

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HOMOTETİK HAREKETLER VE UYGULAMALARI

Esra Betül KOÇ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2009**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HOMOTETİK HARETKETLER VE UYGULAMALARI

Esra Betül KOÇ

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrıldı

İkinci bölümde tez için gerekli olan temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde homotetik hareketler, Lie Grupları ve Lie cebiri ile ilgili kavramlar aktarıldı. Homotetik hareketlerin özel halleri ele alınıp incelendi.

Son bölümde Plücker koordinatlarda doğru elemanlarını tanımlamak suretiyle doğru elemanlarının spiral hareketlerle olan ilişkisi ve bu hareket ile ilgili sonuçlar bazı teoremlerle verildi.

Ocak,2009, 70 sayfa

Anahtar Kelimeler: Homotetik Hareket, Lie Grupları, Lie Cebirleri, Spiral Hareketler

ABSTRACT

Master Thesis

HOMOTHETIC MOTIONS AND ITS APPLICATIONS

Esra Betül KOÇ

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr.Yusuf YAYLI

This study consist of four chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter we give the some necessary main concept about Homothetic motions, Lie Groups and Lie Algebras. We show that special case of Homothetic motions.

In the last chapter we give the concept of Plücker Coordinates to the case of line elements and establishes some basic facts.

January,2009, 70 pages

Key words: Homothetic Motion, Lie Groups, Lie Algebras, Spiral motions

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, her adımda bilgilerinden faydalandığım Hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf Yaylı 'ya bu vesileyle saygı ve şükranlarımı sunarım.

Esra Betül KOÇ

Ankara Ocak 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	2
2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı	2
2.2 E^n de Hareketler.....	3
2.3. Lie Grubu Ve Lie Cebiri.....	6
2.4.Çizgiler Geometrisi	9
3. HOMOTETİK HAREKETLER.....	12
3.1 Hareket.....	12
3.2 Bir Parametrelili Hareket	13
3.3. Homotetik Hareket	14
3.4. Bir Parametrelili HomotetiHareket.....	15
3.5.Homotetik Hareketlerinin Hız Vektörler.....	17
3.6. Lineer Vektör Alanları.....	25
3.6.1. E^3 de lineer vektör alanları.....	25
3.6.2. E^{2n+1} de lineer vektör alanı	28
3.7. E^3 Öklid Uzayında Spiral Vektör Alanlar.....	28
3.7.1. E^3 Öklid uzayında spiral vektör alanlarının integral eğrileri.....	31
3.7.2. E^n öklid uzayında spiral vektör alanlar.....	34
3.8.Bir Hareketin Türevi.....	36
3.8.1.Matris grupları.....	37
3.9.Tanjant Operatörü.....	38
3.9.1. $SO(n)$ nin Tanjant operatörleri.....	38
3.9.2. $H(n)$ nin Tanjant operatörleri	39
3.9.3.Tanjant operatörüne karşılık gelen vektörler.....	40
3.10. $Sd(3)$ Üzerinde Lie Çarpımı	42

3.11. $Sd(3)$ Lie Cebirinin Yapı Sabitleri	44
4. DOĞRU ELEMANLARININ PLÜCKER KOORDİNATLARI	50
4.1. $l, \bar{l}, \lambda$ nın Geometrik Yorumu	52
4.2. Doğru Elemanlarının Lineer Kompleksi.....	54
4.3. Doğru Kongrüansı İle Kompleksin Kesişmesi	63
4.4. Komplekslerin Kesişimi	66
KAYNAKLAR	68
ÖZGEÇMİŞ	70

SİMGELER DİZİNİ

$T_M(P)$	M manifoldunun P noktasındaki tanjant uzayı
E^n	n-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel vektör uzayı
$GL(n+1, \mathbb{R})$	$(n+1) \times (n+1)$ tipindeki regüler matrislerin cümlesi
$O(n)$	Ortogonal Matrislerin cümlesi
R	Sabit Uzay
R_0	Hareketli Uzay
Ω	Darboux Matrisi
X	Lineer vektör alanı
Y	Spiral vektör alanı
$SO(3)$	Özel ortogonal grup
$SE(3)$	Matris Lie grubu
$se(3)$	Matris Lie grubunun Lie cebiri
$SD(3)$	Homotetik hareketlerin matris Lie grubu
$sd(3)$	Homotetik hareketlerin matris Lie grubunun Lie cebiri
α	İntegral eğrisi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.1 Hareket.....	12
Şekil 3.5.1 Homotetik hareketin yörüngesinin oluşturduğu silindirel yüzey.....	21
Şekil 3.5.2 Homotetik hareketin yörüngesinin oluşturduğu helisel yüzey.....	22
Şekil 3.5.3 Helisel hareket.....	22
Şekil 3.5.4 Homotetik hareketin yörüngesinin oluşturduğu dönel yüzey.....	23
Şekil 3.5.5 Homotetik hareketin yörüngesinin oluşturduğu spiral yüzeyi.....	23
Şekil 3.5.6 Homotetik hareketin yörüngesinin oluşturduğu Konikal yüzey.....	24
Şekil 3.7.1.1 Ani Homotetik Hareket.	32
Şekil 4.1 Doğru elemanları.	50
Şekil 4.2.1 Spiral eksen.....	57
Şekil 4.2.2 Helisel eksen.....	57
Şekil 4.2.3 Doğru elemanlarının lineer kompleksinin düzlem parçası.	58
Şekil 4.2.4 Spiral hareketin çizdiği nokta yörüngeleri.	58
Şekil 4.2.5 Pedal noktası.....	62
Şekil 4.2.6 Thales küresi.	62
Şekil 4.3.1 Komplekslerin kesişimi.	63
Şekil 4.3.2 Kübik yüzey	64

1.GİRİŞ

Katı cisimlerin hareketlerinin matematikte önemli bir yeri vardır. Hareketler, uzaklığı koruyan dönüşümlerle verilir. Homotetik hareketler ise açıları koruyan dönüşümlerle verilir. Hareketler homotetik hareketlerin özel halidir. Ani hareketlerin helis veya spiral hareketle olması hareketin homotetik olması ile yakından ilgilidir. Ani hareketler, hareket Lie grubunun Lie cebiri ile de ilgilidir.

Bu tezde homotetik hareketlerin özel halleri ele alınıp incelenmiştir. Herhangi bir sabit t anında homotetik hareketin hız vektörünün özel bir lineer vektör alanı olduğu söylenmiştir. Daha sonra bu hız vektör alanının yörüngesinin bir eksen etrafında dönme, öteleme, spiral ya da helis hareketi yaptığı incelenmiştir. Ani uzay hareketlerinde bir noktanın yörüngesinin helis olduğu belirtilmiştir. Ani homotetik hareketlerde ise bir noktanın yörüngesinin spiral olduğu gösterilmiştir. Bu ilişkiler incelenirken diferansiyel geometrinin konularından olan Lie grupları ve Lie cebirlerinden de yararlanılmıştır.

Spiral vektör alanları, Karger ve Novak (1985) ele aldığı lineer vektör alanları olarak ele alınıp bu vektör alanlarının ani hareketlerle ilişkisi incelenmiştir.

Ani homotetik hareketlerde bir noktanın yörüngesinin, spiral vektör alanlarının integral eğrileri olarak verilebileceği gösterilmiştir. Spiral vektör alanlarına bir matris karşılık getirilmiş ve bu matrisin rankı yardımıyla yörüngelerin cinsi belirlenmiştir.

Doğru elemanlarının Plücker koordinatlarının bazı temel gerçekleri açıklanmıştır. Çizgiler Geometrisi ve Öklid Kinematığı arasındaki bağlantılardan bahsedilmiştir.

2.TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez için gerekli olan bazı temel kavram ve teoremleri vereceğiz.

2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1 (Afin Uzay)

$A \neq \emptyset$ bir cümle ve V de $\mathfrak{S}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\psi: A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü $P, Q \in A$ noktaları için

$$(P, Q) \rightarrow \psi(P, Q)$$

şeklinde tanımlanmış ve aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V vektör uzayı ile birleştirilmiş bir afin uzay denir.

(i) $\forall P, Q, R \in A$ için

$$\psi(P, R) = \psi(P, Q) + \psi(Q, R)$$

dir.

(ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $\psi(P, Q) = \vec{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.1.2 (Öklid Uzayı)

n-boyutlu bir reel iç çarpım uzayı $\mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$ ile birleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayına n-boyutlu Öklid uzayı denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.1.3 (Öklid Koordinat Sistemi)

E^n de bir nokta $p = (p_1, \dots, p_n)$ olsun. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$x_i : E^n \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde tanımlı x_i fonksiyonuna E^n nin i -yinci koordinat fonksiyonu denir. Eğer p noktasının bileşenleri bir dik çatıya göre verilmişse $\{x_1, \dots, x_n\}$ sistemine E^n nin Öklid koordinat sistemi denir veya dik koordinat sistemi denir (Hacısalıhoğlu 1980).

2.2 E^n de Hareketler

Tanım 2.2.1 (İzometri)

E_1^n ve E_2^n sırasıyla n -boyutlu V_1 ve V_2 iç çarpım uzayları ile birleşen birer Öklid uzayı olsunlar. Bir

$$f : E_1^n \rightarrow E_2^n$$

afin dönüşümü $\forall \alpha, \beta \in V_1$ için

$$\langle \psi(\alpha), \psi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

olacak şekilde bir

$$\psi : V_1 \rightarrow V_2$$

lineer dönüşümü ile birleşiyorsa f ye bir izometri denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.2.2 (Dönme)

E^n in bir f izometrisi için eğer

$$f(O) = O, \quad O \in E^n$$

olacak şekilde bir O noktası mevcut ise f ye O etrafında bir dönme denir (Hacısalıhoğlu 1980).

E^n de O etrafında dönmelerin cümlesi $R_0(n)$ ile gösterilirse, bu cümle bileşke işlemine göre bir grup olup, $I(E^n)$ in bir alt grubudur.

Teorem 2.2.1

E^n ile eşleşen $\mathbb{R}^n$ n-boyutlu standart reel vektör uzayında

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad X = (x_1, \dots, x_n), \quad Y = (y_1, \dots, y_n)$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup $O(n)$ ile, $O = (0, \dots, 0)$ noktasını sabit bırakan dönme grubu eşlenebilir (Hacısalıhoğlu 1980).

Yani herhangi bir $R_0 \in R_0(n)$ dönmesinin E^n deki bir X noktasının R_0 altındaki görüntüsü Y olmak üzere

$$Y = AX, \quad A \in O(n)$$

biçiminde ifade edilebilir.

Tanım 2.2.3 (Öteleme)

E^n in bir f izometrisi için eğer, $X = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ olmak üzere

$$f(X) = (x_1 + t_1, \dots, x_n + t_n), \quad t_i \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n$$

ise f ye E^n de bir öteleme denir (Hacısalıhoğlu 1980).

E^n deki bütün ötelemelerin cümlesi $T(n)$ ile gösterilirse, bu cümle dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir değişimli grup olup, $I(E^n)$ in bir alt grubudur.

Teorem 2.2.2

E^n n-boyutlu Öklid uzayının katı hareketlerinden birinin matrisi B olmak üzere

$$B = \begin{bmatrix} & & \mathbf{t}_1 \\ & & \vdots \\ \mathbf{a}_{ij} & & \mathbf{t}_n \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} [\mathbf{a}_{ij}] \in O(n) \\ 1 \leq i \leq n \end{matrix}$$

$(n+1) \times (n+1)$ tipinde reel ve regüler bir matristir. Bu cins matrislerin grubu $GL(n+1, \mathbb{R})$ nin bir alt grubu olarak ifade edilebilir (Hacısalıhoğlu 1980).

Teorem 2.2.2 ye göre, B matrisine tekabül eden genel izometri, E^n deki bir X noktasının B altındaki görüntüsü Y olmak üzere, matris formunda

$$Y = AX + C, \quad A \in O(n), \quad C \in T(n)$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2.4 (Hareket)

n -boyutlu bir E^n Öklid uzayının izometrilерinden biri f olsun. E^n deki bir

$\{x_1, \dots, x_n\}$ dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi, $A \in O(n)$, yani $\det A = \pm 1$

ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir. $\det A = 1$ ise f hareketine direkt hareket, $\det A = -1$ ise f hareketine karşıt hareket denir (Hacısalıhoğlu 1980).

$Y = AX + C$ ile verilen harekette sabit bir $X \in E^n$ noktasının resmi Y dir. Burada AX kısmına hareketin dönme kısmı denir. Hareketin parametresi t olmak üzere

$Y = AX$ dönme kısmını ele alalım. Hareketli uzayın sabit X noktasının hız vektörü

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt}, \quad \dot{A} = \frac{dA}{dt}$$

olmak üzere

$$\dot{Y} = \dot{A}X$$

ile verilir. Böylece

$$\dot{Y} = \dot{A}A^T Y$$

olur.

Tanım 2.2.5 (Darboux Matrisi)

$$\Omega = \dot{A} A^T$$

olmak üzere

$$\dot{Y} = \Omega Y$$

ifadesinde bulunan Ω anti-simetrik matrisine A ya karşılık gelen hareketin Darboux matrisi denir (Bottema, Roth 1979).

Tanım 2.2.6 (E^n de Eğri)

n -boyutlu Öklid uzayı E^n ve $\mathbb{R}$ nin bir irtibatlı açık alt cümlesi I olmak üzere

$$\alpha: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n de bir eğri denir (Hacısalıhoğlu 1983).

2.3 Lie Grubu Ve Lie Cebiri**Tanım 2.3.1 (Lie Grubu)**

Bir M diferensiyellenebilir manifoldu ve bir G grubu verilmiş olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa (M, G) ikilisine bir Lie Grubu denir.

$L_1: M$ nin noktaları G nin elemanları ile çakışır.

$$L_2: \bullet: M \rightarrow M$$

$$(a, b) \rightarrow a \bullet b^{-1}$$

işlemi her yerde diferensiyellenebilirdir.

M ye Lie Grubunun temel manifoldu ve G ye de temel grubu denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.3.2 (Lie Cebiri)

V bir vektör uzayı olmak üzere

$$[,]: V \times V \rightarrow V$$

$$(x, y) \rightarrow [x, y] = [x, y]$$

işlemi,

1) Bilineer

2) Antisimetrik

3) $[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ özelliklerine sahipse $(V, [x, y])$ ikilisine bir Lie cebiri denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.3.3 (Matris Lie Grubu)

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{n \times n} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

matris uzayının bir alt manifoldu, matrislerin çarpımı işlemine göre bir grup ise bu gruba Matris Lie grubu denir (Hacısalıhoğlu 1980).

Tanım 2.3.4 $\mathbb{R}^3$ de ortogonal matrislerin cümlesi

$$O(3) = \{A \in \mathbb{R}_3^3 : A^T A = A A^T = I\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu cümle matris çarpma işlemine göre bir gruptur. Bu gruba ortogonal grup denir (Karger, Novak 1979).

Tanım 2.3.5 $O(3)$ ortogonal grubunun bir alt grubu olan ve

$$SO(3) = \{A \in \mathbb{R}_3^3 : A^T A = A A^T = I, \det A = 1\}$$

şeklinde tanımlanan gruba özel ortogonal grup denir (Karger, Novak 1979).

Tanım 2.3.6 $SO(3)$ Lie grubuna karşılık gelen $so(3)$ Lie cebiri aşağıdaki şekilde tanımlanır (Karger, Novak 1979).

$$so(3) = \left\{ \omega \in \mathbb{R}_3^3 : \omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}, \omega^T = -\omega \right\}$$

Tanım 2.3.7 (Vektör Alanı)

Bir diferensiyellenebilir manifold M olsun.

$$X : M \xrightarrow{1:1} \bigcup_{\substack{\text{örten} \\ p \in M}} T_M(p)$$

$$p \rightarrow X_p \in T_M(Y)$$

biçiminde tanımlı X dönüşümüne M manifoldu üzerinde bir vektör alanı denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.8 (İntegral Eğrisi)

α, E^n de parametrik bir eğri

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

ve X, E^n üzerinde bir vektör alan olmak üzere, $\forall t \in I$ için,

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

ise, α eğrisine X vektör alanının integral eğrisi denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.3.9 V, n -boyutlu bir vektör uzay, X, V üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer,

$$A : V \rightarrow V$$

bir lineer dönüşüm olmak üzere, $\forall v \in V$ için

$$X_v = A(v)$$

ise, X vektör alanına lineerdir denir (Karger, Novak 1979).

Teorem 2.3.1 A, E^3 de bir antisimetrik matrisle verilen bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda A nın matris formu, $\lambda \neq 0$ olmak üzere;

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir E^3 ün bir ortonormal baz vardır (Karger, Novak 1979).

Tanım 2.3.10

$$SE(3) = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} g & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g \in \mathbb{R}_3^3, g^T g = I_3, c \in \mathbb{R}^3, \det g = 1 \right\}$$

cümlesi matris çarpımına göre bir gruptur. $(SE(3), \bullet)$ grubuna $\mathbb{R}^3$ de katı cisimlerin özel grubu denir (Karger, Novak 1979).

$SE(3)$ grubu topolojik yapısıyla ele alındığında, 6-boyutlu bir topolojik manifolddur. Bu durumda, $SE(3)$ bir matris Lie grubudur.

Tanım 2.3.11 $SE(3)$ Lie grubuna karşılık gelen $se(3)$ Lie cebiri,

$$se(3) = \left\{ \begin{bmatrix} \omega & v \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \omega \in \mathbb{R}_3^3, \omega^T = -\omega \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Karger, Novak 1979).

2.4 Çizgiler Geometrisi

Tanım 2.4.1 (Plücker doğru koordinatları)

Yönlendirilmiş bir doğru üzerindeki bir X noktasının $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$ yer vektörü ve $\vec{a}$ yön vektörü ($\vec{a}^2 = 1$ olmak üzere) şeklinde verilebilir. Bu durumda doğrunun parametrik (parametre = λ) bir gösterilişi

$$\vec{y} = \vec{x} + \lambda \vec{a}$$

olur. X noktasının imtiyazlı durumundan kurtulmak için

$$\vec{a}^* = \vec{x} \times \vec{a}$$

vektörünü teşkil edelim. Bu vektör

$$\vec{y} \times \vec{a} = \vec{x} \times \vec{a} = \vec{a}^*$$

dan görüleceği üzere, X noktasının seçilişine bağımsızdır. $\vec{a}^*$ vektörü $\vec{a}$ birim kuvvetinin, koordinat sisteminin O başlangıç noktasına göre, vektörel momentidir. Bu durumda $(\vec{a}, \vec{a}^*)$ vektör çifti sayesinde yönlenmiş doğru, tek anlamlı olarak tespit edilmiş olur. Bu vektörler şu şartları sağlarlar:

$$(\vec{a}^2 = 1) , \vec{a} \vec{a}^* = 0$$

$\vec{a}$ ve $\vec{a}^*$ in dik koordinat sistemindeki altı bileşenine homojen olmayan PLÜCKER DOĞRU KOORDİNATLARI denir. $\vec{a}$ yön vektörünün normlanmış olmasını göz önüne alırsak yani doğrunun yönünü herhangi bir $-\rho > 0$ olmak üzere $-\vec{b}^* = \rho \vec{a}^*$ in homojen altı koordinatı homojen Plücker doğru koordinatlarını teşkil ederler. Bu durumda $\vec{b}, \vec{b}^*$ vektörleri $\vec{b} \vec{b}^* = 0$ şartını gerçekler. Burada $\vec{b}^* = \vec{x} \times \vec{b}$ olur (Müler 1963).

Tanım 2.4.2 (Lineer Işın Kompleksi)

$\vec{A}$ has bir dual vektör olmak üzere

$$\langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

denklemini sağlayan $\vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x}^*$ doğrularının cümlesine bir lineer ışın kompleksi denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.4.3

$\vec{A}$ has dual vektörünün

$$U = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \vec{u} + \varepsilon \vec{u}^*$$

eksenine lineer ışın kompleksinin ekseni denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.4.4

$\vec{A}$ has dual vektörünün

$$k = \frac{\langle \vec{a}, \vec{a}^* \rangle}{\|\vec{a}\|^2}$$

adımına lineer ışın kompleksinin adımı denir (Hacısalıhoğlu 1983).

Teorem 2.4.1

Lineer bir ışın kompleksine bir helis hareketi, tersine olarak bir helis hareketine, lineer bir ışın kompleksi bağlıdır. Kompleksin ekseni helisin ekseni ile çakışır, kompleksin ve helis hareketinin adımları aynıdır. Lineer bir kompleksin (∞^3) sayıdaki ışınları $\mathbb{R}^3$ ün helis hareketine uyan noktalarındaki yörünge normallerinin bütününden oluşur (Hacısalıhoğlu 1983).

Tanım 2.4.5 (Lineer Doğru Kongrüansı)

$\vec{A}, \vec{B}$ has dual vektörleri için

$$F... \langle \vec{a}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{a}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

$$\phi... \langle \vec{b}, \vec{x}^* \rangle + \langle \vec{b}^*, \vec{x} \rangle = 0$$

D enklemlerini sağlayan $\vec{X}$ doğrularının cümlesine lineer ışın kongrüansı denir (Hacısalıhoğlu 1980).

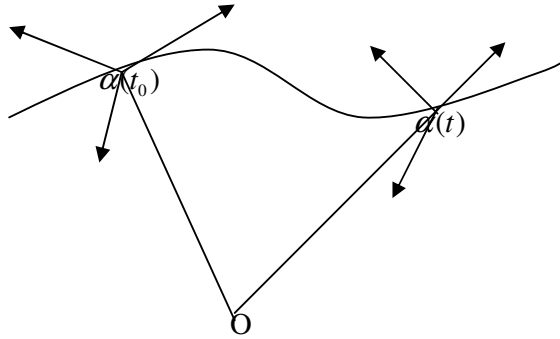
Bağımsız parametrelere u ve v denirse $\vec{X}$ birim dual vektörü u ve v reel parametrelerinin $\vec{X} = \vec{x}(u, v) + \varepsilon \vec{x}^*(u, v)$ şeklinde bir fonksiyonu olarak yazılabilir.

3.HOMOTETİK HAREKETLER

Bu bölümde hareket, 1-parametrelili hareket, homotetik hareket, 1-parametrelili homotetik hareket kavramları verilmiştir ve ani homotetik hareketlerin hız vektörleri incelenmiştir. Daha sonra lineer vektör alanları verilerek spiral vektör alanları tanıtılmıştır. Arkasından homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebiri verilerek $Sd(3)$ üzerinde Lie çarpımı ve $Sd(3)$ Lie cebirinin yapı sabitleri hesaplanmıştır.

3.1 Hareket

Sabit uzayı R , hareketli uzayı R_0 ile gösterirsek o zaman R_0 ın R ye göre hareketi R_0/R ile göstereceğiz.



Şekil 3.1.1 (Hareket)

R_0/R hareketi;

$$\begin{array}{ccc} \Psi: E^n & \longrightarrow & E^n \\ X & \longrightarrow & Y=AX+C \end{array} \quad \text{şeklindeki } \Psi \text{ izometrisi ile temsil}$$

edilir. Ψ 'nin matrisel ifadesi $A \in O(n)$, $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek 3.1.1

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ ortogonal matris olmak üzere;}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & a \\ \sin \theta & \cos \theta & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = (a, b), Y = (x', y'), X = (x, y)$$

$$Y = (x \cos \theta - y \sin \theta + a, x \sin \theta + y \cos \theta + b)$$

3.2 Bir Parametrelili Hareket

$$\begin{array}{ccc} f_t: E^n & \longrightarrow & E^n \\ X & \longrightarrow & Y = A(t)X + C(t) \end{array} \quad (t \in J \subset \mathbb{R}, A(t) \in SO(n), C(t) \in \mathbb{R}_1^n)$$

dönüşüme bir parametrelili hareket denir. Dönüşümün matrisel ifadesi;

$$f_t = \begin{bmatrix} A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek 3.2.1

$$\begin{array}{ccc} f_\theta: E^2 & \longrightarrow & E^2 \\ (x, y) & \longrightarrow & (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$f_{\theta}(1,0)=(\cos \theta, \sin \theta)$ birim çember,

$f_{\theta}(1,1)=(\cos \theta - \sin \theta, \sin \theta + \cos \theta)$ çember.

Örnek 3.2.2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{bmatrix} \text{ bir parametrelili dönme matrisi olmak üzere;}$$

$$f_t: E^3 \rightarrow E^3$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{-2t}{1+t^2} & b \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.3 Homotetik Hareket

$$\begin{array}{ccc} \Psi: E^n & \longrightarrow & E^n \\ X & \longrightarrow & Y = (hA)X + C \end{array} \quad \text{ile belirli dönüşüme } E^n \text{ de bir homotetik hareket}$$

Örnek3.3.1

$$f_t: E^3 \rightarrow E^3$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & a \\ 0 & 3\frac{1-t^2}{1+t^2} & 3\frac{-2t}{1+t^2} & b \\ 0 & 3\frac{2t}{1+t^2} & 3\frac{1-t^2}{1+t^2} & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Bir Parametrelili Homotetik Hareket

$$\begin{array}{ccc} \Psi: E^n & \longrightarrow & E^n \\ X & \longrightarrow & Y = (h(t)A(t))X + C(t) \end{array} \quad \text{ile belirli dönüşüme } E^n \text{ de bir parametrelili}$$

homotetik hareket denir. Burada $t \in J \subset \mathbb{R}$, $A(t) \in SO(n)$, $C(t) \in \mathbb{R}_1^n$, $h(t) \in \mathbb{R}^+$ dir.

Dönüşümün matrisel ifadesi;

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(t)A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Örnek3.4.1

$$\begin{array}{ccc} f_t: E^2 & \longrightarrow & E^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & (1+t)(x \cos t - y \sin t, x \sin t + y \cos t) \end{array}$$

Örnek 3.4.2

$$\begin{array}{ccc} f_t: E^2 & \longrightarrow & E^2 \\ (x,y) & \longrightarrow & e^t (\cos t, \sin t) \end{array}$$

Örnek 3.4.3

$$E^3 \text{ de } A = \begin{bmatrix} \frac{-r \sin t}{\sqrt{r^2 + k^2}} & -\cos t & \frac{k \sin t}{\sqrt{r^2 + k^2}} \\ \frac{r \cos t}{\sqrt{r^2 + k^2}} & -\sin t & \frac{-k \cos t}{\sqrt{r^2 + k^2}} \\ \frac{k}{\sqrt{r^2 + k^2}} & 0 & \frac{r}{\sqrt{r^2 + k^2}} \end{bmatrix} \text{ ortogonal matrisi alınabilir.}$$

$$f_\theta : E^3 \rightarrow E^3$$

$$(x, y, z) \rightarrow e^\theta \left(\frac{-r \sin \theta}{\sqrt{k^2 + r^2}} x + y \cos \theta + \frac{k \sin \theta}{\sqrt{k^2 + r^2}} z, \frac{-r \cos \theta}{\sqrt{k^2 + r^2}} x + y \sin \theta + r \frac{-k \cos \theta}{\sqrt{k^2 + r^2}} z, \frac{k}{\sqrt{k^2 + r^2}} x + \frac{r}{\sqrt{k^2 + r^2}} z \right)$$

Şimdi homotetik hareket için mutlak hız, sürüklenme hızı ve rölatif hız kavramlarını verelim.

$$F_t(X) = \begin{bmatrix} h(t)A(t) & C(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{ifadesinde} \quad h \quad \text{bir} \quad \text{skalar} \quad \text{olduğundan}$$

$$h^{-1} = \frac{1}{h}, \quad h^T = h$$

dir. $B = hA$ denirse

$$B^{-1} = h^{-1}A^{-1} = \frac{1}{h}A^T$$

elde edilir. Bir $X \in E^n$ için $F_t(X)$ noktalarının geometrik yeri E^n de bir eğridir. Bu eğriyi (Y_t) ile göstereceğiz. $Y_t = F_t(X)$ dir.

$$F_t(X) = BX + C$$

eşitliğinden t ye göre türev alınırsa

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dB}{dt} X + B \frac{dX}{dt} + \frac{dC}{dt}$$

elde edilir.

Tanım 3.4.1 (Mutlak Hız, Sürüklenme Hızı, Rölatif Hız)

$Y = BX + C$ hareketi için ifadesi için

$$\frac{dY}{dt} = \frac{dB}{dt} X + B \frac{dX}{dt} + \frac{da}{dt}$$

ifadesindeki $\frac{dY}{dt}$ ye hareketin mutlak hızı , $\frac{dB}{dt} X + \frac{da}{dt}$ ye sürüklenme hızı , $B \frac{dX}{dt}$ ye de hareketin rölatif hızı denir (Hacısalıhoğlu 1971).

Teorem 3.4.1

$Y = BX + C$ bir homotetik hareket ise $\det\left(\frac{dB}{dt}\right) \neq 0$ dır (Hacısalıhoğlu 1971).

Teorem 3.4.2

n-boyutlu Öklid uzayı E^n in homotetik hareketleri her n için regüler hareketlerdir (Hacısalıhoğlu 1971).

3.5 Homotetik Hareketlerinin Hız Vektörleri

Bu bölümde H.Potmann, I-K.Lee and T.Randrup Reconstruction of Kinematic Surfaces from Scattered Data ve B.Odehnal, H.Pottmann, J.Wallner Equiform Kinematics and The Geometry of Line Elements adlı makaleleri tanıtılmıştır.

Bu bölüm lineer parçası afin dönüşüm olan ortogonal dönüşümden ve homotetik dönüşümden düzenlenmiş benzerlik hareketini tanımlar.

R_0 ve R 3-boyutlu öklid uzayının elemanları olsun ve $\bar{x}_0 \in R_0, \bar{x} \in R$ olsun. R_0 hareketli uzayının $x_0 \in R_0$ noktasının t anındaki R sabit uzayına göre hareketi;

$$(3.5.1) \quad x(t) = \lambda(t)A(t)x_0 + a(t) \text{ dir (H.Pottman, I-K.Lee 1998).}$$

$$x(t) = \lambda(t)A(t)x_0 + a(t) \text{ ise;}$$

$x_0 = \frac{A^{-1}(t)}{\lambda(t)}x(t) - \frac{A^{-1}(t)}{\lambda(t)}a(t)$ dir. Kısaca $x_0 = \frac{A^{-1}}{\lambda}x - \frac{A^{-1}}{\lambda}a$ olarak ele alacağız. Buna göre;

$$\dot{x}(t) = \dot{a}(t) + \dot{\lambda}(t)A(t)x_0 + \lambda(t)\dot{A}(t)x_0 \text{ dır. Türevde } x_0 \text{ ın değerini yerine yazarsak ,}$$

$$\dot{x} = \dot{a} + \dot{\lambda}A\left(\frac{A^{-1}}{\lambda}x - \frac{A^{-1}}{\lambda}a\right) + \lambda\dot{A}\left(\frac{A^{-1}}{\lambda}x - \frac{A^{-1}}{\lambda}a\right)$$

$$\dot{x} = \dot{a} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}AA^{-1}x - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}AA^{-1}a + \frac{\lambda}{\lambda}\dot{A}A^{-1}x - \frac{\lambda}{\lambda}\dot{A}A^{-1}a$$

$$\dot{x} = \dot{a} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}x - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}a + \dot{A}A^T x - \dot{A}A^T a \text{ dır. } (A^T = A^{-1})$$

$$\dot{x} = \underbrace{\dot{a} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}a - \dot{A}A^T a}_{\bar{c}} + \underbrace{\frac{\dot{\lambda}}{\lambda}x}_{\gamma} + \underbrace{\dot{A}A^T x}_C$$

$$(3.5.2) \quad \dot{x} = v(x) = \bar{c} + \gamma x + C.x$$

Bu ifade hız vektör alanları için iyi bilinen Öklid durumuna benzer. Bu Lie dönüşüm gruplarından herhangi $(c, \bar{c}, \gamma) \in \mathbb{R}^7$ üçlüsü bir tek benzerlik hareketini tanımlar.

Bu hareket benzerlik hareketinin bir parametrelili alt grubudur.

$$\left(C = \dot{A} A^T, \gamma = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}, \bar{c} = \dot{a} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} a - \dot{A} A^T a \right)$$

$$\begin{aligned} C &= \dot{A} A^T & A A^T &= I_n \\ C^T &= (A^T)^T (\dot{A})^T & \dot{A} A^T + A (\dot{A})^T &= 0 \\ C^T &= A (\dot{A})^T & A (\dot{A})^T &= \underbrace{-\dot{A} A^T}_{-C} \end{aligned}$$

$\Rightarrow C^T = -C$ olduğundan C antisimetrik bir matristir. Bundan dolayı bir c vektörü kullanarak $C.x$ yerine $\vec{c} \times \vec{x}$ yazabiliriz. Böylece $\dot{x} = v(x) = \bar{c} + \gamma x + \vec{c} \times \vec{x}$ elde ederiz. Burada $(A(t), a(t), \gamma(t))$ benzerlik hareketinin bir parametrelili alt grubudur ve $(c, \bar{c}, \gamma) \in \mathbb{R}^7$ bu benzerlik hareketini tek türlü olarak tanımlar.

$A(t)$ t anındaki dönmeyi,

$a(t)$ t anındaki ötelemeyi,

$\gamma(t)$ benzerlik oranını verir.

$(c, \bar{c}, \gamma)$ yı sabitleyerek sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem çözümü;

$\dot{x} = D.x + \bar{c}$ olarak bulunur. Gerçekten çözümü $x(0) = x_0$ sınır koşulu ile ve üstel matrisi ile açıkça bulunabilir.

$$x(t) = s(t) + e^{Dt} . x_0 ,$$

$$s(t) = e^{Dt} . D^{-1} . \bar{c} - e^{Dt} . D^{-1} . e^{-Dt} . \bar{c}$$

$$\dot{x} = D.x + \bar{c} \Rightarrow \begin{cases} Dx = \gamma x + c \times x \\ Dx = \gamma x + Cx \\ Dx = (\underbrace{\gamma I + C}_D) x \end{cases} \Rightarrow D = \gamma I + C$$

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{Dt} . D^{-1} . \bar{c} - e^{Dt} . D^{-1} . e^{-Dt} . \bar{c} + e^{Dt} . x_0 \\
\dot{x}(t) &= D e^{Dt} D^{-1} \bar{c} - D e^{Dt} D^{-1} e^{-Dt} \bar{c} + e^{Dt} D^{-1} D e^{-Dt} \bar{c} + D e^{Dt} x_0 \\
\dot{x}(t) &= D \underbrace{(e^{Dt} D^{-1} \bar{c} - e^{Dt} D^{-1} e^{-Dt} \bar{c} + e^{Dt} x_0)}_x + \bar{c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= D . x + \bar{c} & D &= \gamma I + C \\
x(t) &= s(t) + e^{Dt} . x_0 & Dt &= \gamma(t) + C(t) \quad \text{olmak üzere;}
\end{aligned}$$

$$e^{Dt} = e^{\begin{bmatrix} \gamma(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma(t) \end{bmatrix}} . e^{Ct}$$

$$e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} e^{Ct} \end{bmatrix}$$

$$e^{Dt} = e^{\gamma} . I_3 . \begin{bmatrix} e^{Ct} \end{bmatrix}$$

$$e^{Dt} = \lambda(t) . A(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = [\lambda(t) . A(t)] x_0 + s(t)$$

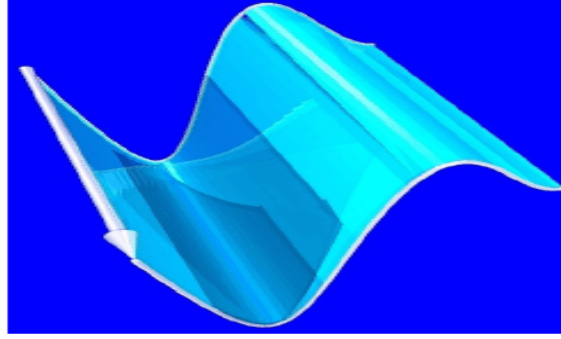
$$= e^{Dt} x_0 + s(t)$$

Şimdi $(c, \bar{c}, \gamma) \in \mathbb{R}^7$ için benzerlik hareketinin bir parametrelili alt grubunun karşılık geldiği dönüşümlere bakalım ve homotetik hareketlerin yörüngelerinin çizdiği yüzeyleri inceleyelim.

1.Durum $\gamma = 0$, λ (sabit) $\neq 0$ olduğunda üç durum vardır.

a.)

$$c = 0, \bar{c} \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} v(x) = \bar{c} + \gamma x + c \times x \\ v(x) = \bar{c} \end{cases} \Rightarrow \text{sadece öteleme var.}$$



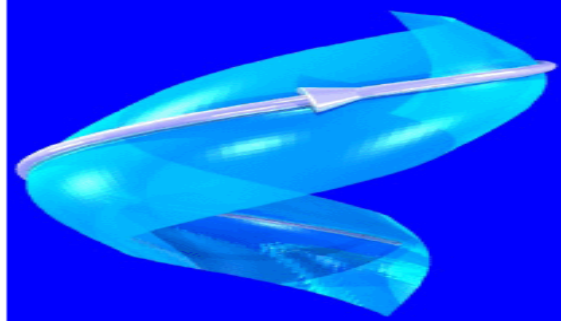
Şekil 3.5.1 (Homotetik hareketin yörüngesinin oluşturduğu silindirel yüzey)

Örnek 3.5.1

$$A(t) = E^3, a(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v(t) \end{bmatrix}, \lambda(t) = 1$$

b.) $c \neq 0, \bar{c} \neq 0$ Öklid geometrisindeki helis elde edilir.

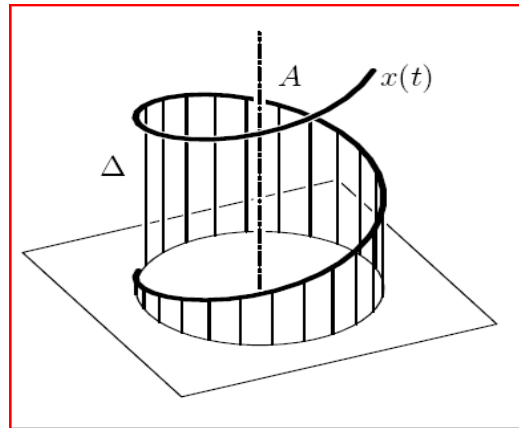
$\Rightarrow$ dönme ve öteleme var.



Şekil 3.5.2 (Homotetik hareketin yörüngesinin oluşturduğu helisel yüzey)

Örnek3.5.2

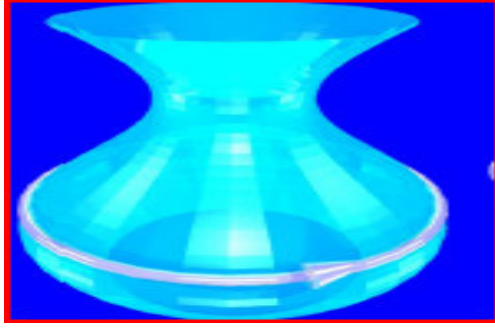
$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ v(t) \end{bmatrix}, \lambda(t) = 1$$



Şekil 3.5.3 (Helisel hareket)

c.) $c \neq 0, \quad \bar{c} \cdot \bar{c} = 0$

$\Rightarrow$ helisel hareket ötelemesiz.



Şekil3.5.4 (Homotetik hareketin oluşturduğu dönelyüzey)

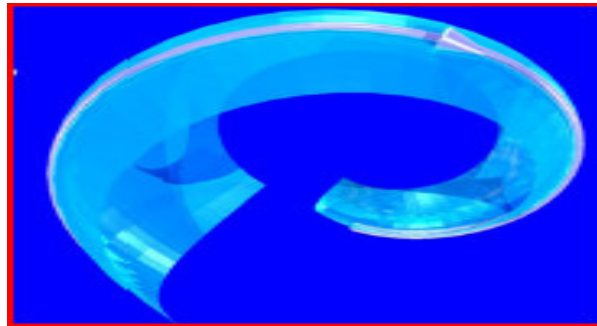
2. Durum $\gamma \neq 0$ ise iki durum vardır.

a.)

$c \neq 0$ ise spiral harekettir.

Örnek 3.5.3

$$A(t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t & 0 \\ \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, a(t) = 0, \lambda(t) = e^{\gamma t}$$



Şekil 3.5.5 (Homotetik hareketin yörüngesinin oluşturduğu spiral yüzeyi)

Dönme ve benzerlik katı var.

$z(v(z)=0)$ spiralin merkezi; A , c vektörü yönünde spiral eksen; $\sigma = \frac{\gamma}{\|c\|}$ spiralin parametresidir.

$$x(t) = a(t) + \lambda(t)A(t)x_0$$

$$x(t) = 0 + e^{\eta} [A(t)] [x_0]$$

Bu hareket bir spiraldir. Bir parametrelili alt grubun dönme yörüngeleri spiral yüzeylerdir. Bu spiral yüzeyler deniz kabuklarında görülen sabit ölçülü yönlendirilmiş eğilimlere benzer.

b.)

$c = 0$, $z = -\frac{\bar{c}}{\gamma}$, noktaların yörüngeleri z ye doğru çizgilerdir.

Örnek 3.5.4

$$A(t) = I_3$$

$$\lambda(t) = e^{\eta}$$

$$a(t) = 0$$



Şekil 3.5.6 (Homotetik hareketin yörüngesinin oluşturduğu Konikal yüzey)

3.6 Lineer Vektör Alanları

Bu bölümde

$$\begin{aligned} \dot{x} = v(x) &= \bar{c} + \gamma x + C.x = [\gamma I_3 + C]x + \bar{c} \\ &\equiv \begin{bmatrix} \gamma I_3 + C & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

vektör alanlarının yörüngelerinin farklı şekilde incelenmesi ele alınmıştır.

3.6.1 E^3 de lineer vektör alanları

Teorem 3.6.1.1

X, E^3 de bir lineer vektör alanı ve E^3 ün bir $\{O; u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal çatısına göre matrisi

$$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & 0 & a \\ \lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{rank}[AC] = 3$$

şeklinde yazılabilir.

Bu durumda X lineer vektör alanı $\forall p = (x, y, z) \in E^3$ için

$$\begin{bmatrix} X(P) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}$$

yada

$$= \begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & a \\ -\lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X(P) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, c)$$

olarak bulunur. Diğer yandan, E^3 de

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

eğrisini ele alalım. α nın X vektör alanının integral eğrisi olabilmesi için

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

diferensiyel denklemini sağlaması gerekir. Bu diferensiyel denkleminin $p = (x, y, z)$

başlangıç şartlı integral eğrisi $\alpha(t) = p$, $X(p) = (\lambda y + a, -\lambda x + b, c)$ için

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(P)$$

diferensiyel denkleminin çözüm eğrisidir. Yani

$$\frac{dx}{dt} = \lambda y + a$$

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda x + b$$

$$\frac{dz}{dt} = c$$

diferensiyel denklem sistemidir. Bu denklem sistemini basitleştirmek amacıyla

$\lambda = 1$ almamız genelliği bozmaz. Bu durumda X in integral eğrisi

$$\alpha(t) = (A \sin t - B \cos t + b, A \cos t + B \sin t - a, ct + d)$$

şeklinde elde edilir.

$\alpha(t)$ integral eğrileri $\forall A, B \in \mathbb{R}$ için değişen dairesel helis eğrileridir (Abolfazl 1989).

Şimdi $\text{rank}[AC] = 2$ durumuna bakalım. Bu durumda $c = 0$ ve $\lambda \neq 0$ olmalıdır. Yani X

lineer vektör alanı

$$\begin{bmatrix} 0 & \lambda & 0 & a \\ -\lambda & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olmalıdır.}$$

$c = 0$ olmak şartı ile

$$\frac{dx}{dt} = a + y$$

$$\frac{dy}{dt} = b - x$$

$$\frac{dz}{dt} = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Ve bu denklem sisteminin çözümü

$$\alpha(t) = (A \sin t - B \cos t + b, A \cos t + B \sin t - a, d)$$

olarak elde edilir. $\alpha(t)$ integral eğrileri çemberleri göstermektedir (Abolfazl 1989).

Son olarak $rank[AC] = 1$ olsun. Bu şartın sağlanabilmesi için $\lambda = 0$ olmalıdır. Bu durumda X lineer vektör alanının matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda

$$\frac{dx}{dt} = a$$

$$\frac{dy}{dt} = b$$

$$\frac{dz}{dt} = c$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümü

$$\alpha(t) = (at + d_1, bt + d_2, ct + d_3)$$

dır.

Bu $\alpha(t)$ integral eğrileri paralel doğruları gösterir.

3.6.2 E^{2n+1} de lineer vektör alanı

Teorem 3.6.2.1

X , E^{2n+1} de bir lineer vektör alanı ve X in bir $\{u_1, \dots, u_{2n+1}\}$ ortonormal çatısına göre

matrisi $\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. Burada $A \in \mathbb{R}_{2n+1}^{2n+1}$ bir antisimetrik matris, $C \in \mathbb{R}_1^{2n+1}$ bir kolon

matrisidir.

1. X in integral eğrileri, ortak eksenli aynı parametrelili, dairesel helis eğrileridir.
2. $\text{rank}[AC] = 2k$, $1 \leq k \leq n$ ise X in integral eğrileri, paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan çemberlerdir.
3. $\text{rank}[AC] = 1$ ise, X in integral eğrileri paralel doğrulardır (Abolfazl 1989).

3.7. E^3 Öklid Uzayında Spiral Vektör Alanları

Tanım 3.7.1

$$\phi : E^3 \rightarrow E^3$$

$$x \rightarrow \phi(x) = \lambda(t)g(t)x + c(t)$$

dönüşümüne bir parametrelili homotetik hareket denir. Burada $g(t) \in SO(3)$, $c(t) \in \mathbb{R}^3$ ve bu dönüşümün matrisel ifadesi;

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(t)g(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$A(t) = \begin{bmatrix} \lambda(t)g(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ formundaki 1-parametrelili matrisler, matris çarpımına}$$

göre bir grup oluşurlar. Bu grubu $SD(3)$ ile göstereceğiz. Yani,

$$SD(3) = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} \lambda g & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g \in SO(3), \lambda \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

dir. $SD(3)$ topolojik yapısıyla ele alındığında 7-boyutlu topolojik manifolddur. Bu durumda $SD(3)$ bir matris Lie grubudur. Bu gruba karşılık gelen Lie cebirini de $sd(3)$ ile gösterelim ve bu $sd(3)$ Lie cebirini bulalım;

$$A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda(t)} g^{-1}(t) & -\frac{1}{\lambda(t)} g^{-1}(t) c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve}$$

$$\dot{A}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}(t)g(t) + \lambda(t)\dot{g}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olduğundan,

$$\dot{A}(t)A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\lambda}(t)g(t) + \lambda(t)\dot{g}(t) & \dot{c}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda(t)} g^{-1}(t) & -\frac{1}{\lambda(t)} g^{-1}(t) c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} + \dot{g}(t)g^{-1}(t) & -\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} c(t) - \dot{g}(t)g^{-1}(t)c(t) + \dot{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada, $\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \gamma(t), \dot{g}(t)g^{-1}(t) = C(t)$ ve

$\bar{c}(t) = \dot{c}(t) - \gamma(t)c(t) + C(t)c(t)$ denirse,

$$\dot{A}(t)A^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \gamma(t)I_3 + C(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\omega} & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [\omega, c]$$

olarak elde ederiz. Burada, C antisimetrik matris, $\bar{\omega}, 3 \times 3$ tipinde bir matristir. Bu durumda, $SD(3)$ Lie grubunun $sd(3)$ Lie cebirini

$$sd(3) = \left\{ \begin{bmatrix} D & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C^T = -C, \bar{c} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

olarak elde ederiz. Burada $D = \gamma I_3 + C$ dir. Lie cebirinin elemanlar ile spiral vektör alanlar birebir eşlenirler.

Şimdi lineer vektör alanları ile ani homotetik hareketler arasındaki ilişkiyi verelim:

1-parametrelili homotetik harekette x noktasının yörüngesi;

$y(t) = \lambda(t)g(t)x + c(t)$ dir. Buradan türev alınır;

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{\lambda}(t)g(t)x + \lambda(t)\dot{g}(t)x + \dot{c}(t) \\ &= \left(\dot{\lambda}(t)g(t) + \lambda(t)\dot{g}(t) \right) x + \dot{c}(t) \\ &= \left(\dot{\lambda}(t)g(t) + \lambda(t)\dot{g}(t) \right) \left(\frac{1}{\lambda(t)} g^{-1}(t)(y(t) - c(t)) \right) + \dot{c}(t) \\ &= \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}(y(t) - c(t)) + \dot{g}(t)g^{-1}(t)(y(t) - c(t)) + \dot{c}(t) \\ &= \dot{c}(t) - \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}c(t) - \dot{g}(t)g^{-1}c(t) + \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}y(t) + \dot{g}(t)g^{-1}y(t) \\ &= \dot{c}(t) + \gamma(t)y(t) + C(t)y(t) \\ \dot{y}(t) &= [\gamma(t)I_3 + C(t)]y(t) + \dot{c}(t) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada, $\gamma(t)$ benzerlik oranını verir ve C antisimetrik bir matris olduğundan,

$C.y = \vec{c} \times \vec{y}$ olarak yazılabilir. Burada $(g(t), c(t), \gamma(t))$ benzerlik hareketinin bir parametrelili alt grubudur. $t = 0$ anındaki hız vektörü

$$\dot{y}(0) = [\gamma(0)I_3 + C(0)]y(0) + \dot{c}(0)$$

dir. Bu hız vektörünün matris formundaki ifadesi ise;

$$\begin{bmatrix} \dot{y}(0) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(0)I_3 + C(0) & \dot{c}(0) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y(0) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1) \text{ dir.}$$

3.7.1 E^3 Öklid uzayında spiral vektör alanlarının integral eğrileri

Y bir lineer vektör alanı olsun. Yani,

$$\begin{bmatrix} \dot{Y}(M) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(t)I_3 + C(t) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde olsun. Şimdi Y nin integral eğrilerini bulalım.

$$(Y /_{\alpha(t)} = \dot{\alpha}(t)), D = \gamma I_3 + C \text{ olmak üzere}$$

$\dot{Y}(t) = Dx + \bar{c}$, sabit katsayılı matris diferensiyel denkleminin $Y(0) = x$ başlangıç koşulu altındaki çözümü:

$$Y(t) = e^{Dt}x + \int_0^t e^{D(t-s)} \bar{c} ds$$

$$Y(t) = e^{Dt}x + e^{Dt} \int_0^t e^{-Ds} \bar{c} ds$$

$$Y(t) = e^{Dt}x - e^{Dt} \bar{c} D^{-1}(e^{-Dt} - 1)$$

$$Y(t) = e^{Dt}x - e^{Dt} \bar{c} D^{-1}e^{-Dt} + e^{Dt} \bar{c} D^{-1}$$

$$Y(t) = S(t) + e^{Dt}x$$

olarak elde edilir.

$$\begin{bmatrix} \gamma(0)I_3 + C(0) & \bar{c}(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ lineer vektör alanına karşılık gelen integral eğrisini bulmak}$$

demek, $t = 0$ anındaki hız vektörü (3.5.1) ile aynı olan ani harekette $y(0)$ noktasının yörüngesini bulmak demektir. Bu ani hareketi $y_1(t)$ ile gösterelim ve $y_1(0) = y(0)$ ani homotetik hareketi bulalım. Bu durumda,

$$\dot{y}_1(t) = D.y_1(t) + \bar{c}(t)$$

diferensiyel denklemini $y_1(0) = y(0) = x$ başlangıç şart altında çözersek,

$$y_1(t) = e^{Dt} y_1(0) + \int_0^t e^{D(t-s)} \bar{c} ds$$

$$y_1(t) = e^{Dt} y_1(0) - e^{Dt} \bar{c} D^{-1} e^{-Dt} + e^{Dt} \bar{c} D^{-1}$$

olarak elde edilir. Bu bir homotetik hareket tanımlar. Eğer $\gamma \neq 0$ ve $C \neq 0$ ise bu durumda hareket bir spiral hareket olarak adlandırılır. Bu hareketi

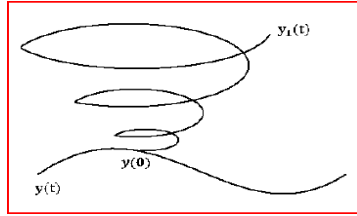
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma I_3 + C & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \exp \left\{ t \begin{bmatrix} \gamma I_3 + C & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $y_1(t)$ eğrisi $Y = \begin{bmatrix} \gamma I_3 + C & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ spiral vektör alanının integral

eğrisidir.



Şekil 3.7.1.1 (Ani Homotetik Hareket)

Özel olarak $\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \gamma = 0$ ise, bu durumda hareket bir katı cisim hareketidir.

$\begin{bmatrix} D & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ lineer vektör alanının integral eğrisi,

i) $rank[D, \bar{c}] = 3$ ise integral eğrileri, ortak eksenli aynı parametrelili helis eğrileridir.

- ii) $rank[D, \bar{c}] = 2$ ise integral eğrileri, paralel düzlemlerde kalan ve merkezleri bu paralel düzlemlere dik olan bir eksen üzerinde bulunan çemberlerdir.
- iii) $rank[D, \bar{c}] = 1$ ise integral eğrileri, paralel doğrulardır (Karger, Novak).

$\frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \gamma \neq 0, rank[D, \bar{c}] = 3$ ise integral eğrileri spiral eğrilerdir.

Örnek 3.7.1.1

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda = e^t, \quad \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \gamma = 1$$

$$\text{olmak üzere, } X = \begin{bmatrix} \gamma I_3 + C & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{spiral vektör alanının ele alalım.}$$

$$e^{tx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} = I + tx + \frac{t^2}{2!}x^2 + \frac{t^3}{3!}x^3 + \frac{t^4}{4!}x^4 \quad \text{den dolayı,}$$

$$e^{tx} = \begin{bmatrix} 1 + t - \frac{2t^3}{3!} - \frac{4t^4}{4!} + \dots & -t - \frac{2t^2}{2!} - \frac{2t^3}{3!} - \dots & 0 & 0 \\ t + \frac{2t^3}{2!} + \frac{2t^3}{3!} + \dots & 1 + t - \frac{2t^3}{3!} - \frac{4t^4}{4!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots & t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^t(e^{-it} + e^{it}) & \frac{1}{2}ie^t(e^{it} - e^{-it}) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}ie^t(e^{it} - e^{-it}) & \frac{1}{2}e^t(e^{-it} + e^{it}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & e^t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t \cos t & -e^t \sin t & 0 & 0 \\ e^t \sin t & e^t \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & e^t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^t & \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ e^t - 1 \end{vmatrix} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bulunur. e^{tx} ile 1-parametrelili homotetik hareket tanımlanabilir. Hareket bir noktanın yörüngesi spiral eğrisidir.

3.7.2 E^n Öklid uzayında spiral vektör alanları

Tanım 3.7.2.1

$$\phi : E^n \rightarrow E^n$$

$$x \rightarrow \phi(x) = \lambda(t)g(t)x + c(t)$$

dönüşümüne bir parametrelili homotetik hareket denir. Burada $g(t) \in SO(n), c(t) \in \mathbb{R}^n$ ve bu dönüşümün matrisel ifadesi;

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(t)g(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $A(t) = \begin{bmatrix} \lambda(t)g(t) & c(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ formundaki 1-parametrelili matrisler, matris

çarpımına göre bir

$$G = \left\{ A : A = \begin{bmatrix} \lambda g & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, g \in SO(n), \lambda \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^n \right\} \quad \text{grubunu oluřtururlar. } G \text{ bir Lie}$$

grubudur. Bu gruba karşılık gelen Lie cebirini de g ile gösterelim. O zaman

$$g = \left\{ \begin{bmatrix} W & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \gamma I_n + C = W \in \mathbb{R}_n^n, V \in \mathbb{R}_1^n \right\}$$

olarak elde edilir.

Tanım 3.7.2.2

$$Y : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$M \rightarrow Y(M) = W.M + V$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşüme spiral vektör alan denir. Burada

$$\gamma I_n + C = W \in \mathbb{R}_n^n, C \text{ antisimetrik, } V \in \mathbb{R}_1^n \text{ dir.}$$

Tanım 3.7.2.3

α, E^n de parametrik bir eğri

$$\alpha : I \rightarrow E^n$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$$

ve X, E^n üzerinde bir spiral vektör alan olmak üzere, $\forall t \in I$ için,

$$\frac{d\alpha}{dt} = X(\alpha(t))$$

ise, α eğrisine X spiral vektör alanının integral eğrisi denir.

1-parametrelili homotetik harekette x noktasının yörüngesi $y(t) = \lambda(t)g(t)x + c(t)$

dir. Buradan türev alınırşa;

$$\dot{y}(t) = [\gamma(t)I_3 + C(t)]y(t) + \bar{c}(t)$$

elde edilir. $t = 0$ anında hız vektörü,

$$\dot{y}(0) = [\gamma(0)I_3 + C(0)]y(0) + \bar{c}(0)$$

dir. Şimdi $y_1(0) = y(0) = M$ noktasındaki hız

$y_1(0) = y(0) = M$ başlangıç şartı altında çözersek,

$$\dot{y}_1(t) = Wy_1(t) + V(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ 1 \end{bmatrix} &= \exp \left\{ \begin{bmatrix} W & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda(t)g_1(t) & c_1(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $g_1(t) \in SO(n), c_1(t) \in \mathbb{R}^n$ dir. Bulunan $y_1(t)$ eğrisi $Y = \begin{bmatrix} W & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

spiral vektör alanının integral eğrisidir.

$Y; E^n$ de bir spiral vektör alan ve Y nin $\{o; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ ortonormal çatısına göre

matrisi $\begin{bmatrix} W & V \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olsun. Burada, $\gamma I_n + C = W \in \mathbb{R}_n^n, C$ antisimetrik, $V \in \mathbb{R}_1^n$ dir.

Bu durumda,

$rank[W, V] = n, Y$ nin integral eğrileri spirallerdir.

3.8 Bir Hareketin Türevi

Bu bölümde Homotetik hareketlerin Lie grubu ve Lie cebiri verilecektir. Bunun için McCarthy'nin An Intoduction to Theoretical Kinematics adlı kitabından matris grupları ve tanjant operatörleri ele alınmıştır.

3.8.1 Matris grupları

$n \times n$ tipinden $GL(n)$ ile gösterilen regüler matrislerin cümlesi matrislerde çarpma işlemine göre bir cebirsel gruptur (McCarthy 1990).

Tanım 3.8.1.1

Sürekli bir manifold aynı zamanda bir cebirsel gruptur ve grup çarpım işlemi sürekli ise bir Lie grubu olarak adlandırılır. Bu durumda $GL(n)$ bir Lie grubudur (McCarthy 1990).

Tanım 3.8.1.2

$GL(n)$ nin matris çarpımı altında cebirsel grup olan alt cümlelerine alt gruplar denir (McCarthy 1990).

$GL(n)$ nin iki alt grubu, $n \times n$ tipinden dönme matrislerinin cümlesi $SO(n)$ ve $n \times n$ tipinden homojen dönüşümlerinin cümlesi $H(n)$ dir.

$SO(n): [A^T A] = [I_n]$ ve $\det(A) = 1$ şartını sağlayan $[A]$ $n \times n$ tipinden matrislerin cümlesi $SO(n)$ bir Lie grubudur (McCarthy 1990).

Bir katı cismin sürekli hareketi,

$[T(t)]: \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$ olarak belirli dönüşümlerin parametrelendirilmiş bir cümlesidir.

Özellikle düzlemsel hareket $[T(t)]: \mathbb{R} \rightarrow H(3)$, Küresel hareket $[T(t)]: \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$

ve uzay hareketi $[T(t)]: \mathbb{R} \rightarrow H(4)$ ile belli olan hareketlerdir.

Genel olarak,

$[T(t)]: \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$

$$t \rightarrow T(t) = [t_{ij}(t)]$$

dönüşümleri $t_{ij}(t)$ elemanlarının her biri reel değişkenli sürekli bir fonksiyondur.

Ve bu matris fonksiyonunun $\left[\dot{T}(t) \right]$ türevi, $t_{ij}(t)$ elemanlarının her birinin türevi

alınarak oluşturulur (McCarthy 1990).

3.9 Tanjant Operatörü

$[T(t)]: \mathbb{R} \rightarrow GL(n)$ fonksiyonunun F de oluşturduğu $Y(t)=[T(t)]y$ noktalarının cümlesine Y nin yörüngesi denir (McCarthy 1990).

$t=t_0$ da $Y(t)$ yörüngesine teğet olan doğrultu $Y(t)$ nin türevidir.

$$\dot{Y}(t_0) = \left[\dot{T}(t_0) \right] y$$

$$\dot{Y}(t_0) = \left[\dot{T} T^{-1}(t_0) \right] y(t_0)$$

dir. Burada $\left[\dot{T} T^{-1} \right]$ matrisi, $Y(t)$ yörüngesi üzerindeki işlemle $\dot{Y}(t)$ türevini

hesaplar. Ayrıca $\left[\dot{T}(t) \right] = \left[\dot{T} T^{-1}(t) \right] [T(t)]$ olduğundan $\left[\dot{T} T^{-1} \right]$ matrisi $[T(t)]$

matrisinin türevini hesaplar.

Tanım 3.9.1

$\left[\dot{T} T^{-1} \right]$ matrisine $GL(n)$ üzerindeki tanjant operatör denir (McCarthy 1990).

Tanjant operatörler için tanımlanan özel bir işlem Lie çarpımıdır. $[T]$ ve $[S]$ tanjant operatörler olsunlar. Bu durumda $[T] \times [S] = [TS - ST]$ dir. Burada TS, T ile S nin matris çarpımıdır.

3.9.1 $SO(n)$ nin Tanjant operatörleri

Dönme matrislerinin tanjant operatörleri, $GL(n)$ uzayının tanjant operatörleri gibi tanımlanmıştır. Bununla birlikte, $GL(n)$ nin her tanjant operatörü $SO(n)$ nin tanjant operatörü değildir. $SO(n)$ nin tanjant operatörlerini belirleyen ayırıcı şart, bütün dönme matrislerinin sağlamak zorunda olduğudur.

$[AA^T(t)] = [I_n]$ bağıntısından elde edilmiştir. Her iki tarafın türevi alınarak ,

$\begin{bmatrix} \dot{A} A^T \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dot{A} A^T \end{bmatrix}^T$ elde edilir. Bu durumda $\begin{bmatrix} \dot{A} A^T \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dot{A} A^T \end{bmatrix} = [\Omega]$ tanjant operatörü antisimetriktr.

$[\Omega]$ matrisi, $[A(t)]$ dönme matrisinin açısal hız matrisi olarak bilinir (McCarthy 1990).

Üç boyutlu manifold olan $SO(3)$ uzay dönmelerinde, bir sabit açısal hız matrisi $[\Omega]$

verildiğinde, $\begin{bmatrix} \dot{A}(t) \end{bmatrix} = [\Omega][A(t)]$ matris diferensiyel denkleminin $[A(0)] = [I]$

başlangıç şartı altında çözümü,

$$A(t) = e^{t[\Omega]}$$

ile dönmelerin bir parametrelili grubunu elde ederiz (McCarthy 1990).

3.9.2 $H(n)$ nin Tanjant operatörleri

Homojen dönüşümlerin cümlesi $H(n)$ nin tanjant operatörleri, $GL(n)$ uzayının tanjant operatörleri gibi tanımlanmıştır. Bununla birlikte $GL(n)$ nin her tanjant operatörü $H(n)$ nin tanjant operatörü değildir. $H(n)$ nin tanjant operatörleri

$$\begin{bmatrix} \dot{T} T^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A} & \dot{d} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^T & -A^T d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{A} A^T & -\dot{A} A^T d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [\Omega]$$

İlişkisini sağlamalıdır. Burada $[T] = [A, d] = \begin{bmatrix} A & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dir.

Şimdi $H(4)$ ün

$\begin{bmatrix} \dot{T}(t) \end{bmatrix} = [S][T(t)]$ diferensiyel denkleminde elde edilen bir parametrelili alt gruplarını

incelersek $[S] = [\Omega, v]$ bir sabit matristir. $t=0$ anında sabit ve hareketli çatıların çakıştığını kabul ederek $[T(0)] = [I]$ başlangıç koşuluyla diferensiyel denkleminin

çözümü $[T(t)] = \exp(t[S])$

dir (McCarthy 1990).

3.9.3 Tanjant operatörüne karşılık gelen vektörler

$SO(3)$ ve $H(3)$ ün 3×3 tipinden matrislerle tanımlanan tanjant operatörlerindeki 9 tane elemandan sadece 3 tanesi bağımsızdır. Benzer şekilde $H(4)$ ün 4×4 tipinden matrislerle tanımlı tanjant operatörlerinin 16 elemandan sadece 6 tanesi bağımsızdır. $[\Omega]$, $SO(3)$ ün bir tanjant operatörü olsun. Vektör formu 3×3 tipinden $[\Omega]$ antisimetrik matrisinden elde edilen ω vektörüdür. Öyle ki $[\Omega]y = \omega \times y$ dir.

$$H(3) \text{ için, } [\omega, y] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & v_1 \\ \omega & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ şeklinde verilir. Bu durumda bağımsız bileşenleri}$$

3-boyutlu (ω, v_1, v_2) vektöründe, $H(4)$ 'ün bir $[S] = [\Omega, v]$ tanjant operatörü 6-boyutlu $S = (\omega, v)$ vektöründe toplayabiliriz (McCarthy 1990).

Tanım 3.9.3.1

$H(4)$ ün bir $[S] = [\Omega, v]$ tanjant operatöründen elde edilen operatörü 6-boyutlu $S = (\omega, v)$ vektörüne screw denir (McCarthy 1990).

$[T] \times [S] = [TS - ST]$ ile tanımlı Lie çarpımı bu tanjant operatörlerin her birine karşılık gelen vektörler için bir çarpım işlemi verir.

$SO(3)$ için $[C]$ ve $[\Omega]$ antisimetrik matrislerine karşılık gelen vektörler sırasıyla c ve ω ise o zaman $[C] \times [\Omega] = [C\Omega - \Omega C]$ Lie çarpımının elde edilen antisimetrik matrisine karşılık gelen vektör $c \times \omega$ dır. Gerçekten,

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } c = (a_1, a_2, a_3)$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \text{ ise } \omega = (x, y, z)$$

$$[C] \times [\Omega] = [C\Omega - \Omega C]$$

$$[C] \times [\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & a_2x - a_1y & a_3x - a_1z \\ -a_2x + a_1y & 0 & a_3y - a_2z \\ -a_3x + a_1z & -a_3y + a_2z & 0 \end{bmatrix}$$

antisimetrik bir matristir. Bu matrise karşılık gelen vektör

$(-a_3y + a_2z, a_3x - a_1z, -a_2x + a_1y)$ olup bu ise $c \times \omega$ vektörüdür. $H(n)$ homojen

dönüşümlerinin genel durumu için, $[R] = [C, r]$ ve $[S] = [\Omega, v]$ tanjant operatörlerinin

Lie çarpımı $[R] \times [S] = [C\Omega - \Omega C, [C]v - [\Omega]r]$ dir.

Özel olarak $H(3)$ için $[R] = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda & r_1 \\ \lambda & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $[S] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & v_1 \\ \omega & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ise

$$[R] \times [S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\lambda v_2 + \omega r_2 \\ 0 & 0 & \lambda v_1 - \omega r_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Lie çarpımına karşılık gelen vektör}$$

$(-\lambda v_2 + \omega r_2, \lambda v_1 - \omega r_1, 0)$ dir (McCarthy 1990).

$H(4)$ için $[R]=[C,r]$

$$[R]=\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 & r_1 \\ a_3 & 0 & -a_1 & r_2 \\ -a_2 & a_1 & 0 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$c=(a_1, a_2, a_3)$$

$$r=(r_1, r_2, r_3)$$

$$[S]=\begin{bmatrix} 0 & -z & y & v_1 \\ z & 0 & -x & v_2 \\ -y & x & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega=(x, y, z)$$

$$v=(v_1, v_2, v_3)$$

$[R] \times [S]$ Lie çarpımına karşılık gelen vektör,

$(c \times \omega, c \times v - \omega \times r)$ dir (McCarthy 1990).

3.10 Sd(3) Üzerinde Lie Çarpımı

$$Sd(3)=\left\{ \begin{bmatrix} \gamma I_3 + C & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\omega} & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\omega} & \bar{c} \end{bmatrix}, C^T = -C, \bar{c} \in R^3 \right\}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{\omega} & \bar{c} \end{bmatrix} = [S], \bar{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3), \bar{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -v_3 & v_2 & a_1 \\ v_3 & \lambda & -v_1 & a_2 \\ -v_2 & v_1 & \lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v} & \bar{a} \end{bmatrix} = [R], \bar{v} = (v_1, v_2, v_3), \bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

$$[S] \times [R] = [SR - RS]$$

$$\begin{bmatrix} \theta & -\omega_3 & \omega_2 & c_1 \\ \omega_3 & \theta & -\omega_1 & c_2 \\ -\omega_2 & \omega_1 & \theta & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & -v_3 & v_2 & a_1 \\ v_3 & \lambda & -v_1 & a_2 \\ -v_2 & v_1 & \lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & -v_3 & v_2 & a_1 \\ v_3 & \lambda & -v_1 & a_2 \\ -v_2 & v_1 & \lambda & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta & -\omega_3 & \omega_2 & c_1 \\ \omega_3 & \theta & -\omega_1 & c_2 \\ -\omega_2 & \omega_1 & \theta & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda\theta - \omega_3 v_3 - \omega_2 v_2 & -\theta v_3 - \lambda \omega_3 + \omega_2 v_1 & \theta v_2 + \omega_3 v_1 + \lambda \omega_2 & a_1 \theta - a_2 \omega_3 + a_3 \omega_2 \\ \lambda \omega_3 + \theta v_3 + \omega_1 v_2 & -\omega_3 v_3 + \lambda \theta - \omega_1 v_1 & \omega_3 v_2 - \theta v_1 - \lambda \omega_1 & a_1 \omega_3 + a_2 \theta - a_3 \omega_1 \\ -\lambda \omega_2 + \omega_1 v_3 - \theta v_2 & \omega_2 v_3 + \lambda \omega_1 + \theta v_1 & -\omega_2 v_2 - \omega_1 v_1 + \theta \lambda & -a_1 \omega_2 + a_2 \omega_1 + a_3 \theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \lambda\theta - v_3 \omega_3 - v_2 \omega_2 & -\lambda \omega_3 - \theta v_3 + v_2 \omega_1 & \lambda \omega_2 + v_3 \omega_1 + \theta v_2 & c_1 \lambda - c_2 v_3 + c_3 v_2 \\ \theta v_3 + \lambda \omega_3 + v_1 \omega_2 & -v_3 \omega_3 + \lambda \theta - v_1 \omega_1 & v_3 \omega_2 - \lambda \omega_1 - \theta v_1 & c_1 v_3 + c_2 \lambda - c_3 v_1 \\ -\theta v_2 + v_1 \omega_3 - \lambda \omega_2 & v_2 \omega_3 + \theta v_1 + \lambda \omega_1 & -v_2 \omega_2 - v_1 \omega_1 + \theta \lambda & -c_1 v_2 + c_2 v_1 + c_3 \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \omega_2 v_1 - v_2 \omega_1 & \omega_3 v_1 - v_3 \omega_1 & a_1 \theta - a_2 \omega_3 + a_3 \omega_2 - c_1 \lambda - c_2 v_3 + c_3 v_2 \\ \omega_1 v_2 - v_1 \omega_2 & 0 & \omega_3 v_2 - v_3 \omega_2 & a_1 \omega_3 + a_2 \theta - a_3 \omega_1 - c_1 v_3 + c_2 \lambda - c_3 v_1 \\ \omega_1 v_3 - v_1 \omega_3 & \omega_2 v_3 - v_2 \omega_3 & 0 & -a_1 \omega_2 + a_2 \omega_1 + a_3 \theta + c_1 v_2 - c_2 v_1 - c_3 \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\omega_2 v_3 - v_2 \omega_3, v_1 \omega_3 - \omega_1 v_3, \omega_1 v_2 - v_1 \omega_2)}_{\omega \times v} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ v_1 & v_1 & v_1 \end{vmatrix} = \omega \times v$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(a_3 \omega_2 - a_2 \omega_3, a_1 \omega_3 - a_3 \omega_1, a_2 \omega_1 - a_1 \omega_2)}_{\omega \times a} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \omega \times a$$

$$\begin{aligned}
\leftrightarrow \underbrace{(c_2v_3 - c_3v_2, c_3v_1 - c_1v_3, c_1v_2 - c_2v_1)}_{c \times v} &= \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = c \times v \\
&= -v \times c \\
\Rightarrow \theta(a_1, a_2, a_3) - \lambda(c_1, c_2, c_3) + (a_3\omega_2 - a_2\omega_3, a_1\omega_3 - a_3\omega_1, a_2\omega_1 - a_1\omega_2) + (c_2v_3 - c_3v_2, c_3v_1 - c_1v_3, c_1v_2 - c_2v_1) \\
&= (\omega \times v, \theta a - \lambda c + \omega \times a + c \times v) \\
&= (\omega \times v, \theta a - \lambda c + \omega \times a - v \times c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow [S] \times [R] &= [SR - RS] \\
&= (\omega \times v, \theta a - \lambda c + \omega \times a - v \times c)
\end{aligned}$$

3.11 $Sd(3)$ Lie Cebirinin Yapı Sabitleri

$sd(3)$ Lie cebirinin standart bazını elde edelim. $S \in sd(3)$ olarak alalım. Bu durumda

$$sd(3) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{H}_3 + C & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = C^T, \bar{c} \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$S = \begin{bmatrix} \bar{\omega} & \bar{c} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & -\omega_3 & \omega_2 & c_1 \\ \omega_3 & \theta & -\omega_1 & c_2 \\ -\omega_2 & \omega_1 & \theta & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \omega_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ c_1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \theta \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \omega_1 L_1 + \omega_2 L_2 + \omega_3 L_3 + c_1 L_4 + c_2 L_5 + c_3 L_6 + c_4 L_7 \text{ olarak yazılabilir.}$$

$$\Rightarrow sd(3) = Sp\{L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7\}$$

Tanım 3.11.1 $sd(3)$ Lie cebirinin baz vektörlerinin bracket çarpımı:

$$[L_i, L_j] = \sum_{k=1}^7 C_{ij}^k L_k$$

Şeklinde tanımlanabilir. Burada ki C_{ij}^k katsayılarına, **Lie cebirinin yapı sabitleri** denir.

C_{ij}^k yapı sabitleri arasında $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ bağıntısı vardır. (Sattinger , Weaver 1993)

Şimdi bu yapı sabitlerini elde edelim.

Özel olarak $i = 1$ ve $j = 1$ alalım. Bu durumda;

$$[L_1, L_1] = \sum_{k=1}^7 C_{11}^k L_k \text{ Bracket çarpımından } C_{11}^k \text{ ları elde ederiz.}$$

$$[L_1, L_1] = L_1 L_1 - L_1 L_1$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow C_{11}^1, C_{11}^2, C_{11}^3, C_{11}^4, C_{11}^5, C_{11}^6, C_{11}^7 = 0$$

Özel olarak $i = 3$ ve $j = 4$ alalım. Bu durumda ;

$$[L_3, L_4] = \sum_{k=1}^7 C_{34}^k L_k \text{ Bracket çarpımından } C_{34}^k \text{ ları elde ederiz}$$

$$[L_3, L_4] = L_3 L_4 - L_4 L_3$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L_5$$

$$\Rightarrow C_{34}^5 = 1, \quad C_{34}^1, C_{34}^2, C_{34}^3, C_{34}^4, C_{34}^6, C_{34}^7 = 0$$

Benzer yolla diğer yapı sabitleri de bulunabilir. Bu yapı sabitleri aşağıda verilmiştir.

$$C_{11}^1 = C_{11}^2 = C_{11}^3 = C_{11}^4 = C_{11}^5 = C_{11}^6 = C_{11}^7 = 0$$

$$C_{12}^3 = 1, \quad C_{12}^1 = C_{12}^2 = C_{12}^4 = C_{12}^5 = C_{12}^6 = C_{12}^7 = 0$$

$$C_{13}^2 = -1, \quad C_{13}^1 = C_{13}^3 = C_{13}^4 = C_{13}^5 = C_{13}^6 = C_{13}^7 = 0$$

$$C_{14}^1 = C_{14}^2 = C_{14}^3 = C_{14}^4 = C_{14}^5 = C_{14}^6 = C_{14}^7 = 0$$

$$C_{15}^6 = 1, \quad C_{15}^1 = C_{15}^2 = C_{15}^3 = C_{15}^4 = C_{15}^5 = C_{15}^7 = 0$$

$$C_{16}^5 = -1, \quad C_{16}^1 = C_{16}^2 = C_{16}^3 = C_{16}^4 = C_{16}^6 = C_{16}^7 = 0$$

$$C_{17}^1 = C_{17}^2 = C_{17}^3 = C_{17}^4 = C_{17}^5 = C_{17}^6 = C_{17}^7 = 0$$

$$C_{22}^1 = C_{22}^2 = C_{22}^3 = C_{22}^4 = C_{22}^5 = C_{22}^6 = C_{22}^7 = 0$$

$$C_{21} = -C_{21}$$

$$C_{23}^1 = 1 \quad , \quad C_{23}^2 = C_{23}^3 = C_{23}^4 = C_{23}^5 = C_{23}^6 = C_{23}^7 = 0$$

$$C_{24}^6 = -1 \quad , \quad C_{24}^1 = C_{24}^2 = C_{24}^3 = C_{24}^4 = C_{24}^5 = C_{24}^7 = 0$$

$$C_{25}^1 = C_{25}^2 = C_{25}^3 = C_{25}^4 = C_{25}^5 = C_{25}^6 = C_{25}^7 = 0$$

$$C_{26}^4 = 1 \quad , \quad C_{26}^1 = C_{26}^2 = C_{26}^3 = C_{26}^5 = C_{26}^6 = C_{26}^7 = 0$$

$$C_{27}^1 = C_{27}^2 = C_{27}^3 = C_{27}^4 = C_{27}^5 = C_{27}^6 = C_{27}^7 = 0$$

$$C_{33}^1 = C_{33}^2 = C_{33}^3 = C_{33}^4 = C_{33}^5 = C_{33}^6 = C_{33}^7 = 0$$

$$C_{31} = -C_{13}$$

$$C_{32} = -C_{23}$$

$$C_{34}^5 = 1 \quad , \quad C_{34}^1 = C_{34}^2 = C_{34}^3 = C_{34}^4 = C_{34}^6 = C_{34}^7 = 0$$

$$C_{35}^4 = -1 \quad , \quad C_{35}^1 = C_{35}^2 = C_{35}^3 = C_{35}^4 = C_{35}^5 = C_{35}^7 = 0$$

$$C_{36}^1 = C_{36}^2 = C_{36}^3 = C_{36}^4 = C_{36}^5 = C_{36}^6 = C_{36}^7 = 0$$

$$C_{37}^1 = C_{37}^2 = C_{37}^3 = C_{37}^4 = C_{37}^5 = C_{37}^6 = C_{37}^7 = 0$$

$$C_{44}^1 = C_{44}^2 = C_{44}^3 = C_{44}^4 = C_{44}^5 = C_{44}^6 = C_{44}^7 = 0$$

$$C_{41} = -C_{14}$$

$$C_{42} = -C_{24}$$

$$C_{43} = -C_{34}$$

$$C_{45}^1 = C_{45}^2 = C_{45}^3 = C_{45}^4 = C_{45}^5 = C_{45}^6 = C_{45}^7 = 0$$

$$C_{46}^1 = C_{46}^2 = C_{46}^3 = C_{46}^4 = C_{46}^5 = C_{46}^6 = C_{46}^7 = 0$$

$$C_{47}^4 = -1, \quad C_{47}^1 = C_{47}^2 = C_{47}^3 = C_{47}^5 = C_{47}^6 = C_{47}^7 = 0$$

$$C_{55}^1 = C_{55}^2 = C_{55}^3 = C_{55}^4 = C_{55}^5 = C_{55}^6 = C_{55}^7 = 0$$

$$C_{51} = -C_{15}$$

$$C_{52} = -C_{15}$$

$$C_{53} = -C_{35}$$

$$C_{54} = -C_{45}$$

$$C_{56}^1 = C_{56}^2 = C_{56}^3 = C_{56}^4 = C_{56}^5 = C_{56}^6 = C_{56}^7 = 0$$

$$C_{57}^6 = -1, \quad C_{57}^1 = C_{57}^2 = C_{57}^3 = C_{57}^4 = C_{57}^5 = C_{57}^7 = 0$$

$$C_{66}^1 = C_{66}^2 = C_{66}^3 = C_{66}^4 = C_{66}^5 = C_{66}^6 = C_{66}^7 = 0$$

$$C_{61} = -C_{16}$$

$$C_{62} = -C_{26}$$

$$C_{63} = -C_{36}$$

$$C_{64} = -C_{46}$$

$$C_{65} = -C_{56}$$

$$C_{67}^6 = -1, \quad C_{67}^1 = C_{67}^2 = C_{67}^3 = C_{67}^4 = C_{67}^5 = C_{67}^7 = 0$$

$$C_{77}^1 = C_{77}^2 = C_{77}^3 = C_{77}^4 = C_{77}^5 = C_{77}^6 = C_{77}^7 = 0$$

$$C_{71} = -C_{17}$$

$$C_{72} = -C_{27}$$

$$C_{73} = -C_{37}$$

$$C_{74} = -C_{47}$$

$$C_{75} = -C_{57}$$

$$C_{76} = -C_{67}$$

4. DOĞRU ELEMANLARININ PLÜCKER KOORDİNATLARI

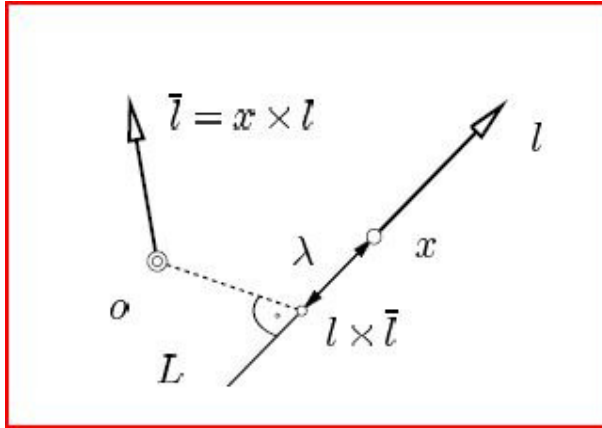
Bu bölümde B.Odehnall, H.Pottmann, J.Wallner in Equiform Kinematics and Line Elements adlı makalesi tanıtılmıştır.

$\dot{x} = v(x) = \bar{c} + \gamma x + C.x$ ifadesinde Lie dönüşüm gruplarından herhangi $(c, \bar{c}, \gamma) \in \mathbb{R}^7$ üçlüsü bir tek benzerlik hareketini tanımlar. Bu hareket, benzerlik hareketinin bir parametrelili alt grubudur. Homotetik hareketlerin devamı olan ani hareketlerde karşılaşılan doğruların $(l, \bar{l}, \lambda) \in \mathbb{R}^7$ doğru elemanlarına modellenmesini ele alacağız.

L 3-boyutlu Öklid uzayında x noktasından geçen bir doğru olsun. $(L, x) \in \mathbb{R}^3$ doğru elemanlarının koordinatlarını düzenlemek için Plücker koordinatlarının benzer tanımlarını veriyoruz.

Tanım 4.1.

Eğer $l \neq 0$ ve $l \perp L$, $\bar{l} = x \times l$ ve $\lambda = \langle x, l \rangle$ ise $(l, \bar{l}, \lambda) \in \mathbb{R}^7$ üçlüsüne $(L, x) \in \mathbb{R}^3$ doğru elemanlarının Plücker koordinatları denir. Burada $\bar{l}$, l nin vektörel momenti 7. koordinat olarak $\lambda = \langle x, l \rangle$ yı x in L üzerindeki yerel noktasını düzenlemek için ekliyoruz. Böylece doğru elemanları $(l, \bar{l}, \lambda) \in \mathbb{R}^7$ olur.



Şekil 4.1. (Doğru elemanları)

Açıkça bu koordinatlar homojen koordinatlardır ve aşağıdaki denklemi elde etmek basittir.

$$(4.1.) \quad x = p(l, \bar{l}) + \frac{\lambda}{\langle l, l \rangle} l \dots (I), \quad p(l, \bar{l}) = \frac{1}{\langle l, l \rangle} l \times \bar{l} \dots (II)$$

$p(l, \bar{l})$ yi (I) de yerine yazarsak,

$$x = \frac{1}{\langle l, l \rangle} l \times \bar{l} + \frac{\lambda}{\langle l, l \rangle} l \quad l \text{ yönlendirilmiş (birim paralel) vektör, } \langle l, l \rangle = 1$$

$$x = l \times \bar{l} + \lambda l$$

elde edilir.

Burada $p(l, \bar{l})$ orijinden L üzerine indirilen dikmenin ayağıdır. Eğer doğru yönlendirilmişse doğru elemanı da yönlendirilmiş olur. Koordinatlarda

$(l, \bar{l}, \lambda)$ ve $\mu(l, \bar{l}, \lambda)$ yi benzer düşüneceğiz $\Leftrightarrow \mu > 0$ ya da $\|l\| = 1$ kısıtlaması varsa.

$x(t) = \lambda(t)A(t)x_0 + a(t)$ Benzerlik dönüşümü $(l, \bar{l}, \lambda)$ doğru elemanlarını

$$x' = \alpha Ax + a$$

$$l' = Al$$

denklemleri ile birlikte

$$\bar{l}' = x' \times l'$$

$$\lambda' = \langle x', l' \rangle$$

$(l', \bar{l}', \lambda')$ doğru elemanlarına dönüştürür.

Bu dönüşümün blok matris formu;

$$(4.2.) \quad \begin{bmatrix} l' \\ \bar{l}' \\ \lambda' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ A^\times A & \alpha A & 0 \\ a^T A & 0^T & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ \bar{l} \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (A^\times A = a \times x)$$

dir.

$$\begin{aligned}
\bar{l}' &= x' \times l' = (\alpha Ax + a) \times (Al) \\
&= \alpha(Ax) \wedge (Al) + a \wedge (Al) \quad , l' = Al \\
&= a \wedge (Al) + \alpha(Ax) \wedge (Al)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda' &= \langle x', l' \rangle \\
&= \langle \alpha Ax + a, Al \rangle \\
&= \alpha \langle Ax, Al \rangle + \langle a, Al \rangle \quad , A \in O(n) \text{ (izometri)} \\
&= \alpha \langle x, l \rangle + a^T Al \quad , \langle Ax, Al \rangle = \langle x, l \rangle \\
&= \alpha \lambda + a^T Al \quad , \langle a, Al \rangle = a^T Al
\end{aligned}$$

dir.

(4.2.) denklemi açıkça yönlendirilmiş doğru elemanını sağlar.

4.1 $l, \bar{l}, \lambda$ nın Geometrik Yorumu

$(L, x) = (l, \bar{l}, \lambda)$ doğru elemanlarının cümlesi l, λ (sabit) ile birlikte $l // L$ olacak şekilde tanımlanır ve x noktası düzlem içinde $\lambda = \langle x, l \rangle$ denklemi ile içerilir.

$(-\lambda, l)$ düzlem için homojen koordinatlardır. Eğer $\left(l, \bar{l}, \lambda \right)$ yönlendirilmiş olarak düşünülürse düzlemde yönlendirilmiş kabul edilir.

Şimdi farz edelim ki $\bar{l} \neq 0$ ve λ verilsin. Biz doğru elemanlarının cümlesine $\left((L, x) = (l, \bar{l}, \lambda) \right)$ $\bar{l}$ ve λ verilmişken bakıyoruz. Plücker koordinatları $\left(l, \bar{l} \right)$ olan doğrular, $\bar{l}$ verilmişken $\bar{l}^\perp$ düzlemi içinde içerilir.

$p = p(l, \bar{l})$ pedal noktası ve x noktası aşağıdaki ilişkiyi sağlar.

$$\|l\| = \frac{\|\bar{l}\|}{\|p\|} \quad \text{ve} \quad \|x-p\| = \frac{\lambda \|p\|}{\|\bar{l}\|}$$

dir. Gerçekten,

$$x = p(l, \bar{l}) + \frac{\lambda}{\langle l, l \rangle} l \dots (I), \quad p(l, \bar{l}) = \frac{1}{\langle l, l \rangle} l \times \bar{l} \dots (II) \quad \text{idi. Buradan,}$$

$$\|p\| = \frac{1}{\langle l, l \rangle} \|l \times \bar{l}\|$$

$$\|p\| = \frac{1}{\|l\|^2} \|l\| \|\bar{l}\| \sin 90$$

$$\|p\| = \frac{\|\bar{l}\|}{\|l\|} \Rightarrow \|l\| = \frac{\|\bar{l}\|}{\|p\|}$$

dir.

Ve

$$x-p = \frac{\lambda}{\langle l, l \rangle} l$$

$$\|x-p\| = \frac{\lambda}{\langle l, l \rangle} \|l\|$$

$$\|x-p\| = \frac{\lambda}{\|l\|} = \frac{\lambda \|p\|}{\|\bar{l}\|}$$

$$\Rightarrow \|x-p\| = \frac{\lambda \|p\|}{\|\bar{l}\|}$$

dir.

Tanım 4.1.1 (bundle of lines)

Verilen bir doğruya paralel olan doğruların cümlesi yada $\mathbb{R}^3$ ün bir noktasından geçen doğruların cümlesine doğruların bundle' ı denir.

Tanım 4.1.2

(L, x) doğru elemanlarının cümlesi 'generalized bundle' olarak adlandırılır eğer doğruları bir bundleden oluşuyorsa ve koordinatları $\mathbb{R}^7$ nin 3-boyutlu lineer alt uzayında içerilirse.

4.2 Doğru Elemanlarının Lineer Kompleksi

$(l, \bar{l})$ plücker koordinatlarının doğrularının cümlesi

$\langle l, \bar{c} \rangle + \langle \bar{l}, c \rangle = 0$ lineer homojen denklemini sağlar ve $(c, \bar{c})$ koordinatlarıyla lineer ışıın kompleksi olarak adlandırılırlar. Biz bu tanımı genelleyeceğiz.

Tanım 4.2.1

$(l, \bar{l}, \lambda)$ doğru elemanlarının cümlesi

(4.2.1.) $\langle l, \bar{c} \rangle + \langle \bar{l}, c \rangle + \lambda = 0$ lineer denklemini sağlar ve $(c, \bar{c}, \gamma)$ koordinatları ile doğruların lineer kompleksi olarak adlandırılır.

Eğer C kompleksi (4.2.1) ile verilmişse ve $\gamma \neq 0$ ise Öklid uzayındaki bütün $L = (l, \bar{l})$ doğruları için $(L, x) \in C$ olacak şekilde bir $x \in L$ noktası vardır. $\gamma \neq 0$ olduğu durumda $(L, x) \in C$, L doğrusunu tek olarak belirtir ve $(L, x) \in C \Leftrightarrow (4.2.1.)$ denklemini

sağlayan L kompleks içinde içerilir. Böylece doğruların cümlesi tanım 4.2.1 den kompleksin doğru elemanları ile ilişkilendirilir. γ ya bağlı olarak 3 yada 4-boyuta sahiptirler.

Öklid kinematiğinde, düzgün hareketin normal yolu sabit değişmez bir lineer ışın kompleksinden oluşur. Öklidyen hareket ve doğru kompleksleri arasındaki bu ilişki benzerlik hareketi ve doğru elemanlarına genelleştirilir. Biz eğer $L \perp v(y)$ ise (L, y) ye

y deki path normal elemanı diyoruz. $v(y) = \bar{c} + c \times x + \gamma y$

(path normal element) $\perp$ (düzgün homotetik hareketin hız vektörü)

Teorem 4.2.1

Düzgün bir parametrelili benzerlik hareketin herhangi bir andaki $v(y)$ hız vektörü (3.5.2)

ile birlikte noktaların path normal elemanlarının cümlesi ile $(c, \bar{c}, \gamma)$ koordinatları ile birlikte doğru elemanlarının lineer kompleksi eşitir.

İspat 4.2.1

$(l, \bar{l}, \lambda)$ doğru elemanının $v(y)$ hız vektörüne ortogonal olması durumunda;

$$\langle v(y), l \rangle = 0$$

$$\langle c \times y + \bar{c} + \gamma y, l \rangle = 0$$

$$\langle c \times y, l \rangle + \langle \bar{c}, l \rangle + \gamma \langle y, l \rangle = 0 \text{ elde edilir.}$$

$$\langle c, y \times l \rangle + \langle \bar{c}, l \rangle + \gamma \lambda = 0$$

$$\langle c, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}, l \rangle + \gamma \lambda = 0$$

Açıkça doğru elemanlarının lineer kompleksi bu yolla meydana gelir. Bu nedenle şu teorem ifade edilebilir.

Teorem 4.2.2

Lineer bir ışın kompleksine bir spiral hareketi, tersine olarak da bir spiral hareketine lineer bir ışın kompleksi bağlıdır. Kompleksin eksenine ile spiral eksenine çakışır. Kompleksin ve spiralin adımları aynıdır. Lineer bir kompleksin (∞^4) sayıdaki ışınları $\mathbb{R}^3$ 'ün spiral hareketine uyan noktalarındaki yörünge normallerinin bütününden oluşur.

Teorem 4.2.3

Benzerlik eşitliğinden doğru elemanlarının lineer kompleksinin homojen koordinatları;

$$(4.2.2.) \quad (c, \bar{c}, \gamma) = (0, 0, 1; 0, 0, p; 0), p \in \mathbb{R}$$

$$(4.2.3.) \quad (c, \bar{c}, \gamma) = (0, 0, 0; 0, 0, 1; 0)$$

$$(4.2.4.) \quad (c, \bar{c}, \gamma) = (0, 0, 1; 0, 0, 0; p), p \neq 0$$

$$(4.2.5.) \quad (c, \bar{c}, \gamma) = (0, 0, 0; 0, 0, 0; 1)$$

dır.

İspat 4.2.3

Daha önce bu dört durum incelenmişti.

Doğru elemanlarının $(c, \bar{c}, \gamma)$ lineer kompleksi $c \neq 0$ ve $\gamma \neq 0$ iken spiral harekete uyar. (bölüm 3.5). Spiral hareketin merkezi koordinat dönüşümünden sonra normal form

$(0, 0, 0)^T$ koordinatına sahiptir. Açıkça $o = -(C^\times + \gamma E_3)^{-1} \bar{c}$ ile verilir.

$$(4.2.6.) \quad t = o = \frac{1}{\gamma\mu} (\gamma c \times \bar{c} - \gamma^2 \bar{c} - \left\langle c, \bar{c} \right\rangle c) \quad \mu = \gamma^2 + \langle c, c \rangle = \gamma^2 + c^2$$

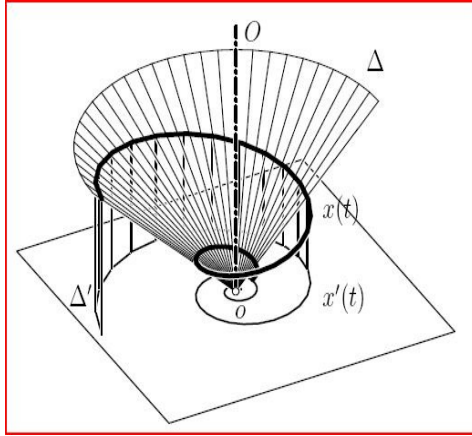
Spiralin eksenini c ye paraleldir. Ve doğru elemanlarının koordinatlarını

$$(4.2.7) \quad A = (c, o \times c, \langle o, c \rangle) = (c, \frac{1}{\mu} (\langle c, c \rangle \bar{c} - \langle c, \bar{c} \rangle c + \gamma c \times \bar{c}), -\frac{1}{\gamma} \langle c, \bar{c} \rangle)$$

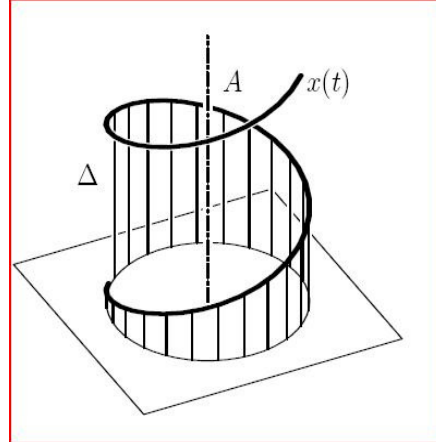
ile verebiliriz.

$\gamma = 0$ olduğu durumlarda (4.2.7) eşitliği bilinen plücker koordinatlarda helisin eksenini oluşturur.

$$\begin{aligned} A &= (c, o \times c, \langle o, c \rangle) = (c, \frac{1}{\mu} (\langle c, c \rangle \bar{c} - \langle c, \bar{c} \rangle c + \gamma c \times \bar{c})) \\ &= (c, \bar{c} - \frac{\langle c, \bar{c} \rangle}{\langle c, c \rangle} c) \end{aligned}$$



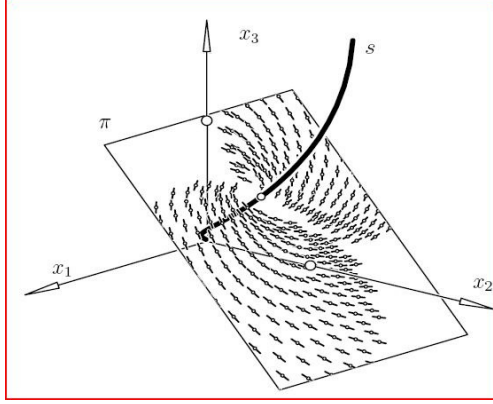
Şekil 4.2.1(Spiral eksenini)



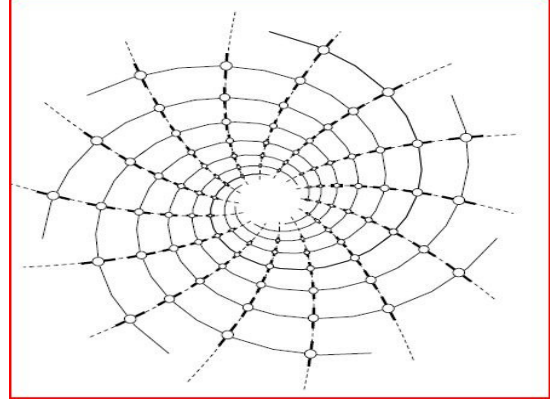
Şekil 4.2.2.(Helisel eksen)

Teorem 4.2.4

Düzlem içinde bulunan lineer kompleksin doğru elemanları spiral hareket düzleminin path normal elemanıdır.



Şekil 4.2.3(Doğru elemanlarının lineer kompleksinin düzlem parçası)



Şekil 4.2.4 (spiral hareketin çizdiği nokta yörüngeleri)

İspat 4.2.3

Genelliği bozmadan sadece $x_3 = 0$ olduğunu düşünelim. (L, x) doğru elemanlarının

Plücker koordinatları bu düzlem üzerinde, $\bar{l} = x_1 l_2 - x_2 l_1$ ile $(l_1, l_2, 0; 0, 0, \bar{l}_3; \lambda)$ formundadır.

$$\bar{l} = x \times l = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1 & x_2 & 0 \\ l_1 & l_2 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, x_1 l_2 - x_2 l_1)$$

$$\bar{l} = x_1 l_2 - x_2 l_1$$

Lineer komplekse ait olan doğru elemanları

(4.2.8.) $\bar{c}_1 l_1 + \bar{c}_2 l_2 + c_3 \bar{l}_3 + \gamma \lambda = 0$ denklemini sağlar. Gerçekten,

$$\langle l, \bar{c} \rangle + \langle \bar{l}, c \rangle + \gamma \lambda = 0$$

dan dolayı;

$$\left\langle (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3), (l_1, l_2, 0) \right\rangle + \left\langle (c_1, c_2, c_3), (0, 0, \bar{l}_3) \right\rangle + \gamma \lambda = 0$$

$$\bar{c}_1 l_1 + \bar{c}_2 l_2 + c_3 \bar{l}_3 + \gamma \lambda = 0$$

dır.

$$(4.2.9) \quad v(x) = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, 0)^T + c_3(-x_2, x_1, 0)^T + \gamma(x_1, x_2, 0)^T \quad \text{şeklindedir. Gerçekten,}$$

(L, x) doğru elemanı $v(x)$ e ortogonal olduğundan,

$$\begin{aligned} \langle v(x), l \rangle &= \left\langle ((\bar{c}_1, \bar{c}_2, 0)^T + c_3(-x_2, x_1, 0)^T + \gamma(x_1, x_2, 0)^T), (l_1, l_2, 0) \right\rangle \\ &= \bar{c}_1 l_1 + \bar{c}_2 l_2 + c_3(-x_2 l_1 + x_1 l_2) + \gamma(x_1 l_1 + x_2 l_2) = 0 \\ &= \bar{c}_1 l_1 + \bar{c}_2 l_2 + c_3 \bar{l}_3 + \gamma \langle l, x \rangle = 0 \\ &= \bar{c}_1 l_1 + \bar{c}_2 l_2 + c_3 \bar{l}_3 + \gamma \lambda = 0 \end{aligned}$$

$$(4.2.10) \quad \langle v(x), l \rangle = \bar{c}_1 l_1 + \bar{c}_2 l_2 + c_3(x_1 l_2 - x_2 l_1) + \gamma \langle l, x \rangle = 0 \quad \text{şeklinde yazılabilir.}$$

Lemma 4.2.1

Eğer $C = (c, \bar{c}, \gamma)$ doğru elemanlarının bir lineer kompleksi ise $\gamma \neq 0$; bütün L doğruları üzerinde, $(L, x) \in C$ olacak şekilde bir tek x noktası vardır.

Eğer $\gamma = 0$ ise doğruların lineer kompleksini $C' = (c, \bar{c})$ olarak düşüneceğiz. Eğer $L \in C'$ ise bütün $x \in L$ için $(L, x) \in C$ dir. Aksi durumda $(L, x) \in C$ olacak şekilde x yoktur.

İspat 4.2.4

$$\left\langle c, \bar{l} \right\rangle + \left\langle \bar{c}, l \right\rangle + \gamma \lambda = 0$$

$$L \in C \Leftrightarrow \left\langle c, \bar{l} \right\rangle + \left\langle \bar{c}, l \right\rangle = 0 \quad \text{denklemini } \gamma \text{ çözmelidir.}$$

$$\lambda = \frac{-1}{\gamma} \left(\left\langle c, \bar{l} \right\rangle + \left\langle \bar{c}, l \right\rangle \right)$$

dır. Lemma 4.2.1den (4.1) ile birlikte x noktası

$$(4.2.11) \quad x = \frac{1}{\langle l, l \rangle} \left(l \times \bar{l} - \frac{1}{\gamma} \left(\left\langle c, \bar{l} \right\rangle + \left\langle l, \bar{c} \right\rangle \right) l \right)$$

şeklinde elde edilir.

$$\left(x = p(l, \bar{l}) + \frac{\lambda}{\langle l, l \rangle} l, p(l, \bar{l}) = \frac{1}{\langle l, l \rangle} l \times \bar{l} \right)$$

$$x = \frac{1}{\langle l, l \rangle} l \times \bar{l} - \frac{1}{\gamma \langle l, l \rangle} \left(\left\langle c, \bar{l} \right\rangle + \left\langle l, \bar{c} \right\rangle \right) l$$

$$x = \frac{1}{\langle l, l \rangle} \left(l \times \bar{l} - \frac{1}{\gamma} \left(\left\langle c, \bar{l} \right\rangle + \left\langle l, \bar{c} \right\rangle \right) l \right)$$

Lemma 4.2.2

(L, x) olacak şekilde x noktalarının cümlesi $(c, \bar{c}, \gamma)$ kompleksinde içerilir ve L sabit $l \neq 0$ vektörüne paraleldir. Bu noktaların cümlesi bir düzlemdir.

($\gamma = 0$ ve $l // c$ olduğu durumlar dışında)

İspat 4.2.5

Herhangi x noktası için (L, x) doğru elemanı l ye paraleldir ve $(l, x \times l, \langle x, l \rangle)$ koordinatlarına sahiptir. x noktası kompleks içinde içerilir.

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \langle \bar{c}, l \rangle + \langle c, x \times l \rangle + \gamma \langle x, l \rangle &= 0 \\ \langle \bar{c}, l \rangle + \langle x, l \times c + \gamma l \rangle &= 0 \end{aligned}$$

$\gamma \neq 0$ yada $l \times c \neq 0$ ile bu denklem aşıkaz çözümü olmayan lineer düzlem denklemdir.

$(l, \bar{l})$ doğrularının durumundan dolayı, bir q noktası ile rankı 2 olup lineerdir. Böylece, lineer denklemi hesaplayarak $q \in L$ olacak şekilde verilen kompleksin doğru elemanlarının generalized bundle oluşturduğunu görürüz (Tanım 4.1.2) den.

Teorem 4.2.5

$q \in \mathbb{R}^3$ ve $C = (c, \bar{c}, \gamma)$, $(\gamma \neq 0)$ nin doğru elemanlarının lineer kompleksi olduğunu kabul edelim. Böylece $(L, x) \in C$ olacak şekilde x noktalarının cümlesi $q \in L$ ve qq' çapı ile bir küredir. $q' = q - \frac{1}{\gamma} v(q)$ (3.5.1.)deki hız vektör şartı altında ifade edilir.

İspat 4.2.6

Genelliği bozmadan $q = 0$ alalım. O zaman $v(q) = \bar{c}$ olur. $(L, x) = (l, \bar{l}, \lambda)$ doğru elemanı üzerindeki durumundan dolayı $\bar{l} = 0$ ($\bar{l} = q \times l, q = 0 \Rightarrow \bar{l} = 0$) ve

$$(4.2.12.) \quad \langle \bar{c}, l \rangle + \gamma \lambda = 0 \quad \left(\begin{aligned} \langle c, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}, l \rangle + \gamma \lambda &= 0 \\ \Rightarrow \langle \bar{c}, l \rangle + \gamma \lambda &= 0 \end{aligned} \right) \quad \text{denklemleri sağlanır.}$$

Ayrıca (4.1) eşitliği

$$(4.2.13.) \quad x = \frac{1}{\gamma} \frac{\langle \bar{c}, l \rangle}{\langle l, l \rangle} l \text{ yi sağlar. Gerçekten,}$$

$$x = p(l, \bar{l}) + \frac{\lambda}{\langle l, l \rangle} l, \quad p(l, \bar{l}) = \frac{1}{\langle l, l \rangle} l \times \bar{l}$$

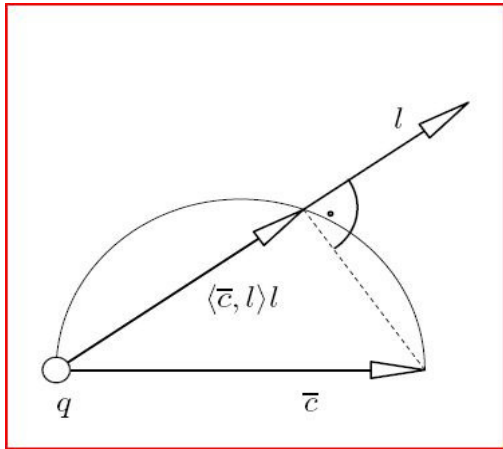
$$x = \frac{1}{\langle l, l \rangle} \underbrace{l \times \bar{l}}_0 + \frac{\lambda}{\langle l, l \rangle} l$$

$$= -\frac{1}{\gamma \langle l, l \rangle} \langle \bar{c}, l \rangle l$$

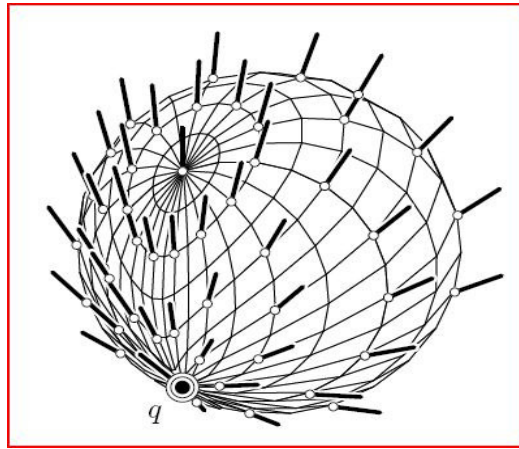
$$\Rightarrow x = -\frac{1}{\gamma} \frac{\langle \bar{c}, l \rangle}{\langle l, l \rangle} l$$

olur. Açıkça x noktası L doğrusu üzerindeki $q' = q - \frac{1}{\gamma} \underbrace{v(q)}_{\frac{\bar{c}}{c}} = -\frac{1}{\gamma} \bar{c}$ noktasının

pedal noktasıdır. bu x noktalarının cümlesi çapı qq' olan Thales küresini gösterir.



Şekil 4.2.5.(pedal noktası)



Şekil 4.2.6.(Thales küresi)

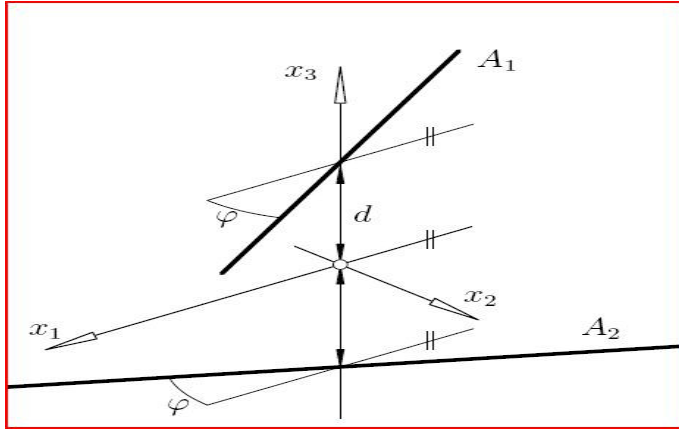
Sonuç 4.2.1

Teorem 4.2.5 de C kompleksi ile x noktalarının cümlesi verilen doğrularda içerilen $(L, x) \in C$ olacak şekilde L ile bir dairedir. Gerçekten,

Problemdeki daire Teorem 4.2.5. deki kürenin doğrunun taşıyıcı düzlemi ile keşiştirerek oluşturulur.

4.3 Doğru Kongrüansı İle Kompleksin Keřiřmesi

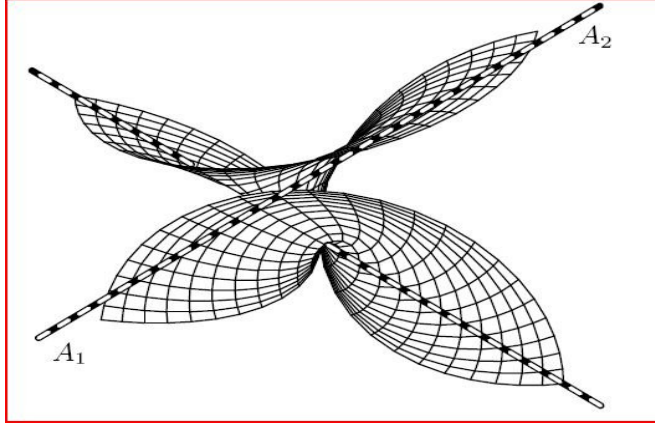
Zıt iki A_1 , A_2 eksenleri ile doğruların lineer hiperbolik kongrüansı, A_1 ve A_2 yi kesen doğruları içerir.



Şekil 4.3.1.(Komplekslerin keřiřimi)

Teorem 4.3.1

$\gamma \neq 0$ ve $C = (c, c, \gamma)$ doğru elemanlarının lineer kompleksi olsun. $x \in \mathbb{R}$ noktalarının cümlesinin $\emptyset$ olduğunu düşünelim $\ni (L, x) \in C$ olacak şekildeki L hiperbolik doğru kongrüansı içinde ierilsin. $\emptyset$ 2-tane bir parametrelili dairelerin ailesini taşıyan kübik yüzeydir.



Şekil 4.3.2.(Kübik yüzey)

İspat 4.3.1

Genelliği bozmadan hiperbolik lineer doğru kongrüansının A_1, A_2 eksenlerini yaklaşık olarak

$$(4.3.1) \quad \begin{aligned} A_1(u) &= (2ku, 2u, d) = u(2k, 2, 0) + (0, 0, d) \\ A_2(v) &= (2kv, -2v, -d) = v(2k, -2, 0) + (0, 0, -d) \end{aligned} \quad (k, d \neq 0)$$

şeklinde parametrelendirdiğimizi farz edelim. Plücker koordinatların kongrüansı

$L(u, v) = (l(u, v), \bar{l}(u, v))$ ile parametrenir.

$$\begin{aligned}
l(u, v) &= \frac{1}{2}(A_2(v) - A_1(u)) \\
&= \frac{1}{2}((2kv, -2v, -d) - (2ku, 2u, d)) \\
&= k((u - v), (u + v), d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{l}(u, v) &= \frac{1}{2}((A_2(v) + A_1(u)) \times l(u, v)) \\
&= (k(u + v), (u - v), 0) \times (k(u - v), (u + v)d) \\
&= \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ k(u + v) & (u - v) & 0 \\ k(u - v) & (u + v) & d \end{vmatrix} \\
&= (d(u - v), -dk(u + v), k(u + v)^2 - k(u - v)^2) \\
&= (d(u - v), -dk(u + v), 4kuv)
\end{aligned}$$

$x(u, v)$ noktalarının cümlesi $\ni \mathbb{C}$ kompleksi içinde ierilen $(L(u, v), x(u, v))$ doğru elemanları (4.2.1.) ile hesaplanır.

$$(4.3.2.) \quad x = \frac{1}{\langle l, l \rangle} \left(l \times \bar{l} - \frac{1}{\gamma} \left(\left\langle c, \bar{l} \right\rangle + \left\langle l, \bar{c} \right\rangle \right) l \right), \text{ Lemma 4.1 den } x \text{ bir tektir. Bu}$$

yüzeyden $k\gamma(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_3 + \dots$, elde edilir. Noktalar alt sıradaki terimleri göstermektedir. $k, \gamma \neq 0$ olduğundan ϕ 3.derecedendir. $\mathcal{E} \supset A_i$ olan herhangi bir düzlem için, $\phi \cap \mathcal{E}$ kesişimi A_i lerden oluşur ve 2.dereceden $R_{\mathcal{E}}$ eğrisini kapsar. Sonuç 4.2.1. den dolayı $\mathcal{E}$ da uzanan (L, u) doğruları, $R_{\mathcal{E}}$ la tanımlanan $x(u, v)$ noktalarının dairesini oluşturur. Sonuç olarak $x(u, v)$ noktalarının parametrizasyonu ϕ nin bütününe kapsar.

ϕ nin denkleminde ve ϕ nin daireleri taşıdığı gerçeğinden ϕ nin projektif ve kompleks uzaması mutlak konikleri içerir.

4.4 Komplekslerin Kesişimi

Bu kısa paragrafta doğru elemanlarının iki kompleksinin kesişimini düşüneceğiz.

$C = (c, \bar{c}, \gamma)$, $\gamma \neq 0$ olmak üzere yukarıda aşikar olduğu gibi bir kompleks bazı özel özelliklere sahiptir.

$C = (c_i, \bar{c}_i, \gamma_i)$, $(i=1, 2)$, $(\gamma_1, \gamma_2 \neq 0)$ olmak üzere farklı komplekslerin lineer bağımsız koordinat vektörleri olsun.

$C : (c, c, \gamma) = \gamma_2 C_1 - \gamma_1 C_2$ lineer kombinasyonu

$$(4.4.1) \quad \gamma_2 \left(\langle c_1, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}_1, l \rangle \right) = \gamma_1 \left(\langle c_2, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}_2, l \rangle \right) \text{ denklemi ile bir kompleks}$$

tanımlar. Gerçekten,

$$\begin{aligned} C : (c_1, \bar{c}_1, \gamma_1) \quad , \quad C : (c_2, \bar{c}_2, \gamma_2) \quad \text{ise,} \\ (L, x) \in C_1, \quad (L, x) \in C_2 \end{aligned}$$

$$\langle c_1, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}_1, l \rangle + \gamma_1 \lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = - \frac{\langle c_1, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}_1, l \rangle}{\gamma_1} \dots (I)$$

$$\langle c_2, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}_2, l \rangle + \gamma_2 \lambda = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{\langle c_2, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}_2, l \rangle}{\gamma_2} \dots (II)$$

(I) ve (II) den dolayı

$$\lambda = \frac{\langle c_2, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}_2, l \rangle}{\gamma_2} = \frac{\langle c_2, \bar{l} \rangle + \langle \bar{c}_2, l \rangle}{\gamma_1} \text{ dir. Böylece;}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma_2 \left(\left\langle c_1, \bar{l} \right\rangle + \left\langle \bar{c}_1, l \right\rangle \right) = \gamma_1 \left(\left\langle c_2, \bar{l} \right\rangle + \left\langle \bar{c}_2, l \right\rangle \right) \\
& \gamma_2 \left\langle c_1, \bar{l} \right\rangle + \gamma_2 \left\langle \bar{c}_1, l \right\rangle - \gamma_1 \left\langle c_2, \bar{l} \right\rangle - \gamma_1 \left\langle \bar{c}_2, l \right\rangle = 0 \\
& \left\langle l, \gamma_2 \bar{c}_1 \right\rangle + \left\langle \bar{l}, \gamma_2 c_1 \right\rangle + \left\langle l, \gamma_1 \bar{c}_2 \right\rangle + \left\langle \bar{l}, \gamma_1 c_2 \right\rangle = 0 \\
D: \quad & \left\langle l, \gamma_2 \bar{c}_1 + \gamma_1 \bar{c}_2 \right\rangle + \left\langle \bar{l}, \gamma_2 c_1 + \gamma_1 c_2 \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

Lineer kombinasyonu elde edilir. Aslında D lineer komplekstir. Eğer $L(l, \bar{l})$ D de bir

doğru ise $(l, \bar{l}, \lambda) \in C_1 \cap C_2$ olacak şekilde λ vardır. $\lambda = -\frac{\left\langle c_i, \bar{l} \right\rangle + \left\langle \bar{c}_i, l \right\rangle}{\gamma_i}$ ($\gamma_i \neq 0$). Bu

durumda $C_1 \cap C_2$ kesişimi doğru elemanlarının cümlesinden oluşur ve doğruların lineer kompleksidir.

KAYNAKLAR

- Bottema, O. And Roth,B. 1979. Theoretical Kinematics. North Holland Publ.Company
New York
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1983. Diferansiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi
Yayını.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1980. Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler.
İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları, Ankara.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1980. Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi
Fen Fakültesi Yayını.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1971. On The Rolling of One Curve or Surface Upon Another.
Proceedings of the Royal Irish Academy.71(2),13-16.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi
Üniversitesi Fen –Ed. Fakültesi Yayınları, Mat. No. 2,Ankara.
- Karger, A. and Novak, J. Space 1985. Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach
Science Publishers.
- McCarthy, J.M. , 1990. An Introduction to Theoretical Kinematics, The MIT Pres
Cambridge, Massachusetts London, England.
- Müler, H.R.1963. Kinematik Dersleri. Ankara Üniversitesi Basımevi,Ankara.
- Acratalışian, A. 1989. E^{2n+1} de Lineer Vektör Alanları, Doktora Tezi Gazi
Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Odehnal,B., Pottmann, H., Wallner,J. 2000. Equiform Knematic and the Geometry of Line Elements. Mathematics subject Classification.

Pottmann, H.,Lee, I-K. 1998. Randrup,T., Reconstruction of Kinematic Surfaces from Scatterd Data. Proceedings of symposium on Geodesy for Geotechnical and structural Engineering, 483-488.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Esra Betül KOÇ

Doğum Yeri : Kayseri

Doğum Tarihi : 01.05.1982

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kayseri Lisesi (2000)

Lisans : Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü (2002-2006)

Tezsiz Yüksek Lisans :Sakarya Üniversitesi OFMA Matematik Bölümü(2006-2007)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi (2007-2009)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Özel Cemal Şaşmaz Fen Lisesi (2006-2008)

e-mail: e.betul.e@gmail.com