

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**KUATERNİYONLARIN İNVLÜSYONLARI VE
ANTI-İNVLÜSYONLARI**

Murat BEKAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Murat BEKAR tarafından hazırlanan “**Kuaterniyonların İnvölüsyonları ve Anti-İnvölüsyonları**” adlı tez çalışması 17/11/2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Jüri Üyeleri:

Başkan: Prof. Dr. Baki KARLIĞA

Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Prof. Dr. F.Nejat EKMEKÇİ

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Erdal GÜNER

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

Üye : Doç. Dr. Ayşe ALTIN

Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. İbrahim DEMİR
Enstitü Müdürü

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

17/11/2014

Murat BEKAR

ÖZET

Doktora Tezi

KUATERNİYONLARIN İNVLÜSYONLARI VE ANTİ-İNVLÜSYONLARI

Murat BEKAR

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Dört bölümden oluşan doktora tezinin birinci bölümünde; konunun tarihi gelişimi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümünde; reel kuaterniyonlara, dual kuaterniyonlara ve involüsyon ile anti-involüsyonlara ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verildi. Üçüncü bölümünde; reel kuaterniyonlar kullanılarak biri involüsyon diğeri anti-involüsyon olmak üzere iki dönüşüm verildi. Bu dönüşümlerin vektörel kısımlarının $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumlarının yansımaya karşılık geldikleri gösterildi. Ayrıca bu dönüşümlere karşılık gelen matrisler elde edildi. Benzer şekilde, dördüncü bölümünde; dual kuaterniyonlar kullanılarak ikisi involüsyon diğeri anti-involüsyon olmak üzere dört dönüşüm verildi. Bu dönüşümlerin vektörel kısımlarında yer alan $\pm \widehat{V} \widehat{\delta} \widehat{V}$ ya da $\pm \widehat{V} (\widehat{\delta})^* \widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonlarının $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{D}^3$ teki geometrik yorumları verildi. $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumları yansıma (bir doğrunun bir doğruya göre yansıması ve bir doğrunun bir düzleme göre yansıması) ve vida operatörü olarak verilirken, $\mathbb{D}^3$ teki geometrik yorumları ise sadece yansıma olarak verildi. Ayrıca bu dönüşümlere karşılık gelen matrisler elde edildi.

Kasım 2014, 68 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dual sayılar, reel kuaterniyonlar, dual kuaterniyonlar, involüsyonlar, anti-involüsyonlar, vida operatörü

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

INVOLUTIONS AND ANTI-INVOLUTIONS OF QUATERNIONS

Murat BEKAR

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

In the first chapter of the thesis consisting of four chapters; the historical background of subject is expressed. In the second chapter; fundamental definitions and theorems related to real quaternions, dual quaternions, involutions and anti-involutions are given. In the third chapter; an involution and an anti-involution transformation are given by using real quaternions. It is shown that geometrical meanings of the vector parts of these transformations correspond to reflections in $\mathbb{R}^3$. Also, the matrices corresponding to these transformations are obtained. Similarly, in the fourth chapter; two involution and two anti-involution transformations are given by using dual quaternions. The geometrical meanings of unit pure dual quaternions $\pm\hat{V}\hat{\delta}\hat{V}$ and $\pm\hat{V}(\hat{\delta})^*\hat{V}$, which are parts of these transformations vector parts, are given in $\mathbb{R}^3$ and $\mathbb{D}^3$. The geometrical meanings in $\mathbb{R}^3$ are given as reflections (reflection a line about a line and reflection a line about a plane) and screw operators, and the geometrical meanings in $\mathbb{D}^3$ are given only as reflections. Also, the matrices corresponding to these transformations are obtained.

November 2014, 68 pages

Key Words: Dual numbers, real quaternions, dual quaternions, involutions, anti-involutions, screw operator

TEŞEKKÜR

Çalışmalarımı yönlendiren ve araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek akademik ortamda olduğu kadar beşeri ilişkilerde de engin fikirleriyle yetişme ve gelişmeye katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI'ya (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), Tez İzleme Komitemde bulunan, yakın ilgileriyle çalışmalarımı destekleyen ve yönlendiren Sayın Prof. Dr. F.Nejat EKMEKÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Sayın Prof. Dr. Baki KARLIĞA'ya (Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), çalışmalarım süresince manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ve sonsuz anlayışları ile beni her zaman destekleyen kıymetli aileme teşekkür ederim.

Murat BEKAR

Ankara, Kasım 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAYI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Reel Kuaterniyonlar.....	5
2.2 Dual Sayılar	10
2.3 Dual Kuaterniyonlar	14
2.4 Vida Operatörü	23
2.5 İnvölüsyon ve Anti-İnvölüsyon	25
3. REEL KUATERNİYONLARIN İNVOLÜSYONLARI VE ANTI-İNVOLÜSYONLARI	26
3.1 $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-Uzayında Reel Kuaterniyon İnvölüsyonlarının ve Anti- İnvölusyonlarının Geometrik Yorumları.....	29
3.2 Reel Kuaterniyonların İnvölüsyon Matrisleri	31
3.3 Reel Kuaterniyonların Anti-İnvölüsyon Matrisleri	33
4. DUAL KUATERNİYONLARIN İNVOLÜSYONLARI VE ANTI-İNVOLÜSYONLARI	36

4.1 $\mathbb{D}^3$ Dual 3-Uzayında Dual Kuaterniyon İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Geometrik Yorumları.....	44
4.2 $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-Uzayında Dual Kuaterniyon İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Geometrik Yorumları.....	46
4.2.1 Vida operatörü	47
4.2.2 Bir doğrunun bir doğruya göre yansıması	50
4.2.3 Bir doğrunun bir düzleme göre yansıması ve ötelemesi	51
4.3 Dual Kuaterniyonların İnvölüsyon Matrisleri	53
4.3.1 $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}\bar{Q}\hat{V}$ dönüşümüne karşılık gelen matris	53
4.3.2 $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}(\overline{Q^*})\hat{V}$ dönüşümüne karşılık gelen matris	55
4.4 Dual Kuaterniyonların Anti-İnvölüsyon Matrisleri	58
4.4.1 $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}Q^*\hat{V}$ dönüşümüne karşılık gelen matris.....	58
4.4.2 $f_{\hat{V}}(Q) = -VQV$ dönüşümüne karşılık gelen matris	61
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	64
KAYNAKLAR	65
ÖZGEÇMİŞ.....	67

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Cismi
$\mathbb{R}^n$	Öklid n -Uzay
$\mathbb{D}$	Dual Sayılar Halkası
$\mathbb{D}^3$	3-Boyutlu Dual Vektör Uzayı ($\mathbb{D}$ -Modül)
$\mathbb{D}^4$	4-Boyutlu Dual Vektör Uzayı
$\mathbb{H}$	Reel Kuaterniyon Cebiri
$\hat{\mathbb{H}}$	Pür Reel Kuaterniyon Cebiri
$\hat{\mathbb{H}}$	Birim Pür Reel Kuaterniyon Cebiri
$\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$	Dual Kuaterniyon Cebiri
$\hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$	Pür Dual Kuaterniyon Cebiri
$\hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$	Birim Pür Dual Kuaterniyon Cebiri
N	Norm
$\overline{(\cdot)}$	Kuaterniyon Eşlenik
$(\cdot)^*$	Dual Eşlenik
$\overline{(\cdot)}^*$	Total Eşlenik
$(\cdot)^{-1}$	İnverse
$\wedge$	Vektörel Çarpım
$\times$	Kuaterniyon Çarpım

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 $\widehat{QA}$ operatörünün vida hareketi karşılığı.....	24
Şekil 3.1 $f_{\widehat{v}}(q) = -\widehat{v}\bar{q}\widehat{v}$ involüsyonunun vektörel kısmı $\widehat{v}\widehat{\mu}\widehat{v}$	30
Şekil 3.2 $f_{\widehat{v}}(q) = -\widehat{v}q\widehat{v}$ anti-involüsyonunun vektörel kısmı $-\widehat{v}\widehat{\mu}\widehat{v}$	31
Şekil 3.3 Vektör $2(3/5, 0, 4/5)$ in $\widehat{v}$ vektörüne dik olan düzleme göre yansıması.....	33
Şekil 3.4 Vektör $2(3/5, 0, 4/5)$ in $\widehat{v}$ vektörüne göre yansıması	35
Şekil 4.1 $\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ operatörünün vida hareketi karşılığı.....	48
Şekil 4.2 $-\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ operatörü sonucu $d_{\widehat{\delta}}$ doğrusunun $d_{\widehat{v}}$ doğrusuna göre yansıması	51
Şekil 4.3 $\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ operatörü sonucu $d_{\widehat{\delta}}$ doğrusunun M düzlemine göre yansıması ve ötelemesi.....	52

1. GİRİŞ

Kompleks (karmaşık) sayılar 18. yüzyılın başlarında çok araştırılan konuların başında yer almaktadır. William Rowan Hamilton, $\mathbb{R}^2$ Öklid 2-Uzayındaki her bir noktaya bir kompleks sayı karşılık geldiğini bilmekte olup buradan hareketle $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-Uzayındaki her bir noktaya karşılık gelen sayıların cümlesini araştırmaya başlamıştır. $\mathbb{R}^3$ uzayındaki her bir nokta bir sıralı reel sayı üçlüsü ile belirlidir. Hamilton, kompleks sayılardakine benzer çarpma işlemini bu sıralı reel sayı üçlülere üzerinde denemiş ancak olumlu sonuç alamamıştır. Daha sonra ise, $\mathbb{R}^4$ Öklid 4-Uzayında aynı deneme olumlu sonuç vermiş ve dördeyler olarak da adlandırdığı kuaterniyonları tanımlamıştır.

Kuaterniyonlar ile ilgili büyük buluş 16 Eylül 1843 tarihinde Hamilton tarafından Dublin’de gerçekleşmiştir. Hamilton eşiyile birlikte İrlanda Kraliyet Akademisindeki konsey toplantısına başkanlık yapmak için giderken, Kraliyet Kanalı boyunca yürüdükleri esnada kuaterniyonlar ile ilgili kavramlar zihninde aydınlanmaya başlamıştır. Brougham Köprüsünde dinlenmek için durduklarında ise kuaterniyonların çarpımı ile ilgili

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

formülü köprünün taşına yazmaktan kendisini alıkoyamamıştır. Hamilton, bu çarpım kuralı ile birlikte her bir sıralı sayı dörtlüsüne “kuaterniyon” adını vermiştir. Hamilton, hayatının geriye kalan büyük kısmını kuaterniyonlar ile ilgili çalışmalara ve kuaterniyonları öğretmeye adanmıştır.

Hüseyin Tevfik Paşa; 1878 yıllarında İngilizce olarak yazdığı “Linear Algebra” adlı kitapta, kompleks sayılarla kuaterniyonlar arasında bir cebir inşa etmeye çalışmış ve birleşme ile değişme özelliğine sahip olmayan ancak sıfırdan farklı her elemanın tersinir olduğu 3-boyutlu bir cebir inşa edebilmiştir.

Veldkamp (1976) yılında dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca, dual hareket ve reel uzay hareketi arasındaki bağıntıyı göstermiştir.

Rooney (1977) yılında sabit bir nokta etrafında bir cismin dönme hareketini metodlar halinde ifade etmiştir. 3×3 -Reel ortogonal matrisler, 2×2 -Üniter matrisler, Pauli spin matrisleri ve 3×3 -Özel üniter matrisler yardımıyla bir eksen etrafında dönme matrislerini sınıflandırmıştır.

Bottema ve Roth (1979) yılında reel ve dual kuaterniyonların uzay kinematiğine uygulamalarını ifade etmiştir.

Hacısalıhoğlu (1983) yılında reel ve dual kuaterniyonları ve sağladıkları özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve kayma operatörlerini ifade etmiştir. Ayrıca, vida operatörünün dönme ve kayma operatörlerinin bileşkesi olarak yazılabileceğini göstermiştir. Vida hareketlerinin bileşimini ve Euler açılarının denklemlerini vermiştir.

Hiller ve Woernle (1984) yılında bir cismin genel vida hareketlerini noktalara ve doğrulara göre formülleştirmiştir. Her iki durum için de temel bağıntıları sağlayan ani vida hareketlerinin diferansiyel denklemlerini vermiş ve bu diferansiyel denklemlerin çözümlerinden de sonlu vida hareketini ifade etmiştir. Bir doğrunun vida hareketi için gerekli dual vida tensörleri, dual matrisleri, vida koordinatları ve dual kuaterniyonların denklemlerini vermiştir.

Karger ve Novak (1985) yılında reel kuaterniyonlar yardımıyla $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-Uzayında bir eksen etrafında dönmeyi adjoint gösterimiyle ifade etmiştir.

Agrawal (1987) yılında dual kuaterniyonları Hamilton operatörleri ile formülleştirmiş ve bu operatörlere karşılık gelen dual matrislerin özelliklerini ifade etmiştir. Bu özellikleri bir nokta ve bir doğrunun vida hareketinin kinematik denklemlerini geliştirmekte kullanmıştır.

Hüseyin Tevfik Paşa (1892) yılında, İngilizce olarak yazdığı “Linear Algebra” adlı kitapta, kompleks sayılarla kuaterniyonlar arasında bir cebir inşa etmeye çalışmış ve birleşme ile değişme özelliğine sahip olmayan ancak sıfırdan farklı her elemanın tersinir olduğu 3-boyutlu bir cebir inşa edebilmiştir.

Ward (1997) yılında 3 ve 4 boyutlu Öklid uzaylarında dönme matrislerini reel kuaterniyonları kullanarak vermiştir. Ayrıca, kuaterniyonların matris formlarını ifade etmiştir.

Inoguchi (1998) yılında bölünmüş (split) kuaterniyonları tanımlamış ve Minkowski 3-Uzayında sabit ortalama eğrilikli zamansı (timelike) yüzeylerin temel denklemlerini bölünmüş kuaterniyonlar yardımıyla yeniden formüleştirmiştir.

Knus vd. (1998) yılında yazdıkları “The Book of Involutions” adlı kitapta iki çeşit involüsyon tanımlamışlar ve bu involüsyonların cebirsel özelliklerini ayrıntılı bir şekilde ele almışlardır.

Kula (2003) yılında bölünmüş kuaterniyonları incelemiş ve Hamilton operatörlerini özellikleriyle birlikte vermiştir. Ayrıca, Minkowski 3-Uzayında vida hareketini tanımlamıştır.

Ell ve Sangwine (2007) yılında “Quaternion involutions and anti-involutions” adlı çalışmalarında reel kuaterniyonları kullanarak biri involüsyon diğeri anti-involüsyon olmak üzere iki dönüşüm tanımlamışlardır. Ayrıca, bu dönüşümlerin vektörel kısımlarının $\mathbb{R}^3$ uzayındaki geometrik yorumlarının birer yansımaya karşılık geldikleri gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak dual kuaterniyonlar kullanılarak ikisi involüsyon diğeri ikisi anti-involüsyon olmak üzere dört dönüşüm tanımlanacaktır. Daha sonra ise bu dönüşümlerin vektörel kısımlarında yer alan $\pm \widehat{V} \widehat{\delta} \widehat{V}$ ya da $\pm \widehat{V} (\widehat{\delta})^* \widehat{V}$ birim pür dual

kuaterniyonlarının $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{D}^3$ teki geometrik yorumları verilecektir. $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumları yansıma (bir doğrunun bir doğruya göre yansıması ve bir doğrunun bir düzleme göre yansıması) ve vida operatörü olarak verilirken, $\mathbb{D}^3$ teki geometrik yorumları ise sadece yansıma olarak verilecektir. En son ise bu dönüşümlere karşılık gelen matrisler elde edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Reel Kuaterniyonlar

Tanım 2.1.1. *Reel kuaterniyon cebiri*

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk = -kj = -1, \quad ki = -ik = j \end{aligned}$$

çarpım kuralına sahip olan $q = w + xi + yj + zk$ sayı dörtlülerinin oluşturduğu birleşimli fakat değişimli olmayan bölüm halkasıdır. Bu sayı dörtlülerinin oluşturduğu cümleye *kuaterniyonlar* denir ve $\mathbb{H}$ ile gösterilecektir. Burada w , x , y ve z reel sayılarına q reel kuaterniyonunun bileşenleri denir. i , j ve k birimleri ise $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-Uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak ele alınabilir (Hamilton 1844).

Tanım 2.1.2. Her $q = w + xi + yj + zk$ reel kuaterniyonu $S(q) = w \in \mathbb{R}$ ile gösterilen skalar ve $V(q) = xi + yj + zk \in \mathbb{R}^3$ ile gösterilen vektörel kısımların birleşimi olarak

$$q = S(q) + V(q)$$

şeklinde *skalar ve vektörel formda* yazılabilir.

Tanım 2.1.3. Sadece vektörel kısımdan oluşan reel kuaterniyonların cümlesine *pür reel kuaterniyonlar* denir ve bu cümle

$$\hat{\mathbb{H}} = \{q = xi + yj + zk : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.4. $q = S(q) + V(q)$ ve $p = S(p) + V(p)$ herhangi iki reel kuaterniyon olmak üzere q ile p nin *toplamı*

$$\begin{aligned}\oplus : \mathbb{H} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (q, p) &\rightarrow q \oplus p = q + p\end{aligned}$$

işlemiyle tanımlı olup

$$q + p = (S(q) + S(p)) + (V(q) + V(p))$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.5. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere herhangi bir $q = S(q) + V(q)$ reel kuaterniyonunun λ skaları ile *dış çarpımı*

$$\begin{aligned}\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ (\lambda, q) &\rightarrow \lambda \odot q = \lambda q\end{aligned}$$

işlemiyle tanımlı olup

$$\lambda q = \lambda S(q) + \lambda V(q)$$

şeklindedir.

Tanım 2.1.6. $q = w_1 + x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j} + z_1 \mathbf{k} = S(q) + V(q)$ ve $p = w_2 + x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j} + z_2 \mathbf{k} = S(p) + V(p)$ herhangi iki reel kuaterniyon olmak üzere q ile p nin *kuaterniyon çarpımı*

$$\times : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$(q, p) \rightarrow q \times p = qp$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$qp = S(q)S(p) - \langle \mathbf{V}(q), \mathbf{V}(p) \rangle + S(q)\mathbf{V}(p) + S(p)\mathbf{V}(q) + \mathbf{V}(q) \wedge \mathbf{V}(p)$$

şeklindedir. Burada,

$$\langle \mathbf{V}(q), \mathbf{V}(p) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

$$\mathbf{V}(q) \wedge \mathbf{V}(p) = (y_1z_2 - z_1y_2)\mathbf{i} - (x_1z_2 - z_1x_2)\mathbf{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\mathbf{k}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.7. $q = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = S(q) + \mathbf{V}(q)$ herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere q nun eşleniği

$$\overline{(\cdot)} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$q \rightarrow \bar{q}$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$\bar{q} = w - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k} = S(q) - \mathbf{V}(q)$$

şeklindedir. Bu eşleniğe *kuaterniyon eşlenik* denir. $p \in \mathbb{H}$ olmak üzere kuaterniyon eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir (Hamilton 1967, Kelland vd. 1904):

- (i) $\overline{\bar{q} + \bar{p}} = q + p,$
- (ii) $\overline{qp} = \bar{p} \bar{q},$
- (iii) $\overline{(\bar{q})} = q.$

Tanım 2.1.8. $q = w + xi + yj + zk$ herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere q nun *normu*

$$N : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q \rightarrow N(q) = N_q = q\bar{q} = \bar{q}q$$

işlemiyle tanımlı olup

$$N_q = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

şeklindedir. $N_q \geq 0$ olup norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $N_{qp} = N_q N_p$,
- (ii) $N_{\lambda q} = \lambda^2 N_q$.

Burada, λ herhangi bir reel sayı ve $p \in \mathbb{H}$ dır.

Tanım 2.1.9. $q \in \mathbb{H}$ olmak üzere, $N_q = 1$ ise q ya *birim reel kuaterniyon* denir.

Tanım 2.1.10. $q \in \hat{\mathbb{H}}$ ve $N_q = 1$ ise q ya *birim pür reel kuaterniyon* denir ve $\hat{q}$ ile gösterilecektir. Birim pür reel kuaterniyonların cümlesi ise $\hat{\mathbb{H}}$ ile gösterilecektir. Birim pür reel kuaterniyonlar -1 in kareköküdürler. Bir başka ifadeyle, $\hat{q} \in \hat{\mathbb{H}}$ ise $(\hat{q})^2 = -1$ dir (Ell ve Sangwine 2007).

Tanım 2.1.11. $q = w + xi + yj + zk$ herhangi bir reel kuaterniyon olmak üzere q nun *inversi (tersi)*

$$(\cdot)^{-1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{\bar{q}}{N_q}$$

işlemiyle tanımlı olup

$$q^{-1} = \frac{w - x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k}}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

şeklindedir. Burada $N_q \neq 0$ olup invers işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $(qp)^{-1} = p^{-1}q^{-1}$,
- (ii) $(\lambda q)^{-1} = q^{-1}/\lambda$.

Burada, $\lambda \neq 0$ herhangi bir reel sayı ve p herhangi bir reel kuaterniyondur.

Tanım 2.1.12. Her $q = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ reel kuaterniyonu

$$\cos\theta = \frac{w}{\sqrt{N_q}}, \quad \sin\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{N_q}}, \quad \hat{q} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

olmak üzere

$$q = \sqrt{N_q}(\cos\theta + \hat{q}\sin\theta)$$

şeklinde *kutupsal formda* yazılabilir ve kutupsal formun *kuaterniyon eşleniği*

$$\bar{q} = \sqrt{N_q}(\cos\theta - \hat{q}\sin\theta)$$

şeklindedir. Burada $\theta \in \mathbb{R}$ dir.

Tanım 2.1.13. Her $q = w + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ reel kuaterniyonu

$$a = w, \quad b = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \hat{\mu} = \hat{q} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

olmak üzere

$$q = a + \hat{\mu}b$$

şeklinde *kompleks formda* yazılabilir ve kompleks formun *kuaterniyon eşleniği*

$$\bar{q} = a - \hat{\mu}b$$

şeklindedir.

2.2 Dual Sayılar

Tanım 2.2.1. $a, a^* \in \mathbb{R}$ olmak üzere $A = a + \varepsilon a^*$ şeklindeki sayılara *dual sayılar* denir. $\varepsilon \notin \mathbb{R}$ birimi

$$\varepsilon \neq 0, \quad 0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0, \quad 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \quad \varepsilon^2 = 0$$

çarpım kuralına sahiptir. Dual sayılar birleşimli ve değişmeli bir cebir olup bölüm halkası belirtmezler. Dual sayıların cümlesi $\mathbb{D}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.2. Her $A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısı $\Re(A) = a \in \mathbb{R}$ ile gösterilen reel (skalar) ve $\Im(A) = a^* \in \mathbb{R}$ ile gösterilen dual kısımların birleşimi olarak

$$A = \Re(A) + \varepsilon \Im(A)$$

şeklinde *reel ve dual formda* yazılabilir.

Tanım 2.2.3. $A = \varepsilon a^*$ şeklinde sadece dual kısımdan oluşan dual sayıların cümlesine *pür dual sayılar* denir ve bu cümle $\hat{\mathbb{D}}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.2.4. $A = a + \varepsilon a^*$ ve $B = b + \varepsilon b^*$ herhangi iki dual sayı olmak üzere A ile B nin *toplamı*

$$\oplus : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$(A, B) \rightarrow A \oplus B = A + B$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$A + B = (a + b) + \varepsilon(a^* + b^*)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.5. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere herhangi bir $A = a + \varepsilon a^*$ dual sayısının λ skaları ile dış çarpımı

$$\odot : \mathbb{R} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$(\lambda, A) \rightarrow \lambda \odot A = \lambda A$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$\lambda A = \lambda A + \lambda \varepsilon a^*$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.6. $A = a + \varepsilon a^*$ ve $B = b + \varepsilon b^*$ herhangi iki dual sayı olmak üzere A ile B nin dual çarpımı

$$\otimes : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$(A, B) \rightarrow A \otimes B = AB = BA$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$AB = BA = (ab) + \varepsilon(ab^* + ba^*)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.7. $A = a + \varepsilon a^*$ herhangi bir dual sayı olmak üzere A nın *eşleniği*

$$\begin{aligned} (,)^* : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D} \\ A &\rightarrow A^* \end{aligned}$$

işlemiyle tanımlı olup

$$A^* = a - \varepsilon a^*$$

şeklindedir. Bu eşleniğe *dual eşlenik* denir. $B \in \mathbb{D}$ olmak üzere dual eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- (ii) $(AB)^* = A^*B^* = B^*A^*$,
- (iii) $(A^*)^* = A$.

Tanım 2.2.8. $A = a + \varepsilon a^*$ herhangi bir dual sayı olmak üzere A nın *normu*

$$\begin{aligned} N : \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow N(A) = N_A = AA^* = A^*A \end{aligned}$$

işlemiyle tanımlı olup

$$N_A = a^2$$

şeklindedir. $N_A \geq 0$ olup norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $N_{AB} = N_A N_B$,
- (ii) $N_{\lambda A} = \lambda^2 N_A$.

Burada, λ herhangi bir reel sayı ve B herhangi bir dual sayıdır.

Tanım 2.2.9. $A = a + \varepsilon a^* \in \mathbb{D}$ olmak üzere $N_A = 1$ ise $A = \pm 1$ dir.

Tanım 2.2.10. $A = a + \varepsilon a^*$ pür olmayan herhangi bir dual sayı olmak üzere A nın *inversi (tersi)*

$$(\cdot)^{-1}: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

$$A \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{a} - \varepsilon \frac{a^*}{a^2}$$

işlemleri tanımlı olup aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1},$
- (ii) $(\lambda A)^{-1} = A^{-1}/\lambda .$

Burada, $\lambda \neq 0$ herhangi bir reel sayı ve B pür olmayan herhangi bir dual sayıdır.

Tanım 2.2.11. $\mathbb{D}$ dual sayılar halkası olmak üzere

$$\mathbb{D}^3 = \{\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3) : A_i \in \mathbb{D}, 1 \leq i \leq 3\}$$

cümlesi bir modül belirtir. Bu modül kısaca $\mathbb{D}$ -Modül ile gösterilecek ve bir vektör uzayı olarak ele alınacaktır. $\mathbb{D}$ -Modül'ün elemanları olan sıralı dual üçlülere *dual vektörler* denir.

Tanım 2.2.12. $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ ve $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ herhangi iki dual vektör olmak üzere $\mathbf{A}$ ile $\mathbf{B}$ nin *toplamı*

$$\oplus : \mathbb{D}^3 \times \mathbb{D}^3 \rightarrow \mathbb{D}^3$$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \rightarrow \mathbf{A} \oplus \mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

işlemiyile tanımlı olup

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.13. $\lambda \in \mathbb{D}$ olmak üzere herhangi bir $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ dual vektörünün λ skaları ile *dış çarpımı*

$$\begin{aligned} \odot : \mathbb{D} \times \mathbb{D}^3 &\rightarrow \mathbb{D}^3 \\ (\lambda, \mathbf{A}) &\rightarrow \lambda \odot \mathbf{A} = \lambda \mathbf{A} \end{aligned}$$

işlemiyile tanımlı olup

$$\lambda \mathbf{A} = (\lambda A_1, \lambda A_2, \lambda A_3)$$

şeklindedir.

2.3 Dual Kuaterniyonlar

Tanım 2.3.1. *Dual kuaterniyon cebiri*

$$\begin{aligned} i^2 = j^2 = k^2 = ijk &= -1, \\ ij = -ji = k, \quad jk &= -kj = -1, \quad ki = -ik = j \end{aligned}$$

çarpım kuralına sahip olan $Q = W + Xi + Yj + Zk$ sayı dörtlülerinin oluşturduğu birleşimli fakat değişimli olmayan bir cebir olup bölüm halkası belirtmez. Bu sayı dörtlülerinin oluşturduğu cümleye *dual kuaterniyonlar* denir ve $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ile gösterilecektir. Burada W, X, Y ve Z dual sayılarına Q dual kuaterniyonunun bileşenleri denir. i, j ve k birimleri ise $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-Uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak ele alınabilir (Ata ve Yaylı 2009).

Tanım 2.3.2. Her $Q = W + Xi + Yj + Zk$ dual kuaterniyonu $S(Q) = W \in \mathbb{D}$ ile gösterilen skalar ve $V(Q) = Xi + Yj + Zk \in \mathbb{D}^3$ ile gösterilen vektörel kısımların birleşimi olarak

$$Q = S(Q) + V(Q)$$

şeklinde *skalar ve vektörel formda* yazılabilir.

Tanım 2.3.3. Sadece vektörel kısımdan oluşan dual kuaterniyonların cümlesine *pür dual kuaterniyonlar* denir ve bu cümle

$$\hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}} = \{Q = Xi + Yj + Zk : X, Y, Z \in \mathbb{D}\}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.4. $Q = S(Q) + V(Q)$ ve $P = S(P) + V(P)$ herhangi iki dual kuaterniyon olmak üzere Q ile P nin *toplamı*

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \\ (Q, P) &\rightarrow Q \oplus P = Q + P \end{aligned}$$

işlemiyle tanımlı olup

$$Q + P = (S(Q) + S(P)) + (V(Q) + V(P))$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.5. $\lambda \in \mathbb{D}$ olmak üzere herhangi bir $Q = S(Q) + V(Q)$ dual kuaterniyonunun λ skaları ile *dış çarpımı*

$$\odot : \mathbb{D} \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$(\lambda, Q) \rightarrow \lambda \odot Q = \lambda Q$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$\lambda Q = \lambda S(Q) + \lambda V(Q)$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.6. $Q = W_1 + X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k} = S(Q) + V(Q)$ ve $P = W_2 + X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k} = S(P) + V(P)$ herhangi iki dual kuaterniyon olmak üzere Q ile P nin *kuaterniyon çarpımı*

$$\times : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \times \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$(Q, P) \rightarrow Q \times P = QP$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$QP = S(Q)S(P) - \langle V(Q), V(P) \rangle + S(Q)V(P) + S(P)V(Q) + V(Q) \wedge V(P)$$

şeklindedir. Burada,

$$\langle V(Q), V(P) \rangle = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2,$$

$$V(Q) \wedge V(P) = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\mathbf{i} - (X_1Z_2 - Z_1X_2)\mathbf{j} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\mathbf{k}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.3.7. $Q = W + X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = S(Q) + V(Q)$ herhangi bir dual kuaterniyon olmak üzere Q nun *kuaterniyon eşleniği*

$$\begin{aligned} \overline{(\cdot)} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \\ Q &\rightarrow \bar{Q} \end{aligned}$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$\bar{Q} = W - X\mathbf{i} - Y\mathbf{j} - Z\mathbf{k} = S(Q) - \mathbf{V}(Q)$$

şeklindedir. $P \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere kuaterniyon eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $\overline{Q + P} = \bar{Q} + \bar{P},$
- (ii) $\overline{QP} = \bar{P} \bar{Q},$
- (iii) $\overline{(\bar{Q})} = Q.$

Tanım 2.3.8. $Q = W + X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = S(Q) + \mathbf{V}(Q)$ herhangi bir dual kuaterniyon olmak üzere Q nun *dual eşleniği*

$$\begin{aligned} (\cdot)^* : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \\ Q &\rightarrow Q^* \end{aligned}$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$Q^* = W^* + X^*\mathbf{i} + Y^*\mathbf{j} + Z^*\mathbf{k} = (S(Q))^* + (\mathbf{V}(Q))^*$$

şeklindedir. $P \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere dual eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- (i) $(Q + P)^* = Q^* + P^*,$
- (ii) $(QP)^* = Q^*P^*,$
- (iii) $(Q^*)^* = Q.$

Tanım 2.3.9. $Q = W + X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = S(Q) + \mathbf{V}(Q)$ herhangi bir dual kuaterniyon olmak üzere Q nun *total eşleniği*

$$\begin{aligned}\overline{(\cdot)}^* : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \\ Q &\rightarrow \overline{(Q^*)}\end{aligned}$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$\overline{(Q^*)} = (\bar{Q})^* = W^* - X^*i - Y^*j - Z^*k = (S(Q))^* - (V(Q))^*$$

şeklindedir. $P \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere total eşlenik aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned}(i) \quad & \overline{(Q + P)^*} = (\overline{Q + P})^* = \overline{Q^*} + \overline{P^*}, \\ (ii) \quad & \overline{(QP)^*} = (\overline{QP})^* = \overline{P^*} \overline{Q^*}.\end{aligned}$$

Tanım 2.3.10. $Q = W + Xi + Yj + Zk$ herhangi bir dual kuaterniyon olmak üzere Q nun *normu*

$$\begin{aligned}N : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{D} \\ Q &\rightarrow N(Q) = N_Q = Q\bar{Q} = \bar{Q}Q\end{aligned}$$

işlemleriyle tanımlı olup

$$N_Q = W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2$$

şeklindedir ve norm işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\begin{aligned}(i) \quad & N_{QP} = N_Q N_P, \\ (ii) \quad & N_{\lambda Q} = \lambda^2 N_Q.\end{aligned}$$

Burada, λ herhangi bir dual sayı ve P herhangi bir dual kuaterniyondur.

Tanım 2.3.11. $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere, $N_Q = 1$ ise Q ya *birim dual kuaterniyon* denir.

Tanım 2.3.12. $Q \in \hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ve $N_Q = 1$ ise Q ya *birim pür dual kuaterniyon* denir ve $\hat{Q}$ ile gösterilecektir. Birim pür dual kuaterniyonların cümlesi ise $\hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.13. $Q = W + Xi + Yj + Zk$ dual bileşenleri sıfır olmayan herhangi bir dual kuaterniyon olmak üzere Q nun *inversi (tersi)*

$$(\cdot)^{-1}: \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$$

$$Q \rightarrow Q^{-1} = \frac{\bar{Q}}{N_Q}$$

işlemiyle tanımlı olup

$$Q^{-1} = \frac{W - Xi - Yj - Zk}{W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2}$$

şeklindedir ve invers işlemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$(i) \quad (QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1},$$

$$(ii) \quad (\lambda Q)^{-1} = Q^{-1}/\lambda .$$

Burada, $\lambda \neq 0$ herhangi bir dual sayı ve P dual bileşenleri sıfır olmayan herhangi bir dual kuaterniyondur.

Tanım 2.3.14. Her $Q = W + Xi + Yj + Zk$ dual kuaterniyonu

$$\cos\emptyset = \frac{W}{\sqrt{N_Q}}, \quad \sin\emptyset = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}{\sqrt{N_Q}}, \quad \hat{Q} = \frac{Xi + Yj + Zk}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

olmak üzere

$$Q = \sqrt{N_Q}(\cos\emptyset + \widehat{Q}\sin\emptyset)$$

şeklinde *kutupsal formda* yazılabilir. Burada $\emptyset = \varphi + \varepsilon\varphi^* \in \mathbb{D}$ dir. Kutupsal formdaki Q nun eşleniği için ise aşağıdaki verilen üç durum söz konusudur:

(i) *Kuaterniyon eşleniği*

$$\bar{Q} = \sqrt{N_Q}(\cos\emptyset - \widehat{Q}\sin\emptyset)$$

şeklindedir.

(ii) *Dual eşleniği*

$$Q^* = (\sqrt{N_Q})^* ((\cos\emptyset)^* + (\widehat{Q}\sin\emptyset)^*)$$

şeklindedir.

(iii) *Total eşleniği*

$$\overline{(Q^*)} = (\bar{Q})^* = \overline{(\sqrt{N_Q})^*} ((\cos\emptyset)^* - (\widehat{Q}\sin\emptyset)^*)$$

şeklindedir. Burada, $\sqrt{N_Q} \in \mathbb{D}$ olduğundan $\overline{(\sqrt{N_Q})^*} = (\sqrt{N_Q})^*$ olacaktır.

Tanım 2.3.15. Her $Q = W + Xi + Yj + Zk$ dual kuaterniyonu

$$A = W, \quad B = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \widehat{\delta} = \widehat{Q} = \frac{Xi + Yj + Zk}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

olmak üzere,

$$Q = A + \widehat{\delta}B$$

şeklinde *kompleks formda* yazılabilir. Q nun eşleniği için ise aşağıdaki verilen üç durum söz konusudur:

(i) *Kuaterniyon eşleniği*

$$\bar{Q} = A - \widehat{\delta}B$$

şeklindedir.

(ii) *Dual eşleniği*

$$Q^* = A^* + (\widehat{\delta}B)^*$$

şeklindedir.

(iii) *Total eşleniği*

$$\overline{(Q^*)} = (\bar{Q})^* = A^* - (\widehat{\delta}B)^*$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.16. Her $Q = W + Xi + Yj + Zk$ dual kuaterniyonu $\Re(Q) \in \mathbb{H}$ ile gösterilen skalar ve $\Im(Q) \in \mathbb{H}$ ile gösterilen dual kısımlar

$$\begin{aligned}\Re(Q) &= Re(W) + Re(X)i + Re(Y)j + Re(Z)k, \\ \Im(Q) &= Du(W) + Du(X)i + Du(Y)j + Du(Z)k\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$Q = \Re(Q) + \varepsilon \Im(Q)$$

şeklinde *dual formda* yazılabilir. Q nun eşleniği için ise aşağıdaki verilen üç durum söz konusudur:

(i) *Kuaterniyon eşleniği*

$$\bar{Q} = \overline{\Re(Q)} + \varepsilon \overline{\Im(Q)}$$

şeklindedir.

(ii) *Dual eşleniği*

$$Q^* = \Re(Q) - \varepsilon \Im(Q)$$

şeklindedir.

(iii) *Total eşleniği*

$$\overline{(Q^*)} = (\bar{Q})^* = \overline{\Re(Q)} - \varepsilon \overline{\Im(Q)}$$

şeklindedir.

Teorem 2.3.1. Herhangi bir

$$Q = (a + \hat{\mu}b) + \varepsilon(c + \hat{w}d)$$

dual kuaterniyonu için $Q^2 = -1$ eşitliği sadece aşağıdaki verilen iki durumda geçerlidir:

(i) $\hat{\mu} \perp \hat{w}$ olmak üzere $Q = (\pm\hat{\mu}) + \varepsilon(\hat{w}d)$,

(ii) $Q = \pm\hat{\mu}$.

Burada, $Q = (\pm\hat{\mu}) + \varepsilon(\hat{w}d)$ birim pür dual kuaterniyon belirtirken $Q = \pm\hat{\mu}$ birim pür reel kuaterniyon belirtir (Bekar ve Yaylı 2013).

Teorem 2.3.2. Herhangi bir

$$Q = (a + \hat{\mu}b) + \varepsilon(c + \hat{w}d)$$

dual kuaterniyonu için $Q^2 = 1$ eşitliği sadece $Q = \pm 1$ için geçerlidir (Bekar ve Yaylı 2013).

Tanım 2.3.17. *E. Study dönüşümüne* göre her bir birim pür dual kuaterniyona $\mathbb{R}^3$ te bir yönlü doğru karşılık gelir. Aynı şekilde, $\mathbb{R}^3$ teki her bir yönlü doğruya birim dual küre üzerinde bir nokta karşılık gelir.

2.4 Vida Operatörü

$\hat{A}$ ve $\hat{B}$ herhangi iki birim pür dual kuaterniyon ve aralarındaki açı $\varphi = \phi + \varepsilon\phi^* \in \mathbb{D}$ olsun. $\hat{A}$ ile $\hat{B}$ nin *kuaterniyon çarpımı*

$$\hat{A}\hat{B} = -\langle \hat{A}, \hat{B} \rangle + \hat{A} \wedge \hat{B} = -\cos\varphi + \frac{\hat{A} \wedge \hat{B}}{|\hat{A} \wedge \hat{B}|} |\hat{A} \wedge \hat{B}| = -\cos\varphi + \hat{S}\sin\varphi$$

şeklindedir. Burada, $\hat{S} = (\hat{A} \wedge \hat{B})/|\hat{A} \wedge \hat{B}|$ olmak üzere $\hat{S} \perp \hat{A}$, $\hat{S} \perp (\hat{A} \wedge \hat{B})$ ve $|\hat{S}| = 1$ dir. Dolayısıyla,

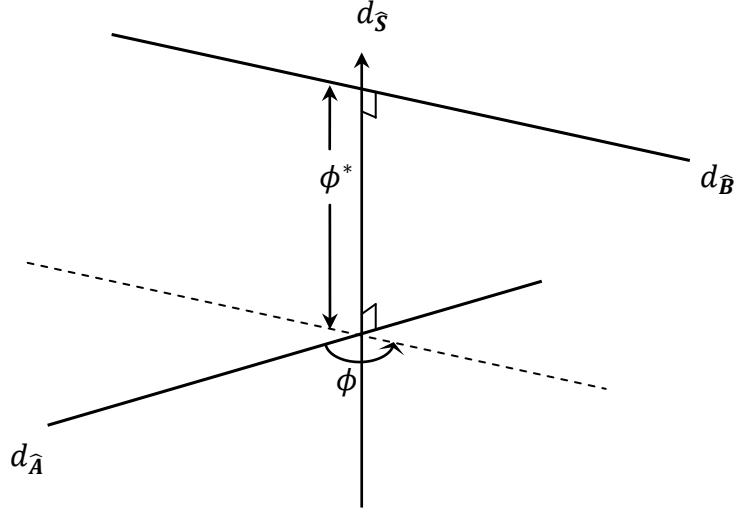
$$\hat{B}\hat{A} = -\langle \hat{B}, \hat{A} \rangle + \hat{B} \wedge \hat{A} = -\cos\varphi - \hat{S}\sin\varphi = -(\cos\varphi + \hat{S}\sin\varphi)$$

ve

$$\hat{B}(\hat{A})^{-1} = (\hat{B})^{-1}\hat{A} = \cos\varphi + \hat{S}\sin\varphi$$

eşitlikleri verilebilir. $\hat{B}(\hat{A})^{-1} = (\hat{B})^{-1}\hat{A} = Q$ olarak alındığında $\hat{B} = Q\hat{A}$ ve $\hat{A} = \hat{B}Q$ eşitlikleri sağlanır.

$Q\hat{A}$ çarpımı sonucu $\hat{A}$ ya karşılık gelen doğru, $\hat{S}$ ye karşılık gelen doğru etrafında pozitif yönde (saatin hareket yönünün tersi yönünde) ϕ lık açı kadar döner ve yine $\hat{S}$ ye karşılık gelen doğru boyunca ϕ^* miktarınca öterler. Ötelemenin yönü $\hat{S}$ ye karşılık gelen doğrunun yönündedir. $d_{\hat{A}}$, $d_{\hat{B}}$ ve $d_{\hat{S}}$ ile sırasıyla E. Study dönüşümüne göre $\hat{A}$, $\hat{B}$ ve $\hat{S}$ ye $\mathbb{R}^3$ te karşılık gelen doğrular gösterilmek üzere $Q\hat{A}$ nın geometrik yorumu için şekil 2.1 verilebilir:



Şekil 2.1 $Q\hat{A}$ operatörünün vida hareketi karşılığı

Sonuç olarak aşağıdaki iki durum söz konusudur:

- (i) Eğer $\phi \neq 0$ ve $\phi^* = 0$ ise $\cos\phi + \hat{\mathbf{S}}\sin\phi$ operatörü bir dönme belirtir.
- (ii) Eğer $\phi = 0$ ve $\phi^* \neq 0$ ise $\cos\phi + \hat{\mathbf{S}}\sin\phi$ operatörü bir öteleme belirtir.

Bir eksen etrafında dönme ve yine aynı eksen boyunca öteleme bir *vida hareketi* belirtir. Dolayısıyla, herhangi bir $Q = \cos\phi + \hat{\mathbf{S}}\sin\phi$ birim dual kuaterniyonu bir vida operatörü olarak ele alınabilir.

Teorem 2.4.1. $\hat{\mathbf{A}}$ birim pür dual kuaterniyon ve $\varphi/2 = (\phi/2) + \varepsilon(\phi^*/2) \in \mathbb{D}$ olmak üzere $Q = \cos(\varphi/2) + \hat{\mathbf{S}}\sin(\varphi/2)$ birim dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, $Q\hat{\mathbf{A}}\bar{Q}$ kuaterniyon çarpımı sonucu $d_{\hat{\mathbf{A}}}$ doğrusu $d_{\hat{\mathbf{S}}}$ doğrusu etrafında pozitif yönde ϕ lık açı kadar döner ve yine $d_{\hat{\mathbf{S}}}$ doğrusu boyunca ϕ^* miktarınca öteler. Ötelemenin yönü $\hat{\mathbf{S}}$ ye karşılık gelen doğrunun yönündedir.

2.5 İnvölüsyon ve Anti-İnvölüsyon

Tanım 2.5.1. Bir $x \rightarrow f(x)$ dönüşümünün *invölüsyon* belirtmesi için aşağıdaki (i), (ii) ve (iii) aksiyomlarını, *anti-invölüsyon* belirtmesi için ise (i), (ii) ve (iv) aksiyomlarını sağlaması gerekir (Hamilton 1848, Ell ve Sangwine 2007):

(i) *Self-inverse* yani tersi kendisine eşit olmalıdır. Bir başka ifadeyle

$$f(f(x)) = x$$

eşitliği sağlanmalıdır.

(ii) *Lineer* olmalıdır. Bir başka ifadeyle $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \text{ ve } f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

(iii) $f(x_1 x_2) = f(x_2) f(x_1)$ eşitliği sağlanmalıdır.

(iv) $f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$ eşitliği sağlanmalıdır.

3. REEL KUATERNİYONLARIN İNVLÜSYONLARI VE ANTİ-İNVLÜSYONLARI

Bu bölümde, ilk olarak reel kuaterniyonlar kullanılarak biri involüsyon diğeri anti-involüsyon olmak üzere iki dönüşüm verilecektir. Daha sonra ise, bu dönüşümlerin vektörel kısımlarının $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumlarının yansımaya karşılık geldikleri gösterilecektir. En son ise, bu dönüşümlere karşılık gelen matrisler elde edilecektir.

Önerme 3.1. q herhangi bir reel kuaterniyon ve $\hat{v}$ birim pür reel kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\hat{v}} : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\ q &\rightarrow f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}\bar{q}\hat{v} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\hat{v}}$ dönüşümü bir *involüsyon* belirtir (Ell ve Sangwine 2007).

İspat. $q \in \mathbb{H}$ ve $\hat{v} \in \hat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\hat{v}}(f_{\hat{v}}(q)) &= f_{\hat{v}}(-\hat{v}\bar{q}\hat{v}) \\ &= -\hat{v}(-\hat{v}\bar{q}\hat{v})\hat{v} \\ &= -\hat{v}(-\hat{v})q\hat{v}\hat{v} \\ &= (\hat{v})^2 q (\hat{v})^2 \\ &= (-1)q(-1) \\ &= q \end{aligned}$$

eşitliği gereğince $f_{\hat{v}}$ dönüşümü self-inverse aksiyomunu sağlar.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\hat{v}}(q + p) &= -\hat{v}\overline{(q + p)}\hat{v} \\ &= -\hat{v}(\bar{q} + \bar{p})\hat{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-\hat{v}\bar{q}\hat{v}) + (-\hat{v}\bar{p}\hat{v}) \\
&= f_{\hat{v}}(q) + f_{\hat{v}}(p)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda f_{\hat{v}}(q) &= \lambda(-\hat{v}\bar{q}\hat{v}) \\
&= -\hat{v}\overline{\lambda q}\hat{v} \\
&= f_{\hat{v}}(\lambda q)
\end{aligned}$$

eşitlikleri gereğince $f_{\hat{v}}$ dönüşümü lineerlik aksiyomunu sağlar.

Son olarak ise,

$$\begin{aligned}
f_{\hat{v}}(qp) &= -\hat{v}\overline{(qp)}\hat{v} \\
&= -\hat{v}(\bar{p}\bar{q})\hat{v}
\end{aligned}$$

eşitliği $-(\hat{v})^2 = 1$ olduğundan

$$f_{\hat{v}}(qp) = -\hat{v}\bar{p}(-\hat{v}\hat{v})\bar{q}\hat{v}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
f_{\hat{v}}(qp) &= (-\hat{v}\bar{p}\hat{v})(-\hat{v}\bar{q}\hat{v}) \\
&= f_{\hat{v}}(p)f_{\hat{v}}(q)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece involüsyon aksiyomları tamamlanmış olur.

Önerme 3.2. q herhangi bir reel kuaterniyon ve $\hat{v}$ birim pür reel kuaterniyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
f_{\hat{v}} : \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{H} \\
q &\rightarrow f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}q\hat{v}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\hat{v}}$ dönüşümü bir *anti-involüsyon* belirtir (Ell ve Sangwine 2007).

İspat. $q \in \mathbb{H}$ ve $\hat{v} \in \hat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 f_{\hat{v}}(f_{\hat{v}}(q)) &= f_{\hat{v}}(-\hat{v}q\hat{v}) \\
 &= -\hat{v}(-\hat{v}q\hat{v})\hat{v} \\
 &= -\hat{v}(-\hat{v})q\hat{v}\hat{v} \\
 &= (\hat{v})^2 q (\hat{v})^2 \\
 &= (-1)q(-1) \\
 &= q
 \end{aligned}$$

eşitliği gereğince $f_{\hat{v}}$ dönüşümü self-inverse aksiyomunu sağlar.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $p \in \mathbb{H}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 f_{\hat{v}}(q + p) &= -\hat{v}(q + p)\hat{v} \\
 &= (-\hat{v}q\hat{v}) + (-\hat{v}p\hat{v}) \\
 &= f_{\hat{v}}(q) + f_{\hat{v}}(p)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \lambda f_{\hat{v}}(q) &= \lambda(-\hat{v}q\hat{v}) \\
 &= -\hat{v}\lambda q\hat{v} \\
 &= f_{\hat{v}}(\lambda q)
 \end{aligned}$$

eşitlikleri gereğince $f_{\hat{v}}$ dönüşümü lineerlik aksiyomunu sağlar.

Son olarak ise,

$$f_{\hat{v}}(qp) = -\hat{v}(qp)\hat{v}$$

eşitliği $-(\hat{v})^2 = 1$ olduğundan

$$f_{\hat{v}}(qp) = -\hat{v}q(-\hat{v}\hat{v})p\hat{v}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{\hat{v}}(qp) &= (-\hat{v}q\hat{v})(-\hat{v}p\hat{v}) \\ &= f_{\hat{v}}(q)f_{\hat{v}}(p) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece anti-involüsyon aksiyomları tamamlanmış olur.

3.1 $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-Uzayında Reel Kuaterniyon İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Geometrik Yorumları

Teorem 3.1.1. $q = a + \hat{\mu}b$ kompleks formdaki herhangi bir reel kuaterniyon ve $\hat{v}$ birim pür reel kuaterniyon olmak üzere $f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}\bar{q}\hat{v}$ involüsyon dönüşümü, q nun skalar kısmı olan a yı invaryant bırakırken, vektörel kısmı olan $\hat{\mu}b$ yi involüsyon eksenini $\hat{v}$ ye dik olan düzleme göre yansıtır (Ell ve Sangwine 2007).

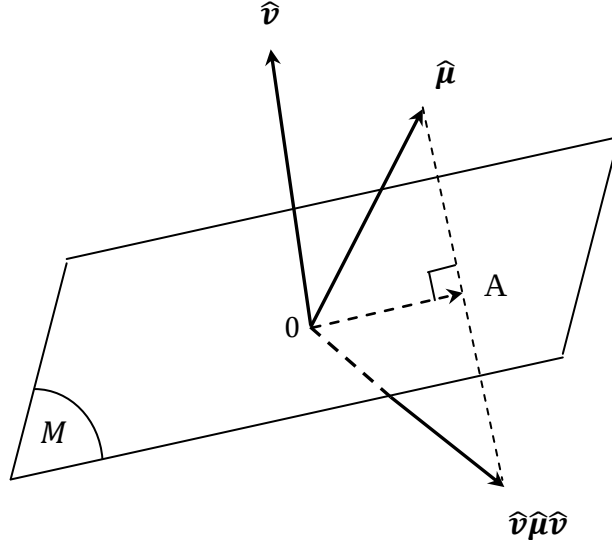
İspat. $q \in \mathbb{H}$ ve $\hat{v} \in \hat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}\bar{q}\hat{v} = -\hat{v}\overline{(a + \hat{\mu}b)}\hat{v} = -\hat{v}(a - \hat{\mu}b)\hat{v} = -(\hat{v})^2a + \hat{v}\hat{\mu}\hat{v}b$$

eşitliğinde $(\hat{v})^2 = -1$ değeri yerine yazılırsa

$$f_{\hat{v}}(q) = a + \hat{v}\hat{\mu}\hat{v}b$$

elde edilir. $\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}$ çarpımı $\mathbb{R}^3$ te, $\hat{\mu}$ yü $\hat{v}$ eksenine normal olan düzleme göre yansıtır (Coxeter 1946). Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. $\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}$ vektörünün resmi şekil 3.1'deki gibidir;



Şekil 3.1 $f_v(q) = -\hat{v}q\hat{v}$ involüsyonunun vektörel kısmı $\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}$

Şekil 3.1’de, M ile $\hat{v}$ ye dik olan düzlem, $\vec{A}$ ile de $\hat{\mu}$ nün M düzlemi üzerindeki ortogonal izdüşümü gösterilmiştir. Ayrıca, $|\hat{v}| = |\hat{\mu}| = |\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}| = 1$ dir. $f_v(q) = -\hat{v}q\hat{v}$ dönüşümü altında q nun skalar kısmı a invaryant kaldığından şekilde gösterilmemiştir.

Teorem 3.1.2. $q = a + \hat{\mu}b$ kompleks formdaki herhangi bir reel kuaterniyon ve $\hat{v}$ birim pür reel kuaterniyon olmak üzere $f_v(q) = -\hat{v}q\hat{v}$ anti-involüsyon dönüşümü, q nun skalar kısmı olan a yı invaryant bırakırken, vektörel kısmı olan $\hat{\mu}b$ yi $\hat{v}$ ye göre yansıtır. Bir başka ifadeyle, q nun vektörel kısmı $\hat{\mu}b$ yi involüsyon eksenini $\hat{v}$ etrafında π radyan kadar döndürür (Ell ve Sangwine 2007).

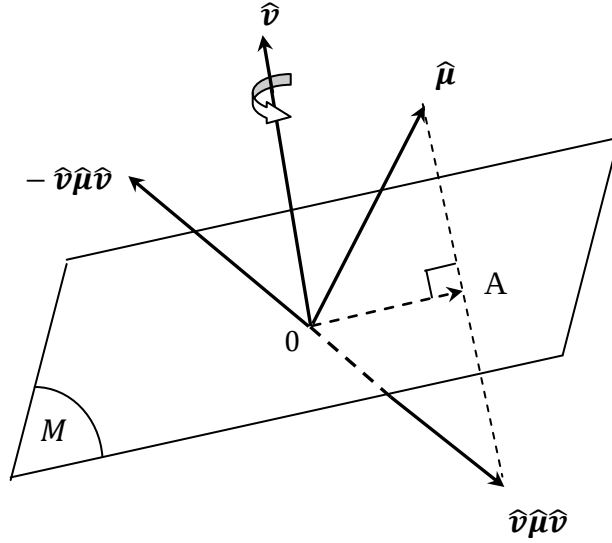
İspat. $q \in \mathbb{H}$ ve $\hat{v} \in \hat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$f_v(q) = -\hat{v}q\hat{v} = -\hat{v}(a + \hat{\mu}b)\hat{v} = -(\hat{v})^2 a - \hat{v}\hat{\mu}\hat{v}b$$

eşitliğinde $(\hat{v})^2 = -1$ değeri yerine yazılırsa

$$f_v(q) = a - \hat{v}\hat{\mu}\hat{v}b$$

elde edilir. $-\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}$ ile $\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}$ vektörlerinin yönleri zıt fakat doğrultuları aynıdır. Şekil 3.2'den, $-\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}$ vektörünün $\hat{\mu}$ nün $\hat{v}$ ye göre bir yansıması olduğu ya da bir başka ifadeyle $\hat{\mu}$ nün $\hat{v}$ eksenini etrafında π radyan kadar döndürülmesine denk geldiği kolayca görülmektedir. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur.



Şekil 3.2 $f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}q\hat{v}$ anti-involüsyonunun vektörel kısmı $\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}$

Şekil 3.2'de, M ile $\hat{v}$ ye dik olan düzlem, $\vec{A}$ ile de $\hat{\mu}$ nün M düzlemi üzerindeki ortogonal izdüşümü gösterilmiştir. Ayrıca, $|\hat{v}| = |\hat{\mu}| = |\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}| = |-\hat{v}\hat{\mu}\hat{v}| = 1$ dir. $f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}q\hat{v}$ dönüşümü altında q nun skalar kısmı a invariant kaldığından şekilde gösterilmemiştir.

3.2 Reel Kuaterniyonların İnvolüsyon Matrisleri

$q = a + \hat{\mu}b$ kompleks formdaki herhangi bir reel kuaterniyon ve $\hat{v} = xi + yj + zk$ birim pür reel kuaterniyon olsun. $f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}q\hat{v} = a + \hat{v}\hat{\mu}\hat{v}b$ involüsyon dönüşümü ve $\mathbb{H}$ vektör uzayının $\{1, i, j, k\}$ bazı kullanılarak aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

$$f_{\hat{v}}(1) = -\hat{v}\hat{1}\hat{v} = -\hat{v}^2 = 1,$$

$$\begin{aligned}
f_{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{i}) &= -\hat{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{i}}\hat{\mathbf{v}} = (1 - 2x^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j} - 2xz\mathbf{k}, \\
f_{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{j}) &= -\hat{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{v}} = -2xy\mathbf{i} + (1 - 2y^2)\mathbf{j} - 2yz\mathbf{k}, \\
f_{\hat{\mathbf{v}}}(\mathbf{k}) &= -\hat{\mathbf{v}}\bar{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{v}} = -2xz\mathbf{i} - 2yz\mathbf{j} + (1 - 2z^2)\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $f_{\hat{\mathbf{v}}}(q) = -\hat{\mathbf{v}}\bar{q}\hat{\mathbf{v}}$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

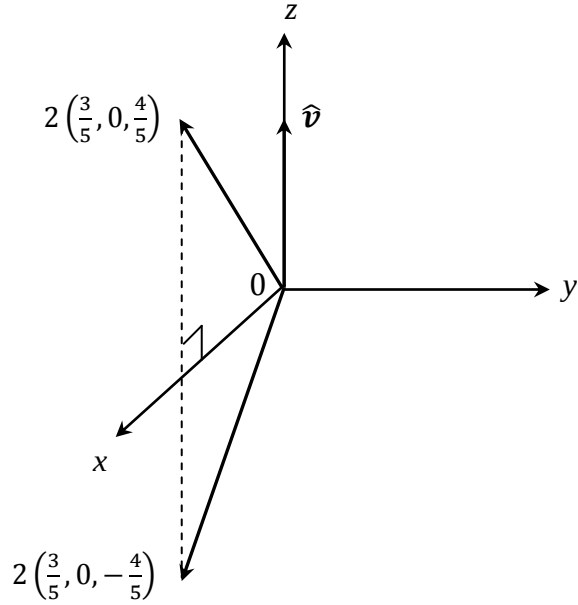
$$Nq = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2x^2 & -2xy & -2xz \\ 0 & -2xy & 1 - 2y^2 & -2yz \\ 0 & -2xz & -2yz & 1 - 2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Burada, $\hat{\mu}b = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ve $q = a + \hat{\mu}b$ dir. 4×4 ve 4×1 tipindeki matrisler ise sırasıyla N ve q ya karşılık gelmektedir. $NN^T = I$ ve $N = N^T$ olduğundan N ortogonal ve simetriktir. Ayrıca, $\det(T) = -1$ olduğundan $f_{\hat{\mathbf{v}}}(q) = -\hat{\mathbf{v}}\bar{q}\hat{\mathbf{v}}$ involüsyon dönüşümü $\mathbb{R}^4$ te bir yansıma belirtir.

Örnek 3.2.1. $q = 3 + 2(3/5, 0, 4/5) \in \mathbb{H}$ ve $\hat{\mathbf{v}} = (0, 0, 1) \in \hat{\mathbb{H}}$ olmak üzere, $f_{\hat{\mathbf{v}}}(q) = -\hat{\mathbf{v}}\bar{q}\hat{\mathbf{v}}$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$Nq = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \left(3, \frac{6}{5}, 0, -\frac{8}{5} \right)$$

şeklinde verilebilir. Şekil 3.3'ten görülebileceği üzere, Nq çarpımı sonucu, q reel kuaterniyonunun skalar kısmı olan 3 invaryant kalırken vektörel kısmı olan $2(3/5, 0, 4/5)$ ise involüsyon eksenini olan $\hat{\mathbf{v}} = (0, 0, 1)$ ye dik olan düzleme göre yansır.



Şekil 3.3 Vektör $2(3/5, 0, 4/5)$ in $\hat{v}$ vektörüne dik olan düzleme göre yansımaları

Sonuç 3.2.1. $\mathbf{q} = \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \hat{\mathbb{H}}$ ve $\hat{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z) \in \hat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 1 - 2x^2 & -2xy & -2xz \\ -2xy & 1 - 2y^2 & -2yz \\ -2xz & -2yz & 1 - 2z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

matris çarpımı sonucu, $\mathbb{R}^3$ te $\mathbf{q}$ pür reel kuaterniyonu $\hat{v}$ birim pür reel kuaterniyonuna dik olan düzleme göre yansır.

3.3 Reel Kuaterniyonların Anti-İnvölüsyon Matrisleri

$q = a + \hat{\mu}b$ kompleks formdaki herhangi bir reel kuaterniyon ve $\hat{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ birim pür reel kuaterniyon olsun. Bu durumda, $\mathbb{H}$ vektör uzayının $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bazı kullanılarak $f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}q\hat{v} = a - \hat{v}\hat{\mu}\hat{v}b$ anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

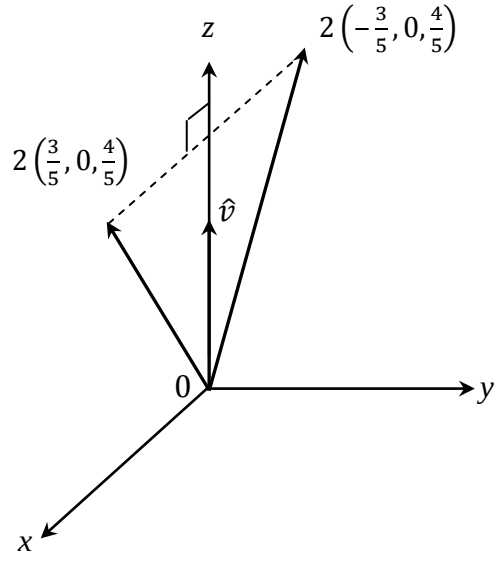
$$Nq = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x^2 - 1 & 2xy & 2xz \\ 0 & 2xy & 2y^2 - 1 & 2yz \\ 0 & 2xz & 2yz & 2z^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir. Burada, $\hat{\mu}b = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ve $q = a + \hat{\mu}b$ dir. 4×4 ve 4×1 tipindeki matrisler ise sırasıyla N ve q ya karşılık gelmektedir. $NN^T = I$ ve $N = N^T$ olduğundan N ortogonal ve simetriktir. Ayrıca, $\det(T) = +1$ olduğundan $f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}q\hat{v}$ anti-involüsyon dönüşümü $\mathbb{R}^4$ te bir dönme belirtir.

Örnek 3.3.1. $q = 3 + 2(3/5, 0, 4/5) \in \mathbb{H}$ ve $\hat{v} = (0, 0, 1) \in \hat{\mathbb{H}}$ olmak üzere, $f_{\hat{v}}(q) = -\hat{v}q\hat{v}$ anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$Nq = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 6 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix} = \left(3, -\frac{6}{5}, 0, \frac{8}{5} \right)$$

şeklinde verilebilir. Şekil 3.4'ten görülebileceği üzere, Nq çarpımı sonucu, q reel kuaterniyonunun skalar kısmı olan 3 invaryant kalırken vektörel kısmı olan $2(3/5, 0, 4/5)$ involüsyon eksenini $\hat{v} = (0, 0, 1)$ ye göre yansıtır. Bir başka ifadeyle, q nun vektörel kısmı $2(3/5, 0, 4/5)$ involüsyon eksenini $\hat{v} = (0, 0, 1)$ etrafında π radyan kadar döner.



Şekil 3.4 Vektör $2(3/5, 0, 4/5)$ in $\hat{v}$ vektörüne göre yansıması

Sonuç 3.3.1. $\mathbf{q} = \mu_1 \mathbf{i} + \mu_2 \mathbf{j} + \mu_3 \mathbf{k} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \hat{\mathbb{H}}$ ve $\hat{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (x, y, z) \in \hat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} 2x^2 - 1 & 2xy & 2xz \\ 2xy & 2y^2 - 1 & 2yz \\ 2xz & 2yz & 2z^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix}$$

matris çarpımı sonucu, $\mathbb{R}^3$ te $\mathbf{q}$ pür reel kuaterniyonu $\hat{v}$ birim pür reel kuaterniyonuna göre yansır. Bir başka ifadeyle, $\mathbf{q}$ involüsyon eksenini $\hat{v}$ etrafında π radyan kadar döner.

4. DUAL KUATERNİYONLARIN İNVLÜSYONLARI VE ANTI-İNVLÜSYONLARI

Bu bölümde, ilk olarak dual kuaterniyonlar kullanılarak ikisi involüsyon diğer ikisi anti-involüsyon olmak üzere dört dönüşüm verilecektir. Daha sonra ise, bu dönüşümlerin vektörel kısımlarında yer alan $\pm \widehat{V} \widehat{\delta} \widehat{V}$ ya da $\pm \widehat{V} (\widehat{\delta})^* \widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonlarının $\mathbb{R}^3$ ve $\mathbb{D}^3$ teki geometrik yorumları verilecektir. $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumları yansıma (bir doğrunun bir doğruya göre yansıması ve bir doğrunun bir düzleme göre yansıması) ve vida operatörü olarak verilirken, $\mathbb{D}^3$ teki geometrik yorumları ise sadece yansıma olarak verilecektir. En son ise, bu dönüşümlere karşılık gelen matrisler elde edilecektir.

Önerme 4.1. Herhangi bir Q dual kuaterniyonu ile $(\widehat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan herhangi bir $\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \\ Q &\rightarrow f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V} \bar{Q} \widehat{V} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü bir *involüsyon* belirtir (Bekar ve Yaylı 2013).

İspat. $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{V} \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}}(f_{\widehat{V}}(Q)) &= f_{\widehat{V}}(-\widehat{V} \bar{Q} \widehat{V}) \\ &= -\widehat{V} \overline{(-\widehat{V} \bar{Q} \widehat{V})} \widehat{V} \\ &= -\widehat{V} (-\widehat{V}) Q \widehat{V} \widehat{V} \\ &= (\widehat{V})^2 Q (\widehat{V})^2 \\ &= (-1) Q (-1) \\ &= Q \end{aligned}$$

eşitliği gereğince $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü self-inverse aksiyomunu sağlar.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $P \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 f_{\hat{V}}(Q + P) &= -\hat{V}(\overline{Q + P})\hat{V} \\
 &= -\hat{V}(\bar{Q} + \bar{P})\hat{V} \\
 &= (-\hat{V}\bar{Q}\hat{V}) + (-\hat{V}\bar{P}\hat{V}) \\
 &= f_{\hat{V}}(Q) + f_{\hat{V}}(P)
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \lambda f_{\hat{V}}(Q) &= \lambda(-\hat{V}\bar{Q}\hat{V}) \\
 &= -\hat{V}\lambda\bar{Q}\hat{V} \\
 &= f_{\hat{V}}(\lambda Q)
 \end{aligned}$$

eşitlikleri gereğince $f_{\hat{V}}$ dönüşümü lineerlik aksiyomunu sağlar.

Son olarak ise,

$$\begin{aligned}
 f_{\hat{V}}(QP) &= -\hat{V}(\overline{QP})\hat{V} \\
 &= -\hat{V}(\bar{P} \bar{Q})\hat{V}
 \end{aligned}$$

eşitliği $-(\hat{V})^2 = 1$ olduğundan

$$f_{\hat{V}}(QP) = -\hat{V}\bar{P}(-\hat{V}\hat{V})\bar{Q}\hat{V}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
 f_{\hat{V}}(QP) &= (-\hat{V}\bar{P}\hat{V})(-\hat{V}\bar{Q}\hat{V}) \\
 &= f_{\hat{V}}(P)f_{\hat{V}}(Q)
 \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece involüsyon aksiyomları tamamlanmış olur.

$f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}\bar{Q}\widehat{V}$ involüsyon dönüşümünde kuaterniyon eşleniği kullanılmıştır. Bu durumda, $Q = (a + \widehat{\mu}_1 b) + \varepsilon(c + \widehat{w}_1 d)$ herhangi bir dual kuaterniyon ve $\widehat{V} = (\pm\widehat{\mu}) + \varepsilon(\widehat{w}e)$ ise Teorem 2.3.1’de verilen $(\widehat{V})^2 = -1$ koşulunu sağlayan herhangi bir birim pür dual kuaterniyondur. Şimdi ise, dual eşlenik kullanılarak $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}Q^*\widehat{V}$ anti-involüsyon dönüşümü elde edilecektir. Ancak bu durumda, Q dual kuaterniyonu ve Teorem 2.3.1’de verilen $(\widehat{V})^2 = -1$ koşulunu sağlayan $\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonu için aşağıdaki verilen sınırlamalar söz konusudur (Bekar ve Yaylı 2013):

- (i) Eğer $\widehat{V} = \pm\widehat{\mu}$ ise, bu durumda $Q = (a + \widehat{\mu}_1 b) + \varepsilon(c + \widehat{w}_1 d)$ herhangi bir dual kuaterniyondur.
- (ii) $e \neq 0$ ve $\widehat{\mu} \perp \widehat{w}$ olmak üzere $\widehat{V} = (\pm\widehat{\mu}) + \varepsilon(\widehat{w}e)$ ise, bu durumda $Q = (a \pm \widehat{\mu}\widehat{w}b) + \varepsilon(c \pm \widehat{\mu}\widehat{w}d)$ dir.

İkinci sınırlamada bahsedilen $Q = (a \pm \widehat{\mu}\widehat{w}b) + \varepsilon(c \pm \widehat{\mu}\widehat{w}d)$ dual kuaterniyonlarının cümlesi $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}(\widehat{V})$ ile gösterilecektir.

Bu sınırlamaların sebebi, $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}Q^*\widehat{V}$ dönüşümünün anti-involüsyon belirtebilmesi için sağlaması gereken self-inverslik aksiyomundan kaynaklanır. Çünkü

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}}(f_{\widehat{V}}(Q)) &= f_{\widehat{V}}(-\widehat{V}Q^*\widehat{V}) \\ &= -\widehat{V}(-\widehat{V}Q^*\widehat{V})^*\widehat{V} \\ &= \widehat{V}(\widehat{V})^*Q^*(\widehat{V})^*\widehat{V} \end{aligned}$$

çarpımı sadece verilen bu sınırlamalar sonucu Q ya eşit olacaktır.

Önerme 4.2. Herhangi bir $Q = (a + \widehat{\mu}_1 b) + \varepsilon(c + \widehat{w}_1 d)$ dual kuaterniyonu ile herhangi bir $\widehat{V} = \pm\widehat{\mu}$ birim pür reel kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \\ Q &\rightarrow f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}Q^*\widehat{V} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\hat{V}}$ dönüşümü bir *anti-involüsyon* belirtir (Bekar ve Yaylı 2013).

İspat. $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\hat{V} = \pm \hat{\mu} \in \hat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\hat{V}}(f_{\hat{V}}(Q)) &= f_{\hat{V}}(-\hat{V}Q^*\hat{V}) \\ &= -\hat{V}(-\hat{V}Q^*\hat{V})^*\hat{V} \\ &= \hat{V}(\hat{V})^*Q^*(\hat{V})^*\hat{V} \\ &= Q \end{aligned}$$

eşitliği gereğince $f_{\hat{V}}$ dönüşümü self-inverse aksiyomunu sağlar.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $P \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\hat{V}}(Q + P) &= -\hat{V}(Q + P)^*\hat{V} \\ &= -\hat{V}(Q^* + P^*)\hat{V} \\ &= (-\hat{V}Q^*\hat{V}) + (-\hat{V}P^*\hat{V}) \\ &= f_{\hat{V}}(Q) + f_{\hat{V}}(P) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda f_{\hat{V}}(Q) &= \lambda(-\hat{V}Q^*\hat{V}) \\ &= -\hat{V}(\lambda Q)^*\hat{V} \\ &= f_{\hat{V}}(\lambda Q) \end{aligned}$$

eşitlikleri gereğince $f_{\hat{V}}$ dönüşümü lineerlik aksiyomunu sağlar.

Son olarak ise,

$$\begin{aligned} f_{\hat{V}}(QP) &= -\hat{V}(QP)^*\hat{V} \\ &= -\hat{V}Q^*P^*\hat{V} \end{aligned}$$

eşitliği $-(\widehat{V})^2 = 1$ olduğundan

$$f_{\widehat{V}}(QP) = -\widehat{V}Q^*(-\widehat{V}\widehat{V})P^*\widehat{V}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}}(QP) &= (-\widehat{V}Q^*\widehat{V})(-\widehat{V}P^*\widehat{V}) \\ &= f_{\widehat{V}}(Q)f_{\widehat{V}}(P) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece anti-involüsyon aksiyomları tamamlanmış olur.

Önerme 4.3. $e \neq 0$ olmak üzere herhangi bir $\widehat{V} = (\pm\widehat{\mu}) + \varepsilon(\widehat{w}e)$ birim pür dual kuaterniyonu ile herhangi bir $Q = (a \pm \widehat{\mu}\widehat{w}b) + \varepsilon(c \pm \widehat{\mu}\widehat{w}d)$ dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}}(\widehat{V}) &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}(\widehat{V}) \\ Q &\rightarrow f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}Q^*\widehat{V} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü bir *anti-involüsyon* belirtir (Bekar ve Yaylı 2013).

Önerme 4.4. Herhangi bir $Q = (a + \widehat{\mu}_1b) + \varepsilon(c + \widehat{w}_1d)$ dual kuaterniyonu ile herhangi bir $\widehat{V} = \pm\widehat{\mu}$ birim pür reel kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \\ Q &\rightarrow f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}(\overline{Q^*})\widehat{V} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü bir *involüsyon* belirtir (Bekar ve Yaylı 2013).

İspat. $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{V} = \pm\widehat{\mu} \in \widehat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f_{\widehat{V}}(f_{\widehat{V}}(Q)) &= f_{\widehat{V}}(-\widehat{V}(\overline{Q^*})\widehat{V}) \\
&= -\widehat{V}(\overline{(-\widehat{V}(Q^*)\widehat{V})^*})\widehat{V} \\
&= -\widehat{V}(\overline{((- \widehat{V})^* ((Q^*)^*) (\widehat{V})^*)})\widehat{V} \\
&= -\widehat{V}(\overline{(((\widehat{V})^*)^*) ((\overline{(Q^*)^*})^*) ((-\widehat{V})^*)})\widehat{V} \\
&= Q
\end{aligned}$$

eşitliği gereğince $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü self-inverse aksiyomunu sağlar.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $P \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f_{\widehat{V}}(Q + P) &= -\widehat{V}(\overline{(Q + P)^*})\widehat{V} \\
&= -\widehat{V}(\overline{(Q^*) + (P^*)})\widehat{V} \\
&= (-\widehat{V}(\overline{Q^*})\widehat{V}) + (-\widehat{V}(\overline{P^*})\widehat{V}) \\
&= f_{\widehat{V}}(Q) + f_{\widehat{V}}(P)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda f_{\widehat{V}}(Q) &= \lambda(-\widehat{V}(\overline{Q^*})\widehat{V}) \\
&= -\widehat{V}(\overline{(\lambda Q)^*})\widehat{V} \\
&= f_{\widehat{V}}(\lambda Q)
\end{aligned}$$

eşitlikleri gereğince $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü lineerlik aksiyomunu sağlar.

Son olarak ise,

$$\begin{aligned}
f_{\widehat{V}}(QP) &= -\widehat{V}(\overline{(QP)^*})\widehat{V} \\
&= -\widehat{V}(\overline{(P)^*} \overline{(Q)^*})\widehat{V}
\end{aligned}$$

eşitliği $-(\widehat{V})^2 = 1$ olduğundan

$$f_{\widehat{V}}(QP) = -\widehat{V}(\overline{(P)^*})(-\widehat{V}\widehat{V})(\overline{(Q)^*})\widehat{V}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}}(QP) &= (-\widehat{V}(\overline{(P)^*})\widehat{V})(-\widehat{V}(\overline{(Q)^*})\widehat{V}) \\ &= f_{\widehat{V}}(P)f_{\widehat{V}}(Q) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece involüsyon aksiyomları tamamlanmış olur.

Önerme 4.5. $e \neq 0$ olmak üzere herhangi bir $\widehat{V} = (\pm\widehat{\mu}) + \varepsilon(\widehat{w}e)$ birim pür dual kuaterniyonu ile herhangi bir $Q = (a \pm \widehat{\mu}\widehat{w}b) + \varepsilon(c \pm \widehat{\mu}\widehat{w}d)$ dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}}(\widehat{V}) &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}}(\widehat{V}) \\ Q &\rightarrow f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}(\overline{Q^*})\widehat{V} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü bir *involüsyon* belirtir (Bekar ve Yaylı 2013).

Önerme 4.6. Herhangi bir Q dual kuaterniyonu ile $(\widehat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan herhangi bir $\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}} : \mathbb{H}_{\mathbb{D}} &\rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{D}} \\ Q &\rightarrow f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}Q\widehat{V} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü bir *anti-involüsyon* belirtir (Bekar ve Yaylı 2013).

İspat. $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{V} \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{\widehat{V}}(f_{\widehat{V}}(Q)) &= f_{\widehat{V}}(-\widehat{V}Q\widehat{V}) \\ &= -\widehat{V}(-\widehat{V}Q\widehat{V})\widehat{V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\widehat{V}(-\widehat{V})Q\widehat{V}\widehat{V} \\
&= (\widehat{V})^2 Q (\widehat{V})^2 \\
&= (-1)Q(-1) \\
&= Q
\end{aligned}$$

eşitliği gereğince $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü self-inverse aksiyomunu sağlar.

$\lambda \in \mathbb{R}$ ve $P \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f_{\widehat{V}}(Q + P) &= -\widehat{V}(Q + P)\widehat{V} \\
&= (-\widehat{V}Q\widehat{V}) + (-\widehat{V}P\widehat{V}) \\
&= f_{\widehat{V}}(Q) + f_{\widehat{V}}(P)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lambda f_{\widehat{V}}(Q) &= \lambda(-\widehat{V}Q\widehat{V}) \\
&= -\widehat{V}\lambda Q\widehat{V} \\
&= f_{\widehat{V}}(\lambda Q)
\end{aligned}$$

eşitlikleri gereğince $f_{\widehat{V}}$ dönüşümü lineerlik aksiyomunu sağlar.

Son olarak ise,

$$f_{\widehat{V}}(QP) = -\widehat{V}(QP)\widehat{V}$$

eşitliği $-(\widehat{V})^2 = 1$ olduğundan

$$f_{\widehat{V}}(QP) = -\widehat{V}Q(-\widehat{V}\widehat{V})P\widehat{V}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} f_{\hat{V}}(QP) &= (-\hat{V}Q\hat{V})(-\hat{V}P\hat{V}) \\ &= f_{\hat{V}}(Q)f_{\hat{V}}(P) \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece anti-involüsyon aksiyomları tamamlanmış olur.

4.1 $\mathbb{D}^3$ Dual 3-Uzayında Dual Kuaterniyon İvolüsyonlarının ve Anti-İvolüsyonlarının Geometrik Yorumları

Teorem 4.1.1. Kompleks formdaki herhangi bir $Q = A + \hat{\delta}B$ dual kuaterniyonu ile $(\hat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan herhangi bir $\hat{V}$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}\bar{Q}\hat{V}$ involüsyon dönüşümü Q nun skalar kısmı olan A yı invaryant bırakırken, vektörel kısmı olan $\hat{\delta}B$ yi involüsyon eksenini $\hat{V}$ ye dik olan dual düzleme göre yansıtır (Bekar ve Yaylı 2013).

İspat. $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\hat{V} \in \hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}\bar{Q}\hat{V} = -\hat{V}\overline{(A + \hat{\delta}B)}\hat{V} = -\hat{V}(A - \hat{\delta}B)\hat{V} = -(\hat{V})^2 A + \hat{V}\hat{\delta}\hat{V}B$$

eşitliğinde $(\hat{V})^2 = -1$ değeri yerine yazılırsa

$$f_{\hat{V}}(Q) = A + \hat{V}\hat{\delta}\hat{V}B$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2. $Q = A + \hat{\delta}B$ kompleks formdaki herhangi bir dual kuaterniyon ve $\hat{V} = \pm\hat{\mu}$ birim pür reel kuaterniyon olmak üzere $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}Q^*\hat{V}$ anti-involüsyon dönüşümü, Q nun skalar kısmı olan A yı dual düzlemde reel eksene göre yansıtırken, vektörel kısmın dual eşleniği olan $(\hat{\delta}B)^*$ yi anti-involüsyon eksenini $\hat{V}$ ye göre yansıtır (Bekar ve Yaylı 2013).

İspat. $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{V} \in \widehat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}Q^*\widehat{V} = -\widehat{V}(A + \widehat{\delta}B)^*\widehat{V} = -\widehat{V}(A^* + (\widehat{\delta}B)^*)\widehat{V} = -(\widehat{V})^2A^* - \widehat{V}(\widehat{\delta})^*\widehat{V}B^*$$

eşitliğinde $(\widehat{V})^2 = -1$ değeri yerine yazılırsa

$$f_{\widehat{V}}(Q) = A^* - \widehat{V}(\widehat{\delta})^*\widehat{V}B^*$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.3. Herhangi bir $Q = (a \pm \widehat{\mu}\widehat{w}b) + \varepsilon(c \pm \widehat{\mu}\widehat{w}d) \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}(\widehat{V})$ dual kuaterniyonu ile $e \neq 0$ için $\widehat{V} = (\pm\widehat{\mu}) + \varepsilon(\widehat{w}e)$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}Q^*\widehat{V}$ anti-involüsyon dönüşümü Q nun skalar kısmı olan A yı dual düzlemde reel eksene göre yansıtırken, vektörel kısmın dual eşleniği olan $(\widehat{\delta}B)^*$ yi anti-involüsyon ekseni $\widehat{V}$ ye göre yansıtır (Bekar ve Yaylı 2013).

Teorem 4.1.4. $Q = A + \widehat{\delta}B$ kompleks formdaki herhangi bir dual kuaterniyon ve $\widehat{V} = \pm\widehat{\mu}$ birim pür reel kuaterniyon olmak üzere $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}(\overline{Q^*})\widehat{V}$ involüsyon dönüşümü, Q nun skalar kısmı olan A yı dual düzlemde reel eksene göre yansıtırken, vektörel kısmın dual eşleniği olan $(\widehat{\delta}B)^*$ yi involüsyon ekseni $\widehat{V}$ ye dik olan dual düzleme göre yansıtır (Bekar ve Yaylı 2013).

İspat. $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{V} \in \widehat{\mathbb{H}}$ olmak üzere

$$f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}(\overline{Q^*})\widehat{V} = -\widehat{V}(A^* - (\widehat{\delta}B)^*)\widehat{V} = -(\widehat{V})^2A^* + \widehat{V}(\widehat{\delta})^*\widehat{V}B^*$$

eşitliğinde $(\widehat{V})^2 = -1$ değeri yerine yazılırsa

$$f_{\widehat{V}}(Q) = A^* + \widehat{V}(\widehat{\delta})^*\widehat{V}B^*$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.5. Herhangi bir $Q = (a \pm \hat{\mu}\hat{w}b) + \varepsilon(c \pm \hat{\mu}\hat{w}d) \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}(\hat{V})$ dual kuaterniyonu ile $e \neq 0$ için $\hat{V} = (\pm\hat{\mu}) + \varepsilon(\hat{w}e)$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}(\overline{Q^*})\hat{V}$ involüsyon dönüşümü Q nun skalar kısmı olan A yı dual düzlemde reel eksene göre yansıtırken, vektörel kısmın dual eşleniği olan $(\hat{\delta}B)^*$ yi involüsyon eksenini $\hat{V}$ ye dik olan dual düzleme göre yansıtır (Bekar ve Yaylı 2013).

Teorem 4.1.6. Kompleks formdaki herhangi bir $Q = A + \hat{\delta}B$ dual kuaterniyonu ile $(\hat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan herhangi bir $\hat{V}$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}Q\hat{V}$ anti-involüsyon dönüşümü Q nun skalar kısmı olan A yı invariant bırakırken, vektörel kısmı olan $\hat{\delta}B$ yi $\hat{V}$ ye göre yansıtır (Bekar ve Yaylı 2013).

İspat. $Q \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\hat{V} \in \hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere

$$f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}Q\hat{V} = -\hat{V}(A + \hat{\delta}B)\hat{V} = -(\hat{V})^2 A - \hat{V}\hat{\delta}\hat{V}B$$

eşitliğinde $(\hat{V})^2 = -1$ değeri yerine yazılırsa

$$f_{\hat{V}}(Q) = A - \hat{V}\hat{\delta}\hat{V}B$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

4.2 $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-Uzayında Dual Kuaterniyon İnvölüsyonlarının ve Anti-İnvölüsyonlarının Geometrik Yorumları

E. Study dönüşümüne göre, her bir birim pür dual kuaterniyona $\mathbb{R}^3$ te bir yönlü doğru karşılık gelir. Aynı şekilde, $\mathbb{R}^3$ teki her bir yönlü doğruya birim dual küre üzerinde bir

nokta karşılık gelir. Dolayısıyla, involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümleri sonucu elde edilen $\pm \widehat{V} \widehat{\delta} \widehat{V}$ ile $\pm \widehat{V} (\widehat{\delta})^* \widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonlarına $\mathbb{R}^3$ te birer yönlü doğru karşılık gelir. Elde edilen bu yönlü doğruların $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumları *vida hareketi* olarak, *doğrunun doğruya göre yansıması* olarak ve *doğrunun düzleme göre yansıması ve ötelemesi* olarak aşağıdaki üç farklı şekilde verilebilir.

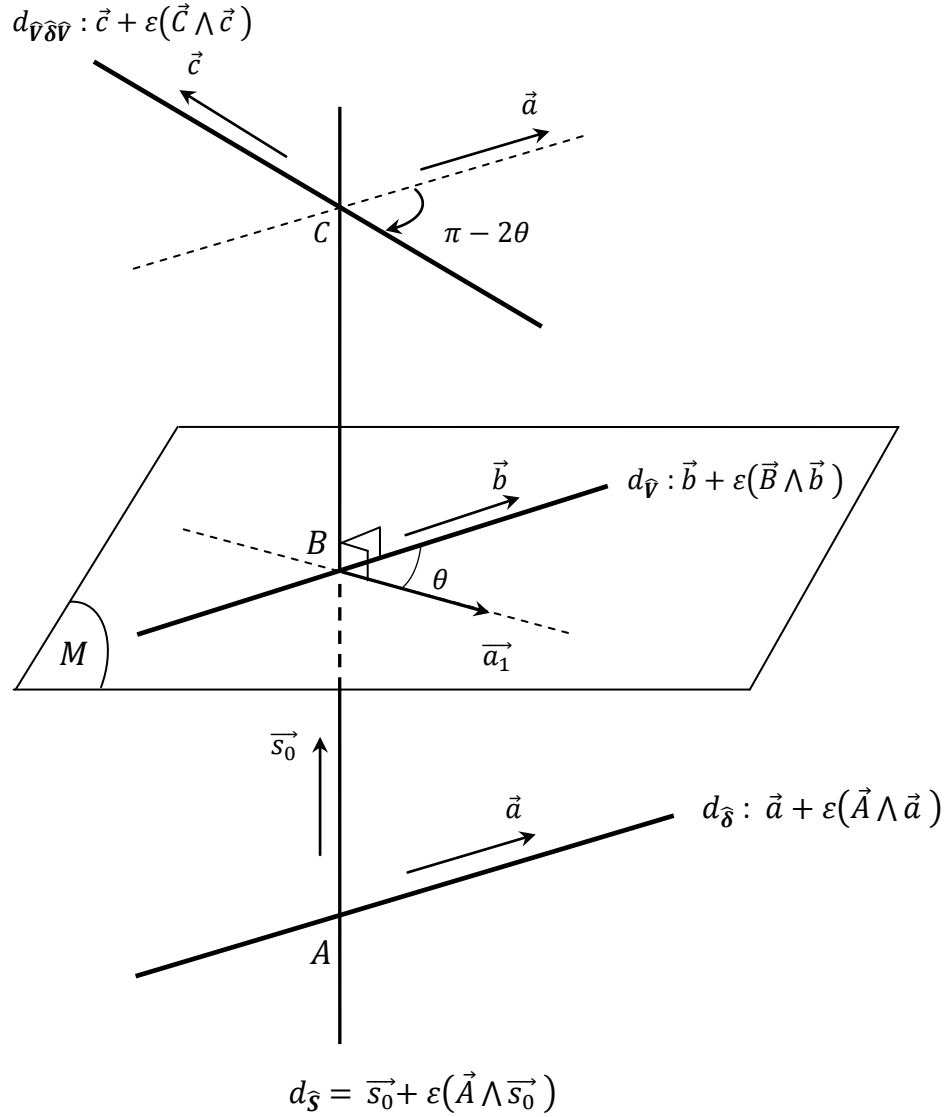
4.2.1 Vida operatörü

$\widehat{\delta}$ ve $\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonlarına $\mathbb{R}^3$ te karşılık gelen doğrular sırasıyla $d_{\widehat{\delta}}$ ve $d_{\widehat{V}}$ olsun. $d_{\widehat{\delta}}$ üzerinden keyfi bir A noktası seçelim. $d_{\widehat{V}}$ üzerindeki noktalardan, A noktasına en yakın olanı ise B olsun. $\widehat{\delta}$ ve $\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonlarını ise A ve B ye bağlı olarak $\widehat{\delta} = \vec{a} + \varepsilon(\vec{A} \wedge \vec{a})$ ve $\widehat{V} = \vec{b} + \varepsilon(\vec{B} \wedge \vec{b})$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, $\widehat{V} \widehat{\delta} \widehat{V}$ çarpımına karşılık gelen vida hareketinin bir *ekseni* A ve B noktalarından geçen doğru olacaktır. Ancak, dikkat edilmelidir ki bu eksen tek değildir. Çünkü, $d_{\widehat{\delta}}$ üzerinden seçtiğimiz herhangi bir nokta ile bu noktaya $d_{\widehat{V}}$ üzerinde karşılık gelen en yakın noktadan geçen doğru, bir diğer eksen olacaktır.

$\widehat{V} \widehat{\delta} \widehat{V}$ çarpımına karşılık gelen vida hareketindeki *dönme* ise şu şekilde tanımlanabilir; $d_{\widehat{V}}$ doğrusunu kapsayan ve $\vec{s}_0 = \overrightarrow{AB} / |\overrightarrow{AB}|$ vektörüne dik olan düzlem M olmak üzere, $\vec{a}$ vektörünün M düzlemi üzerindeki birim ortogonal izdüşümünü $\vec{a}_1$ vektörü olarak ele alalım. $\theta \in \mathbb{R}^+$ açısını ise $\langle \vec{a}_1, \vec{b} \rangle = \cos \theta$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, meydana gelen vida hareketindeki dönme negatif yönde (saatin hareket yönünde) ve $(\pi - 2\theta)$ lık açı kadar olacaktır. Bu durum, $\{\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{s}_0\}$ dik koordinat sisteminin, $\{\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{s}_0 = \vec{a}_1 \wedge \vec{b}\}$ şeklinde sağ-el sistemi ya da $\{\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{s}_0 = \vec{b} \wedge \vec{a}_1\}$ şeklinde sol-el sistemi belirtmesi durumlarının ikisi için de geçerlidir.

$\widehat{V} \widehat{\delta} \widehat{V}$ çarpımına karşılık gelen vida hareketindeki *öteleme* ise $\vec{s}_0 = \overrightarrow{AB} / |\overrightarrow{AB}|$ yönünde ve $2d = 2|\overrightarrow{AB}|$ miktarınca olacaktır.

$\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonunun $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumu için şekil 4.1 verilebilir. Şekilde, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = d$ olmak üzere $\widehat{S} = \overrightarrow{s_0} + \varepsilon(\vec{A} \wedge \overrightarrow{s_0})$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{\widehat{S}}$ doğrusu vida hareketinin A ve B noktalarından geçen eksenine karşılık gelir.



Şekil 4.1 $\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ operatörünün vida hareketi karşılığı

Şimdi $\mathbb{R}^3$ te, $\{\vec{a_1}, \vec{b}, \vec{s_0}\}$ üçlüsünün sağ-el sistem ya da sol-el sistem belirtmesine göre $\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ çarpımına karşılık gelen iki tane vida operatörü ele alınacaktır:

(i) $\{\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{s}_0 = \vec{a}_1 \wedge \vec{b}\}$ sağ-sistem ise

$$\begin{aligned} Q &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) + \varepsilon d\right) + \widehat{\mathbf{S}} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) + \varepsilon d\right) \\ &= (-\sin\theta - \varepsilon d \cos\theta) + \widehat{\mathbf{S}}(\cos\theta - \varepsilon d \sin\theta) \end{aligned}$$

olarak alındığında Q nun kuaterniyon eşleniği

$$\bar{Q} = (-\sin\theta - \varepsilon d \cos\theta) - \widehat{\mathbf{S}}(\cos\theta - \varepsilon d \sin\theta)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda, $Q\widehat{\mathbf{d}}\bar{Q}$ operatörü $d_{\widehat{\mathbf{d}}}$ doğrusunu $\widehat{\mathbf{S}}$ eksenini etrafında negatif yönde $(\pi - 2\theta)$ lık açı kadar döndürürken yine $\widehat{\mathbf{S}}$ eksenini boyunca $2d$ miktarınca öteletir. Öteleme $\vec{s}_0 = \vec{a}_1 \wedge \vec{b}$ yönündedir. Sonuç olarak, $Q\widehat{\mathbf{d}}\bar{Q} = \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{V}}$ vida operatör eşitliği verilebilir.

Eğer $\widehat{\mathbf{d}}$ ile $\widehat{\mathbf{V}}$ birim pür dual kuaterniyonları paralel iseler

$$\begin{aligned} Q &= \cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) + 2\varepsilon d\right) + \widehat{\mathbf{S}} \sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - (-\theta)\right) + 2\varepsilon d\right) \\ &= \cos((\pi + 2\theta) + 2\varepsilon d) + \widehat{\mathbf{S}} \sin((\pi + 2\theta) + 2\varepsilon d) \end{aligned}$$

alınarak $Q\widehat{\mathbf{d}} = Q\widehat{\mathbf{d}}\bar{Q} = \widehat{\mathbf{V}}\widehat{\mathbf{d}}\widehat{\mathbf{V}}$ vida operatör eşitliği verilebilir.

(ii) $\{\vec{a}_1, \vec{b}, \vec{s}_0 = \vec{b} \wedge \vec{a}_1\}$ sol-sistem ise

$$\begin{aligned} Q &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \varepsilon d\right) + \widehat{\mathbf{S}} \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \varepsilon d\right) \\ &= (\sin\theta - \varepsilon d \cos\theta) + \widehat{\mathbf{S}}(\cos\theta + \varepsilon d \sin\theta) \end{aligned}$$

olarak alındığında Q nun kuaterniyon eşleniği

$$\bar{Q} = (\sin\theta - \varepsilon d \cos\theta) - \widehat{\mathbf{S}}(\cos\theta + \varepsilon d \sin\theta)$$

şeklinde olacaktır. Bu durumda, $Q\widehat{\delta}\bar{Q}$ operatörü $d_{\widehat{\delta}}$ doğrusunu $\widehat{S}$ eksenini etrafında negatif yönde $(\pi - 2\theta)$ lık açı kadar döndürürken yine $\widehat{S}$ eksenini boyunca $2d$ miktarınca öteletir. Öteleme $\vec{s}_0 = \vec{b} \wedge \vec{a}_1$ yönündedir. Sonuç olarak, $Q\widehat{\delta}\bar{Q} = \widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ vida operatör eşitliği verilebilir.

Eğer $\widehat{\delta}$ ile $\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonları paralel iseler

$$\begin{aligned} Q &= \cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 2\epsilon d\right) + \widehat{S}\sin\left(2\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + 2\epsilon d\right) \\ &= \cos((\pi - 2\theta) + 2\epsilon d) + \widehat{S}\sin((\pi - 2\theta) + 2\epsilon d) \end{aligned}$$

alınarak $Q\widehat{\delta} = Q\widehat{\delta}\bar{Q} = \widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ vida operatör eşitliği verilebilir.

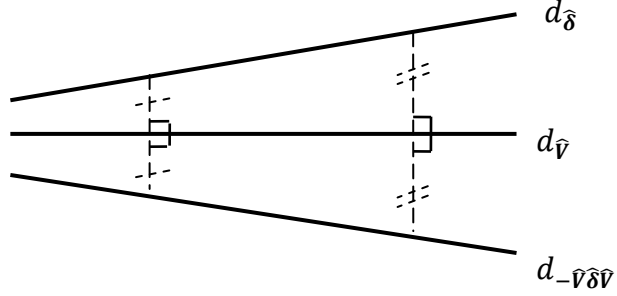
$-\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ ile $\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ vida hareketleri sonucu elde edilen doğrular aynı doğrultuya sahip fakat zıt yönlüdürler.

$+\widehat{V}(\widehat{\delta})^*\widehat{V}$ vida operatörü, $d_{(\widehat{\delta})^*}$ doğrusunu bir $\widehat{S}$ vida eksenini etrafında negatif yönde $(\pi - 2\theta)$ lık açı kadar döndürürken yine aynı $\widehat{S}$ vida eksenini boyunca $2d = 2|\overline{AB}|$ miktarınca öteletir. Ancak burada, $\widehat{S}$ vida eksenini şu şekilde belirlenir; $d_{(\widehat{\delta})^*}$ üzerinden keyfi bir A noktası seçilir. A noktasına $d_{\widehat{V}}$ üzerindeki noktalardan en yakın olanı ise B noktası olsun. Bu durumda, A ve B noktalarından geçen doğru $\widehat{S}$ vida eksenini olarak alınabilir.

4.2.2 Bir doğrunun bir doğruya göre yansıması

$\widehat{\delta}$ birim pür dual kuaterniyonu ile $(\widehat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan $\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. $\widehat{\delta}$ ve $\widehat{V}$ ye $\mathbb{R}^3$ te karşılık gelen doğrular ise sırasıyla $d_{\widehat{\delta}}$ ve $d_{\widehat{V}}$ olsun. Bu durumda, $-\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ vida operatörü $\mathbb{R}^3$ te $d_{\widehat{\delta}}$ doğrusunu $d_{\widehat{V}}$ doğrusuna göre

yansıtır (Bekar ve Yaylı 2013). $-\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonuna $\mathbb{R}^3$ te karşılık gelen $d_{-\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}}$ doğrusu için şekil 4.2 verilebilir;



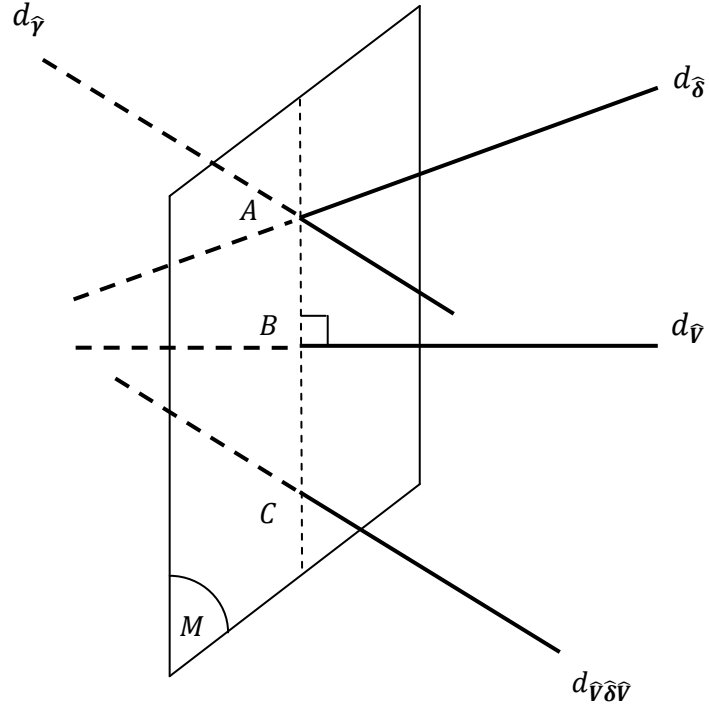
Şekil 4.2 $-\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ operatörü sonucu $d_{\widehat{\delta}}$ doğrusunun $d_{\widehat{V}}$ doğrusuna göre yansıması

$-\widehat{V}(\widehat{\delta})^*\widehat{V}$ vida operatörü, $\mathbb{R}^3$ de $d_{(\widehat{\delta})^*}$ doğrusunu $d_{\widehat{V}}$ doğrusuna göre yansıtır.

4.2.3 Bir doğrunun bir düzleme göre yansıması ve ötelemesi

$\widehat{\delta}$ birim pür dual kuaterniyonu ile $(\widehat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan $\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. $\widehat{\delta}$ ve $\widehat{V}$ ye $\mathbb{R}^3$ te karşılık gelen doğrular ise sırasıyla $d_{\widehat{\delta}}$ ve $d_{\widehat{V}}$ olsun. $d_{\widehat{\delta}}$ üzerindeki keyfî bir A noktasını ele alalım. $d_{\widehat{V}}$ üzerindeki noktalardan A noktasına en yakın olanı ise B olsun. A ve B noktalarını kapsayan ve $d_{\widehat{V}}$ doğrusuna dik olan düzlemi ise M ile belirtelim. Bu durumda, $\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ vida operatörü $\mathbb{R}^3$ te $d_{\widehat{\delta}}$ doğrusunu, M düzlemine göre yansıtırken yine M düzlemi boyunca $\overrightarrow{AB}$ yönünde $2d = 2|\overrightarrow{AB}|$ miktarınca öteletir.

$\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonunun $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumu için şekil 4.3 verilebilir. Şekilde, $d_{\widehat{V}}$ ile $d_{\widehat{\delta}}$ doğrusunun M düzlemine göre yansıması temsil edilmiştir ve $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = d$ dir. Ayrıca, $d_{\widehat{V}} \parallel d_{\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}}$ dir.



Şekil 4.3 $\widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}$ operatörü sonucu $d_{\widehat{\delta}}$ doğrusunun M düzlemine göre yansımaları ve ötelemesi

$+\widehat{V}(\widehat{\delta})^*\widehat{V}$ vrida operatörü, $\mathbb{R}^3$ te $d_{(\widehat{\delta})}^*$ doğrusunu M düzlemine göre yansıtırken yine M düzlemi boyunca $\overrightarrow{AB}$ yönünde $2d = 2|\overrightarrow{AB}|$ miktarınca öteletir. Ancak burada, A noktası $d_{(\widehat{\delta})}^*$ üzerinden seçilen keyfî bir nokta ve B noktası ise $d_{\widehat{V}}$ üzerindeki noktalardan A noktasına en yakın olanıdır.

4.3 Dual Kuaterniyonların İnvölüsyon Matrisleri

4.3.1 $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}\bar{Q}\hat{V}$ dönüşümüne karşılık gelen matris

Kompleks formdaki herhangi bir $Q = A + \hat{\delta}B$ dual kuaterniyonu ile $(\hat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan herhangi bir $\hat{V} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}\bar{Q}\hat{V} = A + \hat{V}\hat{\delta}\hat{V}B$ involüsyon dönüşümü ve $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ vektör uzayının $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bazı kullanılarak aşağıdaki eşitlikler verilebilir:

$$\begin{aligned} f_{\hat{V}}(1) &= -\hat{V}\bar{1}\hat{V} = -\hat{V}^2 = 1, \\ f_{\hat{V}}(\mathbf{i}) &= -\hat{V}\bar{\mathbf{i}}\hat{V} = (1 - 2X^2)\mathbf{i} - 2XY\mathbf{j} - 2XZ\mathbf{k}, \\ f_{\hat{V}}(\mathbf{j}) &= -\hat{V}\bar{\mathbf{j}}\hat{V} = -2XY\mathbf{i} + (1 - 2Y^2)\mathbf{j} - 2YZ\mathbf{k}, \\ f_{\hat{V}}(\mathbf{k}) &= -\hat{V}\bar{\mathbf{k}}\hat{V} = -2XZ\mathbf{i} - 2YZ\mathbf{j} + (1 - 2Z^2)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}\bar{Q}\hat{V}$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$NQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 2X^2 & -2XY & -2XZ \\ 0 & -2XY & 1 - 2Y^2 & -2YZ \\ 0 & -2XZ & -2YZ & 1 - 2Z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde olacaktır. Burada, $\hat{\delta}B = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ve $Q = A + \hat{\delta}B$ dir. 4×4 ve 4×1 tipindeki matrisler ise sırasıyla N ve Q ya karşılık gelmektedir. $NN^T = I$ ve $N = N^T$ olduğundan N ortogonal ve simetriktir. Ayrıca, $\det(N) = -1$ olduğundan $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}\bar{Q}\hat{V}$ involüsyon dönüşümü $\mathbb{D}^4$ te bir yansıma belirtir.

NQ çarpımı sonucu, Q dual kuaterniyonunun skalar kısmı olan A ile vektörel kısmında yer alan B invariant kalırken, Q nun yine vektörel kısmında yer alan $\hat{\delta}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{\delta}}$ doğrusu ise, $\mathbb{R}^3$ te $\hat{V}$ ye karşılık gelen $d_{\hat{V}}$ doğrusuna göre yansır. Ayrıca, yansıma sonucu oluşan doğrunun yönü zıt yönde değişir.

Örnek 4.3.1.1. $Q = 3 + 2((1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\hat{V} = j \in \hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere, $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}\bar{Q}\hat{V}$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$NQ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ 2 - 2\varepsilon \\ 2 + 2\varepsilon \\ 2 \end{bmatrix} = 3 + 2 \left(\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{-1 - \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinde verilebilir. NQ çarpımı sonucu, Q dual kuaterniyonunun skalar kısmı olan 3 ile vektörel kısmında yer alan 2 invaryant kalırken, Q nun yine vektörel kısmında yer alan $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğru ise, $\mathbb{R}^3$ te $\hat{V} = j$ ye karşılık gelen doğruya göre yansır. Ayrıca, yansıma sonucu oluşan doğrunun yönü zıt yönde değişir.

Sonuç 4.3.1.1. $Q = \hat{\delta}B = \eta_1 i + \eta_2 j + \eta_3 k = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ pür dual kuaterniyonu ile $(\hat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan $\hat{V} = Xi + Yj + Zk = (X, Y, Z)$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}(\bar{Q})\hat{V} = \hat{V}\hat{\delta}\hat{V}B$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen

$$\begin{bmatrix} 1 - 2X^2 & -2XY & -2XZ \\ -2XY & 1 - 2Y^2 & -2YZ \\ -2XZ & -2YZ & 1 - 2Z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

matris çarpımı sonucu, B invaryant kalırken, $\mathbb{R}^3$ te $\hat{\delta}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{\delta}}$ doğrusu $\hat{V}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{V}}$ doğrusuna göre yansır. Yansıma sonucu oluşan doğrunun yönü ise zıt yönde değişir.

Örnek 4.3.1.2. $Q = 2((1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}) \in \hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ve $\hat{V} = j$ birim pür dual kuaterniyonlarını ele alalım. Bu durumda, $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}(\bar{Q})\hat{V}$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$N\mathbf{Q} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 - 2\varepsilon \\ 2 + 2\varepsilon \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \left(\frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{-1 - \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinde verilebilir. $N\mathbf{Q}$ çarpımı sonucu, 2 invaryant kalırken, $\mathbb{R}^3$ te $\widehat{\mathbf{Q}} = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğru $\widehat{\mathbf{V}} = \mathbf{j}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğruya göre yansır. Ayrıca, yansıma sonucu oluşan doğrunun yönü zıt yönde değişir.

Bu örnekte, $\widehat{\mathbf{S}} = -\mathbf{k}$ olacağından ve $\{\widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{V}} \wedge \widehat{\mathbf{Q}}\}$ üçlüsü sol-sistem belirteceğinden dolayı $N\widehat{\mathbf{Q}}$ çarpımını vıda operatörü olarak $\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{Q}}(\widehat{\mathbf{P}})$ şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{P}} &= \left(\sin \frac{\pi}{4} - \varepsilon \cos \frac{\pi}{4} \right) - \mathbf{k} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \mathbf{k} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

4.3.2 $f_{\widehat{\mathbf{V}}}(Q) = -\widehat{\mathbf{V}}(\overline{Q^*})\widehat{\mathbf{V}}$ dönüşümüne karşılık gelen matris

$Q = A + \widehat{\delta}B$ ve $\widehat{\mathbf{V}} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ dual kuaterniyonlarını aşağıdaki belirtilen iki durumda ele alalım:

- (i) Eğer $\widehat{\mathbf{V}} = \pm \widehat{\boldsymbol{\mu}}$ ise, $Q = (a + \widehat{\boldsymbol{\mu}}_1 b) + \varepsilon(c + \widehat{\boldsymbol{\mu}}_1 d)$ herhangi bir dual kuaterniyon olsun.
- (ii) Eğer $e \neq 0$ ve $\widehat{\boldsymbol{\mu}} \perp \widehat{\boldsymbol{w}}$ olmak üzere $\widehat{\mathbf{V}} = (\pm \widehat{\boldsymbol{\mu}}) + \varepsilon(\widehat{\boldsymbol{w}}e)$ ise, $Q = (a \pm \widehat{\boldsymbol{\mu}}\widehat{\boldsymbol{w}}b) + \varepsilon(c \pm \widehat{\boldsymbol{\mu}}\widehat{\boldsymbol{w}}d)$ olsun.

Bu durumda, $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ vektör uzayının $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bazı kullanılarak $f_{\widehat{\mathbf{V}}}(Q) = -\widehat{\mathbf{V}}(\overline{Q^*})\widehat{\mathbf{V}} = A^* + \widehat{\mathbf{V}}(\widehat{\delta})^* \widehat{\mathbf{V}}B^*$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$N(\overline{Q^*}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2X^2 - 1 & 2XY & 2XZ \\ 0 & 2XY & 2Y^2 - 1 & 2YZ \\ 0 & 2XZ & 2YZ & 2Z^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* \\ \overline{(\eta_1^*)} \\ \overline{(\eta_2^*)} \\ \overline{(\eta_3^*)} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir. Burada, $(\widehat{\delta}B)^* = (\overline{(\eta_1^*)}, \overline{(\eta_2^*)}, \overline{(\eta_3^*)})$ ve $\overline{(Q^*)} = A^* - (\delta B)^*$ dir. 4×4 ve 4×1 tipindeki matrisler ise sırasıyla N ve $\overline{(Q^*)}$ ya karşılık gelmektedir. $NN^T = I$ ve $N = N^T$ olduğundan N ortogonal ve simetriktir. Ayrıca, $\det(T) = -1$ olduğundan $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}(\overline{(Q^*)})\widehat{V}$ involüsyon dönüşümü $\mathbb{D}^4$ te bir yansıma belirtir.

$N(\overline{(Q^*)})$ çarpımı sonucu, Q dual kuaterniyonunun skalar kısmı olan A ile vektörel kısmında yer alan B , dual düzlemde reel eksene göre yansırken, Q nun yine vektörel kısmında yer alan $\widehat{\delta}$ nün dual eşleniği olan $(\widehat{\delta})^*$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{(\widehat{\delta})^*}$ doğrusu, $\mathbb{R}^3$ te $\widehat{V}$ ye karşılık gelen $d_{\widehat{V}}$ doğrusuna göre yansır. Ayrıca, yansıma sonucu oluşan doğrunun yönü zıt yönde değişir.

Örnek 4.3.2.1. $Q = 3 + 2((-1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon, 1)/\sqrt{3}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{V} = \mathbf{j} \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere, $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}(\overline{(Q^*)})\widehat{V}$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$N(\overline{(Q^*)}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ 2 - 2\varepsilon \\ -2 - 2\varepsilon \\ -2 \end{bmatrix} = 3 + 2 \left(\frac{-1 + \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{-1 - \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinde verilebilir. $N(\overline{(Q^*)})$ çarpımı sonucu, Q dual kuaterniyonunun skalar kısmı olan 3 ile vektörel kısmında yer alan 2, dual düzlemde reel eksene göre yansırken, Q nun yine vektörel kısmında yer alan $(-1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon, 1)/\sqrt{3}$ vektörünün dual eşleniği olan $(-1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğru ise, $\mathbb{R}^3$ te $\widehat{V} = \mathbf{j}$ ye karşılık gelen doğruya göre yansır. Ayrıca, yansıma sonucu oluşan doğrunun yönü zıt yönde değişir.

Sonuç 4.3.2.1. $Q = \widehat{\delta}B = \eta_1 \mathbf{i} + \eta_2 \mathbf{j} + \eta_3 \mathbf{k} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ile $(\widehat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan $\widehat{V} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = (X, Y, Z)$ dual kuaterniyonlarını aşağıdaki iki şekilde ele alalım:

- (i) $\widehat{V} = \pm \widehat{\mu}$ iken $Q = (\widehat{\mu}_1 b) + \varepsilon(\widehat{w}_1 d)$ olsun.
- (ii) $e \neq 0$ ve $\widehat{\mu} \perp \widehat{w}$ olmak üzere $\widehat{V} = (\pm \widehat{\mu}) + \varepsilon(\widehat{w}e)$ iken $Q = (\pm \widehat{\mu}\widehat{w}b) + \varepsilon(\pm \widehat{\mu}\widehat{w}d)$ olsun.

Bu durumda, $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}(\overline{Q^*})\widehat{V} = \widehat{V}(\widehat{\delta})^* \widehat{V}B^*$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen

$$\begin{bmatrix} 2X^2 - 1 & 2XY & 2XZ \\ 2XY & 2Y^2 - 1 & 2YZ \\ 2XZ & 2YZ & 2Z^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{(\eta_1^*)} \\ \overline{(\eta_2^*)} \\ \overline{(\eta_3^*)} \end{bmatrix}$$

matris çarpımı sonucu, B dual düzlemde reel eksene göre yansırken, $\mathbb{R}^3$ te $(\widehat{\delta})^*$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{(\widehat{\delta})^*}$ doğrusu $\widehat{V}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{\widehat{V}}$ doğrusuna göre yansır. Yansıma sonucu oluşan doğrunun yönü ise zıt yönde değişir.

Örnek 4.3.2.2. $Q = 5((-1 - \varepsilon, 1 - \varepsilon, 1)/\sqrt{3}) \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{V} = \mathbf{j}$ birim pür dual kuaterniyonlarını ele alalım. Bu durumda, $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}(\overline{(Q)^*})\widehat{V}$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$N(\overline{(Q)^*}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 - 5\varepsilon \\ -5 - 5\varepsilon \\ -5 \end{bmatrix} = 5 \left(\frac{-1 + \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{-1 - \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinde verilebilir. $N(\overline{(Q)^*})$ çarpımı sonucu, 5 dual düzlemde reel eksene göre yansırken, $\mathbb{R}^3$ te $(\widehat{Q})^* = (-1 + \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğru $\widehat{V} = \mathbf{j}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğruya göre yansır. Ayrıca, yansıma sonucu oluşan doğrunun yönü zıt yönde değişir.

Bu örnekte, $\widehat{\mathbf{S}} = \mathbf{k}$ olacağından ve $\{(\widehat{\mathbf{Q}})^*, \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{V}} \wedge (\widehat{\mathbf{Q}})^*\}$ üçlüsü sol-sistem belirteceğinden dolayı $N(\overline{(\widehat{\mathbf{Q}})^*})$ çarpımını vıda operatörü olarak $\widehat{\mathbf{P}}(\widehat{\mathbf{Q}})^* \overline{(\widehat{\mathbf{P}})}$ şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{P}} &= \left(\sin \frac{\pi}{4} - \varepsilon \cos \frac{\pi}{4} \right) + \mathbf{k} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \mathbf{k} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} \right)\end{aligned}$$

şeklindedir.

4.4 Dual Kuaterniyonların Anti-İnvölüsyon Matrisleri

4.4.1 $f_{\widehat{\mathbf{V}}}(Q) = -\widehat{\mathbf{V}}Q^*\widehat{\mathbf{V}}$ dönüşümüne karşılık gelen matris

$Q = A + \widehat{\boldsymbol{\delta}}B$ ve $\widehat{\mathbf{V}} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}$ dual kuaterniyonlarını aşağıdaki belirtilen iki durumda ele alalım:

- (i) Eğer $\widehat{\mathbf{V}} = \pm \widehat{\boldsymbol{\mu}}$ ise, $Q = (a + \widehat{\boldsymbol{\mu}}_1 b) + \varepsilon(c + \widehat{\mathbf{w}}_1 d)$ herhangi bir dual kuaterniyon olsun.
- (ii) Eğer $e \neq 0$ ve $\widehat{\boldsymbol{\mu}} \perp \widehat{\mathbf{w}}$ olmak üzere $\widehat{\mathbf{V}} = (\pm \widehat{\boldsymbol{\mu}}) + \varepsilon(\widehat{\mathbf{w}}e)$ ise, $Q = (a \pm \widehat{\boldsymbol{\mu}}\widehat{\mathbf{w}}b) + \varepsilon(c \pm \widehat{\boldsymbol{\mu}}\widehat{\mathbf{w}}d)$ olsun.

Bu durumda, $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ vektör uzayının $\{1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ bazı kullanılarak $f_{\widehat{\mathbf{V}}}(Q) = -\widehat{\mathbf{V}}Q^*\widehat{\mathbf{V}} = A^* - \widehat{\mathbf{V}}(\widehat{\boldsymbol{\delta}})^*\widehat{\mathbf{V}}B^*$ anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$NQ^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2X^2 - 1 & 2XY & 2XZ \\ 0 & 2XY & 2Y^2 - 1 & 2YZ \\ 0 & 2XZ & 2YZ & 2Z^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^* \\ \eta_1^* \\ \eta_2^* \\ \eta_3^* \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir. Burada, $(\widehat{\delta}B)^* = (\eta_1^*, \eta_2^*, \eta_3^*)$ ve $Q^* = A^* + (\delta B)^*$ dir. 4×4 ve 4×1 tipindeki matrisler ise sırasıyla N ve Q^* ya karşılık gelmektedir. $NN^T = I$ ve $N = N^T$ olduğundan N ortogonal ve simetriktir. Ayrıca, $\det(T) = +1$ olduğundan $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}Q^*\widehat{V}$ anti-involüsyon dönüşümü $\mathbb{D}^4$ te bir dönme belirtir.

NQ^* çarpımı sonucu, Q dual kuaterniyonunun skalar kısmı olan A ile vektörel kısmında yer alan B , dual düzlemde reel eksene göre yansırken, Q nun yine vektörel kısmında yer alan $\widehat{\delta}$ nün dual eşleniği olan $(\widehat{\delta})^*$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{(\widehat{\delta})^*}$ doğrusu ise, $\mathbb{R}^3$ te $\widehat{V}$ ye karşılık gelen $d_{\widehat{V}}$ doğrusuna göre yansır.

Örnek 4.4.1.1. $Q = 3 + 2((1, 1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)/\sqrt{3}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{V} = j \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere, $f_{\widehat{V}}(Q) = -\widehat{V}Q^*\widehat{V}$ anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$NQ^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ 2 \\ 2 - 2\varepsilon \\ 2 + 2\varepsilon \end{bmatrix} = 3 + 2 \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{-1 - \varepsilon}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinde verilebilir. NQ^* çarpımı sonucu, Q dual kuaterniyonunun skalar kısmı olan 3 ile vektörel kısmında yer alan 2 dual düzlemde reel eksene göre yansırken, Q nun yine vektörel kısmında yer alan $(1, 1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)/\sqrt{3}$ vektörünün dual eşleniği olan $(1, 1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)/\sqrt{3}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğru ise, $\mathbb{R}^3$ te $\widehat{V} = j$ ye karşılık gelen doğruya göre yansır.

Sonuç 4.4.1.1. $Q = \widehat{\delta}B = \eta_1 i + \eta_2 j + \eta_3 k = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ve $(\widehat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan $\widehat{V} = Xi + Yj + Zk = (X, Y, Z)$ dual kuaterniyonlarını aşağıdaki iki şekilde ele alalım:

- (i) $\widehat{V} = \pm \widehat{\mu}$ iken $Q = (\widehat{\mu}_1 b) + \varepsilon(\widehat{w}_1 d)$ olsun.
- (ii) $e \neq 0$ ve $\widehat{\mu} \perp \widehat{w}$ olmak üzere $\widehat{V} = (\pm \widehat{\mu}) + \varepsilon(\widehat{w}e)$ iken $Q = (\pm \widehat{\mu} \widehat{w} b) + \varepsilon(\pm \widehat{\mu} \widehat{w} d)$ olsun.

Bu durumda, $f_{\widehat{\mathbf{V}}}(\mathbf{Q}) = -\widehat{\mathbf{V}}\mathbf{Q}^*\widehat{\mathbf{V}} = -\widehat{\mathbf{V}}(\widehat{\delta})^*\widehat{\mathbf{V}}B^*$ anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen

$$\begin{bmatrix} 2X^2 - 1 & 2XY & 2XZ \\ 2XY & 2Y^2 - 1 & 2YZ \\ 2XZ & 2YZ & 2Z^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1^* \\ \eta_2^* \\ \eta_3^* \end{bmatrix}$$

matris çarpımı sonucu, B dual düzlemde reel eksene göre yansırken, $\mathbb{R}^3$ te $(\widehat{\delta})^*$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{(\widehat{\delta})^*}$ doğrusu $\widehat{\mathbf{V}}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{\widehat{\mathbf{V}}}$ doğrusuna göre yansır.

Örnek 4.4.1.2. $\mathbf{Q} = 3((1, 1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon)/\sqrt{3}) \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{\mathbf{V}} = \mathbf{j}$ birim pür dual kuaterniyonlarını ele alalım. Bu durumda, $f_{\widehat{\mathbf{V}}}(\mathbf{Q}) = -\widehat{\mathbf{V}}(\mathbf{Q})^*\widehat{\mathbf{V}}$ anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$N(\mathbf{Q})^* = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 3 - 3\varepsilon \\ 3 + 3\varepsilon \end{bmatrix} = 3 \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{-1 - \varepsilon}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinde verilebilir. $N(\mathbf{Q})^*$ çarpımı sonucu, 3 invaryant kalırken, $\mathbb{R}^3$ te $(\widehat{\mathbf{Q}})^* = (1, 1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)/\sqrt{3}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğru $\widehat{\mathbf{V}} = \mathbf{j}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğruya göre yansır.

Bu örnekte, $\widehat{\mathbf{S}} = -\mathbf{i}$ olacağından ve $\{(\widehat{\mathbf{Q}})^*, \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{S}} = (\widehat{\mathbf{Q}})^* \wedge \widehat{\mathbf{V}}\}$ üçlüsü sağ-sistem belirteceğinden dolayı $N(\widehat{\mathbf{Q}})^*$ çarpımını vida operatörü olarak $-\widehat{\mathbf{P}}(\widehat{\mathbf{Q}})^*(\overline{\widehat{\mathbf{P}}})$ şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{P}} &= \left(-\sin \frac{\pi}{4} - \varepsilon \cos \frac{\pi}{4} \right) - \mathbf{i} \left(\cos \frac{\pi}{4} - \varepsilon \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \mathbf{i} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

4.4.2 $f_{\widehat{V}}(Q) = -VQV$ dönüşümüne karşılık gelen matris

Kompleks formdaki herhangi bir $Q = A + \widehat{\delta}B$ dual kuaterniyonu ile $(\widehat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan herhangi bir $\widehat{V} = Xi + Yj + Zk$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, $\mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ vektör uzayının $\{1, i, j, k\}$ bazı kullanılarak $f_{\widehat{V}}(Q) = -VQV = A - \widehat{V}\widehat{\delta}\widehat{V}B$ involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$NQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2X^2 - 1 & 2XY & 2XZ \\ 0 & 2XY & 2Y^2 - 1 & 2YZ \\ 0 & 2XZ & 2YZ & 2Z^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

şeklinde verilebilir. Burada, $\widehat{\delta}B = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ ve $Q = A + \delta B$ dir. 4×4 ve 4×1 tipindeki matrisler ise sırasıyla N ve Q ya karşılık gelmektedir. $NN^T = I$ ve $N = N^T$ olduğundan N ortogonal ve simetriktir. Ayrıca, $\det(T) = +1$ olduğundan $f_{\widehat{V}}(Q) = -VQV$ anti-involüsyon dönüşümü $\mathbb{D}^4$ te bir dönme belirtir.

NQ çarpımı sonucu, Q dual kuaterniyonunun skalar kısmı olan A ile vektörel kısmında yer alan B invaryant kalırken, Q nun yine vektörel kısmında yer alan $\widehat{\delta}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{\widehat{\delta}}$ doğrusu ise, $\mathbb{R}^3$ te $\widehat{V}$ ye karşılık gelen $d_{\widehat{V}}$ doğrusuna göre yansır.

Örnek 4.4.2.1. $Q = 3 + 2((1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}) \in \mathbb{H}_{\mathbb{D}}$ ve $\widehat{V} = j \in \widehat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ olmak üzere, $f_{\widehat{V}}(Q) = -VQV$ anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$NQ = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{3} \\ 2 - 2\varepsilon \\ 2 + 2\varepsilon \\ 2 \end{bmatrix} = 3 + 2 \left(\frac{-1 + \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinde verilebilir. NQ çarpımı sonucu, Q dual kuaterniyonunun skalar kısmı olan 3 ile vektörel kısmında yer alan 2 invaryant kalırken, Q nun yine vektörel kısmında yer alan $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğru ise, $\mathbb{R}^3$ te $\hat{V} = \mathbf{j}$ ye karşılık gelen doğruya göre yansır.

Sonuç 4.4.2.1. $Q = \hat{\delta}B = \eta_1\mathbf{i} + \eta_2\mathbf{j} + \eta_3\mathbf{k} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ pür dual kuaterniyonu ile $(\hat{V})^2 = -1$ eşitliğini sağlayan $\hat{V} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k} = (X, Y, Z)$ birim pür dual kuaterniyonunu ele alalım. Bu durumda, $f_{\hat{V}}(Q) = -\mathbf{V}Q\mathbf{V} = -\hat{V}\hat{\delta}\hat{V}B$ anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen

$$\begin{bmatrix} 2X^2 - 1 & 2XY & 2XZ \\ 2XY & 2Y^2 - 1 & 2YZ \\ 2XZ & 2YZ & 2Z^2 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix}$$

matris çarpımı sonucu, B invaryant kalırken, $\mathbb{R}^3$ te $\hat{\delta}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{\delta}}$ doğrusu, $\hat{V}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen $d_{\hat{V}}$ doğrusuna göre yansır.

Örnek 4.4.2.2. $Q = 4((1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}) \in \hat{\mathbb{H}}_{\mathbb{D}}$ ve $\hat{V} = \mathbf{j}$ birim pür dual kuaterniyonlarını ele alalım. Bu durumda, $f_{\hat{V}}(Q) = -\hat{V}\hat{Q}\hat{V}$ anti-involüsyon dönüşümüne karşılık gelen matris

$$N\hat{Q} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 - 4\varepsilon \\ 4 + 4\varepsilon \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \left(\frac{-1 + \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{1 + \varepsilon}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right)$$

şeklinde verilebilir. $N\hat{Q}$ çarpımı sonucu, 4 invaryant kalırken, $\mathbb{R}^3$ te $\hat{Q} = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon, 1)/\sqrt{3}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğru $\hat{V} = \mathbf{j}$ birim pür dual kuaterniyonuna karşılık gelen doğruya göre yansır.

Bu örnekte, $\widehat{\mathbf{S}} = -\mathbf{k}$ olacağından ve $\{\widehat{\mathbf{Q}}, \widehat{\mathbf{V}}, \widehat{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{V}} \wedge \widehat{\mathbf{Q}}\}$ üçlüsü sol-sistem belirteceğinden dolayı $N\widehat{\mathbf{Q}}$ çarpımını vıda operatörü olarak $-\widehat{\mathbf{P}}\widehat{\mathbf{Q}}(\overline{\widehat{\mathbf{P}}})$ şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{P}} &= \left(\sin \frac{\pi}{4} - \varepsilon \cos \frac{\pi}{4}\right) - \mathbf{k} \left(\cos \frac{\pi}{4} + \varepsilon \sin \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \mathbf{k} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

şeklindedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezin 4. bölümünde, dual kuaterniyonlar kullanılarak ikisi involüsyon diğer ikisi anti-involüsyon olan dört dönüşüm tanımlanmıştır. Ayrıca, bu dönüşümlerin $\mathbb{R}^3$ Öklid 3-Uzayındaki geometrik yorumları verilmiştir.

Ell ve Sangwine (2007) tarafından reel kuaterniyonlar kullanılarak tanımlanan biri involüsyon diğeri ise anti-involüsyon olan iki dönüşümün $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumları birer yansımaya karşılık gelirken, bu çalışmada, dual kuaterniyonlar kullanılarak ele alınan involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümlerinin $\mathbb{R}^3$ teki geometrik yorumları birer vida hareketine karşılık gelmektedir.

Farklı kuaterniyon çeşitleri ele alınarak oluşturulabilecek involüsyon ve anti-involüsyon dönüşümleri ile bu dönüşümlere $\mathbb{R}^3$ te karşılık gelebilecek geometrik yorumları üzerinde çalışılabilecek konulardır.

KAYNAKLAR

- Agrawal, O.P. 1987. Hamilton Operators and Dual-Number-Quaternions in Spatial Kinematics. Mechanism and Machine Theory, Vol. 22 (6); pp. 569-575.
- Ata, E. and Yaylı, Y. 2009. Dual Quaternions and Dual Projective Spaces. Chaos, Solitons & Fractals, Vol. 40 (3); pp. 1255-1263.
- Bekar, M. and Yaylı, Y. 2013. Dual Quaternion Involutions and Anti-Involutions. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 23; pp. 577-592.
- Bottema, O. and Roth, B. 1979. Theoretical Kinematics. North-Holland Pub. Co., 558 p. New York
- Coxeter, H.S.M. 1946. Quaternions and Reflections. The American Mathematical Monthly, Vol. 53 (3); pp. 136-146.
- Ell, T.A. and Sangwine, S.J. 2007. Quaternion Involutions and Anti-Involutions. Computers & Mathematics with Applications, Vol. 53 (1); pp.137-143.
- Hacısalıhoğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi. Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2., 334 s. Ankara.
- Hamilton, W.R. 1844. On a New Species of Imaginary Quantities Connected with a theory of Quaternions. Proceedings of the Royal Irish Academy, Vol. 2; pp. 424-434.
- Hamilton, W.R. 1967. On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra. The Mathematical papers of Sir William Rowan Hamilton, Vol. 3 (Algebra), Cambridge University Press, 672 p. Cambridge.

- Hamilton, W.R. 1848. Researches Respecting Quaternions. Transactions of the Royal Irish Academy, Vol. 21 (1); pp. 199-296.
- Hiller, M. and Woernle, C. 1984. A Unified Representation of Spatial Displacement. Mechanism and Machine Theory, Vol. 19 (6); pp. 477-486.
- Inoguchi, J. 1998. Timelike Surfaces of Constant Mean Curvature in Minkowski 3-Space. Tokyo Journal of Mathematics, Vol. 21 (1); pp. 141-152.
- Karger, A. and Novak, J. 1985. Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach Science Pub., 422 p. Switzerland.
- Kelland, P., Gilston, K.C. and Guthrie, T.P. 1904. Introduction to Quaternions, Macmillan and Co., 208 p. London.
- Knus, M.A., Merkurjev, A., Rost, M. and Tignol, J-P. 1998. The Book of Involutions. AMS Colloquium Pub., Vol. 44, 593 p.
- Kula, L. 2003. Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları. Doktora Tezi. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 116 s. Ankara.
- Paşa, H.T. 1892. Linear Algebra. Boyacıyan Matbaa, 189 s. İstanbul.
- Rooney, J. 1977. A Survey of Representations of Spatial Rotation about a Fixed Point. Environment and Planning B, Vol. 4 (2); pp. 185-210.
- Veldkamp, G.R. 1976. On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics. Mechanism and Machine Theory, Vol. 11 (2); pp. 142-156.
- Ward, J.P. 1997. Quaternions and Cayley Numbers. Kluwer Academic Pub., 242 p. London.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat BEKAR
Doğum Yeri : Kamen/ALMANYA
Doğum Tarihi : 15.06.1979
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lisans : Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü (2003)
Yüksek Lisans : Dumlupınar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı (2009)
Doktora : Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2011 – Kasım 2014)

Çalıştığı Kurum / Kurumlar ve Yıl

Necmettin Erbakan Üniversitesi, Fen Fakültesi,
Matematik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü,
Geometri Anabilim Dalı, Araştırma Görevlisi (2011 - ...)

Yayınlar (SCI ve diğer)

Bekar, M. and Yaylı, Y. 2013. Involutions of Complexified Quaternions and Split Quaternions. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 23; pp. 283-299.
Bekar, M. and Yaylı, Y. 2013. Dual Quaternion Involutions and Anti-Involutions. Advances in Applied Clifford Algebras, Vol. 23; pp. 577-592.
Bekar, M. and Yaylı, Y. 2014. Biquaternions Lie Algebra and Complex-Projective Spaces. Caspian Journal of Mathematical Sciences, Vol. 3 (2); pp. 183-197.

Uluslararası Kongre Sunum

Bekar, M. 2013. Dual Quaternions and Screw Motions. International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2013), İstanbul/ TURKEY.

Bekar, M. 2014. Slant helix curves and Acceleration Centers. Karatekin Mathematics Days 2014, International Mathematics Symposium, Çankırı/ TURKEY.

Ulusal Kongre Sunum

Bekar, M. 2014. Slant Helix Curves and Acceleration Centers in Minkowski 3-Space. XII. Geometri Sempozyumu, Bilecik/TURKEY.