $X', X'', \dots, X^{(r)}$ türevleri bir I aralığında lineer bağımsız ve $Sp\{X', X'', \dots, X^{(r)}\}$ uzayı non-dejenere olsun. $\{X', X'', \dots, X^{(r)}\}$ cümlesine Gramm-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi uygulanırsa

$$E_i = X^{(i)} - \sum_{j < i} \epsilon_j \frac{\langle X^{(i)}, E_j \rangle_L}{\|E_j\|^2} E_j \quad (4.24)$$

yazılır. (4.24) eşitliğinde eğer E_j spacelike ise $\epsilon_j = 1$, eğer timelike ise $\epsilon_j = -1$ alınır. (4.21), (4.22) ve (4.23) gereğince $\langle X^{(i)}, E_j \rangle_L$ ve $\|E_j\|^2$ sabit olur. (4.24) gereğince

$$E_i \in Sp\{X', X'', \dots, X^{(r)}\} \quad (4.25)$$

ve $\|E_i\|$ sabit olur. $1 \leq i \leq n-1$ ve $V_i = \frac{E_i}{\|E_i\|}$ olmak üzere eğri üzerindeki Frenet çatısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ile belirlidir. (4.25) gereğince

$$V_i = c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} \quad (4.26)$$

olacak şekilde $c_i \in \mathbb{R}$ sabitleri bulunur. (4.26) gereği

$$V_i' = c_1 X'' + c_2 X''' + \dots + c_i X^{(i+1)} \quad (4.27)$$

ve

$$V_{i+1} = c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} + c_{i+1} X^{(i+1)} \quad (4.28)$$

eşitlikleri yazılır. (4.27) ve (4.28) gereği

$$\begin{aligned} \kappa_i = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle_L &= \langle c_1 X'', c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} + c_{i+1} X^{(i+1)} \rangle_L \\ &+ \langle c_2 X''', c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} + c_{i+1} X^{(i+1)} \rangle_L \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &\quad \cdot \\ &+ \langle c_i X^{(i+1)}, c_1 X' + c_2 X'' + \dots + c_i X^{(i)} + c_{i+1} X^{(i+1)} \rangle_L \end{aligned} \quad (4.29)$$

olarak elde edilir. (4.29) de iç çarpımın lineerliği kullanılarak hesap yapılırsa,

$$\kappa_i = \langle V_i', V_{i+1} \rangle_L \quad (4.30)$$

sabit olur. Böylece X eğrisi bir W -eğrisidir.

(3) $\Rightarrow$ (1) İspatın bu kısmı Kesim 4.2, Teorem 4.3 de, kinematik bir uygulama olarak verilecektir. ■

Sonuç 4.1 A ve A_j matrisleri Teorem 4.1 ile verilsin. A_j nin türev matrisi $\dot{A}_j$ olmak üzere

$$A = \dot{A}_j A_j^{-1}$$

olarak yazılır.

İspat. Teorem 4.1 gereği $A^T = -\varepsilon A \varepsilon$ yazılırsa $\varepsilon (B_j A_j^{-1}) \varepsilon = -\varepsilon A \varepsilon$ ve böylece $-B_j = A A_j$ olur. Fakat $B_j = -\dot{A}_j$ olduğundan $A A_j = \dot{A}_j$ olur. Böylece

$$A = \dot{A}_j A_j^{-1}$$

olarak elde edilir. ■

Uyarı 4.1 Sonuç 4.1 de A_j matrisi semi ortogonal alınırsa A matrisi Lorenz uzayında ani hareketlerin dönme matrisine (Darboux matrisine) karşılık gelir.

4.2 Lorenz Uzayında Kinematik Uygulamalar

Tanım 4.3 $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında sabit bir uzay H , hareketli bir uzay H_0 olmak üzere H_0 ın H ya göre H_0/H hareketi

$$\begin{aligned} y : \mathbb{R}_1^n &\rightarrow \mathbb{R}_1^n \\ x &\rightarrow y(x) = ax + c \end{aligned}$$

şeklindeki y izometrisi ile tanımlıdır ve bu hareketin matris gösterimi

$$\begin{pmatrix} y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada $a \in SO(n)$ ve $c \in \mathbb{R}_1^n$ dir (Ünal 2007).

Tanım 4.4 $\mathbb{R}_1^{2n+1}$ Lorenz uzayında $J \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve $t \in J$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_1^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{R}_1^{2n+1} \\ x &\rightarrow f(x) = y(t) = a(t)x + c(t) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı dönüşüme bir parametrelili hareket denir ve bu hareketin matris gösterimi

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y(t) \\ 1 \end{pmatrix}}_{Y(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}}_X$$

olarak verilir. Burada $a(t) \in SO(2n+1, 1)$ ve $c(t) \in \mathbb{R}_1^{2n+1}$ dir. $A(t)$ formundaki 1-parametrelili matrislerin cümlesi

$$G = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} a(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) \in SO(2n+1, 1), c(t) \in \mathbb{R}_1^{2n+1} \right\}$$

şeklinde matris çarpımına göre grup oluşturur. G bir Lie grubudur. Bu gruba karşılık gelen Lie cebirini g ile gösterirsek

$$g = \left\{ \begin{bmatrix} S & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : S \in \mathbb{R}_{2n+1}^{2n+1}, S^T = -\varepsilon S \varepsilon, V \in \mathbb{R}_1^{2n+1} \right\}$$

şeklinde yazarız. Lie cebirinin elemanları ile helikoidal vektör alanları birebir eşlenir (Ünal 2007).

Tanım 4.5 $S \in \mathbb{R}_{2n+1}^{2n+1}$ semi anti-simetrik bir matris ve $V \in \mathbb{R}_1^{2n+1}$ olsun.

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}_1^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{R}_1^{2n+1} \\ M &\rightarrow X(M) = V + S \cdot \vec{M} \end{aligned}$$

ile tanımlı X lineer dönüşümü bir helikoidal vektör alanıdır (Ünal 2007).

Tanım 4.6 X bir helikoidal vektör alanı ve $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}_1^{2n+1}, t \rightarrow \alpha(t)$ Lorenz uzayında bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$ ise α eğrisine X helikoidal vektör alanının integral eğrisi denir (Ünal 2007).

Teorem 4.3 $Sp \{ \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(2n+1)} \}$ non-dejenere olmak üzere $\mathbb{R}_1^{2n+1}$ Lorenz uzayında birim hızlı

$$\begin{aligned} \alpha(s) = (a_1 \sinh \lambda_1 s + b_1 \cosh \lambda_1 s, a_1 \cosh \lambda_1 s + b_1 \sinh \lambda_1 s, a_2 \sin \lambda_2 s + b_2 \cos \lambda_2 s, \\ a_2 \cos \lambda_2 s - b_2 \sin \lambda_2 s, \dots, a_n \sin \lambda_n s + b_n \cos \lambda_n s, a_n \cos \lambda_n s - b_n \sin \lambda_n s, cs) \end{aligned} \quad (4.31)$$

eğrisi bir $\mathbf{C}$ -eğrisidir. Burada $1 \leq i \leq n$ ve $a_i, b_i, \lambda_i, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$-a_1^2 \lambda_1^2 + b_1^2 \lambda_1^2 + c^2 + \sum_{i=2}^n (a_i^2 + b_i^2) \lambda_i^2 = \pm 1$$

olarak belirlidir. (4.31) de $c \neq 0$ ise eğri tamamen $\mathbb{R}_1^{2n+1}$ Lorenz uzayında, $c = 0$ ise $\mathbb{S}_1^{2n}$ pseudoküresi üzerinde veya $\mathbb{H}_1^{2n}$ pseudohiperbolik uzayında yatar.

İspat. (4.31) ile verilen α eğrisi $\mathbb{R}_1^{2n+1}$ Lorenz uzayında helisel vektör alanların integral eğrileridir (Ünal 2007). Bu eğrinin birim teğet vektör alanı

$$\begin{aligned} T(s) = & (a_1 \lambda_1 \cosh \lambda_1 s + b_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 s, a_1 \lambda_1 \sinh \lambda_1 s + b_1 \lambda_1 \cosh \lambda_1 s, \\ & a_2 \lambda_2 \cos \lambda_2 s - b_2 \lambda_2 \sin \lambda_2 s, -a_2 \lambda_2 \sin \lambda_2 s - b_2 \lambda_2 \cos \lambda_2 s, \dots, \\ & a_n \lambda_n \cos \lambda_n s - b_n \lambda_n \sin \lambda_n s, -a_n \lambda_n \sin \lambda_n s - b_n \lambda_n \cos \lambda_n s, c) \end{aligned} \quad (4.32)$$

olarak yazılır. (4.31) ve (4.32) yardımıyla gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\langle \alpha(t) - \alpha(s), T(t) - T(s) \rangle_L = 0$$

olarak elde edilir. Böylece α bir $\mathbf{C}$ -eğrisidir. Eğer $c = 0$ ise

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle_L = a_1^2 - b_1^2 + \sum_{i=2}^n (a_i^2 + b_i^2) = \pm r^2$$

yazılır. Tanım 2.19 gereğince α eğrisi $\mathbb{S}_1^{2n}$ veya $\mathbb{H}_1^{2n}$ üzerinde yatar. ■

Sonuç 4.2 α eğrisi (4.31) ile verilsin. $1 \leq k \leq 2n+1$ olmak üzere $\|\alpha^{(k)}(s)\|$ sabittir ve bu eğri bir W -eğrisidir.

İspat. Teorem 4.3 gereği α eğrisi bir $\mathbf{C}$ -eğrisidir. Teorem 4.2 gereği $\|\alpha^{(k)}(s)\|$ sabit ve α -eğrisi W -eğrisi olur. ■

Walrave (1995) çalışmasında $\mathbb{R}_1^3$ Lorenz uzayında tüm W -eğrileri sınıflandırılmıştır. Teorem 4.1 yardımıyla kinematik yaklaşımlara benzer biçimde elementer cebirsel yöntemleri kullanarak $\mathbb{R}_1^3$ Lorenz uzayında spacelike ve timelike W -eğrilerinin parametrik denklemlerini ve bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişkileri elde edeceğiz. Ani hareket altında bir noktanın yörüngesi, lineer vektör alanının integral eğrisidir. Şimdi helisel vektör alanlar ile Lie cebirinin elemanlarının birebir eşlenebilmesinden yararlanarak semi anti-simetrik bir matris yardımıyla, Teorem 4.1 de ifade edilen teğet vektör alanının integral eğrilerini belirlemeye çalışalım.

$\mathbb{R}_1^3$ Lorenz uzayında semi anti-simetrik bir matris $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

formunda yazılır. Şimdi (4.33) ile verilen matrise karşılık gelen W -eğrilerinin parametrik denklemlerini elde edeceğiz.

Durum 1. (4.33) ile verilen matriste $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ ve $\lambda_1 = \lambda \neq 0$ olsun. Teorem 4.1 gereğince $X'(t) = AX(t) + b$ eşitliğini sağlayan A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

şeklinde verilir. (4.34) gereğince Darboux dönme vektörü $\vec{w} = (0, 0, \lambda)$ olacağından öteleme vektörünü $b = (0, 0, c)$ olarak alabiliriz. $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ dersek

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

şeklinde yazılır. (4.35) gereğince

$$\begin{aligned} X'_1 &= \lambda X_2 \\ X'_2 &= \lambda X_1 \\ X'_3 &= c \end{aligned} \quad (4.36)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. (4.36) nin genel çözümü

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1 \cosh \lambda t + a_2 \sinh \lambda t \\ X_2 &= a_1 \sinh \lambda t + a_2 \cosh \lambda t \\ X_3 &= ct \end{aligned} \quad (4.37)$$

şeklinde verilir. Şimdi (4.37) eşitliğiyle verilen eğrinin katsayılarına göre türlerini belirleyelim:

Teorem 4.4 $X(t)$ eğrisi (4.37) eşitliğiyle verilsin ve X eğrisi birim hızlı olsun. Bu durumda eğrinin türü aşağıdaki durumlardan biri ile verilir:

1) $a_2 = 0$ ve $a_1 = a \neq 0$ olsun. $u = \sqrt{c^2 + a^2\lambda^2}$ olmak üzere

$$X(s) = \left(a \cosh \frac{\lambda}{u} s, a \sinh \frac{\lambda}{u} s, \frac{c}{u} s \right)$$

eğrisi (normali timelike olan) spacelike hiperbolik helis olur.

2) $a_1 = 0$ ve $a_2 = a \neq 0$ olsun.

i) $c^2 - a^2\lambda^2 > 0$ ise $|\kappa_2| > \kappa_1$ olur. $u = \sqrt{c^2 - a^2\lambda^2}$ olmak üzere

$$X(s) = \left(a \sinh \frac{\lambda}{u} s, a \cosh \frac{\lambda}{u} s, \frac{c}{u} s \right)$$

eğrisi (normali spacelike olan) spacelike hiperbolik helis olur.

ii) $c^2 - a^2\lambda^2 < 0$ ise $|\kappa_2| < \kappa_1$ olur. $u = \sqrt{a^2\lambda^2 - c^2}$ olmak üzere

$$X(s) = \left(a \sinh \frac{\lambda}{u} s, a \cosh \frac{\lambda}{u} s, \frac{c}{u} s \right)$$

eğrisi timelike hiperbolik helis olur.

İspat. 1) Kabul edelim ki $a_2 = 0$ ve $a_1 = a \neq 0$ olsun. (4.37) gereği

$$X(t) = (a \cosh \lambda t, a \sinh \lambda t, ct)$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\langle X'(t), X'(t) \rangle_L = c^2 + a^2\lambda^2 > 0$$

ve

$$\langle X''(t), X''(t) \rangle_L = -a^2\lambda^4 < 0$$

ve böylece eğri (normali timelike olan) spacelike eğri olur.

$$\|X'(t)\| = \sqrt{c^2 + a^2\lambda^2} = u$$

dersek birim hızlı olarak bu eğri

$$X(s) = \left(a \cosh \frac{\lambda}{u} s, a \sinh \frac{\lambda}{u} s, \frac{c}{u} s \right)$$

şeklinde yazılır. Frenet formülleri kullanılarak bu eğrinin eğrilikleri

$$\kappa_1 = \frac{a\lambda^2}{u^2}, \quad \kappa_2 = \frac{c\lambda}{u^2}$$

olarak hesaplanır. Böylece eğrinin eğrilikleri sabittir. Bu eğrinin

$$T(s) = \left(a\frac{\lambda}{u} \sinh \frac{\lambda}{u}s, a\frac{\lambda}{u} \cosh \frac{\lambda}{u}s, \frac{c}{u} \right)$$

birim teğet vektör alanı ile $\vec{v} = (0, 0, 1)$ vektörünün iç çarpımı

$$\left\langle \left(a\frac{\lambda}{u} \sinh \frac{\lambda}{u}s, a\frac{\lambda}{u} \cosh \frac{\lambda}{u}s, \frac{c}{u} \right), (0, 0, 1) \right\rangle_L = \frac{c}{u}$$

sabit olduğundan X eğrisi $\vec{v} = (0, 0, 1)$ eksenli (normali timelike olan) spacelike hiperbolik helis olur.

2) Kabul edelim ki $a_1 = 0$ ve $a_2 = a \neq 0$ olsun. (4.37) gereğince

$$X(t) = (a \sinh \lambda t, a \cosh \lambda t, ct)$$

denklemine sahip eğri için $\langle X'(t), X'(t) \rangle_L = c^2 - a^2\lambda^2$ elde edilir.

i) $\langle X'(t), X'(t) \rangle = c^2 - a^2\lambda^2 > 0$ olsun.

$$\langle X''(t), X''(t) \rangle_L = a^2\lambda^4 > 0$$

olacağından eğri (normali spacelike olan) spacelike eğri olur.

$$\|X'(t)\| = \sqrt{c^2 - a^2\lambda^2} = u$$

dersek birim hızlı olarak bu eğri

$$X(s) = \left(a \sinh \frac{\lambda}{u}s, a \cosh \frac{\lambda}{u}s, \frac{c}{u}s \right)$$

şeklinde verilir. Frenet formüllerini kullanarak eğrilikleri

$$\kappa_1 = \frac{a\lambda^2}{u^2}, \quad \kappa_2 = \frac{c\lambda}{u^2}$$

olarak elde ederiz. Böylece eğrinin eğrilikleri sabittir. Ayrıca

$$\kappa_2^2 - \kappa_1^2 = \left(\frac{\lambda}{u} \right)^2 > 0$$

ve böylece

$$|\kappa_2| > \kappa_1$$

olur. Bu eğrinin

$$T(s) = \left(a \frac{\lambda}{u} \cosh \frac{\lambda}{u} s, a \frac{\lambda}{u} \sinh \frac{\lambda}{u} s, \frac{c}{u} \right)$$

birim teğet vektör alanı ile $\vec{v} = (0, 0, 1)$ vektörünün iç çarpımı

$$\left\langle \left(a \frac{\lambda}{u} \cosh \frac{\lambda}{u} s, a \frac{\lambda}{u} \sinh \frac{\lambda}{u} s, \frac{c}{u} \right), (0, 0, 1) \right\rangle_L = \frac{c}{u}$$

sabit olduğundan X eğrisi $\vec{v} = (0, 0, 1)$ eksenli (normali spacelike olan) spacelike hiperbolik helis olur.

ii) $\langle X'(t), X'(t) \rangle = c^2 - a^2 \lambda^2 < 0$ olsun. Bu durumda eğri timelike olur.

$$\|X'(t)\| = \sqrt{|c^2 - a^2 \lambda^2|} = \sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} = u$$

dersek birim hızlı olarak bu eğri

$$X(s) = \left(a \sinh \frac{\lambda}{u} s, a \cosh \frac{\lambda}{u} s, \frac{c}{u} s \right)$$

şeklinde verilir. Frenet formüllerini kullanarak eğrilikleri

$$\kappa_1 = \frac{a \lambda^2}{u^2}, \quad \kappa_2 = -\frac{c \lambda}{u^2}$$

olarak elde ederiz. Böylece eğrilikler sabittir. Ayrıca

$$\kappa_2^2 - \kappa_1^2 = -\left(\frac{\lambda}{u}\right)^2 < 0$$

ve böylece

$$|\kappa_2| < \kappa_1$$

olur. Bu eğrinin

$$T(s) = \left(a \frac{\lambda}{u} \cosh \frac{\lambda}{u} s, a \frac{\lambda}{u} \sinh \frac{\lambda}{u} s, \frac{c}{u} \right)$$

teğet vektör alanı ile $\vec{v} = (0, 0, 1)$ vektörünün iç çarpımı

$$\left\langle \left(a \frac{\lambda}{u} \cosh \frac{\lambda}{u} s, a \frac{\lambda}{u} \sinh \frac{\lambda}{u} s, \frac{c}{u} \right), (0, 0, 1) \right\rangle_L = \frac{c}{u}$$

sabit olduğundan X eğrisi $\vec{v} = (0, 0, 1)$ eksenli timelike hiperbolik helis olur. ■

Durum 2. (4.33) ile verilen matriste $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ve $\lambda_3 = \lambda \neq 0$ olsun. $X'(t) = AX(t) + b$ eşitliğini sağlayan A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

şeklinde verilir. (4.38) gereğince Darboux dönme vektörü $\vec{w} = (\lambda, 0, 0)$ olacağından öteleme vektörünü $b = (c, 0, 0)$ olarak alabiliriz. $X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ dersek

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

şeklinde yazılır. (4.39) gereğince

$$\begin{aligned} X'_1 &= c \\ X'_2 &= -\lambda X_3 \\ X'_3 &= \lambda X_2 \end{aligned} \quad (4.40)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. (4.40) in genel çözümü

$$\begin{aligned} X_1 &= ct \\ X_2 &= a \cos \lambda t \\ X_3 &= a \sin \lambda t \end{aligned} \quad (4.41)$$

şeklinde verilir. (4.41) gereğince

$$\langle X'(t), X'(t) \rangle_L = a^2 \lambda^2 - c^2$$

yazılır.

Teorem 4.5 $X(t)$ eğrisi (4.41) eşitliğiyle verilsin ve X eğrisi birim hızlı olsun. Bu durumda eğrinin türü aşağıdaki durumlardan biri ile verilir:

- 1) $a^2 \lambda^2 - c^2 > 0$ ise $\kappa_1 > |\kappa_2|$ olur ve $\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} = u$ olmak üzere

$$X(s) = \left(\frac{c}{u} s, a \cos \frac{\lambda}{u} s, a \sin \frac{\lambda}{u} s \right)$$

eğrisi spacelike dairesel helis olur.

- 2) $a^2 \lambda^2 - c^2 < 0$ ise $|\kappa_2| > \kappa_1$ olur ve $\sqrt{c^2 - a^2 \lambda^2} = u$ olmak üzere

$$X(s) = \left(\frac{c}{u} s, a \cos \frac{\lambda}{u} s, a \sin \frac{\lambda}{u} s \right)$$

eğrisi timelike dairesel helis olur.

İspat. 1) $\langle X'(t), X'(t) \rangle = a^2 \lambda^2 - c^2 > 0$ olsun. Teorem 4.5 de yapılanlara benzer hesaplamalarla $\sqrt{a^2 \lambda^2 - c^2} = u$ ve $a > 0$ olmak üzere

$$\kappa_1 = a \left(\frac{\lambda}{u} \right)^2, \quad \kappa_2 = c \frac{\lambda}{u^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece eğrilikler sabittir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa $|\kappa_2| < \kappa_1$ olarak elde edilir. Birim hızlı olarak bu eğri

$$X(s) = \left(\frac{c}{u}s, a \cos \frac{\lambda}{u}s, a \sin \frac{\lambda}{u}s \right)$$

şeklinde verilir. Bu eğrinin

$$T(s) = \left(\frac{c}{u}, -a \frac{\lambda}{u} \sin \frac{\lambda}{u}s, a \frac{\lambda}{u} \cos \frac{\lambda}{u}s \right)$$

birim teğet vektör alanı ile $\vec{v} = (1, 0, 0)$ vektörü sabit açı yaptığından X eğrisi $\vec{v} = (1, 0, 0)$ eksenli spacelike dairesel helis olur.

2) $\langle X'(t), X'(t) \rangle = a^2 \lambda^2 - c^2 < 0$ olsun. Benzer hesaplamalar yapılırsa $a > 0$ olmak üzere

$$\kappa_1 = a \left(\frac{\lambda}{u} \right)^2, \quad \kappa_2 = c \frac{\lambda}{u^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece eğrilikler sabittir. Ayrıca $\kappa_1 < |\kappa_2|$ olur. Birim hızlı olarak bu eğri

$$X(s) = \left(\frac{c}{u}s, a \cos \frac{\lambda}{u}s, a \sin \frac{\lambda}{u}s \right)$$

şeklinde verilir. Bu eğrinin birim teğet vektör alanı ile $\vec{v} = (1, 0, 0)$ vektörü sabit açı yaptığından X eğrisi $\vec{v} = (1, 0, 0)$ eksenli timelike dairesel helis olur. ■

Durum 3. Bu durumda (4.33) ile verilen A matrisinin sadece bir girişini sıfır alarak kübik denklemlere sahip W -eğrileri elde edildi.

Teorem 4.6 $X'(t) = AX(t) + b$ eşitliğini sağlayan A matrisi (4.33) daki gibi verilsin.

1) $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = |\lambda_3| = \lambda \neq 0$ ise $|\kappa_2| = \kappa_1$ ve eğri

$$X(s) = \left(\frac{1}{6} \lambda |\lambda| s^3, -\frac{1}{6} \lambda^2 s^3 + s, \frac{1}{2} |\lambda| s^2 \right)$$

eşitliği ile verilen spacelike W -eğrisidir.

2) $\lambda_2 = 0$ ve $\lambda_1 = |\lambda_3| = \lambda \neq 0$ ise $\kappa_2 = |\kappa_1|$ ve eğri

$$X(s) = \left(\frac{1}{6} \lambda^2 s^3 + s, \frac{1}{2} \lambda s^2, \frac{1}{6} |\lambda| \lambda s^3 \right)$$

eşitliği ile verilen timelike W -eğrisidir.

İspat. 1) $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = |\lambda_3| = \lambda \neq 0$ olsun. $X'(t) = AX(t) + b$ eşitliğini sağlayan A matrisi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & -|\lambda| \\ \lambda & |\lambda| & 0 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

şeklinde verilir. (4.42) gereğince Darboux dönme vektörü $\vec{w} = (|\lambda|, -\lambda, 0)$ olacağından öteleme vektörünü $b = (c_1, c_2, 0)$ olarak alabiliriz.

$X(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ dersek

$$\begin{pmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ X'_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda & c_1 \\ 0 & 0 & -|\lambda| & c_2 \\ \lambda & |\lambda| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

şeklinde yazılır. (4.43) eşitliği gereğince

$$\begin{aligned} X'_1 &= \lambda X_3 + c_1 \\ X'_2 &= -|\lambda| X_3 + c_2 \\ X'_3 &= \lambda X_1 + |\lambda| X_2 \end{aligned} \quad (4.44)$$

diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Genelliği bozmadan (4.44) denklem sisteminde $c_1 = 0$ ve $c_2 = 1$ alınır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa $X''_3 = |\lambda|$ ve böylece $X_3 = \frac{1}{2} |\lambda| t^2$ elde edilir. Gerekli hesaplamalar yapılırsa (4.44) in genel çözümü

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{6} \lambda |\lambda| t^3 \\ X_2 &= -\frac{1}{6} \lambda^2 t^3 + t \\ X_3 &= \frac{1}{2} |\lambda| t^2 \end{aligned} \quad (4.45)$$

şeklinde verilir. (4.45) gereğince $\langle X'(t), X'(t) \rangle_L = 1$ olduğundan eğri birim hızlıdır. Böylece birim hızlı spacelike eğrinin denklemi

$$X(s) = \left(\frac{1}{6} \lambda |\lambda| s^3, -\frac{1}{6} \lambda^2 s^3 + s, \frac{1}{2} |\lambda| s^2 \right)$$

olarak yazılır. Ayrıca gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\kappa_1 = |\lambda|, \quad \kappa_2 = \lambda$$

olur ve eğrinin eğriliklerinin sabit olduğu görülür.

2) $\lambda_2 = 0$ ve $\lambda_1 = |\lambda_3| = \lambda \neq 0$ alınırsa, benzer hesaplamalarla

$$\kappa_1 = \lambda, \quad \kappa_2 = |\lambda|$$

olarak elde edilir. Birim hızlı timelike bu eğri

$$X(s) = \left(\frac{1}{6} \lambda^2 s^3 + s, \frac{1}{2} \lambda s^2, \frac{1}{6} |\lambda| \lambda s^3 \right)$$

denklemine sahiptir. ■

Örnek 4.1 $g(x, y) = \langle x, y \rangle_L$ olmak üzere, α spacelike eğrisi için $g(\alpha'', \alpha'') > 0$ ve $\kappa_1 = sbt > 0, \kappa_2 = sbt \neq 0$ ve $|\kappa_2| = \kappa_1$ olsun. Teorem 4.7 gereğince birim hızlı bu eğri

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{6} \lambda |\lambda| s^3, -\frac{1}{6} \lambda^2 s^3 + s, \frac{1}{2} |\lambda| s^2 \right)$$

şeklinde verilir. Böylece $\alpha(t), T(t)$ ve $T(s)$ ifadeleri sırasıyla

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{6} \lambda |\lambda| t^3, -\frac{1}{6} \lambda^2 t^3 + t, \frac{1}{2} |\lambda| t^2 \right)$$

$$T(t) = \left(\frac{1}{2} \lambda |\lambda| t^2, -\frac{1}{2} \lambda^2 t^2 + 1, |\lambda| t \right)$$

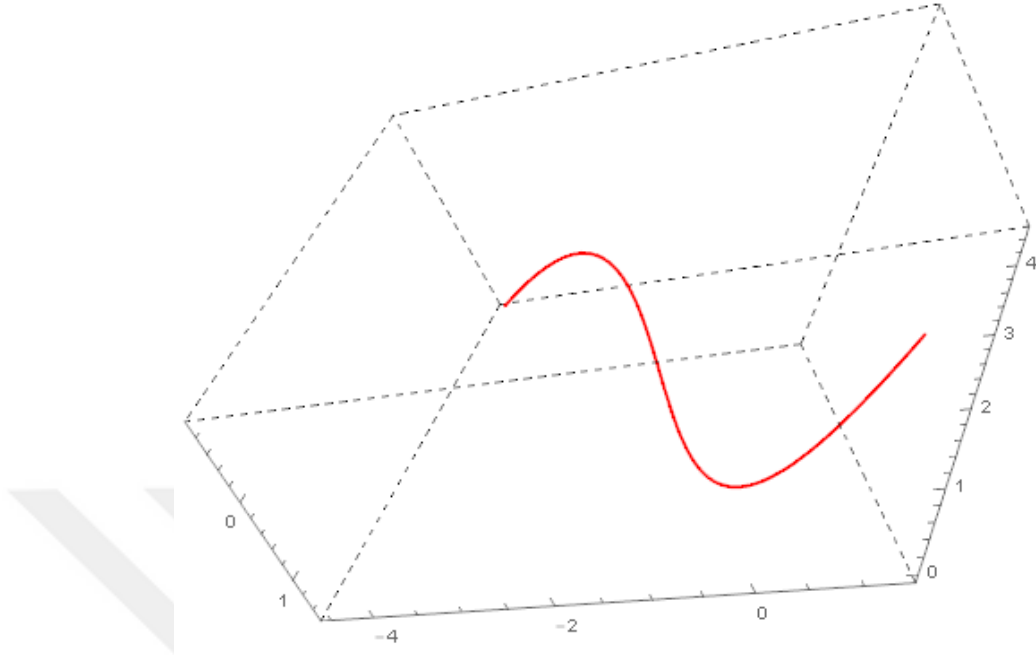
$$T(s) = \left(\frac{1}{2} \lambda |\lambda| s^2, -\frac{1}{2} \lambda^2 s^2 + 1, |\lambda| s \right)$$

olarak yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle \alpha(t) - \alpha(s), T(t) - T(s) \rangle_L = 0$$

elde edilir. $\alpha(s)$ eğrisi bir $\mathbf{C}$ -eğrisidir. $\lambda = 1$ değeri için bu eğrinin grafiği aşağıdaki

gibi verilebilir:



Şekil 4.1 Kübik Spacelike W – eğrisi

Örnek 4.2 α timelike eğrisi için $\kappa_1 = sbt > 0, \kappa_2 = sbt \neq 0$ ve $|\kappa_2| = \kappa_1$ olsun. Teorem 4.7 gereğince bu eğri

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{6}\lambda^2 s^3 + s, \frac{1}{2}\lambda s^2, \frac{1}{6}\lambda |\lambda| s^3 \right)$$

şeklinde verilir. Böylece $\alpha(t), T(t)$ ve $T(s)$ ifadeleri sırasıyla

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{6}\lambda^2 t^3 + t, \frac{1}{2}\lambda t^2, \frac{1}{6}\lambda |\lambda| t^3 \right)$$

$$T(t) = \left(\frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + 1, \lambda t, \frac{1}{2}\lambda |\lambda| t^2 \right)$$

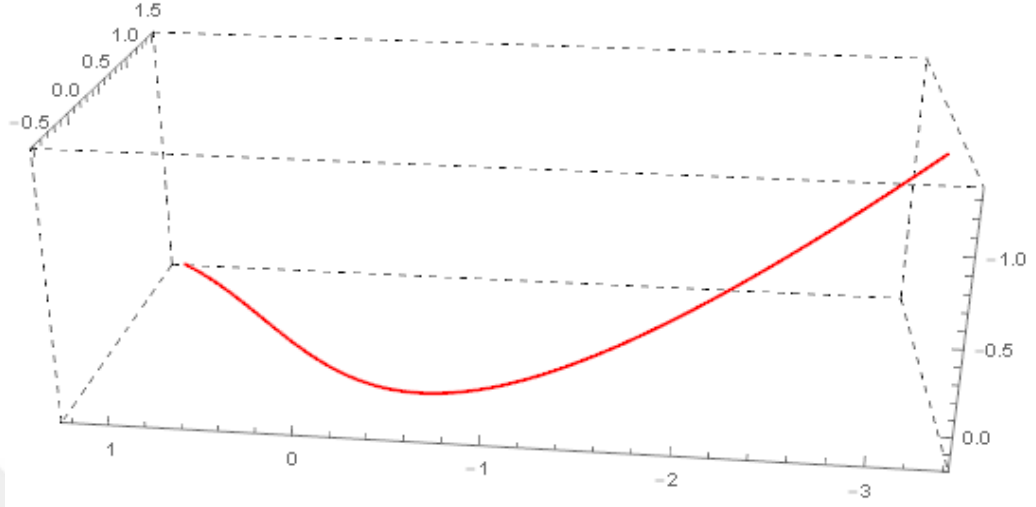
$$T(s) = \left(\frac{1}{2}\lambda^2 s^2 + 1, \lambda s, \frac{1}{2}\lambda |\lambda| s^2 \right)$$

olarak yazılır. Gerekli işlemler yapılsa

$$\langle \alpha(t) - \alpha(s), T(t) - T(s) \rangle_L = 0$$

elde edilir. Böylece α bir $\mathbf{C}$ -eğrisidir. $\lambda = 1$ değeri için bu eğrinin grafiği aşağıdaki

gibi verilebilir:



Şekil 4.2 Kübik Timelike W – eğrisi

4.3 Lorenz Uzayında Özel Eğriler ve G –Yüzeyleri

Bu kesimde, Lorenz uzayda N ve N^* –eğrileri ifade edilerek, Öklid uzayında, izoparametrik yüzeyler için verilen karakterizasyonlar, Lorenz uzayında ifade edilerek, bu uzayda karşılık gelen yüzeyler elde edilmiştir.

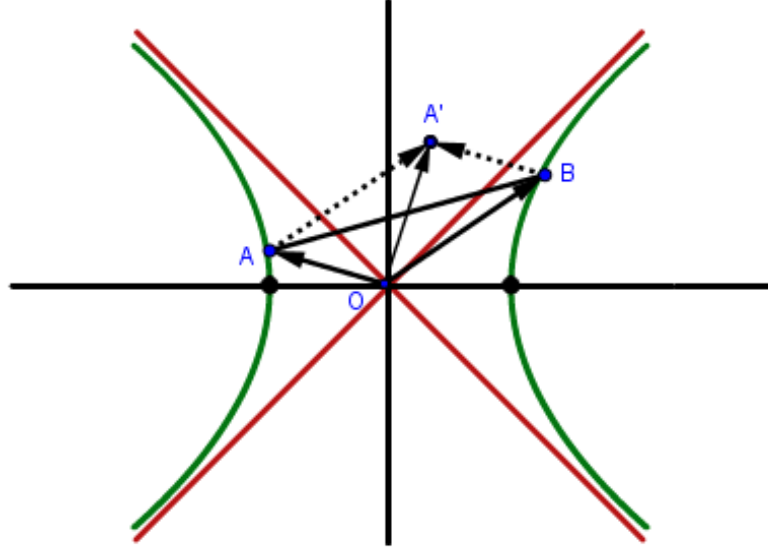
Tanım 4.7 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $X : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında birim hızlı spacelike veya timelike bir eğri olsun. Eğrinin birim normal vektör alanı N olmak üzere her $t \in I$ için

$$\langle X(t) - X(s), N(t) + N(s) \rangle_L = 0 \quad (\mathbf{N})$$

eşitliği sağlanıyorsa X eğrisine Lorenz uzayında bir N –eğrisidir denir.

Örnek 4.3 Düzlemsel hiperbol eğrileri birer N –eğrisidir. Bu eğrilere ait özelliğin

geometrik temsili aşağıdaki şekilde sunulmuştur;



Şekil 4.3 Hiperbol Eğrisi Üzerinde (N) Koşulu

Şekil 4.3, $\overrightarrow{OA'}$ ile $\overrightarrow{AB}$ vektörlerinin Lorentz anlamında birbirine dik olduğunu ifade eder.

Teorem 4.7 X eğrisi $\mathbb{R}_1^n$ Lorentz uzayında birim hızlı spacelike veya timelike bir C —eğrisi olsun. O zaman X eğrisi bir N —eğrisidir. Ayrıca semi-simetrik bir B matrisi ve $c \in \mathbb{R}_1^n$ sütun vektörü için eğrinin birim normal vektör alanı $N(s) = BX(s) + c$ şeklinde yazılır.

İspat. X eğrisi spacelike veya timelike bir C —eğrisi olsun. Bu eğrinin birim teğet vektör alanı

$$T(s) = AX(s) + b \quad (4.46)$$

olacak şekilde semi anti-simetrik bir A matrisi ve $b \in \mathbb{R}_1^n$ sütun vektörü bulunur. (4.46) eşitliğinde s yay parametresine göre türev alınırsa

$$T'(s) = AX'(s) = AT(s) \quad (4.47)$$

elde edilir. Tanım 2.14 gereğince

$$T'(s) = \kappa(s)\eta N(s) \quad (4.48)$$

yazılır. Burada $\eta = \langle N, N \rangle_L \neq 0$ dır. X bir $\mathbf{C}$ –eğrisi olduğundan genelliği bozmadan $\kappa(s) = \kappa \neq 0$ alabiliriz. (4.47) ve (4.48) eşitliği gereğince

$$N(s) = \frac{1}{\kappa\eta} AT(s) \quad (4.49)$$

yazılır. (4.49) gereğince

$$\langle X(t) - X(s), N(t) + N(s) \rangle_L = \frac{1}{\kappa\eta} \langle \varepsilon A^T \varepsilon (X(t) - X(s)), T(t) + T(s) \rangle_L$$

yazılır. A matrisi semi anti-simetrik olduğundan gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle X(t) - X(s), N(t) + N(s) \rangle_L = 0$$

elde edilir. Böylece X bir $\mathbf{N}$ –eğrisi olur. (4.46) ve (4.49) gereğince

$$N(s) = \frac{1}{\kappa\eta} A^2 X(s) + \frac{1}{\kappa\eta} Ab \quad (4.50)$$

yazılır. A matrisi semi anti-simetrik olduğundan A^2 matrisi semi-simetriktir. (4.50) eşitliğinde $\frac{1}{\kappa\eta} A^2 = B$ ve $\frac{1}{\kappa\eta} Ab = c$ yazılırsa

$$N(s) = BX(s) + c$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. ■

Tanım 4.8 $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında bir eğri olsun. Her $t, s \in I$ için

$$\langle \gamma(t) - \gamma(s), \gamma(t) + \gamma(s) \rangle_L = 0 \quad (\mathbf{N}^*)$$

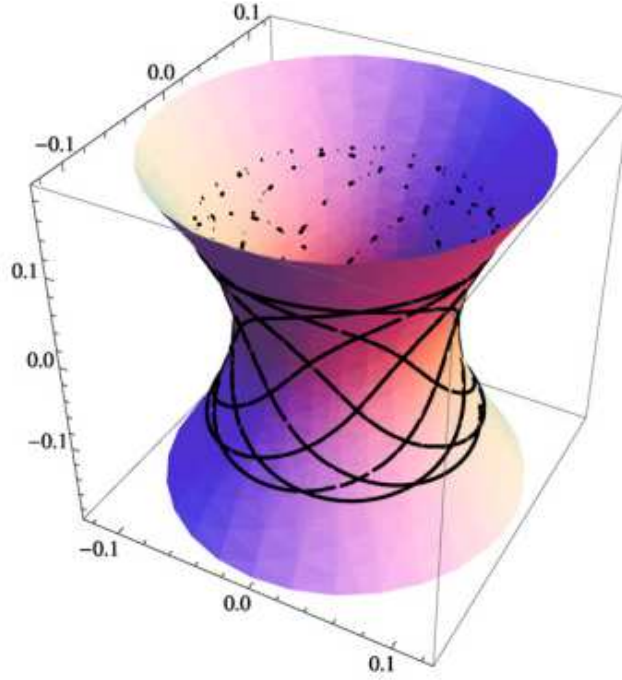
eşitliği sağlanıyorsa bu eğriye Lorenz uzayında bir $\mathbf{N}^*$ –eğrisi adı verilir.

Örnek 4.4 $\mathbb{R}_1^3$ Lorenz uzayında

$$\begin{aligned} x(s) &= \frac{\alpha + \mu \sin[(\alpha - \mu)s]}{2\alpha} - \frac{\alpha - \mu \sin[(\alpha + \mu)s]}{2\alpha} \\ y(s) &= -\frac{\alpha + \mu \cos[(\alpha - \mu)s]}{2\alpha} + \frac{\alpha - \mu \cos[(\alpha + \mu)s]}{2\alpha} \\ z(s) &= \frac{w}{\mu\alpha} \sin(\mu s) \end{aligned}$$

ile verilen $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ birim hızlı sabit presesyonlu eğri (curve of constant precession) Lorenz uzayında bir $\mathbf{N}^*$ –eğrisidir. Burada $\alpha = \sqrt{w^2 + \mu^2}$ ve

$w, \mu \in \mathbb{R}$ dir. Bu eğrinin geometrik temsili aşağıdaki şekilde gösterilmiştir:



Şekil 4.4 Sabit Presesyonlu Eğri (Yılmaz ve Turgut 2010)

Teorem 4.8 $r \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere Lorentz uzayındaki tüm $\mathbf{N}^*$ –eğrileri r –yarıçaplı $\mathbb{S}_1^n(r)$ pseudoküresi üzerinde veya $\mathbb{H}_1^n(r)$ pseudohiperbolik uzayında yatar.

İspat. Tanım 2.19 gereğince O merkezli $r > 0$ yarıçaplı pseudoküre ve pseudohiperbolik uzay sırasıyla

$$\mathbb{S}_1^n(r) = \{P \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle P, P \rangle_L = r^2\}$$

ve

$$\mathbb{H}_1^n(r) = \{P \in \mathbb{R}_1^{n+1} : \langle P, P \rangle_L = -r^2\}$$

şeklinde verilir. $\mathbb{S}_1^n(r)$ pseudoküresi üzerinde bir eğri γ ve bu eğri üzerindeki iki nokta P ve Q olsun.

$$\|\overrightarrow{OP}\| = \|\overrightarrow{OQ}\| = r \quad (4.51)$$

olduğu aşikardır. (4.51) gereğince

$$\langle \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP} \rangle_L = r^2 - r^2 = 0$$

yazılır. Böylece γ bir $\mathbf{N}^*$ –eğrisidir. $\mathbb{H}_1^n(r)$ pseudohiperbolik uzayında yatan eğriler için ispat benzerdir. ■

Tanım 4.9 $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında bir hiperyüzey M ve G de yüzeyin Gauss dönüşümü olsun. $P, Q \in M$ noktaları için

$$\langle Q - P, G(P) + G(Q) \rangle_L = 0 \quad (\mathbf{G})$$

eşitliği sağlanıyorsa M hiperyüzeyine Lorenz uzayında bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi denir.

Örnek 4.5 $\mathbb{R}_1^3$ Lorenz uzayında $\mathbb{S}_1^2(r) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x - x_0, x - x_0 \rangle_L = r^2\}$ ve

$\mathbb{H}_1^2(r) = \{x \in \mathbb{R}_1^3 : \langle x - x_0, x - x_0 \rangle_L = -r^2\}$ eşitlikleriyle verilen yüzeyler üzerinde alınan P ve Q gibi iki noktanın yer vektörü ile bu noktadaki yüzey normalleri lineer bağımlı olur ve böylece

$$\langle Q - P, G(P) + G(Q) \rangle_L = 0$$

eşitliği sağlanır. Böylece bu yüzeyler birer $\mathbf{G}$ -yüzeyidir.

Tanım 4.10 $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında bir hiperyüzey M ve bu yüzeyin birim normal vektör alanı $\vec{n}$ olsun. Eğer $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_L < 0$ ise bu yüzeye spacelike, $\langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_L > 0$ ise timelike yüzeydir denir (O'Neill 1983).

Lemma 4.1 $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında M hiperyüzeyinin şekil operatörü S , birim normal vektör alanı $\vec{n}$ ve yüzey üzerinde teğet bir vektör v olmak üzere $S(v) = -D_v \vec{n}$ eşitliği sağlanır ve her $P \in M$ noktasında S lineer operatörü $T_P M$ üzerinde self-adjointtir (O'Neill 1983).

Teorem 4.9 $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında M hiperyüzeyi timelike veya spacelike $\mathbf{G}$ -yüzeyi olsun. $x \in M$ ve G de M hiperyüzeyinin Gauss dönüşümü olmak üzere $G(x) = Ax + b$ olacak şekilde semi-simetrik bir A matrisi ve $b \in \mathbb{R}_1^n$ sütun vektörü vardır.

İspat. M hiperyüzeyi tümüyle n -boyutlu Lorenz uzayında yatan timelike veya spacelike $\mathbf{G}$ -yüzeyi olsun. M üzerinde öyle $y_0, y_1, \dots, y_n$ noktaları vardır ki $\{y_j - y_0 \mid 1 \leq j \leq n\}$ cümlesi $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayını gerer. $(\mathbf{G})$ koşulu gereği $y_0, x \in M$ noktaları için

$$\langle y_0 - x, G(y_0) + G(x) \rangle_L = 0 \quad (4.52)$$

yazılır. (4.52) eşitliği düzenlenirse;

$$\langle G(y_0), y_0 \rangle_L + \langle G(x), y_0 \rangle_L - \langle G(y_0), x \rangle_L - \langle G(x), x \rangle_L = 0$$

ve böylece

$$\langle G(x), y_0 \rangle_L = \langle G(x), x \rangle_L - \langle G(y_0), y_0 \rangle_L + \langle G(y_0), x \rangle_L \quad (4.53)$$

elde edilir. Benzer şekilde $1 \leq j \leq n$ olmak üzere

$$\langle G(x), y_j \rangle_L = \langle G(x), x \rangle_L - \langle G(y_j), y_j \rangle_L + \langle G(y_j), x \rangle_L \quad (4.54)$$

yazılır. (4.54) eşitliğinden (4.53) eşitliği çıkarılırsa

$$\langle G(x), \alpha_j \rangle_L = \langle \beta_j, x \rangle_L + c_j \quad (4.55)$$

elde edilir öyle ki burada

$$\alpha_j = y_j - y_0$$

$$\beta_j = G(y_j) - G(y_0)$$

$$c_j = \langle G(y_0), y_0 \rangle_L - \langle G(y_j), y_j \rangle_L$$

şeklinde verilir. α_j ve β_j vektörlerini j -yinci sütun kabul eden matrisler sırasıyla A_j ve B_j olmak üzere A matrisi

$$A^T = \varepsilon (B_j A_j^{-1}) \varepsilon \quad (4.56)$$

eşitliği ile verilir. (4.56) eşitliğinde $\varepsilon = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ Lorenz uzayın işaret matrisidir. Ayrıca $b = \sum_{k=1}^n b_k \alpha_k$ olarak hesaplanır. Bu toplamda b_k katsayıları;

$$\begin{pmatrix} \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle_L & \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_L & \dots & \langle \alpha_1, \alpha_n \rangle_L \\ \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle_L & . & \dots & \langle \alpha_2, \alpha_n \rangle_L \\ \dots & . & . & \dots \\ \langle \alpha_n, \alpha_1 \rangle_L & \langle \alpha_n, \alpha_2 \rangle_L & \dots & \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

eşitliğiyle hesaplanır. (4.57) gereğince

$$c_j = \langle \alpha_j, \alpha_1 \rangle_L b_1 + \langle \alpha_j, \alpha_2 \rangle_L b_2 + \dots + \langle \alpha_j, \alpha_n \rangle_L b_n$$

yazılır. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\langle \alpha_j, b \rangle_L = \sum_{k=1}^n \langle \alpha_j, \alpha_k \rangle_L b_k = c_j \quad (4.58)$$

olarak elde edilir. Ayrıca (4.56) gereği $\beta_j = (\varepsilon A^T \varepsilon) \alpha_j$ olduğundan

$$\langle \beta_j, x \rangle_L = \langle \alpha_j, Ax \rangle_L \quad (4.59)$$

yazılır. (4.58) ve (4.59) yardımıyla

$$\langle \beta_j, x \rangle_L + c_j = \langle \alpha_j, Ax + b \rangle_L \quad (4.60)$$

elde edilir. Son olarak (4.55) ve (4.60) eşitlikleri kullanılarak

$$\langle \alpha_j, G(x) \rangle_L = \langle \alpha_j, Ax + b \rangle_L$$

yazılır ve buradan

$$G(x) = Ax + b \quad (4.61)$$

olarak elde edilir. Yüzeyin birim normal vektör alanı $\vec{n}$ ve Lorenz uzayın Levi-Civita koneksiyonu ∇ olsun. $X \in T_x M$ ve $S(X) = -\nabla_X \vec{n}$ olmak üzere, A matrisi sabit olduğundan (4.61) gereğince;

$$\nabla_X G(x) = AX = -S(X) \quad (4.62)$$

yazılır. Burada S dönüşümü M hiperyüzeyinin şekil operatörü olduğundan Lemma 4.1 gereğince $\forall X, Y \in T_x M$ için

$$\langle S(X), Y \rangle_L = \langle X, S(Y) \rangle_L \quad (4.63)$$

yazılır. (4.62) ve (4.63) gereğince

$$\begin{aligned} \langle -AX, Y \rangle_L = \langle X, -AY \rangle_L &\Leftrightarrow \langle AX, Y \rangle_L = \langle X, AY \rangle_L \\ &\Leftrightarrow \langle X, (\varepsilon A^T \varepsilon) Y \rangle_L = \langle X, AY \rangle_L \\ &\Leftrightarrow A = \varepsilon A^T \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece A semi-simetrik matris olur ve ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.10 Lorenz uzayında bir M hiperyüzeyi için aşağıdaki ifadeler denktir:

- (1) M hiperyüzeyi $\mathbf{G}$ -yüzeyidir.
- (2) M izoparametrik Lorenziyan hiperyüzeydir.
- (3) M aşağıdaki hiperyüzeylerden birinin açık parçasıdır:
 - Timelike veya Spacelike hiperdüzlem,
 - $\mathbb{S}_1^{n-1}(r)$ pseudoküre veya $\mathbb{H}_1^{n-1}(r)$ pseudohiperbolik uzay,
 - $\mathbb{S}_1^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ pseudoküresel silindir,
 - $\mathbb{H}_1^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ pseudohiperbolik silindir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) M bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi olsun. M hiperyüzeyi üzerinde $\{E_1, E_2, \dots, E_{n-1}\}$ ortonormal çatısı seçilsin öyle ki $E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$ vektörleri S şekil operatörünün $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ karakteristik değerlerine karşılık gelen karakteristik vektörleri olsun. O zaman her $1 \leq j \leq n-1$ için $S(E_j) = \mu_j E_j$ yazılır. M hiperyüzeyi ($\mathbf{G}$) şartını sağlasın. Teorem 4.10 gereğince semi-simetrik bir A matrisi için $G(x) = Ax + b$ yazılır. (4.62) gereği her $x \in M$ için

$$AE_j(x) = -S(E_j(x)) = -\mu_j(x)E_j(x) \quad (4.64)$$

elde edilir. (4.64) eşitliği gereğince $(A + \mu_j I)E_j(x) = 0$ olur. Sıfırdan farklı karakteristik vektörlerin varlığı için

$$\det(A + \mu_j I) = 0 \quad (4.65)$$

yazılır. A matrisi sabit olduğundan (4.65) in çözümünden $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$ asli eğriliklerinin sabit olduğu görülür. Böylece M izoparametrik Lorenziyan hiperyüzeydir.

(2) $\Rightarrow$ (3) M izoparametrik Lorenziyan hiperyüzey olsun. $G(x) = Ax + b$ birim normal vektör alanı olduğundan

$$f(x) = \langle Ax + b, Ax + b \rangle_L$$

şeklinde tanımlı $f : \mathbb{R}_1^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $M \subset f^{-1}(\pm 1)$ olur. A matrisi semi-simetrik olduğundan, skaler çarpımın lineerliği gereğince

$$f(x) = \langle x, A^2 x \rangle_L + 2 \langle x, Ab \rangle_L + \langle b, b \rangle_L$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$\overrightarrow{\nabla f}(x) = 2A(Ax + b) \quad (4.66)$$

olarak bulunur. $M \subset f^{-1}(\pm 1)$ olduğundan $\overrightarrow{\nabla f}$ ile G lineer bağımlı olur. Böylece (4.66) gereği bir $\lambda(x)$ fonksiyonu için

$$A(Ax + b) = \lambda(x)(Ax + b), \quad x \in M \quad (4.67)$$

yazılır. (4.67) düzenlenirse

$$(A - \lambda(x)I)(Ax + b) = 0$$

elde edilir. Sıfırdan farklı normal vektörün varlığı için

$$\det(A - \lambda(x)I) = 0 \quad (4.68)$$

yazılır. A matrisi sabit olduğundan (4.68) in çözümünden $\lambda(x)$ in sabit olduğu görülür. $\lambda(x) = \lambda$ olsun. Böylece (4.67) gereği

$$V = \{Ax + b \mid x \in M\}$$

cümlesi A matrisinin λ karakteristik değerine karşılık gelen karakteristik uzay tarafından kapsanır. Burada $Sp\{V\}$ cümlesi yüzeyin $x \in M$ noktasındaki normal uzayını oluşturur. Şimdi V cümlesinin boyuna bağlı olarak M hiperyüzeyini aşağıdaki durumlarda belirleyelim:

Durum 1. $boyV = 1$ olsun. $G(x) = b$ sabit ve böylece M yüzeyi Lorenz uzayında hiperdüzlemin açık parçası olur.

Durum 2. $boyV = n$ olsun. Bu durumda $V = \text{Im } A$ olur. $r > 0$ ve $\lambda = \pm \frac{1}{r}$ olmak üzere

$$A|_V = \pm \frac{1}{r}I$$

ve $G(x) = \pm \frac{1}{r}x + b$ olarak elde edilir. Tanım 2.19 gereğince $Sp\{V\}$ spacelike ise M hiperyüzeyi $\mathbb{S}_1^{n-1}(r)$ pseudoküre, $Sp\{V\}$ timelike ise $\mathbb{H}_1^{n-1}(r)$ pseudohiperbolik uzay olur.

Durum 3. $2 \leq p \leq n - 1$ olmak üzere $boyV = p$ olsun. V nin dik komplemanı $V^\perp$ uzayı $n - p$ boyutlu olur ve bu uzay her $x \in M$ için $T_x M$ teğet uzay tarafından

içerilir. $x_0 \in M$ civarında $E_1(x), E_2(x), \dots, E_{n-1}(x)$ ortonormal çatısı seçilsin öyle ki $E_1, E_2, \dots, E_{n-p}$ vektörleri $V^\perp$ uzayında sabit vektörler olsun. Bu durumda

$$V = Sp \{E_{n-p+1}(x), E_{n-p+2}(x), \dots, E_{n-1}(x), G(x)\}$$

yazılır.

$$\{E_{n-p+1}(x), E_{n-p+2}(x), \dots, E_{n-1}(x)\}$$

cümlesi tarafından gerilen teğet altuzay integrallenebilirdir ve bu uzayın x_0 noktasından geçen M_1 integral altmanifoldu için

$$M_1 = M \cap (x_0 + V)$$

yazılır. Böylece $\mathbb{R}_1^{n-p} = V^\perp$ olmak üzere

$$M = M_1 \times \mathbb{R}_1^{n-p}$$

elde edilir. $M_1, V = \mathbb{R}_1^p$ uzayında bir hiperyüzeydir. M_1 in $\mathbb{R}_1^p$ deki $G_1(x)$ Gauss dönüşümü

$$G_1(x) = G(x) \quad (4.69)$$

eşitliğini sağlar. Böylece $x \in M_1$ için $A_1, p \times p$ lik $A|_V$ matrisini göstermek üzere

$$G_1(x) = A_1 x + b \quad (4.70)$$

olur. (4.69) ve (4.70) gereğince $A_1 = \pm \frac{1}{r} I$ yazılır. Böylece M_1 hiperyüzeyi $\mathbb{S}_1^{p-1}(r)$ pseudoküre veya $\mathbb{H}_1^{p-1}(r)$ pseudohiperbolik uzay ve M hiperyüzeyi de $\mathbb{S}_1^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ pseudoküresel silindirin veya $\mathbb{H}_1^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ pseudohiperbolik silindirin açık bir parçası olur.

(3) $\Rightarrow$ (1) M yüzeyi $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında bir hiperdüzlem olsun. $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ dikdörtgensel koordinat sisteminde M hiperdüzlemi, f bir izometrik immersiyon olmak üzere $f : M \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ daldırması olarak tanımlansın. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ ve $c \in \mathbb{R}$ için

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = c$$

yazılır. Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $a_i \in \mathbb{R}$ dir. Bu yüzey üzerinde alınan iki nokta $P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ ve $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ olsun. Bu yüzeyin birim normal

vektör alanı

$$G := \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\|\overrightarrow{\nabla f}\|} = \frac{1}{m} (-a_1, a_2, \dots, a_n)$$

olarak hesaplanır öyle ki burada $m = \sqrt{|-a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2|}$ ile verilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\langle Q - P, G(P) + G(Q) \rangle_L = 0$$

elde edilir. Böylece Lorenz uzayında, hiperdüzlemler $\mathbf{G}$ -yüzeyidir.

Tanım 2.19 gereğince merkezi x_0 yarıçapı r olan pseudoküre yüzeyi

$$\mathbb{S}_1^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}_1^n : \langle x - x_0, x - x_0 \rangle_L = r^2\}$$

ile verilir. Genelliği bozmadan $x_0 = (0, 0, \dots, 0)$ ve $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ olsun. Bu yüzey, f bir izometrik immersiyon olmak üzere $f : M \rightarrow \mathbb{R}_1^n$ daldırması olarak tanımlanırsa;

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = r^2 \quad (4.71)$$

yazılır. (4.71) gereğince

$$G := \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\|\overrightarrow{\nabla f}\|} = \frac{1}{r} (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.72)$$

elde edilir. (4.72) kullanılarak gerekli hesaplamalar yapılırsa $P, Q \in M$ için

$$\langle Q - P, G(P) + G(Q) \rangle_L = 0$$

elde edilir ve böylece $\mathbb{S}_1^{n-1}(r)$ pseudoküresi $\mathbf{G}$ -yüzeyi olur. Tanım 2.19 gereğince merkezi x_0 olan r -yarıçaplı pseudohiperbolik uzay

$$\mathbb{H}_1^{n-1}(r) = \{x \in \mathbb{R}_1^n : \langle x - x_0, x - x_0 \rangle_L = -r^2\}$$

cümlesi ile verilir. Benzer işlemlerle kolayca bu yüzeyin de bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi olduğu görülür. $\mathbb{S}_1^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ pseudoküresel silindir yüzeyinin $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ dikdörtgensel koordinat sisteminde denklemi

$$-x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 = r^2, \quad x_{p+1} = u_{p+1}, x_{p+2} = u_{p+2}, \dots, x_n = u_n$$

olarak verilsin. $\pi_L : \mathbb{R}_1^p \times \mathbb{R}_1^{n-p} \rightarrow \mathbb{R}_1^p \hookrightarrow \mathbb{R}_1^n$ ($\mathbb{S}_1^{p-1}$ üzerine) doğal Lorenz projeksiyonu yardımıyla bu yüzeyin birim normal vektör alanı

$$G := \frac{\overrightarrow{\nabla f}}{\|\overrightarrow{\nabla f}\|} = \frac{1}{r} (x_1, x_2, \dots, x_p, 0, 0, \dots, 0)$$

şeklinde yazılır. $P, Q \in \mathbb{S}_1^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ olmak üzere gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\langle Q - P, G(P) + G(Q) \rangle_L = 0$$

olarak bulunur. $\mathbb{H}_1^{p-1}(r) \times \mathbb{R}^{n-p}$ pseudohiperbolik silindir için ispat benzerdir. ■

Teorem 4.11 $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında M bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi ve $\alpha = \alpha(s)$ de M üzerinde birim hızlı bir geodezik eğri olsun. O zaman α Lorenziyan bir $\mathbf{N}$ -eğrisidir.

İspat. α eğrisi M yüzeyi üzerinde birim hızlı geodezik eğri olsun. Bu durumda α eğrisinin N normal vektör alanı ile M yüzeyinin n normal vektör alanı lineer bağımlı olur. Böylece bir $\lambda \neq 0$ reel sayısı için $n = \lambda N$ yazılır. M bir $\mathbf{G}$ -yüzeyi olduğundan Tanım 4.9 gereğince

$$\langle \alpha(t) - \alpha(s), n(t) + n(s) \rangle_L = 0 \quad (4.73)$$

yazılır. (4.73) eşitliğinde $n = \lambda N$ yazılırsa

$$\langle \alpha(t) - \alpha(s), N(t) + N(s) \rangle_L = 0$$

elde edilir. Böylece α Lorenziyan bir $\mathbf{N}$ -eğrisidir. ■

4.4 $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}_1^2 \times \mathbb{R}$ Yüzeylerinin Geodezikleri

Lorenz uzayın Levi-Civita koneksiyonu $\overline{\nabla}$ ve bu uzayda verilen bir M hiperyüzeyi üzerine indirgenmiş koneksiyon ∇ olsun. Lopez (2014) de Lorenz uzayda bir M yüzeyi için Gauss denklemi

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \epsilon \langle AX, Y \rangle \overrightarrow{n} \quad (4.74)$$

eşitliği ile verilmiştir. Bu eşitlikte A yüzeyin şekil operatörü, $\overrightarrow{n}$ yüzeyin birim normal vektör alanı, $\epsilon = \langle \overrightarrow{n}, \overrightarrow{n} \rangle_L$ ve $X, Y \in \chi(M)$ dir.

Munteanu ve Nistor (2012) çalışmasında Öklid uzayında doğal projeksiyon

$$\pi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4, \pi(v_1, v_2, v_3, v_4) = (v_1, v_2, v_3, 0)$$

dönüşümü ile tanımlanmış ve yüzeyin birim normal vektör alanı bu dönüşüm ile verilmiştir. Yine bu çalışmada, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ yüzeyi üzerindeki bir γ geodezik eğrisi

$$\ddot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} - \left\langle \pi(\dot{\gamma}), \pi(\dot{\gamma}) \right\rangle \pi(\gamma) \quad (4.75)$$

diferensiyel denklem sisteminin çözümleri olarak ele alınmıştır.

Aşağıda Munteanu ve Nistor (2012) ve Lopez (2014) çalışmaları referans alınarak $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}_1^2 \times \mathbb{R}$ yüzeylerinin geodezik eğrileri elde edilmiştir.

Teorem 4.12 $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ pseudoküresel silindiri üzerinde birim hızlı geodezik eğri olsun. γ eğrisi spacelike ise paralel doğrular, çember veya dairesel helis eğrisidir; timelike ise hiperbol veya hiperbolik helistir.

İspat. $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ yüzeyi üzerinde birim hızlı bir geodezik $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s), t(s))$ olsun. Bu yüzey üzerindeki koneksiyon ∇ olmak üzere

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 \quad (4.76)$$

yazılır. $\mathbb{S}_1^2$ üzerine doğal Lorenz projeksiyonu ile elde edilen birim normal vektör alanı $\vec{n}$ olsun. $\mathbb{S}_1^2$ yüzeyi timelike olduğundan $\epsilon = \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_L = 1$ olur. (4.74), (4.75) ve (4.76) gereğince

$$\ddot{\gamma} = - \left\langle \pi_L(\dot{\gamma}), \pi_L(\dot{\gamma}) \right\rangle_L \pi_L(\gamma) \quad (4.77)$$

yazılır. Burada π_L doğal Lorenz projeksiyonudur.

A) γ eğrisi spacelike olsun. Bu durumda

$$-\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 + \dot{t}(s)^2 = 1 \quad (4.78)$$

yazılır. (4.77) ve (4.78) gereğince

$$\begin{aligned} \ddot{x}(s) &= -(1 - \dot{t}(s)^2)x(s) \\ \ddot{y}(s) &= -(1 - \dot{t}(s)^2)y(s) \\ \ddot{z}(s) &= -(1 - \dot{t}(s)^2)z(s) \\ \ddot{t}(s) &= 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

elde edilir. (4.79) diferensiyel denklem sisteminden $t(s) = \zeta_0 s + t_0$ yazılırsa ζ_0 değerlerine bağlı olarak üç durum söz konusu olur.

Durum 1. $\dot{t}(s) = \zeta_0 = \pm 1$ olsun. (4.79) gereğince

$$\begin{aligned}\ddot{x}(s) &= 0 \\ \ddot{y}(s) &= 0 \\ \ddot{z}(s) &= 0 \\ \ddot{t}(s) &= 0\end{aligned}\tag{4.80}$$

yazılır. (4.80) diferensiyel denklem sistemi çözülürse

$$\gamma(s) = (u_0 s + x_0, v_0 s + y_0, \omega_0 s + z_0, \pm s + t_0)$$

denklemleri ile verilen $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ pseudoküresel silindirin spacelike paralel doğruları elde edilir. Burada $x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0), t_0 = t(0)$ ve $u_0 = \dot{x}(0), v_0 = \dot{y}(0), \omega_0 = \dot{z}(0)$ dır.

Durum 2. $\dot{t}(s) = \zeta_0 = 0$ olsun. (4.79) gereğince

$$\begin{aligned}\ddot{x}(s) &= -x(s) \\ \ddot{y}(s) &= -y(s) \\ \ddot{z}(s) &= -z(s) \\ \ddot{t}(s) &= 0\end{aligned}\tag{4.81}$$

yazılır. (4.81) diferensiyel denklem sistemi çözülürse

$$\gamma(s) = (x_0 \cos s + u_0 \sin s, y_0 \cos s + v_0 \sin s, z_0 \cos s + \omega_0 \sin s, t_0)$$

denklemleri ile verilen ve orijinden geçen bir düzlem tarafından ihtiva edilen, $\mathbb{S}_1^2$ pseudoküresinin spacelike çemberleri elde edilir.

Durum 3. $\zeta_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ olsun. (4.79) gereğince çözüm yapılırsa;

$$\begin{aligned}\gamma(s) = & (x_0 \cos(\lambda_0 s) + \frac{u_0}{\lambda_0} \sin(\lambda_0 s), y_0 \cos(\lambda_0 s) + \frac{v_0}{\lambda_0} \sin(\lambda_0 s), \\ & z_0 \cos(\lambda_0 s) + \frac{\omega_0}{\lambda_0} \sin s, \zeta_0 s + t_0)\end{aligned}$$

denklemleri ile verilen spacelike dairesel helisler elde edilir. Burada $\lambda_0 = \sqrt{1 - \zeta_0^2}$ ve $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ dir.

B) γ eğrisi timelike olsun. Bu durumda

$$-\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 + \dot{t}(s)^2 = -1\tag{4.82}$$

yazılır. (4.77) ve (4.82) gereğince

$$\begin{aligned}\ddot{x}(s) &= (1 + \dot{t}(s)^2)x(s) \\ \ddot{y}(s) &= (1 + \dot{t}(s)^2)y(s) \\ \ddot{z}(s) &= (1 + \dot{t}(s)^2)z(s) \\ \ddot{t}(s) &= 0\end{aligned}\tag{4.83}$$

elde edilir. (4.83) diferensiyel denklem sistemine bağılı olarak $t(s) = \zeta_0 s + t_0$ yazılırsa ζ_0 değerlerine bağılı olarak üç durum söz konusu olur:

Durum 1. $\dot{t}(s) = \zeta_0 = \pm 1$ olsun. (4.83) gereğince

$$\begin{aligned}\ddot{x}(s) &= 2x(s) \\ \ddot{y}(s) &= 2y(s) \\ \ddot{z}(s) &= 2z(s)\end{aligned}\tag{4.84}$$

yazılır. (4.84) diferensiyel denklem sistemi çözülürse

$$\begin{aligned}\gamma(s) = & (x_0 \cosh(\sqrt{2}s) + \frac{u_0}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}s), y_0 \cosh(\sqrt{2}s) + \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}s), \\ & z_0 \cosh(\sqrt{2}s) + \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \sinh(\sqrt{2}s), \pm s + t_0)\end{aligned}$$

denklemini ile verilen timelike hiperbolik helisler elde edilir. Burada $x_0 = x(0), y_0 = y(0), z_0 = z(0), t_0 = t(0)$ ve $u_0 = \dot{x}(0), v_0 = \dot{y}(0), \omega_0 = \dot{z}(0)$ dir.

Durum 2. $\dot{t}(s) = \zeta_0 = 0$ olsun. (4.83) gereğince

$$\begin{aligned}\ddot{x}(s) &= x(s) \\ \ddot{y}(s) &= y(s) \\ \ddot{z}(s) &= z(s)\end{aligned}\tag{4.85}$$

yazılır. (4.85) diferensiyel denklem sistemi çözülürse

$$\begin{aligned}\gamma(s) = & (x_0 \cosh(s) + u_0 \sinh(s), y_0 \cosh(s) + v_0 \sinh(s), \\ & z_0 \cosh(s) + \omega_0 \sinh(s), t_0)\end{aligned}$$

denklemini ile verilen timelike hiperboller elde edilir.

Durum 3. $\zeta_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ olsun. (4.83) gereğince

$$\begin{aligned}\gamma(s) = & (x_0 \cosh(\lambda_0 s) + \frac{u_0}{\lambda_0} \sinh(\lambda_0 s), y_0 \cosh(\lambda_0 s) + \frac{v_0}{\lambda_0} \sinh(\lambda_0 s), \\ & z_0 \cosh(\lambda_0 s) + \frac{\omega_0}{\lambda_0} \sinh s, \zeta_0 s + t_0)\end{aligned}$$

denklemleri ile verilen timelike hiperbolik helisler elde edilir. Burada $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_0 = \sqrt{1 + \zeta_0^2}$ dir. ■

Teorem 4.13 $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi $\mathbb{H}_1^2 \times \mathbb{R}$ pseudohiperbolik silindiri üzerinde birim hızlı geodezik eğri olsun. γ eğrisi spacelike ise paralel doğrular, hiperbol veya hiperbolik helis eğrisidir; timelike ise çember veya dairesel helistir.

İspat. $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s), t(s))$ birim hızlı eğrisi $\mathbb{H}_1^2 \times \mathbb{R}$ yüzeyi üzerinde bir geodezik olsun. Bu yüzey üzerindeki koneksiyon ∇ olmak üzere $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ yazılır. $\mathbb{H}_1^2$ üzerine doğal Lorenz projeksiyonu ile elde edilen birim normal vektör alanı $\vec{n}$ olsun. $\mathbb{H}_1^2$ yüzeyi spacelike olduğundan $\epsilon = \langle \vec{n}, \vec{n} \rangle_L = -1$ olur. (4.74) ve (4.75) gereğince

$$\ddot{\gamma} = \left\langle \pi_L(\dot{\gamma}), \pi_L(\dot{\gamma}) \right\rangle_L \pi_L(\gamma) \quad (4.86)$$

yazılır.

A) γ eğrisi spacelike olsun. Bu durumda

$$-\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 + \dot{t}(s)^2 = 1 \quad (4.87)$$

yazılır. (4.86) ve (4.87) gereğince

$$\begin{aligned} \ddot{x}(s) &= (1 - \dot{t}(s)^2)x(s) \\ \ddot{y}(s) &= (1 - \dot{t}(s)^2)y(s) \\ \ddot{z}(s) &= (1 - \dot{t}(s)^2)z(s) \\ \ddot{t}(s) &= 0 \end{aligned} \quad (4.88)$$

elde edilir. (4.88) diferensiyel denklem sistemine bağlı olarak $t(s) = \zeta_0 s + t_0$ yazılır ve Teorem 4.13 de yapılanlara benzer şekilde çözüm yapılırsa;

Durum 1. $\dot{t}(s) = \zeta_0 = \pm 1$ olsun. Bu durumda $\mathbb{H}_1^2 \times \mathbb{R}$ pseudohiperbolik silindirin spacelike paralel doğruları elde edilir.

Durum 2. $\dot{t}(s) = \zeta_0 = 0$ olsun. Bu durumda eğri

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= (x_0 \cosh(s) + u_0 \sinh(s), y_0 \cosh(s) + v_0 \sinh(s), \\ &\quad z_0 \cosh(s) + \omega_0 \sinh(s), t_0) \end{aligned}$$

denklemleri ile verilen spacelike hiperbol olur.

Durum 3. $\zeta_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ olsun. Bu durumda eğri

$$\begin{aligned}\gamma(s) = & (x_0 \cosh(\lambda_0 s) + \frac{u_0}{\lambda_0} \sinh(\lambda_0 s), y_0 \cosh(\lambda_0 s) + \frac{v_0}{\lambda_0} \sinh(\lambda_0 s), \\ & z_0 \cosh(\lambda_0 s) + \frac{\omega_0}{\lambda_0} \sinh s, \zeta_0 s + t_0)\end{aligned}$$

denklemleri ile verilen spacelike hiperbolik helis olur. Burada $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_0 = \sqrt{1 - \zeta_0^2}$ dir.

B) γ eğrisi timelike olsun. Bu durumda

$$-\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 + \dot{z}(s)^2 + \dot{t}(s)^2 = -1 \quad (4.89)$$

yazılır. (4.86) ve (4.89) gereğince

$$\begin{aligned}\ddot{x}(s) &= -(1 + \dot{t}(s)^2)x(s) \\ \ddot{y}(s) &= -(1 + \dot{t}(s)^2)y(s) \\ \ddot{z}(s) &= -(1 + \dot{t}(s)^2)z(s) \\ \ddot{t}(s) &= 0\end{aligned} \quad (4.90)$$

elde edilir. (4.90) diferensiyel denklem sistemine bağlı olarak $t(s) = \zeta_0 s + t_0$ yazılır ve Teorem 4.13 de yapılanlara benzer şekilde çözüm yapılırsa;

Durum 1. $\zeta_0 = 0$ olsun. Bu durumda eğri

$$\gamma(s) = (x_0 \cos s + u_0 \sin s, y_0 \cos s + v_0 \sin s, z_0 \cos s + \omega_0 \sin s, t_0)$$

denklemleri ile verilen timelike çemberler olur.

Durum 2. $\zeta_0 = \pm 1$ veya $\zeta_0 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ ise sırasıyla

$$\begin{aligned}\gamma(s) = & (x_0 \cos(\sqrt{2}s) + \frac{u_0}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}s), y_0 \cos(\sqrt{2}s) + \frac{v_0}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}s), \\ & z_0 \cos(\sqrt{2}s) + \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}s), \pm s + t_0)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\gamma(s) = & (x_0 \cos(\lambda_0 s) + \frac{u_0}{\lambda_0} \sin(\lambda_0 s), y_0 \cos(\lambda_0 s) + \frac{v_0}{\lambda_0} \sin(\lambda_0 s), \\ & z_0 \cos(\lambda_0 s) + \frac{\omega_0}{\lambda_0} \sin(\lambda_0 s), \zeta_0 s + t_0)\end{aligned}$$

denklemleri ile verilen timelike dairesel helisler elde edilir. Burada $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_0 = \sqrt{1 + \zeta_0^2}$ dir. ■

Sonuç 4.3 Teorem 4.13 ve Teorem 4.14 ile verilen geodezik eğriler birer $\mathbf{N}$ –eğrisidir.

İspat. Teorem 4.11 gereği $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}_1^2 \times \mathbb{R}$ yüzeyleri birer $\mathbf{G}$ –yüzeyidir. Teorem 4.12 gereği bu yüzeylerin geodezikleri birer $\mathbf{N}$ –eğrisidir. ■



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar ve bazı öneriler aşağıdaki gibi verilebilir:

1) Chen vd. (2006) ve Kim ve Kim (2010) çalışmalarında kullanılan kiriş fikri sayesinde, Öklid uzayında W -eğrilerinin ($\mathbf{C}$ -eğrilerinin) birim normal vektör alanlarının simetrik bir matris yardımıyla ifade edilebileceği ispat edilmiştir.

2) Kiriş fikri farklı açılardan ele alınarak, Öklid uzayında birim hızlı bir $\gamma = \gamma(s)$ eğrisi için

$$\langle \gamma(t) - \gamma(s), N(t) + N(s) \rangle = 0 \quad (\mathbf{N})$$

ve

$$\langle \gamma(t) - \gamma(s), \gamma(t) + \gamma(s) \rangle = 0 \quad (\mathbf{N}^*)$$

koşulları yardımıyla $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{N}^*$ -eğrileri tanımlanmıştır. 3-boyutlu Öklid uzayında $\mathbf{N}$ -eğrilerinin W -eğrilerine ($\mathbf{C}$ -eğrilerine) denk olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında, $\mathbf{N}^*$ -eğrilerinin $\mathbb{S}^{n-1}$ hiperküresi üzerinde yattığı, $\mathbf{N}$ -eğrilerinin ise izoparametrik yüzeylerin geodezikleri olduğu ispatlanmıştır. Burada daha yüksek boyutlu uzayda $\mathbf{N}$ -eğrilerinin hangi eğriler olabileceği araştırılabilir.

3) Ünal (2007) çalışmasında $\mathbb{R}_1^{2n+1}$ Lorenz uzayında elde edilen helikoidal vektör alanların integral eğrilerinin denklemleri, genel formda ele alınarak

$$\alpha(s) = (a_1 \sinh \lambda_1 s + b_1 \cosh \lambda_1 s, a_1 \cosh \lambda_1 s + b_1 \sinh \lambda_1 s, a_2 \sin \lambda_2 s + b_2 \cos \lambda_2 s, \\ a_2 \cos \lambda_2 s - b_2 \sin \lambda_2 s, \dots, a_n \sin \lambda_n s + b_n \cos \lambda_n s, a_n \cos \lambda_n s - b_n \sin \lambda_n s, cs)$$

formundaki eğrilerin birer W -eğrisi ($\mathbf{C}$ -eğrisi) olduğu ispat edilmiştir. Ayrıca Lorenz uzayında W -eğrileri ile $\mathbf{C}$ -eğrilerinin birbirine denk olduğu gösterilmiştir. $\mathbf{C}$ -eğrilerinin birim teğet vektör ve birim normal vektör alanları sırasıyla semi anti-simetrik ve semi simetrik bir matris yardımıyla ifade edilmiştir.

4) $\mathbb{R}_1^3$ Lorenz uzayının birim hızlı W -eğrileri, birim teğet vektör alanının integral eğrileri olarak yorumlanmış, semi anti-simetrik bir matris ve buna bağlı olarak elde

edilen bir diferensiyel denklemin çözümü yoluyla; elementer lineer cebirsel yöntemler kullanarak bu eğrilerin denklemleri elde edilmiştir. Bu yöntem, eğrileri belirlemede büyük kolaylık sağlamıştır.

5) $\mathbb{R}_1^n$ Lorenz uzayında $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{N}^*$ -eğrileri tanımlanarak $\mathbf{N}^*$ -eğrilerinin $\mathbb{S}_1^n$ pseudo-küre veya $\mathbb{H}_1^n$ pseudohiperbolik uzay üzerinde yattığı ispat edilmiştir. Bu uzayda $\mathbf{C}$ -eğrilerinin $\mathbf{N}$ -eğrisi olduğu ispatlanmış olsa da bu önermenin karşıtı açık bir problemidir.

6) Kim ve Kim (2010) çalışmasında izoparametrik yüzeylerin karakterizasyonunda kullanılan fikirler, Lorenz uzayına taşınarak, bu uzayın izoparametrik yüzeyleri elde edilmiştir. Ayrıca bu yüzeylerin Gauss dönüşümü semi simetrik bir matris yardımıyla ifade edilmiştir. Bu yüzey üzerinde yatan geodeziklerin Lorenziyan $\mathbf{N}$ -eğrisi olduğu ispat edilmiştir.

7) Munteanu ve Nistor (2012) çalışmasında kullanılan teknikler, Lorenz uzayına taşınmak suretiyle $\mathbb{S}_1^2 \times \mathbb{R}$ ve $\mathbb{H}_1^2 \times \mathbb{R}$ yüzeylerinin geodezik eğrileri elde edilmiştir. Benzer teknik ile yüksek boyutlu uzaylarda çarpımsal manifold veya yüzeylerin geodezik eğrileri elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Aminov, Y. 2000. Differential Geometry and Topology of Curves, Gordon and Breach Science Publishers imprint, 205 p., London
- Alias, L., Ferrandez A. and Lucas, P. 1992. Surfaces In The 3–Dimensional Lorentz-Minkowski Space Satisfying $\Delta x = Ax + B$, Pacific Journal of Mathematics Vol.156, No. 2, 201-208
- Boas, H.P. 1980. A Geometric Characterization of the Ball and the Bochner-Martinelli Kernel, Math. Ann. 248, 275-278.
- Boas, H.P. 1984. Spheres and Cylinders: A Local Geometric Characterization, Illinois Journal of Mathematics, Volume 28, Number 1, Spring, 120-124.
- Ferrandez, A. and Lucas, P. 1992. On Surfaces In The 3–Dimensional Lorentz-Minkowski Space, Pacific Journal of Mathematics, Vol.152, 93-100
- Magid, M.A. 1985. Lorentzian Isoparametric Hypersurfaces, Pacific Journal of Mathematics, Vol.118, No. 1, 165-197
- Chen, B.Y., Kim D.S. and Kim Y.H. 2006. New Characterizations of W –Curves, Publ. Math. Debrecen 69 (4) (2006) 457-472
- Hacısalıhoğlu, H. H. 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt I., Ankara Üniversitesi, 269 sayfa, Ankara
- Hacısalıhoğlu, H. H. ve Ekmekci, F.N. 2003. Tensör Geometri, Ankara Üniversitesi 251 sayfa, Ankara
- İlarslan, K. and Boyacıoğlu, Ö. 2007. Position Vectors of a Spacelike W –curve in Minkowski Space $\mathbb{R}_1^3$, Bull. Korean Math. Soc. 44 , No. 3, pp. 429–438.
- İyigün, E. and Arslan, K. 2005. On Harmonic Curvatures Of Curves In Lorentzian N –Space, Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1, Volume 54 Number 1, 29-34
- Kerzman, N. and Stein, E.M. 1978. The Cauchy Kernel, the Szegő Kernel, and the Riemann Mapping Function, Math.Ann.236, 85-93.
- Kim D.S. and Kim Y.H. 2010. New Characterizations of Spheres, Cylinders and W –Curves, Linera Algebra and Its Applications 432 (2010) 3002-3006
- Kühnel, W. 2006. Differential Geometry Curves-Surfaces-Manifolds, American Mathematical Society, 380 page, Rhode Island

- Lopez, R. 2014. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space, Int.Electron. J. Geom. 7 (2014), 44-10
- Munteanu, M.I. and Nistor A.I. 2012. The classification of Killing magnetic curves in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, Journal of Geometry and Physics, 62 (2012) 2, 170-182.
- O'Neill, B. 1983. Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity, Academic Press. Inc., 482 sayfa, New York.
- Öztürk, G., Arslan, K. and Hacısalihoğlu, H. H. 2008. A Characterization of ccr-curves in $\mathbb{R}^m$, Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 57-4, 217-224.
- Pallagi, J, Schultz, B. and Szirmai, J. 2010. Visualization of Geodesic Curves, Spheres and Equidistant Surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ Space, KoG 14-2010, 35-40
- Pressley, A. 2010. Elementary Differential Geometry, Springer-Verlag, 473 sayfa London.
- Rademacher, H. and Toeplitz, O. 1957. The enjoyment of mathematics, Princeton Science Library, Princeton University Press
- Sabuncuoğlu, A. 2006. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayın Dağıtım, 440 sayfa Ankara
- Torgašev, M. P. and Šucurovic, E. 2002. W –Curves in Minkowski Space-Time, Novi Sad J. Math., Vol.32, No. 2, 55-65.
- Ünal, Z. 2007. Lorenz Uzayında Cebirsel Metotlarla Kinematik, Doktora Tezi Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara
- Wegner, B.A. 1998. Differential Geometric Proof of the Local Geometric Characterization of Spheres and Cylinders by Boas, Mathematica Balkanica Vol. 2 pp. 294-295.
- Walrave, J. 1995. Curves and Surfaces in Minkowski Space, Doctoral thesis, K. U. Leuven, Fac.of Science, Leuven
- Yılmaz, S. and Turgut, M. 2010. A New Version of Bishop Frame and an Application to Spherical Images, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 371 (2010) 764-776

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emre ÖZTÜRK

Doğum Yeri : KÜTAHYA

Doğum Tarihi : 10/04/1983

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Tavşanlı Anadolu Öğretmen Lisesi (2001)

Lisans : Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü (2007)

Yüksek Lisans : Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Sayıştay Başkanlığı (2012-...)

Yayınları: (SCI Yayın) Ekici, C., Özüsağlam, E., Çimdiker M., **Öztürk, E.**, On The Curvatures of Viviani Ruled Surface, Ciencia e Technica Vitivinicola, Vol. 29, n.7 2014

Uluslararası Kongreler

14.Uluslararası Geometri Sempozyumu, “C-Curves In Minkowski Space”, 25-28 Mayıs 2016, Pamukkale Üniversitesi, Denizli

Ulusal Kongreler

- 1) 5.Ankara Matematik Günleri, “Viviani Regle Yüzeyi”, 3-4 Haziran 2010, TOBB Üniversitesi, Ankara
- 2) 6.Ankara Matematik Günleri, “Üstel Euler Phi Fonksiyonu”, 2-3 Haziran 2011 Hacettepe Üniversitesi, Ankara