ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

İBRAHİMOV-GADJİEV OPERATÖRLERİNİN q-GENELLEŞMESİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Serap HERDEM

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2020

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Serap HERDEM tarafından hazırlanan " **İbrahimov-Gadjiev Operatörlerinin q-Genelleşmesi ve Yaklaşım Özellikleri** " adlı tez çalışması 13/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** / ~~**oy çokluğu**~~ ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Cüneyt ÇEVİK
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ
Gazi Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Sezgin SUCU
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Canay AYKOL
Ankara Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Özlem YILDIRIM
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

13/01/2020



Serap HERDEM

ÖZET

Doktora Tezi

İBRAHİMOV-GADJİEV OPERATÖRLERİNİN q-GENELLEŞMESİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Serap HERDEM

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, tezde gerekli olan bazı tanımlar ve teoremler verilmiştir.
Üçüncü bölümde q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin tanımı yapılmış ve klasik anlamda yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Daha sonra q-türevler kullanılarak bu operatörlerin bazı temsil formülleri elde edilmiştir.
Dördüncü bölümde, q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin $[0, \infty)$ aralığı üzerinde bir genelleştirmesi tanımlanmış ve ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özellikleri araştırılmıştır.
Beşinci bölümde q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin özel durumları incelenmiştir.
Son bölümde ise tezde elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Ocak 2020, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler: q-Analiz, İbrahimov-Gadjiev operatörleri, q-İbrahimov-Gadjiev operatörleri, Bernstein polinomları, lineer pozitif operatörler, süreklilik modülü, Peetre-K fonksiyoneli, yaklaşım hızı

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

q-GENERALIZATION OF IBRAHIMOV-GADJIEV OPERATORS AND THEIR APPROXIMATION PROPERTIES

Serap HERDEM

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI

This thesis consists of six chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In the second chapter, some definitions and theorems needed in the thesis are given.
In the third chapter, the definition of q-İbrahimov-Gadjiev operators is given and their classical approximation properties are examined. Afterwards, some representation formulas of the operators using q-derivatives are obtained.
In the fourth chapter, a generalization of the q-İbrahimov-Gadjiev operators is introduced in order to investigate on the interval $[0, \infty)$ and approximation properties in weighted spaces are investigated.
In the fifth chapter, the special cases of q-İbrahimov-Gadjiev operators are examined.
In the last chapter, the results obtained in the thesis have been discussed.

January 2020, 66 pages

Key Words: q-Calculus, Ibrahimov-Gadjiev operators, q-Ibrahimov-Gadjiev operators, Bernstein polynomials, linear positive operators, modulus of continuity, Peetre-K functional, rate of convergence

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarımda bilgi ve önerileriyle beni yönlendiren, sabrına ve hoşgörüsüne minnet duyduğum değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. İbrahim BÜYÜKYAZICI (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, lisansüstü eğitim hayatıma başladığım günden itibaren unutulmaz yardımlarını gördüğüm, kendisini tanımaktan onur duyduğum hocam Doç. Dr. Sezgin SUCU (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı)'ya, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım arkadaşım Dr. Öğr. Üyesi Gümrah UYSAL'a, tezimle ilgili çalışma fırsatı bulduğum, bilgilerini samimiyetle benimle paylaşan meslektaşım Dr. Sait ERKOVAN'a, bu hayattaki en büyük şansım olan annem ve sevgili eşime tüm içtenliğimle teşekkür ederim.

Serap HERDEM
Ankara, Ocak 2020

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK . . . . . **i**
ÖZET . . . . . **ii**
ABSTRACT . . . . . **iii**
TEŞEKKÜR . . . . . **iv**
SİMGELER DİZİNİ . . . . . **vi**
ŞEKİLLER DİZİNİ . . . . . **vii**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR **4**
2.1 Lineer Pozitif Operatörler **4**
2.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı **5**
2.3 Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı . . . **6**
2.4 Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı **7**
2.5 Bölünmüş Farklar **9**
2.6 q-Analiz **9**
3. İBRAHİMOV-GADJİEV OPERATÖRLERİNİN q-GENELLEŞMESİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ **15**
3.1 q-İbrahimov-Gadjiev Operatörleri **17**
3.2 q-İbrahimov-Gadjiev Operatörlerinin Düzgün Yakınsaklığı **18**
3.3 q-İbrahimov-Gadjiev Operatörlerinin Yaklaşım Hızı **31**
3.4 q-İbrahimov-Gadjiev Operatörlerinin q-Türev Özellikleri **35**
4. q-İBRAHİMOV-GADJİEV OPERATÖRLERİ İLE AĞIRLIKLI YAKLAŞIM **44**
5. q-İBRAHİMOV-GADJİEV OPERATÖRÜNÜN ÖZEL DURUMLARI **49**
6. TARTIŞMA VE SONUÇ **62**
KAYNAKLAR **63**
ÖZGEÇMİŞ **66**

SİMGELER DİZİNİ

$C[\alpha,\beta]$	$[\alpha,\beta]$ aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı.
$C^2[\alpha,\beta]$	g, g', $g'' \in C[\alpha,\beta]$ olan fonksiyonların uzayı.
$\mathcal{G}_n^q(f;x)$	q-İbrahimov-Gadjiev operatörleri.
$D_q f(x)$	f fonksiyonunun q-türevi.
$D_{q,x}^p \mathcal{G}_n^q(f;x)$	q-İbrahimov-Gadjiev operatörünün x'e göre p-inci mertebeden q-türevi.
$\Delta_q^r f_j$	f fonksiyonuna ait r-inci q-fark operatörü.
$K(f;\delta)$	f fonksiyonunun Peetre-K fonksiyoneli.
$\mathcal{A}_n(f;x) \rightrightarrows f(x)$	$\{\mathcal{A}_n\}$ operatör dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı.
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü.
$\rho(x)$	$x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) = 1 + x^2$ ağırlık fonksiyonu.
$B_\rho(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$'de tanımlı ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için $\lvert f(x)\rvert \leq M^f \rho(x)$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı.
$C_\rho(\mathbb{R})$	$B_\rho(\mathbb{R})$'da olan sürekli fonksiyonlar uzayı.
$C_\rho^0(\mathbb{R})$	$C_\rho(\mathbb{R})$ uzayında olan ve $\lim_{\lvert x\rvert\to\infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} < \infty$ şartını sağlayan fonksiyonlar uzayı.
$\Omega(f;\delta)$	$C_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki ağırlıklı süreklilik modülü.
$[x_0, x_1, ..., x_n; f]$	f fonksiyonunun n-inci bölünmüş farkı.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 5.1 $f(x)=\frac{\sin(4\pi x)}{x^2+1}$ fonksiyonuna $n=10$, $n=20$ ve $n=30$ için $\widetilde{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşım 56

Şekil 5.2 $f(x)=\frac{\sin(4\pi x)}{x^2+1}$ fonksiyonuna $n=10$, $n=20$ ve $n=30$ için $\widetilde{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımın hatası 56

Şekil 5.3 $f(x)=\frac{\sin(2\pi x)}{e^{x+1}}$ fonksiyonuna $n=10$, $n=20$ ve $n=30$ için $\widehat{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşım 57

Şekil 5.4 $f(x)=\frac{\sin(2\pi x)}{e^{x+1}}$ fonksiyonuna $n=10$, $n=20$ ve $n=30$ için $\widehat{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımın hatası 57

Şekil 5.5 $f(x)=\frac{\sin(3\pi x)x^2}{x^2+1}$ fonksiyonuna $n=10$, $n=20$ ve $n=30$ için $\overline{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşım 58

Şekil 5.6 $f(x)=\frac{\sin(3\pi x)x^2}{x^2+1}$ fonksiyonuna $n=10$, $n=20$ ve $n=30$ için $\overline{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımın hatası 58

Şekil 5.7 $\widetilde{B_n^q}(f;.)$, $\widehat{B_n^q}(f;.)$, $\overline{B_n^q}(f;.)$ operatörleri ve q-Bernstein polinomlarının $n=10$ için $f(x)=\frac{\sin(\pi x)x^5}{e^{x^3+1}}$ fonksiyonuna yaklaşımı 59

Şekil 5.8 $\widetilde{B_n^q}(f;.)$, $\widehat{B_n^q}(f;.)$, $\overline{B_n^q}(f;.)$ operatörleri ve q-Bernstein polinomlarının $n=10$ için $f(x)=\frac{\sin(\pi x)x^5}{e^{x^3+1}}$ fonksiyonuna yaklaşımının hatası 59

Şekil 5.9 $f(x)=0.01e^x(x^2+1)$ fonksiyonuna $n=15$, $n=30$ ve $n=45$ için $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşım 60

Şekil 5.10 $f(x)=0.01e^x(x^2+1)$ fonksiyonuna $n=15$, $n=30$ ve $n=45$ için $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımın hatası 60

Şekil 5.11 $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü ve q-Szász-Mirakjan operatörünün $n=35$ için $f(x)=e^x\ln(x^2+1)$ fonksiyonuna yaklaşımı 61

Şekil 5.12 $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü ve q-Szász-Mirakjan operatörünün $n=35$ için $f(x)=e^x\ln(x^2+1)$ fonksiyonuna yaklaşımının hatası 61

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi, bir fonksiyona polinomlar ya da operatörler gibi iyi özelliklere sahip (süreklilik, türevlenebilme, integrallenebilme) daha basit ve işlevsel fonksiyonlarla nasıl yaklaşılabileceği problemini araştıran matematiksel analizin en önemli alanlarından biridir.

Yaklaşımlar teorisinin esas teoremi olarak bilinen teorem ilk kez Alman matematikçi Weierstrass tarafından 1885 yılında ifade ve ispat edilmiştir. Bu teoreme göre, $\varepsilon > 0$ sayısı veridiğinde $|f(x) - \mathcal{P}(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $[\alpha, \beta]$ kapalı aralığında tanımlanmış derecesi epsilona bağlı $\mathcal{P}(x)$ polinomu bulunabilir. Daha sonra Weierstrass teoreminin birçok alternatif ispatı yapılmıştır. Bu ispatların bir kısmı Lebesgue (1898), Mittag-Leffler (1900), Lerch (1903) gibi matematikçiler tarafından özel bir fonksiyona yaklaşım fikrine dayanarak, bir diğer kısmı da Picard (1891), Fejér (1900, 1916), Landau (1908) gibi matematikçiler tarafından singüler integraller kullanılarak yapılmıştır (Pinkus 2000). 1912 yılında Bernstein $[0, 1]$ aralığında tanımlı reel değerli ve sürekli fonksiyonlara yaklaşan polinomları, $x \in [0, 1]$ olmak üzere

$$B_p(f; x) = \sum_{m=0}^{p} f\left(\frac{m}{p}\right) \binom{p}{m} x^m (1-x)^{p-m} \tag{1.1}$$

lineer pozitif operatörler dizisi şeklinde tanımlamış ve böylece Weierstrass teoreminin en güzel ispatını vermiştir. Öyle ki bu ispat yöntemi Bohman-Korovkin teoreminin doğmasına imkan sağlamıştır. 1952 yılında Bohman, Bernstein'ın ispatını genelleştirmiş ve

$$\mathcal{A}_n(f; x) = \sum_{r=0}^{t} f\left(\xi_{r,t}\right) P_{r,t}(x)$$

eşitliği ile verilen toplam biçimindeki operatörlerin $[0, 1]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlara yaklaşım koşullarını vermiştir. Bundan bir yıl sonra Korovkin, Bohman'dan bağımsız olarak, Weierstrass teoremini integral tipindeki operatörler için ispatlamıştır. Sonraki yıllarda bu teoremler pek çok matematikçi tarafından çeşitli fonksiyon uzaylarına genişletilmiştir. Örneğin 1976 yılında Gadjiev, sınırsız aralıklarda tanımlanan operatör dizileri için yaklaşım koşullarını ağırlıklı

uzaylarda incelemiş, Korovkin teoremini $[\alpha, \beta]$ aralığından tüm reel eksene genişletmiştir. Diğer yandan Bernstein polinomları sade ve kullanışlı yapısı nedeniyle yaklaşımlar teorisinin yanısıra olasılık teorisi, sayılar teorisi, integral ve diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri, cebir ve lojik gibi matematiğin birçok dalında uygulama alanı bulmuş ve çeşitli genelleşmeleri oluşturulmuştur.

Bernstein polinomlarının bir genelleşmesi de q-sayılarına (kuantum sayılarına) dayanır. q-Sayıları, 18. yüzyılda Leonhard Euler ile başlayan, kuantum analiz olarak da adlandırılan q-Analiz teorisinin temel unsurlarından biridir. 1740 yılında Alman matematikçi Philipp Node, Euler'e bir n doğal sayısının tüm ayrışımlarının sayısını ifade eden $P(n)$ fonksiyonunun hesaplanması problemini sunmuş; Euler, 1750 yılında $P(n)$ fonksiyonuna ilişkin pentagonal sayı teoreminde

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty}(-1)^s \left(q^{\frac{s(3s-1)}{2}} + q^{\frac{s(3s+1)}{2}}\right),\ 0 < |q| < 1$$

eşitliğini ispatlayarak q-serilerinin ilk örneğini vermiştir. Euler ayrıca logaritma fonksiyonunun q-analoğu, q-üstel fonksiyonlar, q-fark operatörü üzerine yaptığı çalışmalarla q-Analiz teorisinin gelişmesine büyük katkı sağlamıştır (Gautschi 2008).

1908 yılında Jackson q-fark operatörünü yeniden tanımlamış, f fonksiyonunun bağımsız değişkenine sonsuz küçük arttırımı yapmak yerine sonsuz küçük katının arttırımını yaparak türev kavramını q-teori içinde genelleştirmiştir. Jackson, matematiksel kariyerinin büyük kısmında q-türev, q-integral, hipergeometrik serilerin q-genelleşmeleri, eliptik q-fonksiyonlar ile ilgili çalışmalarıyla q-Analiz teorisinin kurucuları arasında yer alır (Ernst 2008).

Yaklaşık üç yüz yıllık tarihinde kuantum hesabının uygulamaları fizikçiler tarafından da Coulomb yasası, genel görelilik, sicim teorisi gibi önemli fizik kuramlarının matematiksel yapısı içinde kullanılmıştır (Ernst 2000).

Yukarıda değindiğimiz üzere Bernstein polinomlarının q-sayılarına dayalı genelleşmesi ilk olarak Lupaş tarafından 1987 yılında

$$\mathfrak{B}_p^q(f;x) = \frac{1}{\prod_{m=0}^{p-1}(1-x+q^m x)} \sum_{s=0}^{p} q^{\frac{s(s-1)}{2}} f\left(\frac{[s]}{[p]}\right) \begin{bmatrix} p \\ s \end{bmatrix} x^s (1-x)^{p-s}, \quad q > 0,\ p \in \mathbb{N},$$

şeklinde tanımlanıp yaklaşım ve şekil koruma özellikleri incelenmiştir (Lupaş 1987). Daha sonra Phillips, 1997 yılında q-Bernstein polinomları olarak bilinen Bernstein polinomlarının

$$\mathcal{B}_p^q(f;x) = \sum_{s=0}^{p} f\left(\frac{[s]}{[p]}\right) \begin{bmatrix} p \\ s \end{bmatrix} x^s \prod_{m=0}^{p-s-1} (1-q^m x), \quad 0 < q < 1,\ p \in \mathbb{N},$$

şeklindeki bir diğer q-genelleşmesini tanımlamıştır (Phillips 1997). q-Bernstein polinomları, Lupaş ve Phillips'in öncülüğünde, araştırmacıların bu konuya ilgi duymasına olanak sağlamış ve çok sayıda operatörün q-analoğu oluşturulmuştur. Bu konudaki çalışmalara örnek olarak Aral (2008), Karslı ve Gupta (2008), Mahmudov ve Sabancigil (2008), Mahmudov (2010), Nowak (2009), Radu vd. (2011) ve Trif (2000) verilebilir.

Bu tezde, İbrahimov ve Gadjiev tarafından tanımlanan ve özel durumlarda belirli lineer pozitif operatör dizilerini içeren İbrahimov-Gadjiev operatörünün bir q-genelleşmesi ele alınacaktır (İbrahimov ve Gadjiev 1970).

Tezin ikinci bölümde konuyla ilgili gerekli olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Üçüncü bölümde q-İbrahimov-Gadjiev operatörü tanımlanarak $C[0,A]$ uzayında yaklaşım özellikleri incelenecek, daha sonra q-türevler kullanılarak operatörün q-farklar ve bölünmüş farklarla ifadesi elde edilecektir.

Dördüncü bölümde q-İbrahimov-Gadjiev operatörünün tanım kümesi $[0,\infty)$ aralığına genişletilerek ağırlıklı uzaylarda yakınsaklığı incelenecek ve daha sonra yaklaşım hızı ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

Beşinci bölümde q-İbrahimov-Gadjiev operatörünün özel durumları incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde lineer pozitif operatörler, ağırlıklı uzaylar ve q-analiz ile igili, çalışma boyunca faydalanacağımız, bazı temel kavramlar verilecektir.

2.1 Lineer Pozitif Operatörler

Bu kısımda lineer pozitif operatörlerin temel özellikleri verilecektir. Verilen tanımlar ve özellikler (Altomare ve Campiti 1994) ve (Hacısalihoğlu ve Hacıyev 1995) isimli kaynaklarda bulunabilir.

Tanım 2.1 $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{N}$ iki fonksiyon uzayı olmak üzere $\mathcal{M}$'den alınmış her h fonksiyonunu $\mathcal{N}$'de bir $g = \mathcal{A}h$ fonksiyonuna dönüştüren bir $\mathcal{A}$ kuralı varsa o takdirde $\mathcal{M}$'de bir operatör tanımlıdır denir. $\mathcal{A}h$ fonksiyonunun, x noktası g fonksiyonunun tanım kümesinde olmak üzere bu noktada aldığı değer $g(x) = \mathcal{A}(h; x)$ ile gösterilir.
$\mathcal{M}$ uzayı lineer bir uzay olduğunda her $h_1, h_2 \in \mathcal{M}$ ve her $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{A}(\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2; x) = \beta_1 \mathcal{A}(h_1; x) + \beta_2 \mathcal{A}(h_2; x)$$

koşulu sağlanıyor ise $\mathcal{A}$ operatörüne lineer operatör denir.
Eğer $h(x) \geq 0$ olduğunda $\mathcal{A}(h; x) \geq 0$ koşulu sağlanıyor ise, $\mathcal{A}$ operatörüne pozitiftir denir. Lineerlik ve pozitiflik koşullarını sağlayan operatörlere lineer pozitif operatörler denir.

Önerme 2.1 $\mathcal{A} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bir lineer pozitif operatör ise bu durumda $\mathcal{A}$ monotondur.

İspat. $\forall g_1, g_2 \in \mathcal{M}$ için $g_1 \leq g_2$ olsun. Buradan $g_2 - g_1 \geq 0$ olup $\mathcal{A}$ operatörü pozitif olduğundan

$$\mathcal{A}(g_2 - g_1; x) \geq 0$$

elde edilir. Ayrıca $\mathcal{A}$ operatörünün lineerliğinden

$$\mathcal{A}(g_2 - g_1; x) = \mathcal{A}(g_2; x) - \mathcal{A}(g_1; x)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\mathcal{A}(g_2; x) \geq \mathcal{A}(g_1; x)$$

olup istenilen elde edilir. ■

Önerme 2.2 $\mathcal{A} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ bir lineer pozitif operatör ise o takdirde

$$|\mathcal{A}(\varphi; x)| \leq \mathcal{A}(|\varphi|; x)$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat. Herhangi bir φ fonksiyonu için;

$$-|\varphi| \leq \varphi \leq |\varphi|$$

olduğu açıktır. $\mathcal{A}$ lineer pozitif operatörü monoton olduğundan

$$\mathcal{A}(-|\varphi|; x) \leq \mathcal{A}(\varphi; x) \leq \mathcal{A}(|\varphi|; x)$$

ve $\mathcal{A}$'nın lineerliğinden,

$$-\mathcal{A}(|\varphi|; x) \leq \mathcal{A}(\varphi; x) \leq \mathcal{A}(|\varphi|; x)$$

yazılabilir. Buradan

$$|\mathcal{A}(\varphi; x)| \leq \mathcal{A}(|\varphi|; x)$$

elde edilir. ■

Tanım 2.2 $\eta_{n,m}(x) = \mathcal{A}_n((t-x)^m; x)$, $m = 0, 1, 2, ...$ ile tanımlı ifadelere $\{\mathcal{A}_n\}$ operatörler dizisinin m-inci merkezi momentleri denir.

2.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı

$[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli reel değerli bir f fonksiyonu için $\forall\ \varepsilon > 0$ ve $\forall\ x \in [\alpha, \beta]$ için

$$|\mathcal{P}_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\mathcal{P}_n(x)$ polinomunun varlığı Alman matematikçi Weierstrass tarafından 1885 yılında ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra birçok matematikçi teoremin ispatını çeşitli şekillerde yapmıştır. Korovkin, lineer pozitif operatörler dizisi ile f fonksiyonuna yaklaşım probleminin çözümünü aşağıdaki teoremle ifade etmiştir (Korovkin 1953).

Teorem 2.1 $f \in C[\alpha, \beta]$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq M_f$ olsun. Bu durumda $\{\mathcal{L}_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi, her $x \in [\alpha, \beta]$ ve $e_i = t^i$ olmak üzere $i = 0, 1, 2$ için

$$\mathcal{L}_n\left(e^i; x\right) \rightrightarrows x^i$$

koşullarını sağladığı takdirde, $[\alpha, \beta]$ aralığında

$$\mathcal{L}_n(f; .) \rightrightarrows f$$

gerçeklenir (Korovkin 1953).
Burada, $e_i = t^i$, $i = 0, 1, 2$ fonksiyonları Korovkin test fonksiyonları olarak adlandırılır.

2.3 Ağırlıklı Uzaylarda Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı

Korovkin teoremi reel eksenin sonlu ve kapalı alt aralığında verilmektedir ancak sınırsız aralıklar üzerinde tanımlanan operatörler için bu teorem geçerli değildir. 1976 yılında Gadjiev sınırsız bölgelerde Korovkin teoreminin hangi koşullar altında sağlandığını aşağıdaki şekilde ifade etmiştir:
Tüm reel eksende sürekli ρ fonksiyonu $\forall\ x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$ ve $\lim\limits_{|x| \to \infty} \rho(x) = \infty$ koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$|f(x)| \leq M^f \rho(x),\ M^f > 0$$

eşitsizliğini sağlayan reel değerli fonksiyonların kümesi $B_\rho(\mathbb{R})$ ile, $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayındaki sürekli fonksiyonların kümesini $C_\rho(\mathbb{R})$ ile gösterilsin. Bu uzaylar

$$\|f\|_\rho = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)}$$

normu ile lineer normlu uzaylardır. Burada, ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu, $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ uzaylarına ağırlıklı uzaylar denir. $k_f \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\left\{ f \in C_\rho(\mathbb{R}) : \lim_{|x| \to \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = k_f < \infty \right\}$$

ile tanımlanan uzay $C_\rho^0(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

Önerme 2.3 $\{L_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi için

$$L_n : C_\rho(\mathbb{R}) \to B_\rho(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow \|L_n(\rho; x)\|_\rho \leq M^\rho$$

olur. Burada, $\rho(x) = 1 + x^2$ ve M^ρ pozitif bir sabittir (Gadjiev 1974).

Teorem 2.2 Her $n \in \{1, 2, ...\}$ için $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayından $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayına dönüşüm yapan $\{A_n\}$ lineer pozitif operatörler dizisi;

$$\rho(x) = 1 + x^2$$

ağırlık fonksiyonu olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \left\| A_n\left(t^k; x\right) - x^k \right\|_\rho = 0, \ k = 0, 1, 2 \tag{2.1}$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda herhangi bir $h \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{n\to\infty} \left\| A_n(h; x) - h(x) \right\|_\rho = 0$$

gerçeklenir (Gadjiev 1976).

2.4 Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı

Lineer pozitif operatörlerle yaklaşım teorisinin önemli bir problemi de yaklaşım hızını belirlemek ve bu yaklaşım hatası için bir üst sınır bulmaktır. Bu hesaplamayı yapmak için sıklıkla kullanılan araçlardan bazıları süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyonelidir. Aşağıdaki tanım ve lemmalar (Altomare ve Campiti 1994), (Gadjiev ve İspir 1999) ve (İspir 2001) isimli kaynaklarda bulunabilir.

Tanım 2.3 $f \in C[\alpha, \beta]$ olsun. $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x,y\in[\alpha,\beta] \\ |x-y|\le\delta}} |f(x) - f(y)|$$

ile tanımlanan $\omega(f; .)$ dönüşümüne f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

Süreklilik modülünün bazı özellikleri aşağıda verilen lemma ile ifade edilmiştir.

Lemma 2.1 $f \in C[\alpha, \beta]$ olmak üzere;

(i) $\omega(f; \delta) \ge 0$.
(ii) $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \le (1 + \lambda)\,\omega(f; \delta)$.
(iii) $\lim_{\delta\to 0} \omega(f; \delta) = 0$.
(vi) $|f(t) - f(x)| \le \omega(f; |t - x|)$.
(v) $|f(t) - f(x)| \le \left(\dfrac{|t - x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$.

Tanım 2.4 $f \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ için

$$\Omega(f;\delta) = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ |h|\leq\delta}} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+x^2)(1+h^2)}$$

şeklinde tanımlanan $\Omega(f;.)$ dönüşümüne f fonksiyonunun $C_\rho^0(\mathbb{R})$ uzayında ağırlıklı süreklilik modülü denir (İspir 2001).

$\Omega(f;.)$ için bazı özellikler aşağıdaki lemmada verilmiştir.

Lemma 2.2 $f \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ olmak üzere;

(i) $\Omega(f;\delta)$, $\delta \geq 0$ değişkenine göre monoton artan bir fonksiyondur.
(ii) Her $f \in C_\rho^0(\mathbb{R})$ için $\lim_{\delta\to 0} \Omega(f;\delta) = 0$ dır.
(iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\Omega(f;m\delta) \leq 2m\left(1+\delta^2\right)\Omega(f;\delta)$.
(iv) Herhangi $\lambda > 0$ için $\Omega(f;\lambda\delta) \leq 2(1+\lambda)\left(1+\delta^2\right)\Omega(f;\delta)$.
(v) $|f(t) - f(x)| \leq 2\left(1+\delta^2\right)(1+x^2)\left(1+\dfrac{|t-x|}{\delta}\right)\left(1+(t-x)^2\right)\Omega(f;\delta)$.

Tanım 2.5 $f \in C[\alpha,\beta]$ ve $\delta > 0$ olmak üzere

$$K(f;\delta) = \inf_{g\in C^2[\alpha,\beta]} \left\{ \|f-g\|_{C[\alpha,\beta]} + \delta \|g\|_{C^2[\alpha,\beta]} \right\}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme Peetre-K fonksiyoneli denir. Burada, $C^2[\alpha,\beta] = \{g \in C[\alpha,\beta] : g', g'' \in C[\alpha,\beta]\}$ olmak üzere, bu uzayda norm

$$\|g\|_{C^2[\alpha,\beta]} = \|g\|_{C[\alpha,\beta]} + \|g'\|_{C[\alpha,\beta]} + \|g''\|_{C[\alpha,\beta]}$$

ile tanımlanabilir.

Lemma 2.3 (İntegral Bağıntısı) $g \in C^2[\alpha,\beta]$ olsun. Bu durumda

$$g(t) - g(x) = g'(x)(t-x) + \int_x^t g''(s)(t-s)\,ds$$

eşitliği sağlanır.

2.5 Bölünmüş Farklar

Tanım 2.6 φ, $[\alpha, \beta]$ aralığı üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $x_0, x_1, ..., x_n$ ler de $x_0 < x_1 < ... < x_n$ olacak şekilde bu aralığın keyfi noktaları olmak üzere, φ fonksiyonunun keyfi x_k; $k = 0, 1, 2, ...$ noktasındaki değerini $[x_k; \varphi]$ ile gösterilsin. Yani $\varphi(x_k) = [x_k; \varphi]$ olsun. Bu eşitliğe φ fonksiyonunun sıfırıncı bölünmüş farkı denir. Ayrıca

$$[x_0, x_1; \varphi] = \frac{[x_0; \varphi] - [x_1; \varphi]}{x_0 - x_1} = \frac{\varphi(x_0) - \varphi(x_1)}{x_0 - x_1}$$

ifadesine φ fonksiyonunun birinci bölünmüş farkı denir. Benzer olarak

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, x_2; \varphi] &= \frac{[x_0, x_1; \varphi] - [x_1, x_2; \varphi]}{x_0 - x_2} \\ &= \frac{\varphi(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{\varphi(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{\varphi(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \end{aligned}$$

ifadesine φ fonksiyonunun ikinci bölünmüş farkı, bu şekilde devam edilirse

$$\begin{aligned} [x_0, x_1, ..., x_n; \varphi] &= \frac{[x_0, x_1, ..., x_{n-1}; \varphi] - [x_1, x_2, ..., x_n; \varphi]}{(x_0 - x_n)} \\ &= \frac{\varphi(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)...(x_0 - x_n)} + \\ &\quad ... + \frac{\varphi(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})} \end{aligned}$$

ifadesine φ fonksiyonunun n-inci bölünmüş farkı denir (DeVore ve Lorentz 1993).

2.6 *q*-Analiz

Bu kesimde q-Analiz ile ilgili bazı temel tanım, teorem ve örneklere yer verilecektir. Bu tanım, teorem ve örnekler (Ernst 2000), (Jackson 1909), (Jing ve Fan 1995) ve (Kac ve Cheung 2002) isimli kaynaklardan derlenmiştir.

Tanım 2.7 Herhangi bir pozitif q reel sayısı için, $n \in \mathbb{Z}^+$ tamsayısının kuantum genellemesi (q-tamsayısı) $[n]_q = [n]$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$[n] = \begin{cases} \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1} & , q \neq 1 \\ n & , q = 1 \end{cases}$$

Ayrıca q-binom katsayısı $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ şeklinde gösterilir ve

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} \quad (n \geq k \geq 0)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $[n]_q! = [n]!$

$$[n]! = \begin{cases} [n]\,[n-1]\,[n-2]\,...\,[1] & ,n = 1,2,3,... \\ 1 & ,n = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Açıkça $q = 1$ için

$$[n]_1 = n, \;\; [n]_1! = n!, \;\; \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 = \binom{n}{k}$$

dır.

Tanım 2.8 h herhangi bir fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyonun $x \neq 0$ noktalarındaki q-türevi

$$D_q h\,(x) = \frac{d_q h\,(x)}{d_q x} = \frac{h\,(qx) - h\,(x)}{qx - x}$$

şeklinde tanımlanır. h fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki q-türevi ise $h'\,(0)$ olarak tanımlanır. Buna göre h fonksiyonunun q-türevi

$$D_q h\,(x) = \begin{cases} \frac{h(qx)-h(x)}{qx-x} & ,x \neq 0 \\ h'\,(0) & ,x = 0 \end{cases}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Eğer h, türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$\lim_{q \to 1} D_q h\,(x) = \frac{dh\,(x)}{dx}$$

olur.

Tanım 2.9 Herhangi h_1 ve h_2 fonksiyonları için h_1 ve h_2 nin çarpımlarının q-türevi

$$D_q(h_1\,(x)\,h_2\,(x)) = h_1\,(qx)\,D_q h_2\,(x) + h_2\,(x)\,D_q h_1\,(x) \tag{2.2}$$

dir. Ya da simetriden dolayı h_1 ve h_2 değiştirilebilir. Böylece

$$D_q(h_1\,(x)\,h_2\,(x)) = h_1\,(x)\,D_q h_2\,(x) + h_2\,(qx)\,D_q h_1\,(x) \tag{2.3}$$

olur.

Tanım 2.10 $(x-c)^n$ ifadesinin q-genelleşmesi

$$(x-c)_q^n = \begin{cases} 1 & ,n = 0 \\ (x-c)\,(x-qc)\,...\,(x-q^{n-1}c) & ,n \geq 1 \end{cases}$$

polinomu ile tanımlanır.

Önerme 2.4 Her $p = 1, 2, ...$ için

$$D_q (x-c)_q^p = [p] (x-c)_q^{p-1} \tag{2.4}$$

dir.

İspat. Bu önermenin ispatı (Kac ve Cheung 2002) isimli kaynakta tümevarım yöntemiyle verilmiştir. $p = 1$ için;

$$D_q (x-c)_q^1 = D_q (x-c) = \frac{(qx-c)-(x-c)}{(q-1)x} = \frac{qx-c-x+c}{qx-x} = 1 = [1] (x-c)_q^0$$

olacağı için $p = 1$ için doğrudur. (2.4) eşitliği $p = k$ için doğru olsun. (2.4) eşitliğinin $p = k+1$ değeri için de doğru olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} (x-c)_q^{k+1} &= (x-c)(x-qc)...\left(x-q^{k-1}c\right)\left(x-q^k c\right) \\ &= (x-c)_q^k \left(x-q^k c\right) \end{aligned}$$

olup eşitliğin iki tarafının q-türevi alınırsa

$$D_q (x-c)_q^{k+1} = D_q \left((x-c)_q^k \left(x-q^k c\right) \right)$$

(2.2) eşitliği ile verilen çarpımın q-türevinden

$$\begin{aligned} D_q (x-c)_q^{k+1} &= (x-c)_q^k D_q \left(x-q^k c\right) + \left(qx-q^k c\right) D_q (x-c)_q^k \\ &= (x-c)_q^k \left(\frac{\left(qx-q^k c\right)-\left(x-q^k c\right)}{(q-1)x} \right) \\ &\quad +q\left(x-q^{k-1}c\right)[k](x-c)_q^{k-1} \\ &= (x-c)_q^k \left(\frac{qx-q^k c-x+q^k c}{(q-1)x} \right) \\ &\quad +q[k](x-c)(x-qc)...\left(x-q^{k-2}c\right)\left(x-q^{k-1}c\right) \\ &= (x-c)_q^k \left(\frac{(q-1)x}{(q-1)x} \right) + q[k](x-c)_q^k \\ &= (x-c)_q^k (1+q[k]) \\ &= (x-c)_q^k [k+1] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Önerme 2.3, $(c-x)_q^p$ fonksiyonunun q-türevini bulmak için direkt uygulanamaz. Çünkü;

$$(c-x)_q^p \neq (-1)^p (x-c)_q^p$$

dir. Bunun yerine

$$\begin{aligned}(c-x)_q^p &= (c-x)(c-qx)\left(c-q^2x\right)...\left(c-q^{p-1}x\right)\\ &= (c-x)\,q\left(cq^{-1}-x\right)q^2\left(cq^{-2}-x\right)...q^{p-1}\left(cq^{1-p}-x\right)\\ &= (-1)^p q^{\frac{(p-1)p}{2}}\left(x-q^{-p+1}c\right)...\left(x-q^{-2}c\right)\left(x-q^{-1}c\right)(x-c)\\ &= (-1)^p q^{\frac{(p-1)p}{2}}\left(x-q^{1-p}c\right)_q^p\end{aligned}$$

ifadesinin her iki yanının q-türevi alınırsa

$$\begin{aligned}D_q(c-x)_q^p &= D_q\left((-1)^p q^{\frac{(p-1)p}{2}}\left(x-q^{-p+1}c\right)_q^p\right)\\ &= (-1)^p q^{\frac{(p-1)p}{2}}[p]\left(x-q^{-p+1}c\right)_q^{p-1}\\ &= -[p]\,q^{p-1}(-1)^{p-1}q^{\frac{(p-2)(p-1)}{2}}\left(x-q^{-p+2}\left(q^{-1}c\right)\right)_q^{p-1}\\ &= -[p]\,q^{p-1}\left(q^{-1}c-x\right)_q^{p-1}\\ &= -[p](c-qx)_q^{p-1}\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 2.11 f fonksiyonu bir (α,β) aralığında sürekli olsun. $c\in[\alpha,\beta]$ olmak üzere Jackson q-Taylor formülü

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(D_q^k f\right)(c)}{[k]!}(z-c)_q^k\ ,\ z\in(\alpha,\beta)$$

ile tanımlanır. Burada

$$(z-c)_q^0=1,\ \ (z-c)_q^k=\prod_{s=0}^{k-1}\left(z-q^s c\right),\ k\in\mathbb{N}$$

dir.

Örnek 2.1 $p\in\mathbb{Z}^+$ ve c herhangi bir reel sayı olsun. $f(x)=(x+c)_q^p$ fonksiyonunun $x=0$ noktası civarındaki q-Taylor formülünü elde edelim.

$$D_q f(x)=[p](x+c)_q^{p-1}$$

$$D_q^2 f(x)=[p][p-1](x+c)_q^{p-2}$$

...

$$D_q^k f(x) = [p][p-1][p-2]...[p-k+1](x+c)_q^{p-k}$$

olup buradan

$$\left(D_q^k f\right)(0) = [p][p-1][p-2]...[p-k+1](c)_q^{p-k}$$

bulunur. Diğer yandan

$$(x+c)_q^m = (x+c)(x+qc)\left(x+q^2c\right)...\left(x+q^{m-1}c\right)$$

ifadesinde $x=0$ için;

$$\begin{aligned}(c)_q^m &= (c)(qc)\left(q^2c\right)...\left(q^{m-1}c\right)\\ &= c^m q^{\frac{(m-1)m}{2}}\end{aligned}$$

$m=p-k$ alınırsa

$$(c)_q^{p-k} = c^{p-k}q^{\frac{(p-k-1)(p-k)}{2}}$$

olacaktır. Buna göre

$$\left(D_q^k f\right)(0) = [p][p-1][p-2]...[p-k+1]\,c^{p-k}q^{\frac{(p-k-1)(p-k)}{2}}$$

olup $f(x)=(x+c)_q^p$ fonksiyonunun $x=0$ noktası civarındaki q-Taylor formülü

$$\begin{aligned}(x+c)_q^p &= \sum_{k=0}^{p}\frac{[p][p-1][p-2]...[p-k+1]}{[k]!}c^{p-k}q^{\frac{(p-k-1)(p-k)}{2}}x^k\\ &= \sum_{k=0}^{p}\begin{bmatrix}p\\k\end{bmatrix}q^{\frac{(p-k-1)(p-k)}{2}}c^{p-k}x^k \qquad (2.5)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Yukarıdaki formülde k yerine $p-k$ alınırsa q-binom katsayılarının tanımından

$$\begin{bmatrix}p\\k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}p\\p-k\end{bmatrix}$$

yazılabilir. Buna göre (2.5) ifadesi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(x+c)_q^p = \sum_{k=0}^{p}\begin{bmatrix}p\\k\end{bmatrix}q^{\frac{(k-1)k}{2}}c^k x^{p-k}.$$

Bu formüle Gauss binom formülü adı verilir.

Gauss binom formülünde c yerine $1-x$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{p}\begin{bmatrix}p\\k\end{bmatrix}q^{\frac{(k-1)k}{2}}(1-x)^k x^{p-k} = 1 \qquad (2.6)$$

eşitliği elde edilir.

Tanım 2.12 e^x üstel fonksiyonunun iki önemli q-genelleşmesi

$$e_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{[k]!} = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} \tag{2.7}$$

ve

$$E_q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{(k-1)k}{2}} \frac{x^k}{[k]!} = (1+(1-q)x)_q^{\infty} \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlanır. q-Üstel fonksiyonlar aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$D_q e_q(rx) = r e_q(rx), \; D_q E_q(rx) = r E_q(qrx).$$

Eğer $q \to 1$ için yukarıda tanımlanan üstel fonksiyonların limiti alınırsa klasik e^x üstel fonksiyonu elde edilir. Ayrıca (2.7) ve (2.8) eşitliklerinden

$$e_q(x) E_q(-x) = 1 \tag{2.9}$$

olduğu görülür.

Tanım 2.13 f herhangi bir fonksiyon ve x_j $(j = 0, 1, ..., n)$ ler de f fonksiyonunun tanım kümesinde olmak üzere q-fark

$$\Delta_q^0 f(x_j) = f(x_j)$$

ve $j = 0, 1, ..., n-r-1$ için q-farkların yineleme bağıntısı;

$$\Delta_q^{r+1} f(x_j) = \Delta_q^r f(x_{j+1}) - q^r \Delta_q^r f(x_j) \;\; , \; r = 0, 1, 2, ... \tag{2.10}$$

şeklinde ifade edilir (Phillips 2003).

Teorem 2.3 $x_j = [j]$ ve $[k]! = [k][k-1]...[1]$ olmak üzere her $j, k \geq 0$ için

$$[x_j, x_{j+1,...,}x_{j+k}; f] = \frac{\Delta_q^k f(x_j)}{q^{k(2j+k-1)/2}[k]!} \tag{2.11}$$

dir (Phillips 2003).

3. İBRAHİMOV-GADJİEV OPERATÖRLERİNİN Q-GENELLEŞMESİ VE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Daha önce belirttiğimiz gibi Korovkin (1953) lineer pozitif operatörler dizisi ile f fonksiyonuna yaklaşma problemine dair genel bir teorem ifade etmiştir. Bu teoremden sonra birçok matematikçi Korovkin koşullarını sağlayan lineer pozitif operatörler dizisi oluşturmuşlardır. Korovkin koşullarını sağlayan genel bir lineer pozitif operatörler dizisi olan, özel durumlarda bazı bilinen lineer pozitif operatörleri içeren ve tezimizin çıkış noktasını oluşturan İbrahimov-Gadjiev operatörleri, İbrahimov ve Gadjiev (1970) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$A > 0$ keyfi bir reel sayı olmak üzere $C[0, A]$ uzayında $\{\varphi_n(t)\}$ ve $\{\psi_n(t)\}$ fonksiyon dizilerini alalım. $\{\alpha_n\}$ ise pozitif reel sayılar dizisi olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$0 \leq t \leq A,\ n \in \{1, 2, ...\} \text{ için } \varphi_n(0) = 0,\ \text{ve } \psi_n(t) > 0$$

olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2 \psi_n(0)} = 0$$

sağlansın. $\{K_n(x, t, u)\}$ dizisi ise $x, t \in [0, A]$, $-\infty < u < \infty$ olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlayan üç değişkenli fonksiyonlar dizisi olsun.

1) Bu dizinin her elemanı x ve t'nin $[0, A]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık u'ya göre analitik fonksiyondur.

2) $\forall x \in [0, A]$ ve $n \in \{1, 2, ...\}$ için $K_n(x, 0, 0) = 1$ dir.

3) $x, t \in [0, A]$ olmak üzere $\nu, n \in \{1, 2, ...\}$ için

$$\left\{ (-1)^{\nu} \left[\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x, t, u) \right]_{\substack{u=\alpha_n \psi_n(t) \\ t=0}} \right\} \geq 0$$

dır.

4) $m + n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olacak biçimde öyle bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır ki;

$$-\frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} K_n(x, t, u)\,|_{\substack{u=\alpha_n \psi_n(t) \\ t=0}} = nx \left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial u^{\nu-1}} K_{n+m}(x, t, u)\,|_{\substack{u=\alpha_n \psi_n(t) \\ t=0}} \right]$$

eşitliği sağlanır.

Bu koşullar altında İbrahimov-Gadjiev operatörleri

$$G_n(f;x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\left[\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}K_n(x,t,u)\,|_{\substack{u=\alpha_n\psi_n(t)\\ t=0}}\right]\frac{(-\alpha_n\psi_n(0))^\nu}{\nu!} \qquad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır.

$G_n(f;.)$ operatörünün içinde bulunan $K_n(x,t,u)$ fonksiyonuna (4) özelliği ν defa uygulanırsa (3.1) operatörü $\forall n$ için

$$\begin{aligned} G_n(f;x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n^2\psi_n(0)}\right)\frac{n(n+m)...(n+(\nu-1)m)}{\nu!} \\ &\quad\times(x\alpha_n\psi_n(0))^\nu K_{n+\nu m}(x,0,\alpha_n\psi_n(0)) \end{aligned} \qquad (3.2)$$

şeklinde elde edilir.

İbrahimov-Gadjiev operatörleri özel durumlarda birçok belirli lineer pozitif operatörler dizisini içerir. Örneğin $K_n(x,t,u)=\left(1-\frac{ux}{1+t}\right)^n$ için $\alpha_n=n$, $\psi_n(0)=\frac{1}{n}$ seçildiğinde (3.1) operatörü

$$B_n(f;x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\binom{n}{\nu}x^\nu(1-x)^{n-\nu}$$

şeklinde tanımlanan Bernstein polinomlarına dönüşür (Bernstein 1912). $\alpha_n=n$, $\psi_n(0)=\frac{1}{nb_n}$, ($\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$) seçildiği takdirde ise

$$B_n^\star(f;x)=\sum_{\nu=0}^{n} f\left(\frac{\nu}{n}b_n\right)\binom{n}{\nu}\left(\frac{x}{b_n}\right)^\nu\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-\nu}, 0\le x\le b_n$$

Chlodowsky (1937) tarafından tanımlanan Bernstein-Chlodowsky polinomları elde edilir.

$K_n(x,t,u)=e^{-n(t+ux)}$ için $\alpha_n=n$, $\psi_n(0)=\frac{1}{n}$ seçildiğinde

$$S_n(f;x)=e^{-nx}\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{(nx)^\nu}{\nu!}$$

Szász (1950) tarafından tanımlanan ve Bernstein polinomlarının sınırsız bir aralık üzerinde genelleştirilmesi olan Szász operatörleri elde edilir.

$K_n(z)$ analitik fonksiyon olmak üzere $K_n(x,t,u)=K_n(t+ux)$, $\alpha_n=n$, $\psi_n(0)=\frac{1}{n}$ alınırsa

$$V_n(f;x)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f\left(\frac{\nu}{n}\right)K_n^{(\nu)}(x)\frac{(-x)^\nu}{\nu!}$$

Baskakov (1957) tarafından tanımlanan ve bazı özel durumlarda ise Bernstein polinomları, Szász-Mirakjan operatörleri ve Lupaş operatörlerini içeren genel bir lineer pozitif operatörler elde edilir.

İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin çeşitli özellikleri ve genelleşmeleri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları (Acar 2017), (Aral 2003), (Ghorbanalizadeh 2014) ve (Gönül ve Çoşkun 2013) isimli kaynaklarda bulunabilir. Bu bölümde (3.1) ile tanımlanan $G_n(f;.)$ operatörlerinin q-genelleşmesi tanımlanacak ve $C[0,A]$ uzayında yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1 q-İbrahimov-Gadjiev Operatörleri

Tanım 3.1 $0<q<1$ ve $A>0$ keyfi bir reel sayı olmak üzere $\{Y_n(\tau)\}$, $C[0,A]$ uzayında $\tau\in[0,A]$ için $Y_n(\tau)>0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}=0$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon dizisi ve $\{\theta_n\}$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\theta_n}{[n]}=1$ şartını sağlayan pozitif reel sayılar dizisi olsun. $\left\{K^q_{n,\gamma}(x,\tau,\upsilon)\right\}$ ise $(x,\tau\in[0,A],\ -\infty<\upsilon<\infty\ )$ γ ve q parametrelerine bağlı aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlar dizisi olsun.

1^o) Bu dizinin her elemanı x ve τ'nin $[0,A]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık υ'ya göre her mertebeden q-türevlenebilirdir.

2^o) $x\in[0,A]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D^{\gamma}_{q,\upsilon}K^q_{n,\gamma}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}=1$$

dir.

3^o) $x\in[0,A]$ ve $\gamma,n\in\{1,2,...\}$ için

$$\left\{(-1)^{\gamma}D^{\gamma}_{q,\upsilon}K^q_{n,\gamma}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right\}\geq 0$$

dır (bu notasyon $K^q_{n,\gamma}(x,\tau,\upsilon)$ fonksiyonunun υ'ya göre γ defa q-türevi alındıktan sonra $\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)$, $\tau=0$ yazılacağı anlamındadır).

4^o) $x\in[0,A]$ ve $\gamma,n\in\{1,2,...\}$ için $m+n\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ olacak biçimde öyle bir $m\in\mathbb{Z}$ vardır ki;

$$D^{\gamma}_{q,\upsilon}K^q_{n,\gamma}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}=-[n]\,xq^{1-\gamma}\left[D^{\gamma-1}_{q,\upsilon}K^q_{n+m,\gamma-1}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\quad(3.3)$$

eşitliği sağlanır.

Bu koşullara göre q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\mathcal{G}_n^q(f;x)=\sum_{\gamma=0}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2Y_n(0)}\right)\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\mid_{\substack{\upsilon=\theta_nY_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_nY_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \tag{3.4}$$

$\mathcal{G}_n^q(f;.)$ operatörünün çekirdeğinde bulunan $K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)$ fonksiyonuna (4^o) özelliği γ defa uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
&D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\mid_{\substack{\upsilon=\theta_nY_n(\tau)\\ \tau=0}}\\
=\;&-[n]\,xq^{1-\gamma}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q(x,\tau,\upsilon)\mid_{\substack{\upsilon=\theta_nY_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\\
=\;&(-1)^2x^2[n][n+m]q^{1-\gamma}q^{2-\gamma}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q(x,\tau,\upsilon)\mid_{\substack{\upsilon=\theta_nY_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\\
=\;&(-1)^3x^3[n][n+m][n+2m]q^{1-\gamma}q^{2-\gamma}q^{3-\gamma}\\
&\times\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-3}K_{n+3m,\gamma-3}^q(x,\tau,\upsilon)\mid_{\substack{\upsilon=\theta_nY_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\\
&...\\
=\;&(-1)^{\gamma}x^{\gamma}[n][n+m][n+2m]...[n+(\gamma-1)m]\,q^{1-\gamma}q^{2-\gamma}...q^{\gamma-\gamma}\\
&\times K_{n+\gamma m,0}^q(x,0,\theta_nY_n(0))
\end{aligned}$$

olup (3.4) operatörü $\forall n$ için

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n^q(f;x)\;=\;&\sum_{\gamma=0}^{\infty}f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2Y_n(0)}\right)\frac{[n][n+m]...[n+(\gamma-1)m]}{[\gamma]!}\\
&\times(xq\theta_nY_n(0))^{\gamma}K_{n+\gamma m,0}^q(x,0,\theta_nY_n(0))
\end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde elde edilir. (3^o) özelliğinden $\mathcal{G}_n^q(f;.)$ pozitiftir ve ayrıca lineer olduğu açıktır. Her iki şekilde de tanımlı bu operatörlerde $q=1$ alındığında (3.1) ile verilen klasik İbrahimov-Gadjiev operatörleri elde edilir.

3.2 q-İbrahimov-Gadjiev Operatörlerinin Düzgün Yakınsaklığı

Lemma 3.1 q-İbrahimov-Gadjiev operatörleri için aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

$$\mathcal{G}_n^q(1;x)=1, \tag{3.6}$$

$$\mathcal{G}_n^q(t;x) = \frac{q\theta_n}{[n]}x, \tag{3.7}$$

$$\mathcal{G}_n^q\left(t^2;x\right) = \frac{q^3\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^3} + \frac{q\theta_n x}{[n]^3 Y_n(0)}, \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n^q\left(t^3;x\right) &= \frac{q^6\theta_n^3[n+m][n+2m]x^3}{[n]^5} + \frac{\left(q^4+2q^3\right)\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} \\ &\quad + \frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)},\end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n^q\left(t^4;x\right) &= \frac{q^{10}\theta_n^4[n+m][n+2m][n+3m]x^4}{[n]^7} \\ &\quad + \frac{\left(q^8+2q^7+3q^6\right)\theta_n^3[n+m][n+2m]x^3}{[n]^7 Y_n(0)} \\ &\quad + \frac{\left(q^5+3q^4+3q^3\right)\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n^2(0)} + \frac{q\theta_n x}{[n]^7 Y_n^3(0)}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

İspat. Operatörün (3.4) ile verilen tanımından

$$\mathcal{G}_n^q(1;x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}$$

olup (2^o) özelliğinden;

$$\mathcal{G}_n^q(1;x) = 1$$

elde edilir. Şimdi $f(t) = t$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n^q(t;x) &= \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \\ &= -\frac{q\theta_n}{[n]^2} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}} q^{\gamma-1} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}\end{aligned}$$

olup (2^o) ve (4^o) özelliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n^q(t;x) &= -\frac{q\theta_n}{[n]^2} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}} q^{\gamma-1} \left[-[n]\,x q^{1-\gamma} D_{q,\upsilon}^{\gamma-1} K_{n+m,\gamma-1}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \\ &\quad \times \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!} \\ &= \frac{q\theta_n x}{[n]} \sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n+m,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \\ &= \frac{q\theta_n x}{[n]}\end{aligned}$$

elde edilir. $f(t)=t^2$ olsun;

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_n^q\left(t^2;x\right)\\
&= \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \frac{[\gamma]^2}{[n]^4 Y_n^2(0)} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}\\
&= -\frac{q\theta_n}{[n]^4} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \frac{[\gamma]}{Y_n(0)} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}\\
&= -\frac{q\theta_n}{[n]^4} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \frac{[\gamma]-1}{Y_n(0)} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}\\
&\quad -\frac{q\theta_n}{[n]^4} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \frac{1}{Y_n(0)} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}
\end{aligned}$$

olup yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplamda

$$[\gamma]-1=\frac{1-q^{\gamma}}{1-q}-1=\frac{q\left(1-q^{\gamma-1}\right)}{1-q}=q\left[\gamma-1\right] \tag{3.11}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_n^q\left(t^2;x\right)\\
&= -\frac{q\theta_n}{[n]^4} \sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \frac{q[\gamma-1]}{Y_n(0)} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}\\
&\quad -\frac{q\theta_n}{[n]^4 Y_n(0)} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}} q^{\gamma-1} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}\\
&= \frac{q^2\theta_n^2}{[n]^4} \sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}} q^{2\nu-3} q \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}\\
&\quad -\frac{q\theta_n}{[n]^4 Y_n(0)} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}} q^{\gamma-1} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}
\end{aligned}$$

olup yukarıdaki ifadede (2^0) ve (4^o) özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_n^q\left(t^2;x\right)\\
&= -\frac{q^2\theta_n^2 x}{[n]^3} \sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}} q^{\gamma-1} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1} K_{n+m,\gamma-1}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}\\
&\quad +\frac{q\theta_n x}{[n]^3 Y_n(0)} \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1} K_{n+m,\gamma-1}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}\\
&= -\frac{q^2\theta_n^2 x}{[n]^3} \sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}} q^{\gamma-1} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1} K_{n+m,\gamma-1}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}\\
&\quad +\frac{q\theta_n x}{[n]^3 Y_n(0)}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede tekrar (4^o) özelliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_n^q\left(t^2;x\right) &= \frac{q^2\theta_n^2\left[n+m\right]x^2}{\left[n\right]^3}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\\
&\quad\times\frac{\left(-q\theta_n Y_n\left(0\right)\right)^{\gamma-2}}{\left[\gamma-2\right]!}+\frac{q\theta_n x}{\left[n\right]^3 Y_n\left(0\right)}\\
&= \frac{q^3\theta_n^2\left[n+m\right]x^2}{\left[n\right]^3}\sum_{\gamma=0}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n+2m,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\\
&\quad\times\frac{\left(-q\theta_n Y_n\left(0\right)\right)^{\gamma}}{\left[\gamma\right]!}+\frac{q\theta_n x}{\left[n\right]^3 Y_n\left(0\right)}\\
&= \frac{q^3\theta_n^2\left[n+m\right]x^2}{\left[n\right]^3}+\frac{q\theta_n x}{\left[n\right]^3 Y_n\left(0\right)}\\
&= \left(\frac{q\theta_n x}{\left[n\right]}\right)^2\frac{\left[n+m\right]q}{\left[n\right]}+\left(\frac{q\theta_n x}{\left[n\right]}\right)\frac{1}{\left[n\right]^2 Y_n\left(0\right)}\\
&= \left(\frac{q\theta_n x}{\left[n\right]}\right)^2\left(\frac{\left[n+m+1\right]}{\left[n\right]}-\frac{1}{\left[n\right]}\right)+\left(\frac{q\theta_n x}{\left[n\right]}\right)\frac{1}{\left[n\right]^2 Y_n\left(0\right)}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $f\left(t\right)=t^3$ için;

$\mathcal{G}_n^q\left(t^3;x\right)$

$$= \sum_{\gamma=1}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\frac{[\gamma]^3}{[n]^6 Y_n^3(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}$$

$$= -\frac{q\theta_n}{[n]^6}\sum_{\gamma=1}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\frac{[\gamma]^2-1}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$-\frac{q\theta_n}{[n]^6}\sum_{\gamma=1}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\frac{1}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$= -\frac{q\theta_n}{[n]^6}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\frac{([\gamma]-1)([\gamma]+1)}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$-\frac{q\theta_n}{[n]^6 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=1}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ tarafındaki ilk toplamda (3.11) eşitliği kullanılırsa

$$\mathcal{G}_n^q\left(t^3;x\right)$$

$$= -\frac{q\theta_n}{[n]^6}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\frac{q[\gamma-1]([\gamma]+1)}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$-\frac{q\theta_n}{[n]^6 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}q^{\gamma-1}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$= \frac{q^3\theta_n^2}{[n]^6}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{2\gamma-3}\frac{([\gamma]+1)}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q\theta_n}{[n]^6 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}q^{\gamma-1}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

olup (2^o) ve (4^o) özelliklerinden

$$\mathcal{G}_n^q\left(t^3;x\right)$$

$$= -\frac{q^3\theta_n^2 x}{[n]^5}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\frac{([\gamma]-1+1+1)}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$= -\frac{q^3\theta_n^2 x}{[n]^5}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\frac{[\gamma]-1}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q^3\theta_n^2 x}{[n]^5}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\frac{2}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}$$

elde edilir. (3.11) eşitliği dikkate alınıp benzer işlemler tekrarlanırsa

$$\mathcal{G}_n^q\left(t^3;x\right)$$

$$= -\frac{q^3\theta_n^2 x}{[n]^5}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\frac{(q[\gamma-1]-q+q)}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{2q^3\theta_n^2 x}{[n]^5 Y_n(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}$$

$$= -\frac{q^3\theta_n^2 x}{[n]^5}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}} q^{\gamma-2}\frac{q^2[\gamma-2]}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q^3\theta_n^2 x}{[n]^5}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}} q^{\gamma-2}\frac{q}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{2q^3\theta_n^2 x}{[n]^5 Y_n(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}} q^{\gamma-2}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}$$

$$= \frac{q^6\theta_n^3 x}{[n]^5}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}} q^{\gamma-2}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$-\frac{q^4\theta_n^2 x}{[n]^5 Y_n(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}} q^{\gamma-2}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{2q^3\theta_n^2 x}{[n]^5 Y_n(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}} q^{\gamma-2}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}$$

olur. Yukarıdaki ifadede (4^o) özelliği tekrar uygulandığı takdirde

$$\mathcal{G}_n^q(t^3;x)$$

$$= -\frac{q^6\theta_n^3[n+m]x^2}{[n]^5}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}} q^{\gamma-3}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$+\frac{q^4\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} + \frac{2q^3\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} + \frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}$$

elde edilir. (4^o) özelliği son kez uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$\mathcal{G}_n^q\left(t^3;x\right)$

$$= \frac{q^6\theta_n^3[n+m][n+2m]x^3}{[n]^5}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-3}K_{n+3m,\gamma-3}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$+\frac{q^4\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} + \frac{2q^3\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} + \frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}$$

$$= \frac{q^6\theta_n^3[n+m][n+2m]x^3}{[n]^5}\sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n+3m,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}$$

$$+\frac{q^4\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} + \frac{2q^3\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} + \frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}$$

$$= \frac{q^6\theta_n^3[n+m][n+2m]x^3}{[n]^5} + \frac{q^4\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} + \frac{2q^3\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} + \frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}$$

$$= \frac{q^6\theta_n^3[n+m][n+2m]x^3}{[n]^5} + \frac{\left(q^4+2q^3\right)\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^5 Y_n(0)} + \frac{q\theta_n x}{[n]^5 Y_n^2(0)}$$

bulunur. Son olarak $f\left(t\right)=t^4$ için;

$\mathcal{G}_n^q\left(t^4;x\right)$

$$= \sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\frac{[\gamma]^4}{[n]^8 Y_n^4(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}$$

$$= -\frac{q\theta_n}{[n]^8}\sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\frac{[\gamma]^3-1}{Y_n^3(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$-\frac{q\theta_n}{[n]^8}\sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\frac{1}{Y_n^3(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$= -\frac{q\theta_n}{[n]^8}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\frac{([\gamma]-1)\left([\gamma]^2+[\gamma]+1\right)}{Y_n^3(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$-\frac{q\theta_n}{[n]^8 Y_n^3(0)}\sum_{\gamma=1}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

olup yukarıdaki ifadede (3.11) eşitliği ve (4^o) özelliği kullanılırsa

$$\mathcal{G}_n^q\left(t^4;x\right)$$

$$=\frac{q^3\theta_n^2}{[n]^8}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}q^{\gamma-1}\frac{\left([\gamma]^2+[\gamma]+1\right)}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q\theta_n}{[n]^8Y_n^3(0)}\sum_{\gamma=1}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}q^{\gamma-1}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

$$=-\frac{q^3\theta_n^2x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\frac{\left([\gamma]^2+[\gamma]+1\right)}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^7Y_n^3(0)}\sum_{\gamma=1}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-1}}{[\gamma-1]!}$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$\mathcal{G}_n^q\left(t^4;x\right)$$

$$=-\frac{q^3\theta_n^2x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\frac{\left([\gamma]^2+1-1\right)}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q^3\theta_n^2x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\frac{[\gamma]+1-1}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q^3\theta_n^2x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\frac{1}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^7Y_n^3(0)}$$

$$=-\frac{q^3\theta_n^2x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\frac{(q[\gamma-1]-q+q)([\gamma]+1)}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q^3\theta_n^2x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\frac{q[\gamma-1]-q+q}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q^3\theta_n^2x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty}q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\frac{3}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^7Y_n^3(0)}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin ilk iki toplamında

$$\begin{aligned} q\left[\gamma-1\right]-q+q &= q\left(\left[\gamma-1\right]-1\right)+q \\ &= q\left(\frac{1-q^{\gamma-1}}{1-q}-1\right)+q \\ &= q\left(\frac{1-q^{\gamma-1}-1+q}{1-q}\right)+q \\ &= q^2\left[\gamma-2\right]+q \end{aligned}$$

eşitliği kullanılırsa,

$\mathcal{G}_n^q\left(t^4;x\right)$

$$= -\frac{q^3\theta_n^2 x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\frac{\left(q^2[\gamma-2]+q\right)([\gamma]+1)}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q^3\theta_n^2 x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}}\frac{q^2[\gamma-2]+q}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{3q^3\theta_n^2 x}{[n]^7 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^7 Y_n^3(0)}$$

$$= -\frac{q^5\theta_n^2 x}{[n]^7}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\frac{[\gamma-2][\gamma]}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{2q^5\theta_n^2 x}{[n]^7}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\frac{[\gamma-2]}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{q^4\theta_n^2 x}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\frac{[\gamma]}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{2q^4\theta_n^2 x}{[n]^7 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$-\frac{3q^3\theta_n^2 x}{[n]^7 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}q^{\gamma-2}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1}K_{n+m,\gamma-1}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^7 Y_n^3(0)}$$

operatörün (4^o) özelliğinden

$$\mathcal{G}_n^q\left(t^4;x\right)$$

$$= -\frac{q^6\theta_n^3[n+m]x^2}{[n]^7}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}\frac{[\gamma]}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$-\frac{2q^6\theta_n^3[n+m]x^2}{[n]^7}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}\frac{1}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$+\frac{q^4\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}\frac{[\gamma]}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{2q^4\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{3q^3\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^7Y_n^3(0)}$$

olup yukarıdaki ifadenin birinci ve üçüncü toplamında

$$\begin{aligned}
[\gamma] &= [\gamma]-1+1\\
&= q\left[\gamma-1\right]+1\\
&= q\left[\gamma-1\right]-q+q+1\\
&= q\left(\left[\gamma-1\right]-1\right)+q+1\\
&= q\left(q\left[\gamma-2\right]\right)+q+1\\
&= q^2\left[\gamma-2\right]+q+1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[\gamma] &= q^2\left[\gamma-2\right]-q^2+q^2+q+1\\
&= q^2(\left[\gamma-2\right]-1)+q^2+q+1\\
&= q^3\left[\gamma-3\right]+q^2+q+1
\end{aligned}$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\mathcal{G}_n^q\left(t^4;x\right)$$

$$= -\frac{q^6\theta_n^3[n+m]x^2}{[n]^7}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}\frac{q^3[\gamma-3]+q^2+q+1}{Y_n(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$-\frac{2q^6\theta_n^3[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n(0)}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$+\frac{q^4\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}\frac{q^2[\gamma-2]+q+1}{Y_n^2(0)}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{(2q^4+3q^3)\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,u}^{\gamma}K_{n+2m,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^7 Y_n^3(0)}$$

$$= \frac{q^{10}\theta_n^4[n+m]x^2}{[n]^7}\sum_{\gamma=4}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}}q^{\gamma-3}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-4}}{[\gamma-4]!}$$

$$-\frac{q^6\left(q^2+q+1\right)\theta_n^3[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n(0)}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}}q^{\gamma-3}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$-\frac{2q^6\theta_n^3[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n(0)}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}}q^{\gamma-3}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$-\frac{q^7\theta_n^3[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n(0)}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}}q^{\gamma-3}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$+\frac{q^4(q+1)\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=2}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-2)(\gamma-3)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-2}K_{n+2m,\gamma-2}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-2}}{[\gamma-2]!}$$

$$+\frac{(2q^4+3q^3)\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,u}^{\gamma}K_{n+2m,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^7 Y_n^3(0)}$$

elde edilir. Burada (4^o) özelliği tekrar kullanılırsa

$\mathcal{G}_n^q\left(t^4;x\right)$

$$= -\frac{q^{10}\theta_n^4[n+m][n+2m]x^3}{[n]^7}\sum_{\gamma=4}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-3}K_{n+3m,\gamma-3}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-4}}{[\gamma-4]!}$$

$$+\frac{q^6\left(q^2+q+1\right)\theta_n^3[n+m][n+2m]x^3}{[n]^7 Y_n(0)}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-3}K_{n+3m,\gamma-3}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$+\frac{2q^6\theta_n^3[n+m][n+2m]x^3}{[n]^7 Y_n(0)}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-3}K_{n+3m,\gamma-3}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$+\frac{q^7\theta_n^3[n+m][n+2m]x^3}{[n]^7 Y_n(0)}\sum_{\gamma=3}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-3)(\gamma-4)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-3}K_{n+3m,\gamma-3}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma-3}}{[\gamma-3]!}$$

$$+\frac{q^4(q+1)\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n+2m,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}$$

$$+\frac{(2q^4+3q^3)\theta_n^2[n+m]x^2}{[n]^7 Y_n^2(0)}\sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n+2m,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}$$

$$+\frac{q\theta_n x}{[n]^7 Y_n^3(0)}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte son kez (4^o) özelliği kullanılıp gerekli düzenlemeler yapıldığı takdirde

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n^q\left(t^4;x\right) &= \frac{q^{10}\theta_n^4\left[n+m\right]\left[n+2m\right]\left[n+3m\right]x^4}{[n]^7}\\ &+\frac{q^6\left(q^2+2q+3\right)\theta_n^3\left[n+m\right]\left[n+2m\right]x^3}{[n]^7 Y_n\left(0\right)}\\ &+\frac{q^3\left(q^2+3q+3\right)\theta_n^2\left[n+m\right]x^2}{[n]^7 Y_n^2\left(0\right)}+\frac{q\theta_n x}{[n]^7 Y_n^3\left(0\right)}\end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Lemma 3.2 $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere q-İbrahimov-Gadjiev operatörünün merkezi momentleri

$$\eta_{n,1}\left(x\right)=\left(\frac{q\theta_n}{[n]}-1\right)x, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned}\eta_{n,2}\left(x\right) &= \left[\left(\frac{q\theta_n}{[n]}\right)^2\left(\frac{[n+m+1]}{[n]}-\frac{1}{[n]}\right)-\frac{2q\theta_n}{[n]}+1\right]x^2\\ &+\frac{q\theta_n}{[n]}\frac{1}{[n]^2 Y_n\left(0\right)}x\end{aligned} \tag{3.13}$$

dir.

İspat.

$$\begin{aligned}\eta_{n,1}(x) &= \mathcal{G}_n^q((t-x)^1;x)\\ &= \mathcal{G}_n^q(t;x)-x\mathcal{G}_n^q(1;x)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadede (3.6) ve (3.7) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\eta_{n,1}(x) &= \frac{q\theta_n x}{[n]}-x\\ &= \left(\frac{q\theta_n}{[n]}-1\right)x\end{aligned}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\eta_{n,2}(x) &= \mathcal{G}_n^q((t-x)^2;x)\\ &= \mathcal{G}_n^q\left(t^2;x\right)-2x\mathcal{G}_n^q(t;x)+x^2\mathcal{G}_n^q(1;x)\end{aligned}$$

olup, (3.6)-(3.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\eta_{n,2}(x) &= \left(\frac{q\theta_n x}{[n]}\right)^2\left(\frac{[n+m+1]}{[n]}-\frac{1}{[n]}\right)+\left(\frac{q\theta_n x}{[n]}\right)\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}-\frac{2q\theta_n x^2}{[n]}+x^2\\ &= \left[\left(\frac{q\theta_n}{[n]}\right)^2\left(\frac{[n+m+1]}{[n]}-\frac{1}{[n]}\right)-\frac{2q\theta_n}{[n]}+1\right]x^2\\ &\quad+\frac{q\theta_n}{[n]}\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}x.\end{aligned}$$

elde edilir. ■

(3.7) ve (3.8) eşitliklerinden açıkça görüldüğü gibi $0<q<1$ için $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[n]}=1-q$ olduğundan Korovkin teoreminin koşuları sağlanmaz. Bu nedenle aşağıdaki teoremi ispatlamak için $0<q_n<1$, $\lim_{n\to\infty}q_n=1$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[n]_{q_n}}=0$ olacak şekilde bir $\{q_n\}$ dizisi göz önüne alınacaktır.

Teorem 3.1 : Eğer $0<q_n<1$ için $\lim_{n\to\infty}q_n=1$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{[n]_{q_n}}=0$ limitleri sağlanıyorsa (3.4) ile tanımlanan $\mathcal{G}_n^{q_n}(f;.)$ operatörü $[0,A]$ aralığında sürekli ve tüm $\mathbb{R}$'de sınırlı olan f fonksiyonuna $[0,A]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsar.

İspat. Verilen koşullarda q yerine $\{q_n\}$ dizisi seçilirse (3.6)-(3.8) eşitliklerinden ve Korovkin teoreminden dolayı ispat tamamlanır. ■

3.3 q-İbrahimov-Gadjiev Operatörlerinin Yaklaşım Hızı

Bu kesimde süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli kullanarak q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin yaklaşım hızı incelenecektir.

Teorem 3.2 $0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ olmak üzere, $f \in C[0, A]$ ise q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin süreklilik modülüyle yaklaşım hızı, $\omega(f; .)$ f fonksiyonunun süreklilik modülü olmak üzere

$$|\mathcal{G}_n^{q_n}(f; x) - f(x)| \leq 2\,\omega\left(f; \sqrt{\eta_{n,2}(x)}\right)$$

dir.

İspat. Teoremin ispatı Popoviciu tekniği ile yapılacaktır [34]. $f \in C[0, A]$ olsun. $\mathcal{G}_n^q(f; .)$ operatörünün lineerliğinden

$$\begin{aligned}
& |\mathcal{G}_n^q(f; x) - f(x)| \\
= & \left| \sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right) \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x, \tau, \upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} \right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \right. \\
& \left. - f(x) \sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x, \tau, \upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} \right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \right| \\
= & \left| \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right) - f(x) \right) q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x, \tau, \upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} \right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \right| \\
\leq & \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right) - f(x) \right| q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x, \tau, \upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} \right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}
\end{aligned}$$

olup süreklilik modülünün (υ) özelliğinde $t = \frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}$ seçimiyle

$$\left| f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right) - f(x) \right| \leq \left(\frac{\left| \frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)} - x \right|}{\delta} + 1 \right) \omega(f; \delta)$$

yazılabilir. Bu sonuç yukarıdaki eşitsizlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{G}_n^q(f;x)-f(x)\right| \\
\leq\ &\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\frac{\left|\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}-x\right|}{\delta}+1\right)\omega(f;\delta)\,q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \\
=\ &\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\left|\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}-x\right|}{\delta}\omega(f;\delta)\,q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \\
&+\sum_{\gamma=0}^{\infty}\omega(f;\delta)\,q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{G}_n^q(f;x)-f(x)\right| \\
\leq\ &\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left|\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}-x\right|q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}\right. \\
&\left.+\sum_{\gamma=0}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}\right\} \\
=\ &\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left|\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}-x\right|q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\right. \\
&\left.\times\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}+1\right\} \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede

$$T=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left|\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}-x\right|q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}$$

denirse

$$\begin{aligned}
T\ =\ &\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left|\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}-x\right|\left(q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left(q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadede Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\begin{aligned}
T\ \leq\ &\left(\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}-x\right)^2 q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\times\left(\sum_{\gamma=0}^{\infty}q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

olup (3.6) eşitliğinden

$$T \leq \left(\sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)} - x \right)^2 q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon) \mid_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} \right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bu sonuç (3.14) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_n^q(f;x) - f(x)| &\leq \omega(f;\delta) \left\{ \frac{1}{\delta} \left(\sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)} - x \right)^2 q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon) \mid_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} \right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \right)^{\frac{1}{2}} + 1 \right\} \end{aligned}$$

olur. Lemma 3.2 den

$$|\mathcal{G}_n^q(f;x) - f(x)| \leq \omega(f;\delta) \left\{ \frac{1}{\delta} \sqrt{\eta_{n,2}(x)} + 1 \right\}$$

elde edilir. $q = q_n$ ve $\delta = \sqrt{\eta_{n,2}(x)}$ seçimiyle $n \to \infty$ için $\delta \to 0$ olup ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.3 $0 < q_n < 1$, $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ olmak üzere, eğer $f \in C[0,A]$ ise

$$\|\mathcal{G}_n^{q_n}(f;x) - f(x)\|_{C[0,A]} \leq 2K(f;\delta_n)$$

dir. Burada;

$$\begin{aligned} \delta_n &= \left| \frac{q_n\theta_n}{[n]} - 1 \right| \frac{A}{2} + \left| \left(\frac{q_n\theta_n}{[n]} \right)^2 \left(\frac{[n+m+1]}{[n]} - \frac{1}{[n]} \right) - \frac{2q_n\theta_n}{[n]} + 1 \right| \frac{A^2}{4} \\ &\quad + \frac{q_n\theta_n}{[n]} \frac{1}{[n]^2 Y_n(0)} \frac{A}{4} \end{aligned}$$

dir.

İspat. Lemma 2.3 ile verilen integral bağıntısının kullanılmasıyla;

$$\mathcal{G}_n^{q_n}(g(t) - g(x);x) = \mathcal{G}_n^{q_n}(g'(x)(t-x);x) + \mathcal{G}_n^{q_n}\left(\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds; x \right)$$

olur. Eşitliğin her iki yanının mutlak değeri alınır ve üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |\mathcal{G}_n^{q_n}(g(t) - g(x);x)| &\leq |\mathcal{G}_n^{q_n}(g'(x)(t-x);x)| + \left| \mathcal{G}_n^{q_n}\left(\int_x^t g''(s)(t-s)\,ds; x \right) \right| \\ &\leq \|g'\|_{C[0,A]} |\mathcal{G}_n^{q_n}((t-x);x)| \\ &\quad + \|g''\|_{C[0,A]} \left| \mathcal{G}_n^{q_n}\left(\int_x^t (t-s)\,ds; x \right) \right| \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan

$$\int_x^t (t-s)\,ds = \frac{(t-x)^2}{2}$$

olup bu sonuç yukarıdaki eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\left|\mathcal{G}_n^{q_n}(g;x) - g(x)\right| \leq \left\|g'\right\|_{C[0,A]} \left|\eta_{n,1}(x)\right| + \frac{1}{2}\left\|g''\right\|_{C[0,A]} \left|\eta_{n,2}(x)\right|$$

elde edilir. Lemma 3.2 den

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{G}_n^{q_n}(g;x) - g(x)\right| &\leq \left\|g'\right\|_{C[0,A]} \left|\frac{q_n\theta_n}{[n]} - 1\right| x + \frac{1}{2}\left\|g''\right\|_{C[0,A]} \left\{\left|\left(\frac{q_n\theta_n}{[n]}\right)^2\right.\right. \\ &\quad \left.\left. \times \left(\frac{[n+m+1]}{[n]} - \frac{1}{[n]}\right) - \frac{2q_n\theta_n}{[n]} + 1\right| \frac{x^2}{2} + \frac{q_n\theta_n}{2\,[n]} \frac{1}{[n]^2\, Y_n(0)} x \right\}\end{aligned}$$

bulunur.

$$\left\|g\right\|_{C^2[0,A]} = \left\|g\right\|_{C[0,A]} + \left\|g'\right\|_{C[0,A]} + \left\|g''\right\|_{C[0,A]}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{G}_n^{q_n}(g;x) - g(x)\right| &\leq \left\|g\right\|_{C^2[0,A]} \left\{\left|\frac{q_n\theta_n}{[n]} - 1\right| x + \left|\left(\frac{q_n\theta_n}{[n]}\right)^2 \left(\frac{[n+m+1]}{[n]} - \frac{1}{[n]}\right)\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{2q_n\theta_n}{[n]} + 1\right| \frac{x^2}{2} + \frac{q_n\theta_n}{2\,[n]} \frac{1}{[n]^2\, Y_n(0)} x \right\} \qquad (3.15)\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\left|\mathcal{G}_n^{q_n}(f;x) - f(x)\right| = \left|\mathcal{G}_n^{q_n}(f;x) - f(x) + \mathcal{G}_n^{q_n}(g;x) - \mathcal{G}_n^{q_n}(g;x) + g(x) - g(x)\right|$$

şeklinde yazılabilir. Üçgen eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\left|\mathcal{G}_n^{q_n}(f;x) - f(x)\right| \leq \left|\mathcal{G}_n^{q_n}(f-g;x)\right| + \left|f(x) - g(x)\right| + \left|\mathcal{G}_n^{q_n}(g;x) - g(x)\right|$$

bulunur. $\mathcal{G}_n^{q_n}(f;.)$ lineer operatör olduğundan

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{G}_n^{q_n}(f;x) - f(x)\right| &\leq \left\|f-g\right\|_{C[0,A]} \left|\mathcal{G}_n^{q_n}(1;x)\right| + \left\|f-g\right\|_{C[0,A]} \\ &\quad + \left|\mathcal{G}_n^{q_n}(g;x) - g(x)\right|\end{aligned}$$

dir. Bu ifadede (3.15) eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{G}_n^{q_n}(f;x) - f(x)\right| &\leq 2\left\|f-g\right\|_{C[0,A]} + \left\|g\right\|_{C^2[0,A]} \left\{\left|\frac{q_n\theta_n}{[n]} - 1\right| x \right. \\ &\quad + \left|\left(\frac{q_n\theta_n}{[n]}\right)^2 \left(\frac{[n+m+1]}{[n]} - \frac{1}{[n]}\right) - \frac{2q_n\theta_n}{[n]} + 1\right| \frac{x^2}{2} \\ &\quad \left. + \frac{q_n\theta_n}{2\,[n]} \frac{1}{[n]^2\, Y_n(0)} x \right\}\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitsizlikte $g \in C^2[0,A]$ üzerinden infimum alınırsa sol taraf g'den bağımsız olduğundan

$$\left\| \mathcal{G}_n^{q_n}(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,A]} \leq 2K(f;\delta_n)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \delta_n &= \left| \frac{q_n\theta_n}{[n]} - 1 \right| \frac{A}{2} + \left| \left(\frac{q_n\theta_n}{[n]} \right)^2 \left(\frac{[n+m+1]}{[n]} - \frac{1}{[n]} \right) - \frac{2q_n\theta_n}{[n]} + 1 \right| \frac{A^2}{4} \\ &\quad + \frac{q_n\theta_n}{[n]} \frac{1}{[n]^2 Y_n(0)} \frac{A}{4} \end{aligned}$$

dir. ■

3.4 q-İbrahimov-Gadjiev Operatörlerinin q-Türev Özellikleri

Bu kısımda q-türevleri kullanarak q-İbrahimov-Gadjiev operatörü bölünmüş farklar ve q-farklar cinsinden ifade edilecektir. Bunun için $K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)$ fonksiyonları (1^o)-(4^o) koşullarının yanında aşağıdaki koşulları da sağlasınlar.

(5^o) Bu dizinin her elemanı $\upsilon \in \mathbb{R}$ ve $[0,A]$ aralığındaki her belirli τ değerine karşılık x'e göre her mertebeden q-türevlenebilirdir ve

$$D_{q,x} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} = -[n]\,\theta_n Y_n(0)\, q^{1-\gamma} K_{n+m,\gamma-1}^q(x,0,\theta_n Y_n(0)) \quad (3.16)$$

sağlanır. Burada m sayısı (4^o) şartındaki sabit sayıdır.
(6^o) Her n, γ ve $\upsilon \in \mathbb{R}$ için

$$K_{n,\gamma}^q(0,0,\upsilon) = 1 \quad (3.17)$$

dir.

Lemma 3.3 (3.4) ile tanımlanan $\mathcal{G}_n^q(f;.)$ operatörlerinin p-inci mertebeden x'e göre q-türevi

$$D_{q,x}^{p}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\frac{q^{p}\theta_{n}^{p}}{[n]^{2p}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left[\frac{[\gamma]}{[n]^{2}Y_{n}(0)},\frac{[\gamma+1]}{[n]^{2}Y_{n}(0)},\frac{[\gamma+2]}{[n]^{2}Y_{n}(0)},...,\frac{[\gamma+p]}{[n]^{2}Y_{n}(0)};f\right]q^{\frac{p(2\gamma+p-1)}{2}}\left[p\right]!\frac{[n][n+m]...[n+(\gamma+p-1)m]}{[\gamma]!}$$

$$\times(q\theta_{n}Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}K_{n+(\gamma+p)m,-p}^{q}\left(x,0,\theta_{n}Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma} \tag{3.18}$$

dir. Burada $[x_0,x_1,...,x_p;f]$, f fonksiyonunun $\frac{[\gamma]}{[n]^2Y_n(0)},\frac{[\gamma+1]}{[n]^2Y_n(0)},...,\frac{[\gamma+p]}{[n]^2Y_n(0)}$ noktalarındaki bölünmüş farklarıdır.

İspat. Operatörün (3.5) ile verilen ifadesinin x'e göre q-türevini alarak ve (3.16) ile verilen (5^o) özelliğini kullanarak

$$D_{q,x}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\sum_{\gamma=0}^{\infty}f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}Y_{n}(0)}\right)\frac{[n][n+m]...[n+(\gamma-1)m]}{[\gamma]!}(q\theta_{n}Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}D_{q,x}\left\{x^{\gamma}K_{n+\gamma m,0}^{q}\left(x,0,\theta_{n}Y_{n}\left(0\right)\right)\right\}$$

$$=\sum_{\gamma=0}^{\infty}f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}Y_{n}(0)}\right)\frac{[n][n+m]...[n+(\gamma-1)m]}{[\gamma]!}(q\theta_{n}Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}$$

$$\times\left\{\left[\gamma\right]x^{\gamma-1}K_{n+\gamma m,0}^{q}\left(qx,0,\theta_{n}Y_{n}\left(0\right)\right)-\left[n+\gamma m\right]q\theta_{n}Y_{n}\left(0\right)K_{n+(\gamma+1)m,-1}^{q}\left(x,0,\theta_{n}Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}\right\}$$

$$=\sum_{\gamma=1}^{\infty}f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}Y_{n}(0)}\right)\frac{[n][n+m]...[n+(\gamma-1)m]}{[\gamma-1]!}(q\theta_{n}Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}K_{n+\gamma m,-1}^{q}\left(x,0,\theta_{n}Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma-1}$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{\infty}f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}Y_{n}(0)}\right)\frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma]!}(q\theta_{n}Y_{n}\left(0\right))^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+1)m,-1}^{q}\left(x,0,\theta_{n}Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin birinci toplamında γ yerine $\gamma+1$ yazılırsa

$$D_{q,x}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\sum_{\gamma=0}^{\infty}f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^{2}Y_{n}(0)}\right)\frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma]!}(q\theta_{n}Y_{n}\left(0\right))^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+1)m,-1}^{q}\left(x,0,\theta_{n}Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{\infty}f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}Y_{n}(0)}\right)\frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma]!}(q\theta_{n}Y_{n}\left(0\right))^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+1)m,-1}^{q}\left(x,0,\theta_{n}Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^2 Y_n(0)}\right) - f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right)\right) \frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma]!} (q\theta_n Y_n(0))^{\gamma+1}$$

$$\times K^q_{n+(\gamma+1)m,-1}(x, 0, \theta_n Y_n(0))\, x^{\gamma}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı $\frac{q^{\gamma}}{[n]^2 Y_n(0)}$ ile çarpılıp bölünürse bu durumda

$$= \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{\left(f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^2 Y_n(0)}\right) - f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right)\right)}{\frac{q^{\gamma}}{[n]^2 Y_n(0)}} \frac{q^{\gamma}}{[n]^2 Y_n(0)} q\theta_n Y_n(0) \frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma]!} (q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}$$

$$\times K^q_{n+(\gamma+1)m,-1}(x, 0, \theta_n Y_n(0))\, x^{\gamma}$$

$$= \frac{q\theta_n}{[n]^2} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left[\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}, \frac{[\gamma+1]}{[n]^2 Y_n(0)}; f\right] q^{\gamma} \frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma]!} (q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}$$

$$\times K^q_{n+(\gamma+1)m,-1}(x, 0, \theta_n Y_n(0))\, x^{\gamma}$$

bulunur. İkinci türevi almak için

$$D_{q,x}\mathcal{G}^q_n(f; x)$$

$$= \frac{q\theta_n}{[n]^2} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^2 Y_n(0)}\right) - f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right)\right) [n]^2\, Y_n(0) \frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma]!} (q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}$$

$$\times K^q_{n+(\gamma+1)m,-1}(x, 0, \theta_n Y_n(0))\, x^{\gamma}$$

olarak düzenlenirse böylece

$$D^2_{q,x}\mathcal{G}^q_n(f; x)$$

$$= \frac{q\theta_n}{[n]^2} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^2 Y_n(0)}\right) - f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right)\right) [n]^2\, Y_n(0) \frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma]!} (q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}$$

$$\times D_{q,x}\left\{ x^{\gamma} K^q_{n+(\gamma+1)m,-1}(x, 0, \theta_n Y_n(0))\right\}$$

$$D_{q,x}^{2}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\frac{q\theta_{n}}{[n]^{2}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)-f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)\right)[n]^{2}\;Y_{n}\left(0\right)\frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}$$

$$\times\left\{[\gamma]\,x^{\gamma-1}K_{n+(\gamma+1)m,-1}^{q}\left(qx,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)\right.$$

$$\left.-\left[n+(\gamma+1)m\right]q^{2}\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}\right\}$$

$$=\frac{q\theta_{n}}{[n]^{2}}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\left(f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)-f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)\right)[n]^{2}\;Y_{n}\left(0\right)\frac{[n][n+m]...[n+\gamma m]}{[\gamma-1]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}$$

$$\times K_{n+(\gamma+1)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma-1}$$

$$-\frac{q\theta_{n}}{[n]^{2}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)-f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)\right)[n]^{2}\;Y_{n}\left(0\right)\frac{[n][n+m]...[n+(\gamma+1)m]}{[\gamma]!}$$

$$\times(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma+1}qK_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

bulunur. Yukarıdaki eşitliğin birinci toplamında γ yerine $\gamma+1$ yazılırsa

$$D_{q,x}^{2}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\frac{q\theta_{n}}{[n]^{2}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{[\gamma+2]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)-f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)\right)[n]^{2}\;Y_{n}\left(0\right)\frac{[n][n+m]...[n+(\gamma+1)m]}{[\gamma]!}$$

$$\times(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$-\frac{q\theta_{n}}{[n]^{2}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)q-f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)q\right)[n]^{2}\;Y_{n}\left(0\right)\frac{[n][n+m]...[n+(\gamma+1)m]}{[\gamma]!}$$

$$\times(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$=\frac{q\theta_{n}}{[n]^{2}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{[\gamma+2]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)-f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)-f\left(\frac{[\gamma+1]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)q+f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^{2}\,Y_{n}(0)}\right)q\right)$$

$$\times\,[n]^{2}\;Y_{n}\left(0\right)\frac{[n][n+m]...[n+(\gamma+1)m]}{[\gamma]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$D_{q,x}^{2}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\frac{q\theta_{n}}{\left[n\right]^{2}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)}\right)(1+q)+f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)}\right)q\right)q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\left[n\right]^{2}\,Y_{n}\left(0\right)$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+1)m\right]}{\left[\gamma\right]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafı $\frac{q^{2\gamma}q(1+q)}{\left[n\right]^{4}Y_{n}^{2}(0)}$ ile çarpılıp bölünürse

$$D_{q,x}^{2}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\frac{q\theta_{n}}{\left[n\right]^{2}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\left(f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)}\right)(1+q)+f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)}\right)q\right)}{\frac{q^{2\gamma}q(1+q)}{\left[n\right]^{4}Y_{n}^{2}(0)}}\frac{q^{2\gamma}q(1+q)}{\left[n\right]^{4}Y_{n}^{2}(0)}q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\left[n\right]^{2}\,Y_{n}\left(0\right)$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+1)m\right]}{\left[\gamma\right]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$=\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left[\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)},\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)},\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)};f\right]q^{2\gamma}q\left(1+q\right)\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+1)m\right]}{\left[\gamma\right]!}$$

$$\times(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

elde edilir. Üçüncü türevi almak için

$$D_{q,x}^{2}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)}\right)(1+q)+f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}(0)}\right)q\right)\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+1)m\right]}{\left[\gamma\right]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

olarak düzenlenip benzer işlemler yapıldığında

$$D_{q,x}^{3}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q\right)+f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q\right)\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+1)m\right]}{\left[\gamma\right]!}\left(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)^{\gamma}D_{q,x}\left\{x^{\gamma}K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)\right\}$$

$$=\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q\right)+f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q\right)\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+1)m\right]}{\left[\gamma\right]!}\left(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)^{\gamma}\left\{\left[\gamma\right]x^{\gamma-1}K_{n+(\gamma+2)m,-2}^{q}\left(qx,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)\right.$$

$$\left.-\left[n+(\gamma+2)m\right]q^{3}\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)K_{n+(\gamma+3)m,-3}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}\right\}$$

$$=\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q\right)+f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q\right)\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+1)m\right]}{\left[\gamma-1\right]!}\left(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)^{\gamma}K_{n+(\gamma+2)m,-3}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma-1}$$

$$-\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q\right)+f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q\right)\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)q^{2}$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+2)m\right]}{\left[\gamma\right]!}\left(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+3)m,-3}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$=\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+3\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q\right)+f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q\right)\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+2)m\right]}{\left[\gamma\right]!}\left(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+3)m,-3}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$-\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q^{2}-f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q\right)q^{2}+f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q^{3}\right)\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+2)m\right]}{\left[\gamma\right]!}\left(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+3)m,-3}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$D_{q,x}^{3}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)$$

$$=\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+3\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q\right)+f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q^{2}+f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q\right)q^{2}-f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q^{3}\right)$$

$$\times\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+2)m\right]}{\left[\gamma\right]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+3)m,-3}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$=\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(f\left(\frac{\left[\gamma+3\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q+q^{2}\right)\right.$$

$$\left.+f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(q+q^{2}+q^{3}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q^{3}\right)$$

$$\times\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+2)m\right]}{\left[\gamma\right]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma+1}K_{n+(\gamma+3)m,-3}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$=\frac{q^{2}\theta_{n}^{2}}{\left[n\right]^{4}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\frac{\left(f\left(\frac{\left[\gamma+3\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(1+q+q^{2}\right)+f\left(\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)\left(q+q^{2}+q^{3}\right)-f\left(\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)}\right)q^{3}\right)}{\frac{q^{3\gamma}q^{3}(1+q)\left(1+q+q^{2}\right)}{\left[n\right]^{6}Y_{n}^{3}(0)}}$$

$$\times\frac{q^{3\gamma}q^{3}(1+q)\left(1+q+q^{2}\right)}{\left[n\right]^{6}Y_{n}^{3}(0)}\left[n\right]^{4}\,Y_{n}^{2}\left(0\right)q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+2)m\right]}{\left[\gamma\right]!}$$

$$\times(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}K_{n+(\gamma+3)m,-3}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

$$=\frac{q^{3}\theta_{n}^{3}}{\left[n\right]^{6}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left[\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)},\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)},\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)},\frac{\left[\gamma+3\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)};f\right]q^{3\gamma}q^{3}\left(1+q\right)\left(1+q+q^{2}\right)$$

$$\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+(\gamma+2)m\right]}{\left[\gamma\right]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}K_{n+(\gamma+3)m,-3}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse p-inci mertebeden türev

$$\begin{aligned}&D_{q,x}^{p}\mathcal{G}_{n}^{q}\left(f;x\right)\\&=\frac{q^{p}\theta_{n}^{p}}{\left[n\right]^{2p}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left[\frac{\left[\gamma\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)},\frac{\left[\gamma+1\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)},\frac{\left[\gamma+2\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)},...,\frac{\left[\gamma+p\right]}{\left[n\right]^{2}Y_{n}\left(0\right)};f\right]q^{\frac{p(2\gamma+p-1)}{2}}\left[p\right]!\\&\quad\times\frac{\left[n\right]\left[n+m\right]...\left[n+\left(\gamma+p-1\right)m\right]}{\left[\gamma\right]!}(q\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right))^{\gamma}K_{n+(\gamma+p)m,-p}^{q}\left(x,0,\theta_{n}\,Y_{n}\left(0\right)\right)x^{\gamma}\end{aligned}$$

olarak bulunur. ■

Teorem 3.4 q-İbrahimov-Gadjiev operatörleri aşağıdaki gösterime sahiptir:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_n^q(f;x)\\
&= \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(q\theta_n x)^\gamma}{[n]^{2\gamma}} \left[0, \frac{[1]}{[n]^2 Y_n(0)}, \frac{[2]}{[n]^2 Y_n(0)}, ..., \frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}; f\right]\\
&\quad \times q^{\frac{(\gamma-1)\gamma}{2}} [n][n+m]...[n+(\gamma-1)m] K_{n+\gamma m,-\gamma}^q(0,0,\theta_n Y_n(0)). \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

İspat. Bu eşitliği yazmak için (3.18) ifadesinden faydalanarak $\mathcal{G}_n^q(f;.)$ operatörünün $x=0$ noktasındaki q-Taylor açılımını kullanmak gerekir. $\mathcal{G}_n^q(f;.)$'in $x=0$ noktasındaki q-Taylor formülü

$$\mathcal{G}_n^q(f;x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} D_{q,x}^\gamma \mathcal{G}_n^q(f;x)\,|_{x=0} \frac{x^\gamma}{[\gamma]!} \qquad (3.20)$$

dir. (3.18) ifadesi açılırsa;

$D_{q,x}^p \mathcal{G}_n^q(f;x)$

$= \frac{q^p \theta_n^p}{[n]^{2p}} \left[\frac{[0]}{[n]^2 Y_n(0)}, \frac{[1]}{[n]^2 Y_n(0)}, \frac{[2]}{[n]^2 Y_n(0)}, ..., \frac{[p]}{[n]^2 Y_n(0)}; f\right] q^{\frac{(p-1)p}{2}} [p]!$

$\times [n][n+m]...[n+(p-1)m] K_{n+pm,-p}^q(x,0,\theta_n Y_n(0))$

$+ \frac{q^p \theta_n^p}{[n]^{2p}} \left[\frac{[1]}{[n]^2 Y_n(0)}, \frac{[2]}{[n]^2 Y_n(0)}, \frac{[3]}{[n]^2 Y_n(0)}, ..., \frac{[p+1]}{[n]^2 Y_n(0)}; f\right] q^p q^{\frac{(p-1)p}{2}} [p]!$

$\times [n][n+m]...[n+pm](q\theta_n Y_n(0))^1 K_{n+(1+p)m,-p}^q(x,0,\theta_n Y_n(0))\, x$

$+...$

olup $x=0$ için ilk terim hariç diğerleri sıfır olur. O halde

$D_{q,x}^\gamma \mathcal{G}_n^q(f;x)\,|_{x=0}$

$= \frac{(q\theta_n)^\gamma}{[n]^{2\gamma}} \left[\frac{[0]}{[n]^2 Y_n(0)}, \frac{[1]}{[n]^2 Y_n(0)}, \frac{[2]}{[n]^2 Y_n(0)}, ..., \frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}; f\right] q^{\frac{(\gamma-1)\gamma}{2}}$

$\times [\gamma]![n][n+m]...[n+(\gamma-1)m]K^{q}_{n+\gamma m,-\gamma}(0,0,\theta_n Y_n(0))$

olup yukarıdaki eşitlik (3.20) eşitliğinde yerine yazılırsa istenilen elde edilir. ■

Uyarı 3.1 (3.19) eşitliğinde $q = 1$ alındığında bu sonuç, İbrahimov ve Gadjiev (1970) tarafından tanımlanan klasik İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin bölünmüş farklar yardımıyla elde edilen ifadesine dönüşür.

Teorem 3.5 $q \in (0,1)$ olsun. q-İbrahimov-Gadjiev operatörleri,

$$\triangle_q^0 f_\gamma = f_\gamma = f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right)$$

ve

$$\Delta_q^r f_\gamma = \Delta_q^{r-1} f_{\gamma+1} - q^{r-1}\Delta_q^{r-1} f_\gamma \ , \ r \geq 1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_n^q(f;x) &= \sum_{\gamma=0}^{\infty} \triangle_q^\gamma f_0 \frac{[n][n+m]...[n+(\gamma-1)m]}{[\gamma]!}(q\theta_n Y_n(0))^\gamma \\ &\quad \times K^{q}_{n+\gamma m,-\gamma}(0,0,\theta_n Y_n(0))\, x^\gamma \end{aligned} \tag{3.21}$$

şeklinde gösterilebilir.

İspat. Teorem 2.3 ve (3.19) eşitliğinden ispat açıktır. ■

4. Q-İBRAHİMOV-GADJİEV OPERATÖRLERİ İLE AĞIRLIKLI YAKLAŞIM

Üçüncü bölümde q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin yaklaşım özellikleri $[0, A]$ kapalı aralığında incelenmiştir. Bu bölümde $[0, \infty)$ aralığında sürekli fonksiyonlara yaklaşım teoremi, Gadjiev tarafından ifade edilen Korovkin tipli teorem yardımıyla elde edilecektir (Gadjiev 1976). O halde q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özelliklerini inceleyebilmek için tanım kümesini sonsuza genişletmek gerekir. Bu nedenle $\{\xi_n\}$ sonlu veya sonsuz limite sahip pozitif sayılar dizisi olmak üzere aşağıdaki koşullar altında tanımlanan (3.4) operatörleri $\widetilde{\mathcal{G}}_n^q(f;.)$ ile gösterilsin.

$\{Y_n(\tau)\}$, $C[0, \xi_n]$ uzayında $\tau \in [0, \xi_n]$ için $Y_n(\tau) > 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{[n]^2 Y_n(0)} = 0 \tag{4.1}$$

şartını sağlayan fonksiyonlar dizisi ve $\{\theta_n\}$ ise

$$\frac{\theta_n}{[n]} = 1 + O\left(\frac{1}{[n]^2 Y_n(0)}\right) \tag{4.2}$$

şartını sağlayan pozitif sayılar dizisi olsun. $\left\{K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\right\}$ dizisi ise $(x, \tau \in [0, \xi_n],$ $-\infty < \upsilon < \infty)$ γ ve q parametrelerine bağlı aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonlar dizisi olsun.

1*) Bu dizinin her elemanı x ve τ'nin $[0, \xi_n]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık υ'ya göre her mertebeden q-türevlenebilirdir.

2*) $x \in [0, \xi_n]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} = 1.$$

3*) $x \in [0, \xi_n]$ ve $\gamma, n \in \{1, 2, ...\}$ için

$$\left\{(-1)^{\gamma} D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right\} \geq 0$$

dır (bu notasyon $K_{n,\gamma}^q(x,\tau,\upsilon)$ fonksiyonunun υ'ya göre γ defa q-türevi alındıktan sonra $\upsilon = \theta_n Y_n(\tau)$, $\tau = 0$ yazılacağı anlamındadır).

$4^{*})$ $x \in [0, \xi_n]$ ve $\gamma, n \in \{1, 2, ...\}$ için $m + n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olacak biçimde öyle bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır ki;

$$D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x, \tau, \upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} = -[n]\, x q^{1-\gamma} \left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1} K_{n+m,\gamma-1}^{q}(x, \tau, \upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} \right] \quad (4.3)$$

eşitliği sağlanır.

Burada $\lim_{n\to\infty} \xi_n = A$ ve $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\theta_n}{[n]} = 1$ olduğunda (3.4) ile tanımlanan q-İbrahimov-Gadjiev operatörleri elde edilir.

Açıkça görülür ki $\widetilde{\mathcal{G}}_n^q(f;.)$ operatörleri için $\mathcal{G}_n^q(t^m;x)$, $m = 0, 1, 2, 3, 4$ eşitlikleri sağlanır.

Teorem 4.1 $\{q_n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n\to\infty} q_n = 1$ koşullarını sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda $f \in C_\rho^0[0, \infty)$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \widetilde{\mathcal{G}}_n^{q_n}(f;x) - f(x) \right\|_{\rho,[0,\xi_n)} = 0$$

gerçeklenir.

İspat. Teorem 2.2. den

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\xi_n)} \frac{\left| \widetilde{\mathcal{G}}_n^q(t^k;x) - x^k \right|}{1+x^2} = 0, \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.4)$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (3.6) eşitliğinden

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\xi_n)} \frac{\left| \widetilde{\mathcal{G}}_n^q(1;x) - 1 \right|}{1+x^2} = 0$$

açıktır. Benzer şekilde (3.7) ve (4.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,\xi_n)} \frac{\left| \widetilde{\mathcal{G}}_n^q(t;x) - x \right|}{1+x^2} &\leq \left| \frac{q\theta_n}{[n]} - 1 \right| \sup_{x\in[0,\xi_n]} \frac{x}{1+x^2} \\ &\leq \left| \frac{q\theta_n}{[n]} - 1 \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $k = 1$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\xi_n)} \frac{\left| \widetilde{\mathcal{G}}_n^q(t;x) - x \right|}{1+x^2} = 0$$

sağlanır. Son olarak (3.8) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\sup_{x\in[0,\xi_n)}\frac{\left|\widetilde{\mathcal{G}}_n^q\left(t^2;x\right)-x^2\right|}{1+x^2} &\leq \left|\left(\frac{q\theta_n}{[n]}\right)^2\frac{q\left[n+m\right]}{[n]}-1\right|\sup_{x\in[0,\xi_n)}\frac{x^2}{1+x^2}\\ &\quad+\frac{q\theta_n}{[n]}\frac{1}{[n]^2\,Y_n\left(0\right)}\sup_{x\in[0,\xi_n)}\frac{x}{1+x^2}\\ &\leq \left|\left(\frac{q\theta_n}{[n]}\right)^2\frac{[n+m]\,q}{[n]}-1\right|+\frac{q\theta_n}{[n]}\frac{1}{[n]^2\,Y_n\left(0\right)}\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (4.4) eşitliği $0<q_n<1$, $\lim_{n\to\infty}q_n=1$ koşullarını sağlayan $\{q_n\}$ dizisi ve (4.1) , (4.2) şartları altında $k=0,1,2$ için sağlanır. Bu da ispatı tamamlar.

■

Şimdi de $f\in C_\rho^0\left[0,\infty\right)$ için f fonksiyonunun düzgün süreklilik koşulu olmaksızın $\widetilde{\mathcal{G}}_n^q\left(f;.\right)$ 'in yaklaşım hızı kesim (2.4) de verilen ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

Teorem 4.2 $\{q_n\}\in(0,1)$, $\lim_{n\to\infty}q_n=1$ olsun. $f\in C_\rho^0\left[0,\infty\right)$ ve yeterince büyük n ler için

$$\sup_{x\geq0}\frac{\left|\widetilde{\mathcal{G}}_n^q\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|}{\left(1+x^2\right)^3}\leq M\Omega\left(f;\left([n]^2\,Y_n\left(0\right)\right)^{-1/2}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada M, θ_n ve $Y_n\left(0\right)$ dan bağımsız pozitif bir sabit sayıdır.

İspat. Ağırlıklı süreklilik modülünün (υ) özelliğinden

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{\mathcal{G}}_n^q\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &\leq 2\left(1+\delta_n^2\right)\Omega\left(f;\delta_n\right)\left(1+x^2\right)\sum_{\gamma=0}^{\infty}P_{\gamma,n}^q\left(x\right)\\ &\quad\times\left(1+\frac{\left|\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n(0)}-x\right|}{\delta_n}\right)\left(1+\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n\left(0\right)}-x\right)^2\right)\\ &\leq 4\left(1+x^2\right)\Omega\left(f;\delta_n\right)\left\{1+\frac{1}{\delta_n}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left|\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n\left(0\right)}-x\right|P_{\gamma,n}^q\left(x\right)\right.\\ &\quad+\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n\left(0\right)}-x\right)^2P_{\gamma,n}^q\left(x\right)\\ &\quad\left.+\frac{1}{\delta_n}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left|\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n\left(0\right)}-x\right|\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n\left(0\right)}-x\right)^2P_{\gamma,n}^q\left(x\right)\right\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $P_{\gamma,n}^q\left(x\right)=q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\left[D_{q,\upsilon}^\gamma K_{n,\gamma}^q\left(x,\tau,\upsilon\right)|_{\upsilon=\theta_n\,Y_n(\tau)}\right]\frac{(-q\theta_n\,Y_n(0))^\gamma}{[\gamma]!}$ ve $\delta_n>0$. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla

$$\left|\widetilde{\mathcal{G}}_n^q(f;x)-f(x)\right| \leq 4\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta_n)\left(1+\frac{2}{\delta_n}\sqrt{M_1}+M_1+\frac{1}{\delta_n}M_2\right) \qquad (4.5)$$

elde edilir. Burada

$$M_1=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n(0)}-x\right)^2 P_{\gamma,n}^q(x)$$

ve

$$M_2=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n(0)}-x\right)^4 P_{\gamma,n}^q(x)$$

dir. Lemma 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} M_1 &= \widetilde{\mathcal{G}}_n^q\left((t-x)^2;x\right) \\ &= \left(1-2q\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)+\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)^2\frac{q^3[n+m]}{[n]}\right)x^2+q\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}x \end{aligned}$$

ve

$$M_2=\widetilde{\mathcal{G}}_n^q\left((t-x)^4;x\right)$$

$$=\left(\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)^4\frac{q^{10}[n+m][n+2m][n+3m]}{[n]^3}-\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)^3\frac{4q^6[n+m][n+2m]}{[n]^2}+\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)^2\frac{6q^3[n+m]}{[n]}-4q\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)+1\right)x^4$$

$$+\left(\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)^3\frac{\left(q^8+2q^7+3q^6\right)[n+m][n+2m]}{[n]^2}\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}-\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)^2\frac{4\left(q^4+2q^3\right)[n+m]}{[n]}\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}+\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)\frac{6q}{[n]^2\,Y_n(0)}\right)x^3$$

$$+\left(\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)^2\frac{\left(q^5+3q^4+3q^3\right)[n+m]}{[n]}\frac{1}{\left([n]^2\,Y_n(0)\right)^2}-\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)\frac{4q}{\left([n]^2\,Y_n(0)\right)^2}\right)x^2+\left(\frac{\theta_n}{[n]}\right)\frac{q}{\left([n]^2\,Y_n(0)\right)^3}x$$

elde edilir. (4.2) şartından

$$M_1=O\left(\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}\right)\left(x^2+x\right)$$

ve

$$M_2=O\left(\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}\right)\left(x^4+x^3+x^2+x\right)$$

olup bu ifadelerin (4.5) eşitliğinde yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} &\left|\widetilde{\mathcal{G}}_n^q(f;x)-f(x)\right| \\ \leq\ & 4\left(1+x^2\right)\Omega(f;\delta_n)\left\{1+\frac{2}{\delta_n}\sqrt{O\left(\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}\right)\left(x^2+x\right)}+\right. \\ & \left.+O\left(\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}\right)\left(x^2+x\right)+\frac{1}{\delta_n}O\left(\frac{1}{[n]^2\,Y_n(0)}\right)\left(x^4+x^3+x^2+x\right)\right\} \end{aligned}$$

olup $q = q_n$ ve $\delta_n = \left([n]^2\ Y_n(0)\right)^{-1/2}$ seçimiyle, yeterince büyük n'ler için, istenilen elde edilir. ■

5. Q-İBRAHİMOV-GADJİEV OPERATÖRÜNÜN ÖZEL DURUMLARI

Bu bölümde q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin de klasik İbrahimov-Gadjiev operatörlerinde olduğu gibi özel durumlarda bazı q-lineer pozitif operatörler dizisi içerdiği gösterilecektir. Şimdi bu operatörleri elde edelim.

1) q-Bernstein Polinomları

$K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)=\left(1-\frac{q^{1-\gamma}\upsilon x}{1+\tau}\right)_{q}^{n}$ olsun. (1^o)-(4^o) koşullarının sağlandığını gösterelim.
1^o) Bu dizinin her elemanı x ve τ'nin $[0,A]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık υ'ya göre her mertebeden q-türevlenebilirdir,
2^o) $x\in[0,A]$ ve $\gamma,n\in\{1,2,...\}$ için $K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)$ fonksiyonunun υ'ya göre yüksek mertebeden q-türevleri alınırsa,

$$D_{q,\upsilon}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)=-[n]\frac{x}{1+\tau}q^{1-\gamma}\left(1-\frac{q^{2-\gamma}\upsilon x}{1+\tau}\right)_{q}^{n-1}$$

$$D_{q,\upsilon}^{2}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)=(-1)^{2}[n][n-1]\frac{x^{2}}{(1+\tau)^{2}}q^{1-\gamma}q^{2-\gamma}\left(1-\frac{q^{3-\gamma}\upsilon x}{1+\tau}\right)_{q}^{n-2}$$

...

$$\begin{aligned}D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon) &= (-1)^{\gamma}[n][n-1][n-2]...[n-(\gamma-1)]\frac{x^{\gamma}}{(1+\tau)^{\gamma}}q^{1-\gamma}q^{2-\gamma}q^{3-\gamma}...q^{\gamma-\gamma}\\ &\quad\times\left(1-\frac{q^{\gamma+1-\gamma}\upsilon x}{1+\tau}\right)_{q}^{n-\gamma}\\ &= (-1)^{\gamma}[n][n-1][n-2]...[n-(\gamma-1)]\frac{x^{\gamma}}{(1+\tau)^{\gamma}}q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\\ &\quad\times\left(1-\frac{q\upsilon x}{1+\tau}\right)_{q}^{n-\gamma}\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}D_{q,\upsilon}^{\gamma}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\mid_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}} &= (-1)^{\gamma}[n][n-1][n-2]...[n-(\gamma-1)]x^{\gamma}q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}}\\ &\quad\times(1-q\theta_n Y_n(0))_{q}^{n-\gamma}\end{aligned}\qquad(5.1)$$

bulunur. Bu sonuç operatörün (2^o) ile verilen koşulunda yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
&\sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} (-1)^{\gamma} [n] [n-1] [n-2] ... [n-(\gamma-1)] x^{\gamma} q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \\
&\times (1-q\theta_n Y_n(0) x)_q^{n-\gamma} \frac{(-q\theta_n Y_n(0))^{\gamma}}{[\gamma]!} \\
= &\sum_{\gamma=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ \gamma \end{bmatrix} (q\theta_n Y_n(0) x)^{\gamma} (1-q\theta_n Y_n(0) x)_q^{n-\gamma}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin 1'e eşit olduğu

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ \gamma \end{bmatrix} x^{\gamma} (1-x)_q^{n-\gamma} = 1$$

eşitliğinde x yerine $q\theta_n Y_n(0) x$ alınarak görülür.

$3^o)$ $x \in [0, A]$ ve $\gamma, n \in \{1, 2, ...\}$ için

$$\begin{aligned}
(-1)^{\gamma} D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x, \tau, \upsilon)\big|_{\substack{u=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} &= (-1)^{2\gamma} [n] [n-1] [n-2] ... [n-(\gamma-1)] x^{\gamma} q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \\
&\quad \times (1-q\theta_n Y_n(0) x)_q^{n-\gamma} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

dır.

$4^o)$ $x \in [0, A]$ ve $\gamma, n \in \{1, 2, ...\}$ için

$$\begin{aligned}
D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x, \tau, \upsilon)\big|_{\substack{u=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} &= (-1)^{\gamma} [n] [n-1] ... [n-(\gamma-1)] x^{\gamma} q^{-\frac{(\gamma-1)\gamma}{2}} \\
&\quad \times (1-q\theta_n Y_n(0) x)_q^{n-\gamma} \\
&= -[n] x q^{1-\gamma} (-1)^{\gamma-1} [n+m] [n+m-1] ... [n+m-(\gamma-2)] \\
&\quad \times x^{\gamma-1} q^{-\frac{(\gamma-2)(\gamma-1)}{2}} (1-q\theta_n Y_n(0) x)_q^{n+m-(\gamma-1)} \\
&= -[n] x q^{1-\gamma} \left[D_{q,u}^{\gamma-1} K_{n+m,\gamma-1}^{q}(x, \tau, \upsilon)\big|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} \right]
\end{aligned}$$

eşitliğinden $m = -1$ bulunur.

Şimdi q-Bernstein polinomlarını elde edelim:

(3.5) eşitliğinde $m=-1$ yazılırsa (3.4) operatörü

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n^{q\,<1>}(f;x) &= \sum_{\gamma=0}^{n} f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n(0)}\right)\frac{[n][n-1]...[n-\gamma+1]}{[\gamma]!}\\ &\quad\times(q\theta_n\,Y_n(0)\,x)^{\gamma}K_{n-\gamma,0}^{q}(x,0,\theta_n\,Y_n(0))\\ &= \sum_{\gamma=0}^{n} f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2\,Y_n(0)}\right)\begin{bmatrix}n\\ \gamma\end{bmatrix}(q\theta_n\,Y_n(0)\,x)^{\gamma}\\ &\quad(1-q\theta_n\,Y_n(0)\,x)_q^{n-\gamma}\end{aligned}\tag{5.2}$$

şeklinde elde edilir. Burada $D_{q,v}^{n+1}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)=0$ dır. $\mathcal{G}_n^{q\,<1>}(f;x)$ ifadesinde

$$\theta_n=\frac{[n]}{q},\;\; Y_n(0)=\frac{1}{[n]}\tag{5.3}$$

seçilirse

$$\mathcal{G}_n^{q\,<1>}(f;x)=\sum_{\gamma=0}^{n} f\left(\frac{[\gamma]}{[n]}\right)\begin{bmatrix}n\\ \gamma\end{bmatrix}x^{\gamma}(1-x)_q^{n-\gamma}$$

Phillips tarafından tanımlanan q-Bernstein polinomlarını elde edilir (Phillips 1997). Diğer taraftan (5.3) özel seçimleri altında (3.21) eşitliği $m=-1$ için

$$\mathcal{G}_n^{q}\;(f;x)=\sum_{\gamma=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\ \\ \gamma\end{bmatrix}\triangle_q^{\gamma}f_0x^{\gamma}$$

şeklindeki q-Bernstein polinomlarının Phillips tarafından verilen q-farklar cinsinden ifadesine dönüşür (Phillips 1997).

2) q-Bernstein-Chlodowsky Polinomları

Eğer (5.2) eşitliğinde

$$\theta_n=\frac{[n]}{q},\;\; Y_n(0)=\frac{1}{[n]\,b_n}\;(\lim_{n\to\infty}b_n=\infty,\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{[n]}=0)$$

alınırsa

$$\mathcal{G}_n^{q\,<1>}(f;x)=\sum_{\gamma=0}^{n} f\left(\frac{[\gamma]}{[n]}b_n\right)\begin{bmatrix}n\\ \gamma\end{bmatrix}\left(\frac{x}{b_n}\right)^{\gamma}\left(1-\frac{x}{b_n}\right)_q^{n-\gamma}$$

Karslı ve Gupta tarafından tanımlanan q-Bernstein-Chlodowsky polinomları elde edilir (Karslı ve Gupta 2008).

3) q-Szász-Mirakjan Operatörleri

$K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)=E_q(-[n](\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x))$ olsun. Bu durumda (1^o)-(4^o) koşulları sağlanır.

Gerçekten,

1^o) Bu dizinin her elemanı x ve τ'nin $[0,A]$ aralığındaki her belirli değerine karşılık υ'ya göre her mertebeden q-türevlenebilirdir.

2^o) $x\in[0,A]$ ve $\gamma,n\in\{1,2,...\}$ için $K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)$ 'nun υ'ya göre yüksek mertebeden q-türevleri alınırsa,

$$\begin{aligned}
&D_{q,\upsilon}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\\
&=\sum_{\jmath=0}^{\infty}q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}}\frac{D_{q,\upsilon}(-[n](\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x))^{\jmath}}{[\jmath]!}\\
&=\sum_{\jmath=0}^{\infty}q^{\frac{(\jmath-1)(\jmath-2)}{2}}q^{\jmath-1}\frac{(-[n])^{\jmath}D_{q,\upsilon}(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x)^{\jmath}}{[\jmath]!}\\
&=\sum_{\jmath=1}^{\infty}q^{\frac{(\jmath-1)(\jmath-2)}{2}}q^{\jmath-1}\frac{(-[n])^{\jmath}[\jmath]q^{1-\gamma}x(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x)^{\jmath-1}}{[\jmath]!}\\
&=-[n]q^{1-\gamma}x\sum_{\jmath=1}^{\infty}q^{\frac{(\jmath-1)(\jmath-2)}{2}}q^{\jmath-1}\frac{(-[n])^{\jmath-1}(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x)^{\jmath-1}}{[\jmath-1]!}\\
&=-[n]q^{1-\gamma}x\sum_{\jmath=0}^{\infty}q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}}q^{\jmath}\frac{(-[n])^{\jmath}(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x)^{\jmath}}{[\jmath]!}\\
&=-[n]q^{1-\gamma}x\sum_{\jmath=0}^{\infty}q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}}\frac{(-[n]q)^{\jmath}(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x)^{\jmath}}{[\jmath]!},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D_{q,\upsilon}^{2}K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\\
&=-[n]q^{1-\gamma}x\sum_{\jmath=0}^{\infty}q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}}\frac{(-[n]q)^{\jmath}D_{q,\upsilon}(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x)^{\jmath}}{[\jmath]!}\\
&=\left(-[n]q^{1-\gamma}x\right)\sum_{\jmath=1}^{\infty}q^{\frac{(\jmath-1)(\jmath-2)}{2}}q^{\jmath-1}\frac{(-[n]q)^{\jmath}q^{1-\gamma}x(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x)^{\jmath-1}}{[\jmath-1]!}\\
&=\left(-[n]q^{1-\gamma}x\right)\sum_{\jmath=0}^{\infty}q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}}q^{\jmath}\frac{(-[n]q)^{\jmath+1}q^{1-\gamma}x(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x)^{\jmath}}{[\jmath]!}\\
&=\left(-[n]q^{1-\gamma}x\right)\left(-[n]q^{2-\gamma}x\right)\sum_{\jmath=0}^{\infty}q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}}\frac{(-[n]q^{2})^{\jmath}(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x)^{\jmath}}{[\jmath]!},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& D_{q,\upsilon}^{3} K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon) \\
= \; & \left(-[n]\, q^{1-\gamma}x\right)\left(-[n]\, q^{2-\gamma}x\right)\sum_{\jmath=0}^{\infty} q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}} \frac{\left(-[n]\, q^{2}\right)^{\jmath} D_{q,\upsilon}\left(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x\right)^{\jmath}}{[\jmath]!} \\
= \; & \left(-[n]\, q^{1-\gamma}x\right)\left(-[n]\, q^{2-\gamma}x\right)\sum_{\jmath=1}^{\infty} q^{\frac{(\jmath-1)(\jmath-2)}{2}} q^{\jmath-1} \frac{\left(-[n]\, q^{2}\right)^{\jmath} q^{1-\gamma}x\left(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x\right)^{\jmath-1}}{[\jmath-1]!} \\
= \; & \left(-[n]\, q^{1-\gamma}x\right)\left(-[n]\, q^{2-\gamma}x\right)\sum_{\jmath=0}^{\infty} q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}} q^{\jmath} \frac{\left(-[n]\, q^{2}\right)^{\jmath+1} q^{1-\gamma}x\left(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x\right)^{\jmath-1}}{[\jmath]!} \\
= \; & \left(-[n]\, q^{1-\gamma}x\right)\left(-[n]\, q^{2-\gamma}x\right)\left(-[n]\, q^{3-\gamma}x\right)\sum_{\jmath=0}^{\infty} q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}} \frac{\left(-[n]\, q^{3}\right)^{\jmath}\left(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x\right)^{\jmath}}{[\jmath]!}
\end{aligned}
$$

...

$$
\begin{aligned}
D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon) &= \left(-[n]\, q^{1-\gamma}x\right)\left(-[n]\, q^{2-\gamma}x\right)\left(-[n]\, q^{3-\gamma}x\right)...\left(-[n]\, q^{\gamma-\gamma}x\right) \\
&\quad \times \sum_{\jmath=0}^{\infty} q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}} \frac{\left(-[n]\, q^{\gamma}\right)^{\jmath}\left(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x\right)^{\jmath}}{[\jmath]!} \\
&= (-1)^{\gamma}\left([n]\right)^{\gamma}(x)^{\gamma} q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \sum_{\jmath=0}^{\infty} q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}} \frac{\left(-[n]\, q^{\gamma}\left(\tau+q^{1-\gamma}\upsilon x\right)\right)^{\jmath}}{[\jmath]!}
\end{aligned}
$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
D_{q,\upsilon}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau) \\ \tau=0}} &= (-1)^{\gamma}\left([n]\right)^{\gamma}(x)^{\gamma} q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \sum_{\jmath=0}^{\infty} q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}} \frac{\left(-[n]\, q\theta_n Y_n(0)\, x\right)^{\jmath}}{[\jmath]!} \\
&= (-1)^{\gamma}\left([n]\right)^{\gamma}(x)^{\gamma} q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} E_q\left(-[n]\, q\theta_n Y_n(0)\, x\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu sonuç q-İbrahimov-Gadjiev operatörünün (2^o) koşulunda yerine yazılıp (2.9) eşitliği dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
& \sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \frac{\left(-q\theta_n Y_n(0)\right)^{\gamma}}{[\gamma]!} (-1)^{\gamma}\left([n]\right)^{\gamma}(x)^{\gamma} q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} E_q\left(-[n]\, q\theta_n Y_n(0)\, x\right) \\
= \; & E_q\left(-[n]\, q\theta_n Y_n(0)\, x\right)\sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{\left([n]\, q\theta_n Y_n(0)\, x\right)^{\gamma}}{[\gamma]!} \\
= \; & E_q\left(-[n]\, q\theta_n Y_n(0)\, x\right) e_q\left([n]\, q\theta_n Y_n(0)\, x\right) \\
= \; & 1
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3^o) $x \in [0,A]$ ve $\gamma, n \in \{1,2,...\}$ için

$$\begin{aligned}(-1)^{\gamma} D_{q,u}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\mid_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}} &= (-1)^{2\gamma}([n])^{\gamma}(x)^{\gamma} q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} \\ &\quad \times \sum_{\jmath=0}^{\infty} q^{\frac{\jmath(\jmath-1)}{2}} \frac{(-[n] q^{\gamma}(\tau + q^{1-\gamma}\upsilon x))^{\jmath}}{[\jmath]!} \\ &\geq 0\end{aligned}$$

dır.

4^o) $x \in [0,A]$ ve $\gamma, n \in \{1,2,...\}$ için

$$\begin{aligned}D_{q,u}^{\gamma} K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon)\mid_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}} &= (-1)^{\gamma}([n])^{\gamma}(x)^{\gamma} q^{-\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} E_q(-[n] q\theta_n Y_n(0) x) \\ &= -[n] x q^{1-\gamma}(-1)^{\gamma-1}([n+m])^{\gamma-1}(x)^{\gamma-1} q^{-\frac{(\gamma-1)(\gamma-2)}{2}} \\ &\quad \times E_q(-[n+m] q\theta_n Y_n(0) x) \\ &= -[n] x q^{1-\gamma}\left[D_{q,\upsilon}^{\gamma-1} K_{n+m,\gamma-1}^{q}(x,\tau,\upsilon)\mid_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right]\end{aligned}$$

eşitliğinden $m = 0$ bulunur.

Şimdi q-Szász-Mirakjan operatörlerini elde edelim:

(3.5) eşitliğinde $m = 0$ yazılırsa (3.4) operatörü

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_n^{q\,<2>}(f;x) &= \sum_{\gamma=0}^{\infty} f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right)\frac{[n][n]...[n]}{[\gamma]!} \\ &\quad \times (q\theta_n Y_n(0) x)^{\gamma} K_{n,0}^{q}(x,0,\theta_n Y_n(0)) \\ &= \sum_{\gamma=0}^{\infty} f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right)\frac{([n])^{\gamma}}{[\gamma]!}(q\theta_n Y_n(0) x)^{\gamma} \\ &\quad \times E_q(-[n] q\theta_n Y_n(0) x)\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\mathcal{G}_n^{q\,<2>}(f;x)$ ifadesinde

$$\theta_n = \frac{[n]}{q},\ \ Y_n(0) = \frac{1}{[n]b_n}\ (\lim_{n\to\infty} b_n = \infty, \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{[n]} = 0) \tag{5.4}$$

seçilirse

$$\mathcal{G}_n^{q\,<2>}(f;x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} f\left(\frac{[\gamma]b_n}{[n]}\right)\frac{([n]x)^{\gamma}}{[\gamma]!(b_n)^{\gamma}} E_q\left(-[n]\frac{x}{b_n}\right)$$

Aral tarafından tanımlanan q-Szász-Mirakjan operatörleri bulunur (Aral 2008).

Diğer yandan, Teorem 3.4 ile verilen

$$\begin{aligned}
&\mathcal{G}_n^q(f;x) \\
&= \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(q\theta_n x)^\gamma}{[n]^{2\gamma}} \left[0, \frac{[1]}{[n]^2 Y_n(0)}, \frac{[2]}{[n]^2 Y_n(0)}, ..., \frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}; f\right] \\
&\quad \times q^{\frac{(\gamma-1)\gamma}{2}} [n][n+m]...[n+(\gamma-1)m] K^q_{n+\gamma m,-\gamma}(0,0,\theta_n Y_n(0))
\end{aligned}$$

eşitliğinde (5.4) özel koşulları kullanıldığı takdirde $m = 0$ için

$$\mathcal{G}_n^q(f;x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{(\gamma-1)\gamma}{2}} \left[0, \frac{[1]b_n}{[n]}, \frac{[2]b_n}{[n]}, ..., \frac{[\gamma]b_n}{[n]}; f\right] x^\gamma$$

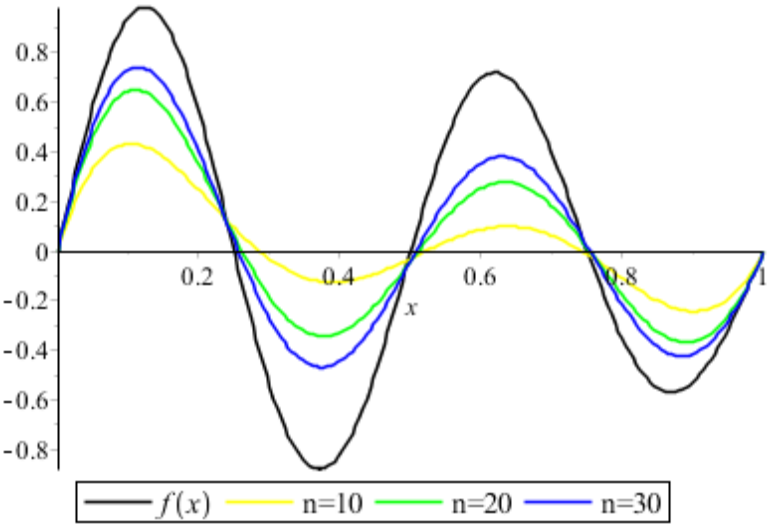
q-Szász-Mirakjan operatörlerinin Aral tarafından verilen bölünmüş farklarla ifadesi sonucuna varılır (Aral 2008).

Örnek 5.1

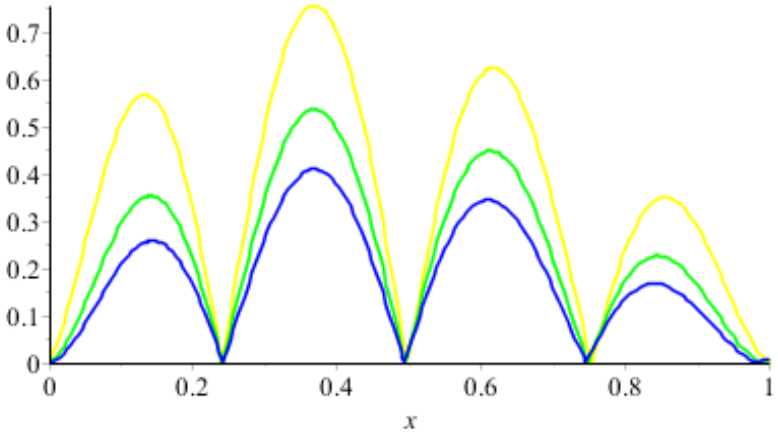
$$\mathcal{G}_n^q(f;x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} q^{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}} f\left(\frac{[\gamma]}{[n]^2 Y_n(0)}\right) \left[D^\gamma_{q,\upsilon} K^q_{n,\gamma}(x,\tau,\upsilon)\,|_{\substack{\upsilon=\theta_n Y_n(\tau)\\ \tau=0}}\right] \frac{(-q\theta_n Y_n(0)\,x)^\gamma}{[\gamma]!}$$

ve $x \in [0,1]$ olmak üzere $K^q_{n,\gamma}(x,\tau,\upsilon) = \left(1 - \frac{q^{1-\gamma}\upsilon x}{1+\tau}\right)^n_q$ çekirdek fonksiyonu için

a) $\theta_n = [n],\ Y_n(0) = \frac{1}{[n]}$ dizileri alınarak elde edilen operatöre $\widetilde{B}_n^q(f;.)$ diyelim. $f(x) = \frac{\sin(4\pi x)}{x^2+1}$ fonksiyonuna $q_n = \left\{1 - \frac{1}{n^2}\right\}$ olmak üzere $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ için $\widetilde{B}_n^q(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımı Şekil 5.1 ve hatası Şekil 5.2 de verilmiştir.

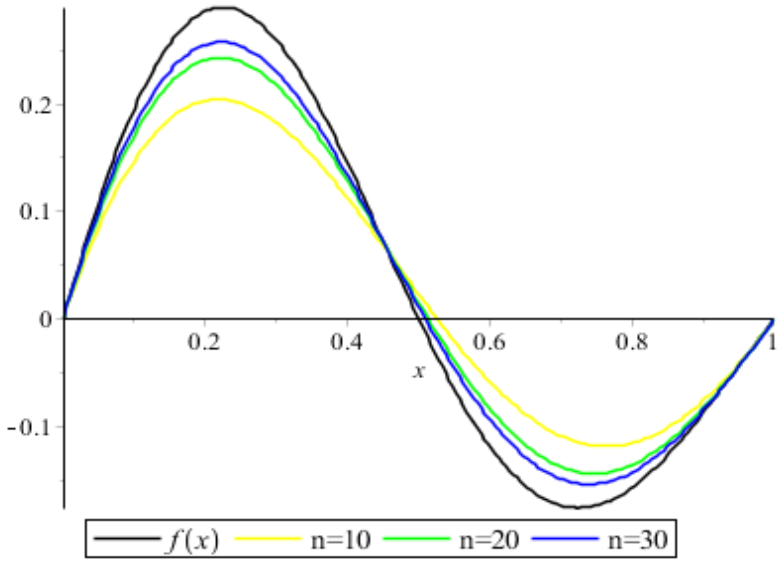


Şekil 5.1 $f(x) = \frac{\sin(4\pi x)}{x^2+1}$ fonksiyonuna $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ için $\widetilde{B}_n^q(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşım.

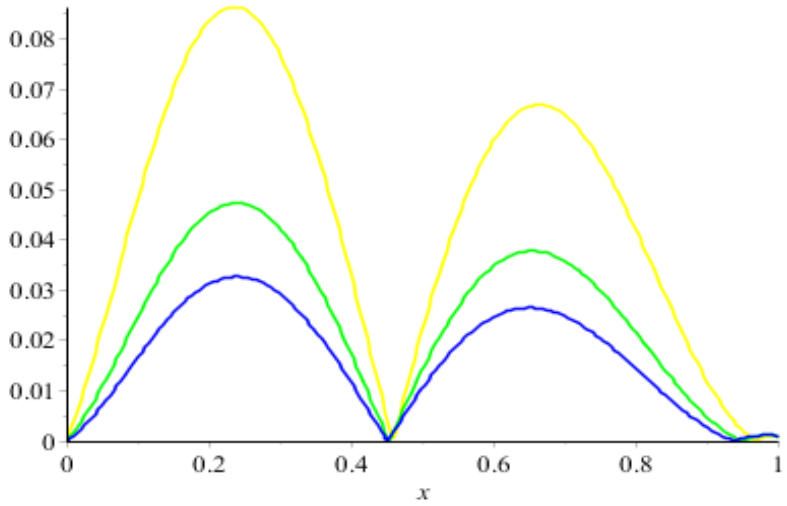


Şekil 5.2 $f(x) = \frac{\sin(4\pi x)}{x^2+1}$ fonksiyonuna $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ için $\widetilde{B}_n^q(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımın hata grafiği.

b) $\theta_n = [n],\ Y_n(0) = \frac{1}{[n]q_n}$ dizileri alınarak elde edilen operatöre $\widehat{B_n^q}(f;.)$ diyelim. $f(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{e^{x+1}}$ fonksiyonuna $q_n = \left\{1 - \frac{1}{n^2}\right\}$ olmak üzere $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ için $\widehat{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımı Şekil 5.3 ve hatası Şekil 5.4 de verilmiştir.

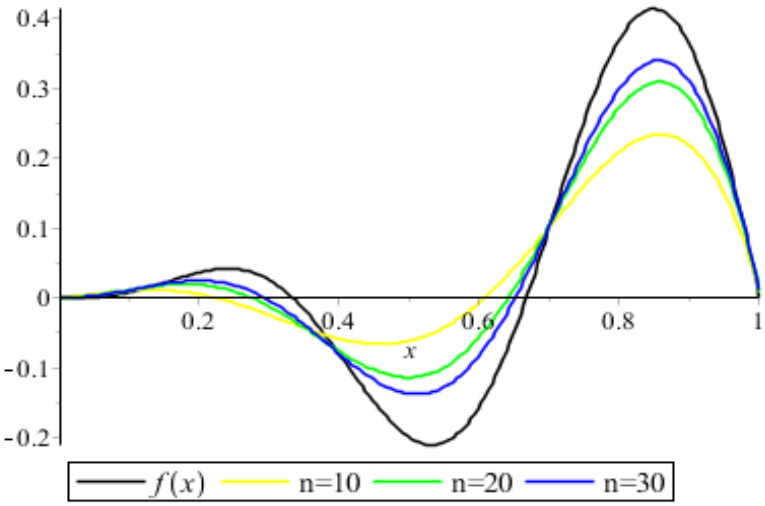


Şekil 5.3 $f(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{e^{x+1}}$ fonksiyonuna $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ için $\widehat{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşım.

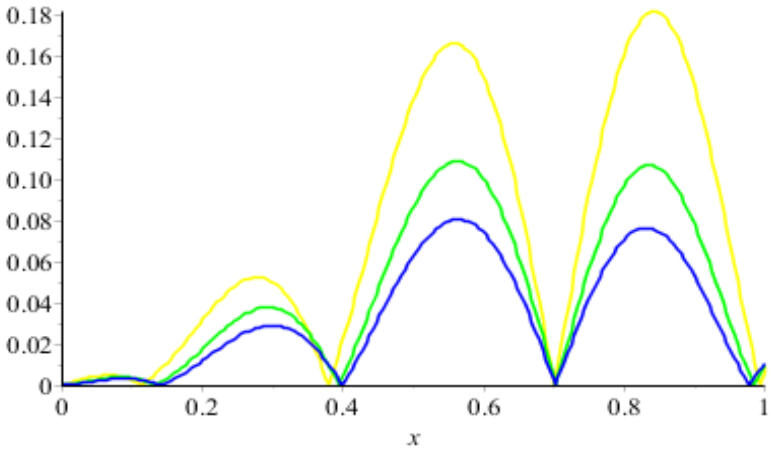


Şekil 5.4 $f(x) = \frac{\sin(2\pi x)}{e^{x+1}}$ fonksiyonuna $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ için $\widehat{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımın hata grafiği.

c) $\theta_n = [n]\, q_n,\ Y_n(0) = \frac{1}{[n]q_n}$ dizileri alınarak elde edilen operatöre $\overline{B_n^q}(f;.)$ diyelim. $f(x) = \frac{\sin(3\pi x)x^2}{x^2+1}$ fonksiyonuna $q_n = \left\{1 - \frac{1}{n^2}\right\}$ olmak üzere $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ için $\overline{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşım Şekil 5.5 ve hatası Şekil 5.6 da verilmiştir.

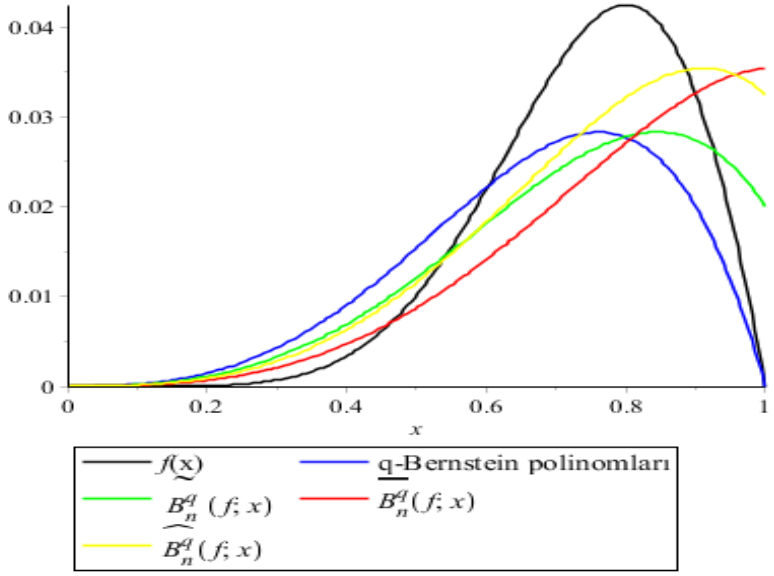


Şekil 5.5 $f(x) = \frac{\sin(3\pi x)x^2}{x^2+1}$ fonksiyonuna $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ için $\overline{B}_n(f;q;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşım.

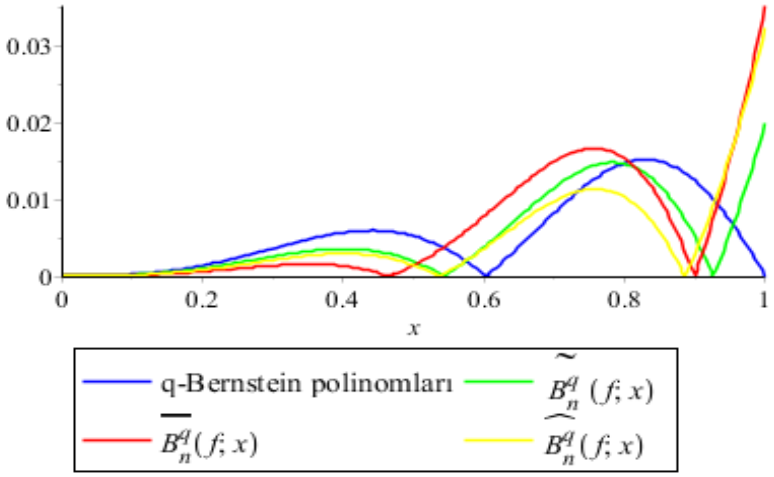


Şekil 5.6 $f(x) = \frac{\sin(3\pi x)x^2}{x^2+1}$ fonksiyonuna $n = 10$, $n = 20$ ve $n = 30$ için $\overline{B_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımın hata grafiği.

d) $\widetilde{B_n^q}(f;.)$, $\widehat{B_n^q}(f;.)$, $\overline{B_n^q}(f;.)$ operatörleri ve (5.3) ile verilen q-Bernstein polinomlarının $q_n = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ olmak üzere $n = 10$ için $f(x) = \frac{\sin(\pi x)x^5}{e^{x^3+1}}$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 5.7 ve hatası Şekil 5.8 de verilmiştir.



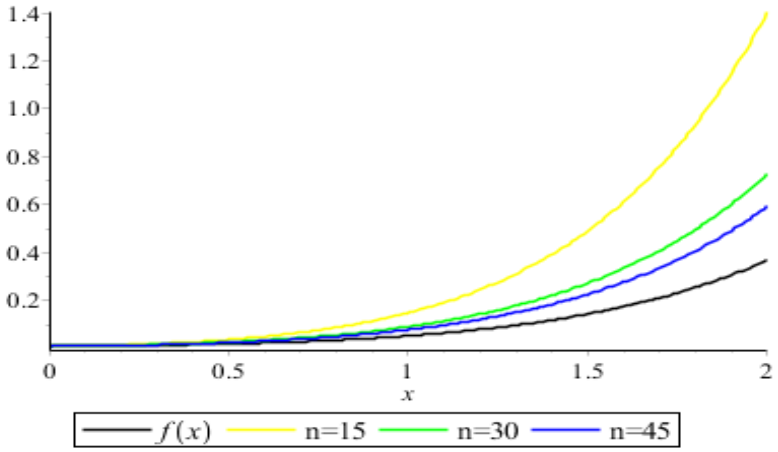
Şekil 5.7 $\widetilde{B_n^q}(f;.)$, $\widehat{B_n^q}(f;.)$, $\overline{B_n^q}(f;.)$ operatörleri ve q-Bernstein polinomlarının $n = 10$ için $f(x) = \frac{\sin(\pi x)x^5}{e^{x^3+1}}$ fonksiyonuna yaklaşımı.



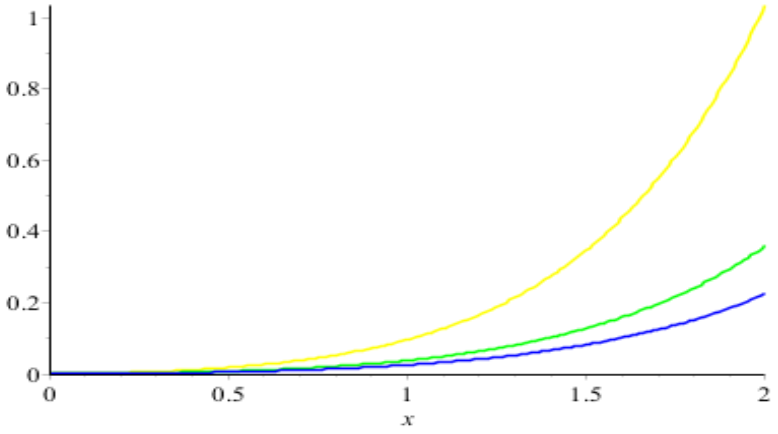
Şekil 5.8 $\widetilde{B_n^q}(f;.)$, $\widehat{B_n^q}(f;.)$, $\overline{B_n^q}(f;.)$ operatörleri ve q-Bernstein polinomlarının $n = 10$ için $f(\varkappa) = \frac{\sin(\pi x)x^5}{e^{x^3+1}}$ fonksiyonuna yaklaşımının hata grafiği.

Örnek 5.2 $x \in [0,2]$ olmak üzere $K_{n,\gamma}^{q}(x,\tau,\upsilon) = E_q(-[n](\tau + q^{1-\gamma}\upsilon x))$ çekirdek fonksiyonu için:

a) $\theta_n = [n]$, $Y_n(0) = \frac{1}{[n]b_n}$ ($b_n = \sqrt{n}$) dizileri alınarak elde edilen operatöre $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ diyelim. $f(x) = 0.01.e^x(x^2+1)$ fonksiyonuna $q_n = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ olmak üzere $n = 15$, $n = 30$ ve $n = 45$ için $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımı Şekil 5.9 ve hatası Şekil 5.10 da verilmiştir.

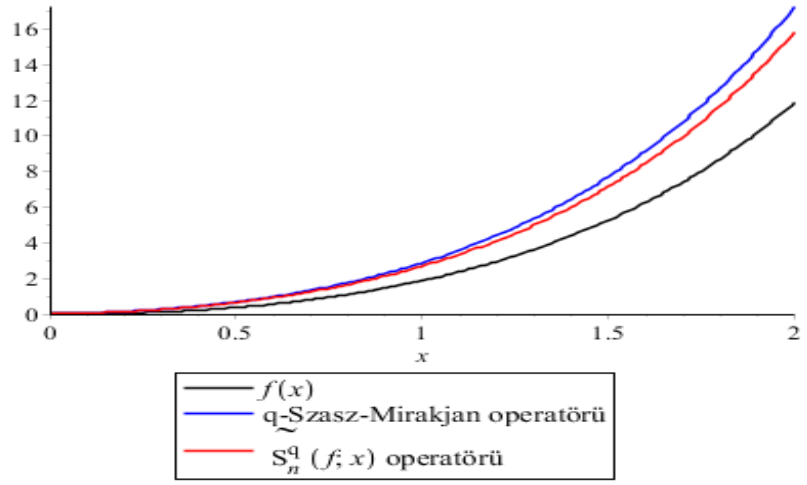


Şekil 5.9 $f(x) = 0.01.e^x(x^2+1)$ fonksiyonuna $n = 15$, $n = 30$ ve $n = 45$ için $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşım.

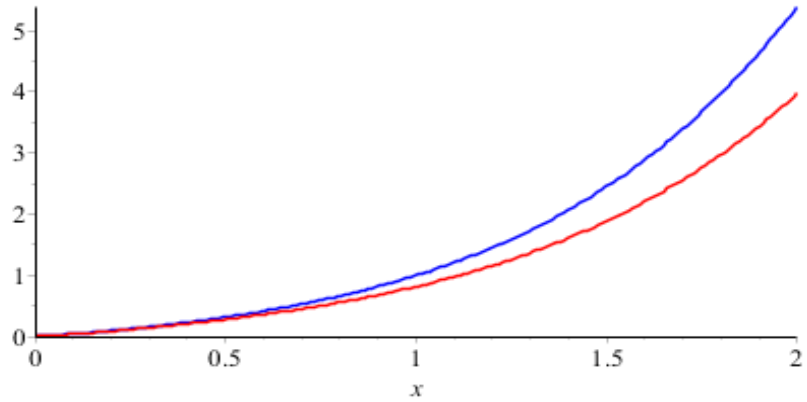


Şekil 5.10 $f(x) = 0.01.e^x(x^2+1)$ fonksiyonuna $n = 15$, $n = 30$ ve $n = 45$ için $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü yardımıyla yaklaşımın hata grafiği.

b) $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü ve (5.4) ile verilen q-Szász-Mirakjan operatörünün $q_n = \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}$ ve $n = 35$ için $f(x) = e^x \ln(x^2+1)$ fonksiyonuna yaklaşımı Şekil 5.11 ve hatası Şekil 5.12 de verilmiştir.



Şekil 5.11 $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü ve q-Szász-Mirakjan operatörünün $n = 35$ için $f(x) = e^x \ln(x^2+1)$ fonksiyonuna yaklaşımı.



Şekil 5.12 $\widetilde{S_n^q}(f;.)$ operatörü ve q-Szász-Mirakjan operatörünün $n = 35$ için $f(x) = e^x \ln(x^2+1)$ fonksiyonuna yaklaşımının hata grafiği.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde İbrahimov ve Gadjiev [19] tarafından tanımlanan ve literatürde İbrahimov-Gadjiev operatörleri olarak bilinen operatörlerin q-tamsayılarına dayalı bir genelleşmesi tanımlanıp 1, t, t^2, t^3, t^4 test fonksiyonlarının operatör altındaki görüntüleri hesaplanmıştır. Daha sonra klasik anlamda yaklaşım özellikleri incelenmiş, yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla hesaplanmıştır. Bu bölümün son kısmında ise q-türevler kullanılarak operatörün q-farklar ve bölünmüş farklar cinsinden ifadesi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde q-İbrahimov-Gadjiev operatörlerinin tanım kümesi genişletilerek $C_\rho^0[0,\infty)$ ağırlıklı uzayında olan fonksiyonlar için yaklaşım özellikleri incelenmiş ve yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde ise bu operatörlerin özel durumlarda q-Bernstein polinomları, q-Bernstein-Chlodovsky polinomları ve q-Szász-Mirakjan operatörlerini içerdiği gösterilmiştir. Ayrıca θ_n ve $Y_n(0)$ dizilerinin özel seçimleri altında q-Bernstein ve q-Szász tipli q-lineer pozitif operatör dizileri elde edilmiş ve bu yeni operatörlerle q-Bernstein polinomları ve q-Szász-Mirakjan operatörlerinin f fonksiyonuna yaklaşımı ve hatası grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Sonuç olarak literatüre, $q = 1$ olması halinde klasik İbrahimov-Gadjiev operatörlerine indirgenen, özel seçimler altında q-lineer pozitif operatör dizilerini içeren dolayısıyla indirgendiği operatörler için elde edilen sonuçları kapsayan yeni yaklaşım operatörü kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR

Acar, T., 2017. *Rate of convegence for Ibragimov-Gadjiev-Durrmeyer operators*, Demonstratio Mathematica, 50(1), 119-129.

Altomare, F., and Campiti, M., 1994. *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*, De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter and Co., Berlin.

Aral, A., and Acar, T., 2016. *On approximation properties of generalized Durrmeyer operators*, Proceedings of the Inter. conf. on modern math. methods and high performance computing in science and tech., (Springer), Chapter1, 1-15.

Aral, A., 2003. *Approximation by Ibragimov-Gadjiev operators in polynomial weighted space*. Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 19, 35–44.

Aral, A., 2008. *A generalization of Szász-Mirakyan operators based on q-integers*, Math. Comput. Modelling 47, 9-10 , 1052–1062.

Baskakov, V. A., 1957. *An example of sequence of linear positive operators in space of continuous functions,* Dokl. Akad. Nauk. SSSR (in Russian) Vol. 113, pp. 249-251.

Bernstein, S., 1912. *Démonstration du théoréme de Weierstrass fondeé sur le calcul des probabilités*, Commun. Soc. Math. Kharkow, 2(13), 1-2.

Chlodowsky, I., 1937. *Sur de développement des fonctions definies dans un intervalle infini en séries de polynomes de M. S. Bernstein*, Compositio Math., 4, 380-393.

DeVore, R. A. and Lorentz, G. G., 1993. *Constructive Approximation*, Springer-Verlag, Berlin.

Ernst, T., 2008. *The different tongues of q-Calculus,* Proceedings of the Estonian Academy of Sciences, 57(2), 81-99.

Ernst, T., 2000. *The History of Q-calculus and a New Method,* Department of Mathematics, Uppsala University, Sweden.

Gadjiev, A. D., 1976. *On Korovkin type theorems*, Math. Zametki 20(5), 781-786, (in Russian).

Gadjiev, A. D., 1974. *The convergence problem for a sequence of positive linear operators on unbounded sets and theorems analogous to that of P. P. Korovkin*, Soviet Math. Dokl., 15(5), 1433-1436.

Gadjiev, A. D, and Ispir, N., 1999. *On a sequence of linear positive operators in weighted space,* Proc. Inst. Math. Mech. Acad. Sci. Azerb., 11, 45–56.

Gautschi, W., 2008. *Leonhard Euler: His Life, the Man, and His Works*, SIAM Review, 50(1), 3-33

Ghorbanalizadeh, A. M., 2014. *On the order of weighted approximation of unbounded functions by some generalizations of Gadjiev-Ibragimov operators,* J. Appl. Anal., 20(1), 87-92.

Gonul, N., and Coskun E., 2013. *Approximation with modified Ibragimov-Gadjiev operators in* $C[0, A]$, J. Comput. Anal. Appl., 15(5), 868-879.

Hacısalihoğlu, H. H., ve Hacıyev, A. D., 1995. *Lineer Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*, A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, 100 s, Ankara.

Ibragimov, I. I., and Gadjiev, A. D., 1970. *On a sequence of linear positive operators*, Soviet Math. Dokl., 11(4), 1092–1095.

Ispir, N., 2001. *On modified Baskakov operators on weighted spaces*, Turk. J. Math., 26(3), 355-365.

Jackson, F. H., 1909. *A q-form of Taylor's theorem*, Mess. Math., 38, 62-64.

Jing, S. C, and Fan, H. Y, 1995. *q-Taylor's formula with its q-remainder*, Comm. Theoret. Phys., 23(1), 117-120.

Kac, V., and Cheung, P., 2002. *Quantum Calculus*, Springer, New York.

Karsli, H., and Gupta, V., 2008. *Some approximation properties of q-Chlodowsky operators*. Appl. Math. and Comp., 195, 220-229.

Korovkin, P. P., 1953. *On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S), 90, 961- 964.

Lupaş, A., *1987. A q-analogue of Bernstein operator*. Uni of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, 9, 85-92.

Mahmudov, N. I, and Sabancigil, P., 2008. *q- Parametric Bleimann Butzer and Hahn operators*. Journal of inequalities and Applications, 15 pages.

Mahmudov, N. I., 2010. *On q-parametric Szász-Mirakjan operators*, Mediterr. J. Math., 7, 297–311.

Mahmudov, N. I., 2010. *Approximation properties of complex q-Szász-Mirakjan operators in compact disks*, Comput. Math. Appl., 60, 1784–1791.

Nowak, G., 2009. *Approximation properties for generalized q-Bernstein polynomials*, J. Math. Anal. Appl., 350, 50-55.

Phillips, G. M., 1997. *Bernstein polynomials based on the q- integers,* Annals of Numerical Mathematics, 4, 1-4, 511–518.

Phillips, G. M., 2003. *Interpolation and approximation by polynomials*, CMS Books in Mathematics, vol. 14, Springer, Berlin.

Pinkus, A., 2000. *Weierstrass and approximation theory*, J. Approx. Theory, 107, 1-66.

Popoviciu, T., 1935. *Sur I'approximation des functios convexes D'ordre superiour*, Mathematica (Cluj), 10, 49-54.

Radu, C., Tarabie, S., and Veţeleanu, A., 2011. *On the rate of convergence of a new q-Szász-Mirakjan operator,* Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 56(2), 527-535.

Szász, O., 1950. *Generalization of S. Bernstein's polynomials to the infinite interval*, J. Research Nat. Bur. Standards, 45, 239-245.

Trif, T., 2000. *Meyer-Konig and Zeller operators based on the q- integers*. Rev. Anal. Numér. Théor. Approx. 29, 221–229.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Serap HERDEM

Doğum Yeri : Salihli

Doğum Tarihi : 07/09/1984

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl):

Lise : Sekine Evren Anadolu Lisesi (2002)

Lisans : Gazi Üniversitesi Kırşehir Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2009)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2012)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl: Piri Reis Üniversitesi (2013-...)

1) **Herdem, S**., and Büyükyazıcı , I. *Weighted Approximation by q-Ibragimov-Gadjiev Operators*, Math. Commun. (accepted for publication) (SCI-E.)
2) **Herdem, S**., and Büyükyazıcı , I., 2018. *Ibragimov-Gadjiev operators based on q-integers*, Adv. Difference Equ. Paper No. 304, 10 pp. (SCI-E.)
3) **Herdem, S**., and Büyükyazıcı , I., 2017. *Weighted Approximation by q-Ibragimov-Gadjiev Operators,* 11th congres of International Society for Analysis, its Applications and Computations (ISAAC), Växjö, Sweden.
4) **Herdem, S**., and Büyükyazıcı , I., 2014. *Ibragimov-Gadjiev operators based on q-integers,* 3rd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA), Vienna, Austria.