**ANKARA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

# GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY KOMŞULUK SİSTEMLERİNİN BAZI ÖZELLİKLERİ

**Eda YAZAR KOÇYİĞİT**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**ANKARA**
**2014**

**Her hakkı saklıdır**

**TEZ ONAYI**

Eda YAZAR KOÇYİĞİT tarafından hazırlanan **"Genelleştirilmiş Fuzzy Komşuluk Sistemlerinin Bazı Özellikleri"** adlı tez çalışması 22.05.2014 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** : Doç. Dr. Erdal GÜNER
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

**Jüri Üyeleri** :

**Başkan** : Prof. Dr. Cemil YILDIZ
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

**Üye** : Prof. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

**Üye** : Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Gazi Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

**Üye** : Doç. Dr. Erdal GÜNER
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

**Üye** : Y.Doç.Dr. Sevda SAĞIROĞLU PEKER
Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

**Yukarıdaki sonucu onaylarım**

**Prof.Dr.İbrahim DEMİR**
**Enstitü Müdürü**

## ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

04/05/2014

Eda YAZAR KOÇYİĞİT

# ÖZET

Doktora Tezi

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY KOMŞULUK SİSTEMLERİNİN
BAZI ÖZELLİKLERİ

Eda YAZAR KOÇYİĞİT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal GÜNER

Bu tezde her genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemine karşılık bir genelleştirilmiş fuzzy topolojinin varlığı ispatlanmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemi yardımıyla genelleştirilmiş fuzzy süreklilik tanımlanmıştır. Böylece literatürde bilinen pek çok farklı fuzzy süreklilik çeşidinin bir arada incelenmesini elverişli kılacak bir genişleme elde edilmiştir. Genelleştirilmiş fuzzy Q komşuluk sistemi, iç ve kapanış operatörleri tanımlanmış ve genelleştirilmiş fuzzy topoloji ile süreklilik için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

**Mayıs 2014, 57 sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** Genelleştirilmiş fuzzy topoloji, Genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemi, Genelleştirilmiş fuzzy süreklilik.

## ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOME PROPERTIES OF GENERALIZED FUZZY NEIGHBOURHOOD SYSTEMS

Eda YAZAR KOÇYİĞİT

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal GÜNER

In this thesis, existence of a generalized fuzzy topology corresponding to each generalized fuzzy neighborhood system is proven. Moreover, the notion of generalized fuzzy continuity is defined by generalized fuzzy neighborhood systems. These extensions enable us a useful unification to discuss several classes of fuzzy continuities already in the literatüre at the same time. Generalized fuzzy Q neighborhood system, interior and closure operators have been defined and some characterizations have been obtained for generalized fuzzy topology and continuity.

**May 2014, 57 pages**



**Key Words:** Generalized fuzzy topology, Generalized fuzzy neighbourhood system, Generalized fuzzy continuity.

## TEŞEKKÜR

Tezimi yöneten ve çalışmalarımda yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman yakın ilgi ve desteğini gördüğüm danışman hocam sayın Doç. Dr. Erdal GÜNER'e (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), araştırmalarımda bilgi ve önerilerini esirgemeyen sayın hocalarım Prof. Dr. Ayhan SERBETÇİ (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı) ve Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU na (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu' na en derin duygularımla teşekkür ederim.

Ayrıca benden manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve eşim İsmail'e teşekkür ederim.

Eda YAZAR KOÇYİĞİT
Ankara, Mayıs 2014

# İÇİNDEKİLER

**TEZ ONAY SAYFASI**
**ETİK** ..... **i**
**ÖZET** ..... **ii**
**ABSTRACT** ..... **iii**
**ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR** ..... **iv**
**SİMGELER DİZİNİ** ..... **vi**
**1. GİRİŞ** ..... **1**
**2. TEMEL KAVRAMLAR** ..... **3**
**2.1 Genelleştirilmiş Topoloji Kavramı** ..... **3**
**2.2 Genelleştirilmiş Süreklilik Kavramı** ..... **7**
**3.GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY TOPOLOJİ** ..... **11**
**3.1 Fuzzy Küme** ..... **11**
**3.2 Fuzzy Topolojik Kavramlar** ..... **13**
**3.3 Genelleştirilmiş Fuzzy Topoloji** ..... **16**
**4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY KOMŞULUK SİSTEMİ VE SÜREKLİLİK** ..... **20**
**4.1 Genelleştirilmiş Fuzzy Komşuluk Sistemi** ..... **20**
**4.2 Genelleştirilmiş Fuzzy Süreklilik** ..... **27**
**5. GENELLEŞTİRİLMİŞFUZZY Q-KOMŞULUK SİSTEMİ VE SÜREKLİLİK** ..... **41**
**5.1 Genelleştirilmiş Fuzzy Q-Komşuluk Sistemi** ..... **41**
**5.2 Genelleştirilmiş Fuzzy Q-Süreklilik** ..... **46**
**6. SONUÇLAR** ..... **51**
**KAYNAKLAR** ..... **54**
**ÖZGEÇMİŞ** ..... **57**

## SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $P(X)$ | X in kuvvet kümesi |
| $\Gamma(X)$ | X üzerinde tanımlı tüm monoton operatörlerinin kümesi |
| $\psi$ | Genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemi (GFKS) |
| $\Psi(P)$ | $P$ deki tüm GFKS nin kümesi |
| $\psi_q$ | Genelleştirilmiş fuzzy q komşuluk sistemi (GFqKS) |
| $g_\psi$ | $\psi$ nin ürettiği genelleştirilmiş fuzzy topoloji (GFT) |
| $g_{\psi q}$ | $\psi q$ nun ürettiği genelleştirilmiş fuzzy topoloji (GFT) |
| $\Psi_g(X)$ | g, GFT nin üretttiği tüm GFKS lerinin kümesi |
| $\psi_g^q$ | g, GFT nin üretttiği GFqKS |
| $i$ | $(X, \tau)$ topolojik uzayının iç operatörü |
| $c$ | $(X, \tau)$ topolojik uzayının kapanış operatörü |
| $i_g$ | g, GFT nin iç operatörü |
| $c_g$ | g, GFT nin kapanış operatörü |
| $\iota_\psi$ | $\psi$, GFKS nin iç operatörü |
| $\gamma_\psi$ | $\psi$, GFKS nin kapanış operatörü |
| $i_\psi$ | $\psi$ GFKS nin ürettiği GFT sinin iç operatörü |
| $int_\tau$ | $(X, \tau)$ fuzzy topolojik uzayının (FTU) iç operatörü |
| $cl_\tau$ | $(X, \tau)$ fuzzy topolojik uzayının (FTU) kapanış operatörü |
| $(x_\lambda)$ | $(X, \tau)$ FTU nda $x_\lambda$ nın komşuluk ailesi |
| $_Q(x_\lambda)$ | $(X, \tau)$ FTU nda $x_\lambda$ nın Q-komşuluk ailesi |
| $0_X$ | Değeri 0 olan sabit fuzzy küme |
| $1_X$ | Değeri 1 olan sabit fuzzy küme |
| $x_\lambda$ | Fuzzy nokta |
| $P(I^X)$ | X deki fuzzy kümelerin kuvvet kümesi |
| $P$ | X deki tüm fuzzy noktaların kümesi |
| $I^X$ | X deki fuzzy kümeler |

## 1. GİRİŞ

Klasik mantıkta bir önerme ya doğru ya da yanlıştır. Yani doğruluk değeri ya 1 ya da 0 dır. Bu bir önermenin kesin olarak doğru ya da kesin olarak yanlış olması anlamına gelmektedir. Oysa ki yaşadığımız dünyada kesin doğrular ve kesin yanlışlar olduğu kadar kısmen doğru ve yanlışlar da vardır. Gerçekliğin bu şekilde kısmen doğru ve yanlışları içermesi matematikte kendine bir yer bulma zorunluluğunu doğurmuştur. Zadeh bu gerekliliği 1965 de yayınladığı Fuzzy Sets adlı makalesinde ele alarak fuzzy küme teorisinin kurucusu olmuştur. Zadeh bir kümenin elemanı olma ya da olmama kavramı yerine belli bir derecede elemanı olma kavramını ortaya atmış ve bunu matematiksel bir ifadeyle ele almıştır. Eleman olma kavramına ilişkin bu yaklaşım gündelik hayatla sıkı bir ilişki içinde olan fuzzy mantığın hızla gelişmesine olanak tanımıştır.

Zadeh' in makalesinden sonra genel topolojinin temel kavramlarını fuzzy kümelere ilk taşıyan Chang (1968) olmuştur. Daha sonraları fuzzy topolojik uzaylar teorisi birçok çalışmaya konu olmuştur.

Ming ve Ming (1980)'de fuzzy komşuluk sistemlerini incelemiş ayrıca bir $x_\lambda$ fuzzy noktasının bir fuzzy kümenin elemanı olma bağıntısının yanı sıra önemli bir başka bağıntı olan quasi-coincident olma bağıntısını tanımlamıştır. Eleman olma; $x_\lambda$, X de bir fuzzy nokta ve A, X de bir fuzzy küme olmak üzere

$$\lambda \leq A(x)$$

ise $x_\lambda$, A ya aittir denir ve $x_\lambda \in A$ şeklinde gösterilir. Quasi-coincident olma ise

$$\lambda + A(x) > 1$$

eşitsizliği ile verilir. Bu durumda "$x_\lambda$ , A ile çakışımsı (quasi coincident)" dir denir ve $x_\lambda q$ A yazılır. Bu tanımla yeni bir komşuluk biçimi olan Q-komşuluk kavramı tanımlanmıştır.

2002'de Macar matematikçi Császár; genelleştirilmiş topoloji, genelleştirilmiş komşuluk sistemleri ve bunlar yardımıyla elde edilen genelleştirilmiş süreklilik kavramlarını vermiştir. 2005'te Min, Császár'ın sonuçlarından yola çıkarak genelleştirilmiş komşuluk sistemlerinde yeni iç ve kapanış operatörleri ele almıştır.

Ayrıca sürekli fonksiyon ya da açık fonksiyon altında bu operatörlerin karekterizasyonlarını incelemiştir. 2008'de Palani Chetty genelleştirilmiş topolojiyi fuzzy kümelerde tanımlamıştır.

Komşuluk kavramının fuzzy mantık çerçevesinde ele alınması fuzzy mantığın gelişim süreci boyunca devam etmiştir. Bugüne kadar genelleştirilmiş fuzzy topoloji kavramı verilmiş olmasına rağmen genelleştirilmiş fuzzy komşuluk kavramı incelenmemiştir. Bu tezde genelleştirilmiş fuzzy komşuluk ve genelleştirilmiş fuzzy süreklilik ele alınarak , literatürde var olan fuzzy süreklilik çeşitlerinin pek çok özelliğinin aynı anda incelenebilmesi amaçlanmaktadır.

Bu tezin 2. ve 3. bölümlerinde genelleştirilmiş topoloji, genelleştirilmiş süreklilik, genelleştirilmiş komşuluk, fuzzy küme, fuzzy topoloji, fuzzy komşuluk, fuzzy süreklilik ve genelleştirilmiş fuzzy topoloji (GFT) kavramları gerekli olduğu ölçüde hatırlatılmıştır. Sonraki bölümlerde genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sitemi (GFKS) ve genelleştirilmiş fuzzy Q komşuluk sistemleri (GFqKS) tanımlanmıştır. İç ve kapanış operatörleri tanımlanarak bunların sürekli fonksiyon, açık fonksiyon altındaki bazı özellikleri ispatlanmıştır. Her GFKS ye karşılık bir GFT nin varlığı ispatlanmıştır. Genelleştirilmiş komşuluk yardımıyla süreklilik tanımlanarak literatürde var olan pek çok süreklilik çeşidinin bir tek tanım ile karakterize edilebileceği gösterilmiştir. Benzer sonuçlar GFqKS ler için elde edilmiştir.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

### 2.1 Genelleştirilmiş Topoloji Kavramı

Bu bölümde, çalışmamızın temelini oluşturan Császar ın "Generalized open sets" ve "Generalized topology, generalized continuity" başlıklı makalelerindeki kavramlar kısaca hatırlatılacaktır.

Császar, bir X kümesi üzerinde, $\mu: P(X)\to P(X)$ operatörüne

$$\forall A, B\subset X \ni A\subset B \text{ için } \mu(A)\subset\mu(B)$$

koşulunu sağlıyorsa monoton operatör adını vermiş ve X üzerinde tanımlı tüm monoton operatörlerin kümesini $\Gamma(X)$ ile göstermiştir.

Bu operatör bize literatürdeki çeşitli açık kümelerin (ki bunlara genel bir ifade ile söz konusu kümenin genelleştirilmiş açık kümeleri adını almaktadır.) birçok özelliğini bir arada ele alma imkanı tanıyacaktır. Zira genelleştirilmiş açık kümelerin tanımları incelendiğinde kullanılan operatörlerin monoton bir yapı ($A\subset B$ için $\mu A\subset\mu B$) sergilediği görülmektedir. Örneğin bir X kümesinde, $A\subset B\subset X$ için

$A\subset i\,A$ ise A ya açık denir, $i\,A\subset i\,B$ ve $\mu = i$ dir.

$A\subset c\,i\,A$ ise A ya yarı açık denir, $c\,i\,A\subset c\,i\,B$ ve $\mu = c\,i$ dir .

$A\subset i\,c A$ ise A ya ön açık denir, $i\,c\,A\subset i\,c\,B$ ve $\mu = i\,c$ dir.

Buna göre Császár şu tanımı yapmaktadır;

$\mu: P(X)\to P(X)$ monoton bir operatör ve $A\subset X$ olsun. $A\subset\mu A$ ise A ya $\mu$-açık denir.

$\mu$-açık kümelerin birleşimi $\mu$-açıktır. Bu özellik $\mu$-açık kümelerin oluşturduğu altkümeler ailesinin X üzerinde, bildiğimiz topolojik yapıdan daha genel bir yapı oluşturmasını sağlamaktadır. Bu yapıya genelleştirilmiş topoloji denir;

Bir $X\neq\emptyset$ kümesinin altkümelerinden oluşan g ailesi

$$\emptyset\in g$$

$$G_i\in g \ , i\in I\neq\emptyset \text{ ise } \bigcup_{i\in I} Gi\in g$$

şartlarını sağlıyorsa g ye X de bir genelleştirilmiş topoloji (GT) denir. Yani GT, $\mu$-açık kümelerin sağladığı en temel özellikler olan boş küme $\mu$-açıktır ve $\mu$-açık kümeler

birleşim altında kapalıdır şartlarını sağlar. Burada g nin elemanlarına g-açık ve bunların tümleyenlerine de g- kapalı denir.

Böylece herhangi bir monoton operatör yardımıyla bir GT elde edilmektedir. Ayrıca X deki her bir GT ye karşılık genelleştirilmiş açıkları bu GT yi veren monoton bir operatör bulunmaktadır. Böylece monoton operatör ve genelleştirilmiş topoloji kavramları birbirlerine bağlanmaktadır.

**Lemma 2.1.1:** g, X de bir GT olsun. Bu durumda, X de $\mu$- açık kümeleri g yi verecek şekilde bir $\mu$: $P(X) \rightarrow P(X)$ monoton operatör vardır ve

(i) $\mu(\emptyset) = \emptyset$

(ii) $\mu(A) \subset A$

(iii) $\mu\,\mu(A) = \mu(A)\ ,\forall A \subset X$

şartlarını sağlar (Császár 2002).

Tüm $\mu$- açık kümelerin ailesi $g_{\mu}$ ile gösterilecektir.

Daha sonra Császár, X de bir GT yi elde etmenin diğer bir yolu olarak yeni bir operatör ele almıştır. Bu operatör genelleştirilmiş komşuluk sistemi adını almış ve genel topolojide bir komşuluk sistemi yardımıyla topoloji elde etme ve noktasal sürekliliğin tanımı gibi temel kavramlara benzer bir rol oynamıştır. Buna göre

$$\psi : X \rightarrow P(P(X)), \qquad V \in \psi(x) \Rightarrow x \in V$$

şeklinde tanımlı $\psi$ operatörüne X üzerinde bir genelleştirilmiş komşuluk sistemi (GKS) ve her $V \in \psi(x)$ kümesine de $x \in X$ in bir genelleştirilmiş komşuluğu (GK) denir. X deki tüm GKS nin kümesi $\Psi(X)$ ile gösterilecektir.

Genelleştirilmiş komşuluk tanımı, bir alt kümenin, bir noktanın genelleştirilmiş komşuluğu olması için hiçbir kısıtlayıcı kural koymamakta sadece bir küme genelleştirilmiş komşuluksa mutlaka x i içermesi gerekmektedir. O halde x i içeren kümelerden oluşan bir aileyi bir kurala bağlayarak bu küme ailesi X de bir

genelleştirilmiş komşuluk sistemidir diyebiliriz. Örneğin, genel topolojideki komşuluk sistemi x i içeren bir açığı kapsayan kümeleri bir araya getirdiğine göre bu komşuluk sistemi bir GKS dir. Her zaman bir GKS ile bir GT elde edilebilir.

**Lemma 2.1.2:** $\psi$, X de bir GKS olmak üzere

$$\forall x \in G \text{ için } \exists V \in \psi(x) \ \ni \ V \subset G$$

koşulunu sağlayan $G \subset X$ kümelerinin ailesi g olsun. Bu durumda g, X üzerinde bir GT dir (Császár 2002).

Böylece $\psi$ operatörü X de bir GT yapısı üretmiştir. Bu GT yi $g_{\psi}$ şeklinde gösterelim. Benzer şekilde; X de bir GT yapısı varken bu yapının bir genelleştirilmiş komşuluk sistemi ürettiği gösterilebilir.

**Lemma 2.1.3:** X de g bir GT ise $g = g_{\psi}$ olacak şekilde bir $\psi$ GKS vardır ve

$$(*) \qquad V \in \psi(x) \Leftrightarrow x \in V \in g$$

dir (Császár 2002).

Bu şekilde elde edilen $\psi$, $\psi = \psi_g$ şeklinde gösterilecek ve bir $\psi$, $(*)$'ı sağlıyorsa $\psi \in \Psi_g(X)$ yazılacaktır. Dikkat edilirse g, X de bir GT ve $x \in X$ olmak üzere $\psi_g(x) = \emptyset$ olabilir.

Aslında çok daha genel olarak herhangi bir alt aile kullanılarak bir GKS elde edilebilir. X üzerinde herhangi bir $\nabla \subset P(X)$ ailesi için $\psi_{\nabla} \in \Psi(X)$ olmak üzere

$$V \in \psi_{\nabla}(x) \Leftrightarrow x \in V \in \nabla$$

tanımı yapılabilir.

Ayrıca Császár, literatürde sıkça rastlana pek çok süreklilik çeşidinin ortak özelliklerinin tek bir çatı altında incelenmesinde önemli bir rol oynayacak olan bir GKS tanımlamıştır. Bu sistem g bir GT ve μ monoton bir operatör olmak üzere

$$\psi(\mu, g)(x) = \{ V: \exists G \in g \ni x \in G \text{ ve } \mu G = V \}$$

şeklinde tanımlamıştır. Bu durumda $\psi(\mu, g) \in \Psi(X)$ olduğu açıktır.

g, X de bir GT ve $A \subset X$ olsun. $i_g A$ ile A nın kapsadığı en geniş $G \in g$ kümesini gösterelim, yani $i_g A = \cup\{G: G \in g, G \subset A\}$ dir. $c_g A$, A yı kapsayan en dar g-kapalı kümeyi gösterir, yani $c_g A$, A yı kapsayan tüm g-kapalı kümelerin kesişimidir. Eğer bir $\mu \in \Gamma(X)$ için $g = g_\mu$ ise $c_{g\mu}$ yerine $c_\mu$, $i_{g\mu}$ yerine $i_\mu$ yazılacaktır. Benzer olarak bir

$\psi \in \Gamma(X)$ için $i_\psi = i_{g_\psi}$ , $c_\psi = c_{g_\psi}$ dir.

Benzer şekilde ψ, X üzerinde bir GKS ve $A \subset X$ olmak üzere

$$\iota_\psi A = \{ x \in X: \exists V \in \psi(x) \ni V \subset A \}$$

ve

$$\gamma_\psi A = \{ x \in X : \forall V \in \psi(x) \ni V \cap A \neq \emptyset \}$$

operatörleri tanımlanabilir. Bu operatörler g nin ürettiği operatörlerle kıyaslanabilir.

**Lemma 2.1.4:** Bir X kümesinde

i. $\iota_\psi$ ve $\gamma_\psi$ operatörleri monoton ve $\gamma_\psi A = X - \iota_\psi(X-A)$,
ii. $i_\psi A \subset \iota_\psi A$ ve $\gamma_\psi A \subset c_\psi A$ .

dır (Császár 2002).

Genel olarak $\iota_\psi \neq i_\psi$ ve $\gamma_\psi \neq c_\psi$ dir. Örneğin; X = R ve $x \in R$ için $\psi(x) = \{(x-1, x+1)\}$ olsun. b-a>2 olmak üzere A= (a, b) ise $\iota_\psi A$ = [a+1, b-1] ve $g_\psi = \{\emptyset, R\}$ olduğundan $i_\psi A = \emptyset$ dır.

**Teorem 2.1.1:** Bir X kümesinde $g = g_{\psi}$ için $\psi \in \Psi_g(X)$ ise $\iota_{\psi} = i_{\psi}$ ve $\gamma_{\psi} = c_{\psi}$ dir (Császár 2002).

## 2.2 Genelleştirilmiş Süreklilik Kavramı

Bu kısımda genelleştirilmiş süreklilik kavramı verilerek bazı özellikleri incelenecektir.

**Tanım 2.2.1:** X ve X' iki küme ve $f : X \to X'$ fonksiyonu verilsin. g ve g' sırasıyla X ve X' üzerinde tanımlı GT olsun. Bu durumda $\forall G' \in g'$ için $f^{-1}(G') \in g$ oluyorsa, f fonksiyonuna (g, g' )-süreklidir (veya genelleştirilmiş süreklidir) denir (Császár 2002).

Topolojik uzaylardaki süreklilik çeşitlerinden örnek verecek olursak ; $\tau$ ve $\tau'$ sırasıyla X ve X' üzerinde topoloji olmak üzere;
$(\tau, \tau')$-süreklilik, sürekliliğe
$(s\tau, \tau')$-süreklilik, yarı sürekliliğe,
$(p\tau, \tau')$-süreklilik, ön-sürekliliğe,
$(s\tau, s\tau')$-süreklilik, irresolute fonksiyonlara,
$(\beta\tau, \tau')$-süreklilik, $\beta$-sürekliliğe,
$(p\tau, p\tau')$-süreklilik, ön-irresolute fonksiyonlara
karşılık gelmektedir.

**Tanım 2.2.2:** X ve X′ iki küme, $\psi \in \Psi(X)$ , $\psi' \in \Psi(X')$ ve $f: X \to X'$ olsun. Her $x \in X$ ve her $V \in \psi'(f(x))$ için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir $U \in \psi(x)$ varsa f ye $(\psi , \psi')$-sürekli denir (Császár 2002).

**Teorem 2.2.1:** X ve X′ iki küme, $\psi \in \Psi(X)$ , $\psi' \in \Psi(X')$ ve $f: X \to X'$ olsun. f, $(\psi , \psi')$-sürekli ise $(g_{\psi}, g_{\psi'})$-süreklidir (Császár 2002).

Ancak bu teoremin karşıtı genellikle doğru değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu açıklamaktadır.

**Örnek 2.2.1:** X ={a,b,c} üzerinde τ ={∅, X,{a}, {b}, {a, b}} ve τ' ={∅, X,{a}, {c}, {a, c}} topolojileri verilsin. ψ= ψ ($c_\tau$ , τ) ve ψ′ = ψ ($c_{\tau'}$ , τ′) alınırsa $g_\psi = g_{\psi'}$ ={∅, X} olur. Bu durumda f = $id_x$ özdeşlik dönüşümü ($g_\psi$, $g_{\psi'}$)-süreklidir, fakat (ψ , ψ′)-sürekli değildir (Császár 2002).

**Teorem 2.2.2:** X ve X′ iki küme, ψ∈ Ψ(X) , ψ′ ∈ Ψ(X′) ve f: X → X′ olsun. f, ($g_\psi$, $g_{\psi'}$)-sürekli ve $\psi' = \psi_{g'}$ olacak biçimde X′ de bir g′ GT varsa f fonksiyonu (ψ , ψ′)-süreklidir (Császár 2002).

**Teorem 2.2.3:** X ve X′ iki küme, ψ ∈ Ψ(X) , ψ′ ∈ Ψ(X′) ve f: X → X′ olsun. A⊆X ve B⊆X′ olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(a) f , (ψ , ψ′)-sürekli

(b) $f(\gamma_\psi A) \subseteq \gamma_{\psi'} f(A)$

(c) $\gamma_\psi f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(\gamma_{\psi'} B)$

dır (Császár 2002).

**Tanım 2.2.3:** X ve X′ birer küme ve f : X→X' fonksiyonu verilsin. g ve g' sırasıyla X ve X' üzerinde tanımlı GT olsun. Bu durumda, ∀G∈g için f(G)∈g' oluyor ise, f ye (g, g' )-açık (veya genelleştirilmiş açık) denir (Min 2005).

**Teorem 2.2.4:** f: (X, g) → (X′, g') fonksiyonu, (X, g) ve (X′ g') genelleştirilmiş topolojik uzayları arasında tanımlı olsun. A⊆X ve B⊆X′ olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(a) f, (g, g' )-açık

(b) $f(i_g A) \subseteq i_{g'} f(A)$

(c) $i_g f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(i_{g'} B)$

dır (Min 2005).

**Tanım 2.2.4:** X ve X′ iki küme, $\psi \in \Psi(X)$ , $\psi' \in \Psi(X')$ ve f: X $\rightarrow$ X′ olsun. Her x$\in$ X ve her U$\in$ $\psi(x)$ için V$\subseteq$f(U) olacak şekilde bir $V \in \psi'(f(x))$ varsa f ye ($\psi$ , $\psi'$)-açık denir (Min 2005).

**Teorem 2.2.5:** X ve X′ iki küme, $\psi \in \Psi(X)$ , $\psi' \in \Psi(X')$ ve f: X $\rightarrow$ X′ olsun. f, ($\psi$ , $\psi'$)-açık ise ($g_{\psi}$, $g_{\psi'}$)-açıktır (Min 2005).

Bu önermenin karşıtı genellikle doğru değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu göstermektedir.

**Örnek 2.2.6:** R reel sayıları göstermek üzere x$\in$R için

$$\psi(x) = \begin{cases} \{[x, \infty)\} , & x \text{ rasyonel sayı} \\ \{(-\infty, x]\}, & x \text{ irrasyonel sayı} \end{cases}$$

ve $\psi(x') = \{R\}$ olsun. Buradan $g_{\psi} = g_{\psi'} = \{\emptyset, R\}$ dir. f, özdeşlik dönüşümü ($g_{\psi}$, $g_{\psi'}$)-açıktır ancak ($\psi$ , $\psi'$)-açık değildir (Min 2005).

**Teorem 2.2.6:** X ve X′ iki küme, $\psi \in \Psi(X)$ , $\psi' \in \Psi(X')$ ve f: X $\rightarrow$ X′ olsun. A$\subseteq$X ve B$\subseteq$X′ olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(a) f , ($\psi$ , $\psi'$)-açık

(b) $\iota_{\psi}(f^{-1}(B)) \subseteq f^{-1}(\iota_{\psi'}B)$

(c) $f^{-1}(\gamma_{\psi'}B) \subseteq \gamma_{\psi}f^{-1}(B)$

(d) $f(\iota_{\psi}A) \subseteq \iota_{\psi'}(f(A))$

dır (Min 2005).

**Tanım 2.2.5:** $\mathfrak{B} \subseteq P(X)$ ve $\emptyset \in \mathfrak{B}$ olsun. $\mathfrak{B}$ nın elemanlarının tüm birleşimleri X de bir GT dir. Bu GT $g_{\mathfrak{B}}$ ile gösterilir ve $\mathfrak{B}$ ye $g_{\mathfrak{B}}$ için bir taban denir (Császár2009).

# 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY TOPOLOJİ

Bu bölümde genelleştirilmiş fuzzy topoloji kavramı ele alınarak bazı karakterizasyonları verilecektir.

## 3.1 Fuzzy Küme

**Tanım 3.1.1:** X boş kümeden farklı bir küme ve $I = [0, 1] \subset R$ olmak üzere $\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen,

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \subset X \times I$$

kümesine X de bir fuzzy küme denir. $\mu_A$ ya, A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu, $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine ise x in A ya ait olma derecesi denir. $\mu_A(x)$ in 1 e yaklaşması x in A ya daha fazla ait olması anlamına gelmektedir (Zadeh 1965).

X in tüm fuzzy kümelerinin kümesini $I^X$ ile gösterelim. Bir $x \in X$ için $\mu_A(x)=A(x)$ olmak üzere X deki fuzzy kümeleri A, B, . . gibi simgelerle göstereceğiz.

$\forall x \in X$ için $A(x) = c$ ($c \in [0, 1]$ sabit) şeklinde tanımlı A fuzzy kümesine X de bir sabit fuzzy küme denir.

$1_X$ ve $0_X$ her $x \in X$ için sırasıyla 1 ve 0 değerini alan sabit fuzzy kümelerdir. Bir A fuzzy kümesi için $A \neq 0_X$ ise A fuzzy boş küme değildir.

A, $B \in I^X$ fuzzy kümeleri için $A(x) \leq B(x)$ , ($\forall x \in X$) ise $A \leq B$ yazılır ve B, A yı kapsıyor denir.

Bir $(A_j)_{j \in J} \subset I^X$ fuzzy küme ailesi için birleşim ve kesişim işlemleri sırasıyla $\forall x \in X$ için

$$(\vee_{j \in J} A_j)(x) = \sup_{j \in J} \{A_j (x)\} \quad \text{ve} \quad (\wedge_{j \in J} A_j)(x) = \inf_{j \in J} \{A_j (x)\}$$

şeklinde tanımlıdır. A fuzzy kümesinin tümleyeni ise, $\forall x \in X$ için

$$A^c (x) = (1_X - A)(x) = 1 - A(x)$$

dir.

X de $x_\lambda$ ile gösterilen bir fuzzy nokta, x de $\lambda$ ve X in diğer tüm elemanlarında 0 değerini alan üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. X deki tüm fuzzy noktaların kümesini *P* ile göstereceğiz.

A, $B \in I^X$ fuzzy kümeleri ve $\forall x \in X$ için

$A = B \Leftrightarrow A(x) = B(x)$

$C = A \vee B \Leftrightarrow C(x) = maks\{A(x), B(x)\}$

$D = A \wedge B \Leftrightarrow D(x) = min\{A(x), B(x)\}$

$F = A \backslash B \Leftrightarrow F(x) = (A \wedge B^c)(x) = min\{A(x), 1-B(x)\}$

dır (Zadeh 1965).

**Tanım 3.1.2:** X boş kümeden farklı herhangi bir küme olmak üzere $x_\lambda$, X de bir fuzzy nokta ve A, X in bir fuzzy kümesi olsun. Eğer ; $\lambda \leq A(x)$ ise $x_\lambda$, A ye aittir denir ve $x_\lambda \in A$ ile gösterilir (Chang 1968).

**Tanım 3.1.3:** X ve Y kümeleri arasındaki bir f: $X \rightarrow Y$ fonksiyonu ve $A \in I^X$, $B \in I^Y$ için

a) A nın f altındaki görüntüsü f (A),

$$f(A)(y) = \begin{cases} \sup\{A(z): z \in f^{-1}(y)\} & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad , \forall y \in Y$$

şeklinde tanımlanır.

b) B nin f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(B)$,

$$\forall x \in X \text{ için, } f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$$

şeklinde tanımlanır.

Bir $x_\lambda \in X$ fuzzy noktası için $f(x_\lambda) = (f(x))_\lambda$ dir (Rosenfeld 1971).

Ayrıca görüntü ve ters görüntü için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- $A_1, A_2 \in I^X$ için $A_1 \leq A_2$ ise $f(A_1) \leq f(A_2)$
- $B_1, B_2 \in I^Y$ için $B_1 \leq B_2$ ise $f^{-1}(B_1) \leq f^{-1}(B_2)$
- $A \leq f^{-1}(f(A))$ , $A \in I^X$ [f, 1-1 olmak üzere $A = f^{-1}(f(A))$ ]
- $B \geq f(f^{-1}(B))$ , $B \in I^Y$ [f, örten olmak üzere $B = f(f^{-1}(B))$]
- $f(A) \leq B \Leftrightarrow A \leq f^{-1}(B)$ , $A \in I^X$, $B \in I^Y$
- f: $X \rightarrow Y$ , g: $Y \rightarrow Z$ fonksiyonlarının bileşkesi için

  $gof(A)=g(f(A))$ , $A \in I^X$ ve

  $(gof)^{-1}(C)= f^{-1}(g^{-1}C))$ , $C \in I^Y$
- $f(\vee_{j\in J} A_j) = \vee_{j\in J} f(A_j)$ , $(A_j)_{j\in J} \subset I^X$
- $f(\wedge_{j\in J} A_j) \leq \wedge_{j\in J} f(A_j)$ , $(A_j)_{j\in J} \subset I^X$
- $f^{-1}(\vee_{j\in J} B_j) = \vee_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ , $(B_j)_{j\in J} \subset I^Y$
- $f^{-1}(\wedge_{j\in J} B_j) \leq \wedge_{j\in J} f^{-1}(B_j)$ , $(B_j)_{j\in J} \subset I^Y$

dır (Chang 1968).

### 3.2 Fuzzy Topolojik Kavramlar

Bu kısımda fuzzy topoloji, fuzzy komşuluk, iç, kapanış ve fuzzy süreklilik gibi fuzzy topolojik kavramları ele alarak bazı özellikleri verilecektir.

**Tanım 3.2.1:** X üzerinde bir fuzzy topoloji

a) $1_X$ ve $0_X \in \tau$

b) $A, B \in \tau$ ise $A \wedge B \in \tau$

c) $A_j \in \tau$ ise $\vee_{j \in J} A_j \in \tau$

koşullarını sağlayan bir $\tau \subset I^X$ ailesidir. $\tau$ nun elemanlarına fuzzy $\tau$–açık, tümleyenlerine ise fuzzy $\tau$-kapalı denir. $(X, \tau)$ ikilisine de fuzzy topolojik uzay (FTU) denir (Chang 1968).

**Tanım 3.2.2:** $(X, \tau)$ fuzzy topolojik uzayında bir $x_\lambda$ noktasının fuzzy komşuluğu

$$x_\lambda \in O \leq U \text{ olacak şekilde } \exists O \in \tau$$

koşulunu sağlayan bir $U \in I^X$ kümesidir (Ming and Ming 1980).

**Tanım 3.2.3:** $(X, \tau)$ fuzzy topolojik uzayında $A \in I^X$ için

$$\lambda > A^c(x) \text{ veya } \lambda + A(x) > 1$$

ise, $x_\lambda$ A ile çakışımsıdır denir ve $x_\lambda q A$ yazılır (Ming ve Ming 1980).

**Teorem 3.2.1:** $(X, \tau)$ fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer;

$$x_\lambda \, q(\vee_{j \in J} A_j) \text{ ise } \exists \, j \in J \ni x_\lambda q A_j$$

dır (Ming ve Ming 1980).

**Tanım 3.2.4:** $(X, \tau)$ fuzzy topolojik uzayında

$$x_\lambda q O \leq U \text{ olacak şekilde } \exists O \in \tau$$

koşulunu sağlayan $U \in I^X$ kümesine, $x_\lambda$ nın bir Q-komşuluğu denir.

Bir Q-komşuluk noktanın kendisini içermek zorunda değildir (Ming ve Ming 1980).

$x_\lambda$ nın bütün fuzzy komşuluklarının (veya fuzzy Q-komşuluklarının) oluşturduğu aileye $x_\lambda$ nın fuzzy komşuluk sistemi (veya fuzzy Q-komşuluk sistemi) denir ve $\mathcal{U}(x_\lambda)$ (veya $\mathcal{U}_Q(x_\lambda)$)ile gösterilir.

**Teorem 3.2.1:** (X, $\tau$) fuzzy topolojik uzayında, $\mathcal{U}_Q(x_\lambda)$ Q-komşuluk sistemi

(a) $U \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda)$ ise $x_\lambda q U$

(b) $U,V \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda)$ ise $U \wedge V \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda)$

(c) $U \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda)$ ve $U \leq V$ ise $V \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda)$

(d) $U \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda)$ ise $\exists\, V \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda) \ni V \leq U$ ve her $y_r q V$ için $V \in \mathcal{U}_Q(y_r)$

özelliklerini sağlar. Ayrıca herhangi bir X kümesi üzerinde her bir $x_\lambda$ için ilk üç özelliğe sahip birer $\mathcal{U}_Q(x_\lambda)$ küme ailesi bulunabiliyorsa, X üzerinde bu aileler yardımıyla bir fuzzy topoloji kurulabilir. Dördüncü özelliğin sağlanması ise, bu ailelerin kurulan topolojide bir Q-komşuluk sistemi olduğunu gösterir. Bu durumlar fuzzy komşuluk sistemleri için de geçerlidir (Ming ve Ming 1980).

**Teorem 3.2.2:** (X, $\tau$) FTU da $x_\lambda$ q A için A, $x_\lambda$ nın bir Q-komşuluğu ise $A \in \tau$ dır (Liang ve Hai 1984).

**Tanım 3.2.5:** (X, $\tau$) FTU da bir A fuzzy kümesinin kapsadığı bütün fuzzy açık kümelerin birleşimine A nın içi denir ve $\text{int}_\tau A$ ile gösterilir.

**Tanım 3.2.6:** (X, $\tau$) FTU da bir A fuzzy kümesini kapsayan bütün fuzzy kapalı kümelerin kesişimine A nın kapanışı denir ve $\text{cl}_\tau A$ ile gösterilir.

Bu kümeler eleman olma ve çakışımsı olma kavramları ile

- $x_\lambda \in \text{int}_\tau A \Leftrightarrow \exists\, U \in \mathcal{U}(x_\lambda) \ni U \leq A$
- $x_\lambda \in \text{cl}_\tau A \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda) \ni U q A$

şeklinde karakterize edilebilir (Ming ve Ming 1980).

**Tanım 3.2.7:** $(X, \tau)$ ve $(Y,\upsilon)$ FTU olmak üzere $f: (X, \tau) \to (Y, \upsilon)$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $G \in \upsilon$ için $f^{-1}(G) \in \tau$ ise f fonksiyonuna fuzzy süreklidir denir (Chang 1968).

**Tanım 3.2.8:** $f:(X,\tau)\to(Y,\upsilon)$ bir fonksiyon ve $x_\lambda \in X$ bir fuzzy nokta olsun. Eğer $f(x_\lambda)$ fuzzy noktasının herhangi bir V fuzzy Q-komşuluğuna (fuzzy komşuluğuna) karşılık $x_\lambda$ nın $f(U)\leq V$ olacak şekilde bir U fuzzy Q-komşuluğu (fuzzy komşuluğu) varsa f fonksiyonuna $x_\lambda \in X$ de fuzzy süreklidir denir (Liang ve Hai 1984).

**Teorem 3.2.3.** $f:(X, \tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu için

(a) f , fuzzy süreklidir

(b) f, herhangi bir $x_\lambda$ noktasında Q-komşuluğa göre süreklidir

(c) f, herhangi bir $x_\lambda$ noktasında fuzzy komşuluğa göre süreklidir

ifadeleri denktir (Liang ve Hai 1984).

**Teorem 3.2.4.** $f:(X, \tau)\to(Y,\upsilon)$ fonksiyonu için

(a) f , fuzzy süreklidir

(b) Her $A \in I^X$ için $f(cl_\tau A) \leq cl_\upsilon f(A)$

(c) Her $B \in I^Y$ için $cl_\tau f^{-1}(B) \leq f^{-1}(cl_\upsilon B)$

ifadeleri denktir (Ming ve Ming 1980).

### 3.3 Genelleştirilmiş Fuzzy Topoloji

Bu kısımda genelleştirilmiş fuzzy topoloji kavramı verilerek bazı özellikleri incelenecektir.

$X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde, $\mu: I^X \to I^X$ bir fonksiyon olsun. $\mu$, $\forall A,B \in I^X$ için

$$A \leq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$$

koşulunu sağlıyorsa monoton denir. $\Gamma_F(X)$, bu şekilde tanımlı tüm monoton fonksiyonları ailesini gösterir.

Bir $A \in I^X$ fuzzy kümesi için $A \leq \mu(A)$ ise A ya $\mu$-fuzzy açık küme denir.

**Teorem 3.3.1:** $\mu$-fuzzy açık kümelerin birleşimi ve fuzzy boş küme $\mu$-fuzzy açık kümelerdir.

**İspat:** $\{A_j\}_{j \in J}$ $\mu$-fuzzy açık kümelerin bir ailesi olsun. O halde her $j \in J$ için $A_j \leq \mu(A_j)$ dir. Ayrıca $A_j \leq \vee_{j \in J} A_j$ ve $\mu$ monoton olduğundan $\mu(A_j) \leq \mu(\vee_{j \in J} A_j)$ dir. Bu durumda

$$\vee_{j \in J} A_j \leq \vee_{j \in J} \mu(A_j) \leq \vee_{j \in J} \mu(\vee_{j \in J} A_j) = \mu(\vee_{j \in J} A_j)$$

olduğuna göre $\vee_{j \in J} A_j$ $\mu$-fuzzy açık kümedir.

Fuzzy boş kümenin $\mu$-fuzzy açık küme olduğu açıktır (Palani Chetty 2008).

**Tanım 3.3.1:** $X \neq \emptyset$ ve $g \subseteq I^X$ olsun. Bu durumda

(i) $0_X \in g$

(ii) $\{A_j\}_{j \in J} \subseteq g \Rightarrow \vee_{j \in J} A_j \in g$

şartları sağlanıyorsa g ye, X üzerinde bir genelleştirilmiş fuzzy topoloji (GFT) denir.

g nin elemanlarına g-açık, tümleyenlerine ise g- kapalı denir (Palani Chetty 2008).

Her monoton operatöre karşılık bir GFT vardır. Ayrıca her GFT, genelleştirilmiş fuzzy açık kümeleri bu GFT yi verecek şekilde bir monoton fonksiyona sahiptir.

**Teorem 3.3.2:** g, X de bir GFT olsun. $\mu$-fuzzy açık kümeleri g yi verecek şekilde bir $\mu: I^X \to I^X$ monoton fonksiyonu vardır ve $\mu$

(i) $\mu(0_X) = 0_X$

(ii) $\mu(A) \leq A$

(iii) $\mu\mu(A) = \mu(A)$ ,$\forall A \in I^X$

ifadelerini sağlar (Palani Chetty 2008).

**Tanım 3.3.2:** g , X de bir GFT ve $A \in I^X$ olmak üzere A nın g ye göre içi, $G \in g$ olmak üzere $G \leq A$ şeklindeki $G \in I^X$ lerin birleşimidir. Bu küme $int_g A$ şeklinde gösterilir (Palani Chetty 2008).

**Tanım 3.3.3:** $(X, \tau)$ bir FTU ve $A \in I^X$ olsun. Eğer,

(a) $A \leq cl_\tau int_\tau A$ ise, A ya fuzzy yarı açık küme
(b) $A \leq int_\tau cl_\tau A$ ise, A ya fuzzy ön açık küme
(c) $A \leq int_\tau cl_\tau int_\tau A$ ise, A ya fuzzy α-açık küme
(d) $A \leq cl_\tau int_\tau cl_\tau A$ ise, A ya fuzzy β-açık küme
(e) $A = int_\tau cl_\tau A$ ise. A ya fuzzy regüler açık küme

denir.

$(X, \tau)$ daki tüm fuzzy ön açık kümelerin ailesi $FP\tau(X)$, fuzzy yarı açık kümelerin ailesi $FS\tau(X)$, fuzzy α-açık kümelerin ailesi $F\alpha\tau(X)$, fuzzy β -açık kümelerin ailesi $F\beta\tau(X)$, fuzzy regüler açık kümelerin ailesi $FR\tau(X)$ ile gösterilecektir.

**Tanım 3.3.4:** $(X, \tau)$ ve $(X', \tau')$ birer FTU, $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{U}'$ sırasıyla bunlar üzerinde fuzzy komşuluk sistemi (veya $\mathcal{U}_Q$ ve $\mathcal{U}'_Q$ fuzzy Q-komşuluk sistemi) ve $f: X \to X'$ olsun. Bu durumda f ye

(a) fuzzy ön- sürekli denir $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \mathcal{U}'(f(x_\lambda))$ için $f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in FP\tau(X)$ , $x_\lambda \in U$ vardır.

(b) fuzzy yarı- sürekli denir $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \tau' \ni f(x_\lambda) \in V$ için $f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in FS\tau(X)$ , $x_\lambda \in U$ vardır.

(c) fuzzy zayıf sürekli denir $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \tau' \ni f(x_\lambda) \in V$ için $f(int_\tau U) \leq cl_{\tau'} V$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ , $x_\lambda \in U$ vardır.

(d) fuzzy α-sürekli denir $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \tau' \ni f(x_\lambda) \in V$ için

$f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in F\alpha\tau(X)$ , $x_\lambda \in U$ vardır.

(e) fuzzy hemen hemen sürekli denir $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \mathcal{U}'(f(x_\lambda))$ için $f(U) \leq int_{\tau'}(cl_{\tau'}V)$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}(x_\lambda)$ vardır.

(f) fuzzy δ-sürekli denir $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \tau' \ni f(x_\lambda) \in V$ için $f(int_\tau(cl_\tau U)) \leq int_{\tau'}(cl_{\tau'}V)$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ $x_\lambda \in U$ vardır.

(g) fuzzy yarı-ön sürekli denir $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \tau' \ni f(x_\lambda) \in V$ için $f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in FSP\tau(x)$ , $x_\lambda \in U$ vardır.

(h) fuzzy yarı α-irresolute denir $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in F\alpha\tau' \ni f(x_\lambda) \in V$ için $f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in FS\tau(X)$ , $x_\lambda \in U$ vardır.

(i) fuzzy hemen hemen kuvvetli θ- sürekli $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \mathcal{U}_Q'(f(x_\lambda))$ ve $V \in \tau'$ için $f(cl_\tau U) \leq cl_{\tau'} int_{\tau'}V$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda), U \in \tau$ vardır.

(j) fuzzy kuvvetli yarı sürekli denir $\Leftrightarrow$ Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \mathcal{U}_Q'(f(x_\lambda))$ için $f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in F\alpha\tau(X)$, $x_\lambda q U$ vardır.

**Tanım 3.3.5:** X ve X' iki küme ve $f : X \to X'$ fonksiyonu verilsin. g ve g' sırasıyla X ve X' üzerinde tanımlı birer GFT olsun. Bu durumda $\forall G' \in g'$ için $f^{-1}(G') \in g$ oluyorsa, f fonksiyonuna fuzzy (g, g')-süreklidir denir (Sarma vd. 2012) .

# 4. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY KOMŞULUK SİSTEMİ VE SÜREKLİLİK

Bu bölümde genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemi ve genelleştirilmiş fuzzy süreklilik kavramı tanımlanarak bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

## 4.1 Genelleştirilmiş Fuzzy Komşuluk Sistemi

Bu kısımda fuzzy kümeler için genelleştirilmiş komşuluk sistemi ve bu sistemin ürettiği iç ve kapanış operatörü tanımlanarak bazı özellikleri verilecektir.

**Tanım 4.1.1:** X bir küme ve $P$, X deki tüm fuzzy noktaların kümesi olsun. Eğer

$\psi : P \to P(I^X)$ dönüşümü

$$V \in \psi(x_\lambda) \Rightarrow \lambda \leq V(x)$$

özelliğini sağlarsa $V \in \psi(x_\lambda)$ fuzzy kümesine, $x_\lambda$ fuzzy noktasının genelleştirilmiş fuzzy komşuluğu (kısaca GFK) ve $\psi$ dönüşümüne $P$ de genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemi (kısaca GFKS) denir. $P$ deki tüm GFKS lerinin kümesi $\Psi(P)$ ile gösterilecektir.

**Tanım 4.1.2:** X bir küme $\psi \in \Psi(P)$ ve $A \in I^X$ olsun. $\iota_\psi A$ fuzzy kümesi, her $z \in X$ için

$$\iota_\psi A(z) = \sup\{ x_\lambda(z): \exists V \in \psi(x_\lambda)\ \ni V \leq A \}$$

şeklinde tanımlanır. $\iota_\psi A$ ya A nın $\psi$ ye göre içi denir.

$\gamma_\psi A$ fuzzy kümesi, her $z \in X$ için

$$\gamma_\psi A(z) = \inf\{(\max(A(z),V(z)) : V \in \psi(z_\lambda)\}$$

şeklinde tanımlanır. $\gamma_\psi A$ ya A nın $\psi$ ye göre kapanışı denir.

**Lemma 4.1.1:** $\psi \in \Psi(P)$ olsun. Bu durumda $\forall A,B \in I^X$ için

(a) $\iota_\psi 0_X = 0_X$

(b) $\iota_\psi A \leq A$ ve $A \leq \gamma_\psi A$

(c) $A \leq B \Rightarrow \iota_\psi A \leq \iota_\psi B$ ve $\gamma_\psi A \leq \gamma_\psi B$ , yani $\iota_\psi$ ve $\gamma_\psi$ monotondur.

**İspat:** (a) $\forall V \in \psi(x_\lambda)$ için $V > 0_X$ olduğundan, her $z \in X$ için

$$\iota_\psi 0_X(z) = \sup\{ x_\lambda(z): \exists V \in \psi(x_\lambda) \ni V \leq 0_X \} = 0$$

dır. Böylece $\iota_\psi 0_X = 0_X$ dır.

(b) $(\iota_\psi A)(z) = \sup\{ x_\lambda(z): \exists V \in \psi(x_\lambda) \ni V \leq A \} = t \neq 0$ olsun. Bu durumda bir $\{t_j\}$ indis dizisi için $t_j \leq V_j(z) \leq A(z)$

olacak şekilde bir $V_j \in \psi(z_{tj})$ vardır. Böylece

$$\sup_{j \in J} t_j = t \leq A(z)$$

dır. $t = 0$ ise açık olarak $0 \leq A(z)$ dır. O halde $\iota_\psi A \leq A$ elde edilir.

Şimdi $A \leq \gamma_\psi A$ olduğunu gösterelim. $A(z) = t$ olsun.

$$\gamma_\psi A(z) = \inf\{(\max(A(z),V(z)) : V \in \psi(z_\lambda)\}$$

$$= \inf\{(\max(t,V(z)) : V \in \psi(z_\lambda)\}$$

$$\geq \inf t = t = A(z).$$

(c) $A \leq B$ olsun. $(\iota_\psi A)(z) = \sup\{ x_\lambda(z): \exists V \in \psi(x_\lambda) \ni V \leq A \} = t$ olsun. $V \leq A$ olacak şekildeki her $V \in \psi(x_\lambda)$ için $V \leq A \leq B$ olacağından

$$t \leq (\iota_\psi B)(z)$$

dir. Böylece $\iota_\psi A \leq \iota_\psi B$ elde edilir. Ayrıca,

$$\gamma_\psi A(z) = \inf\{(\max(A(z),V(z)) : V \in \psi(z_\lambda)\}$$

$$\leq \inf\{(\max(B(z),V(z)) : V\in\psi(z_\lambda)\} = \gamma_\psi B(z)$$

olduğundan $\gamma_\psi A \leq \gamma_\psi B$ bulunur.

**Örnek 4.1.1:** X={a, b, c} kümesi için A ,B ve C fuzzy kümeleri

A={(a, 0.2), (b, 0.3), (c, 0.5)} , B={(a, 0.1), (b, 0.2), (c, 0)} , C={(a, 0.6), (b, 0.7),(c, 0)}

şeklinde tanımlansın. Şimdi ψ operatörü

$$\psi(a_\lambda) = \begin{cases} \{B, C, 1_x\} & 0 \leq \lambda \leq 0.1 \\ \{A, C\} & 0.1 < \lambda \leq 0.2 \\ \{C\} & 0.2 < \lambda \leq 0.6 \\ \{1_x\} & 0.6 < \lambda \leq 1 \end{cases}, \quad \psi(b_\lambda) = \begin{cases} \{A, B, C\} & 0 \leq \lambda \leq 0.2 \\ \{A, C, 1_x\} & 0.2 < \lambda \leq 0.3 \\ \{C\} & 0.3 < \lambda \leq 0.7 \\ \{1_x\} & 0.7 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi(c_\lambda) = \{1_x\} ,\forall\lambda\in I$$

olarak tanımlanırsa $\iota_\psi A$ ve $\gamma_\psi A$ fuzzy kümelerini

$\iota_\psi A(a) = \sup\{x_\lambda(a): \exists V\in\psi(x_\lambda) \ni V\leq A\} = \sup\{x_\lambda(a): B\in\psi(a_{0.1}), A\in\psi(a_{0.2})\}$

$= \sup(a_{0.1}(a) , a_{0.2}(a)) = 0.2$

$\iota_\psi A(b) = \sup\{x_\lambda(b):\exists V\in\psi(x_\lambda) \ni V\leq A\} = \sup\{x_\lambda(b): B\in\psi(b_{0.2}), A\in\psi(b_{0.2}), A\in\psi(b_{0.3})\}$

$= \sup(b_{0.2}(b) , b_{0.3}(b)) = 0.3$

$\iota_\psi A(c) = \sup\{x_\lambda(c): \exists V\in\psi(x_\lambda) \ni V\leq A\} = \sup_\emptyset x_\lambda(c) = 0$

olduğundan $\iota_\psi A$={(a, 0.2), (b, 0.3), (c, 0)} olarak bulunur. Ayrıca,

$\gamma_\psi A(a) = \inf\{(\max(A(a),V(a)) : V\in\psi(a_\lambda)\}$

$= \inf(\max(A(a),A(a)), \max(A(a),B(a)),\max(A(a), C(a)), \max(A(a), 1_x(a))$

$= \inf(0.2, 0.2, 0.6, 1) = 0.2$

$\gamma_\psi A(b) = \inf\{(\max(A(b),V(b)) : V\in\psi(b_\lambda)\}$

$= \inf(\max(A(b),A(b)), \max(A(b),B(b)),\max(A(b), C(b)), \max(A(b), 1_x(b))$

$= \inf(0.3, 0.3, 0.7, 1) = 0.3$

$\gamma_\psi A(c) = \inf\{(\max(A(c),V(c)) : V \in \psi(c_\lambda)\} = \inf(\max(A(c), 1_x(c)) = \inf(\max(0.5, 1)) = 1$

olacağından $\gamma_\psi A = \{(a, 0.2), (b, 0.3), (c, 1)\}$ bulunur.

**Teorem 4.1.1:** Herhangi bir $(A_j)_{j\in J} \subset I^X$ alt ailesi için $\vee_{j\in J}\, \iota_\psi A_j \leq \iota_\psi \vee_{j\in J} A_j$ dır.

**İspat:** Her $j \in J$ için $A_j \leq \vee_{j\in J} A_j$ dır. Buradan Lemma 4.1.1 (c) den dolayı $\forall j \in J$ için

$\iota_\psi A_j \leq \iota_\psi \vee_{j\in J} A_j$ dır. Böylece $\vee_{j\in J}\, \iota_\psi A_j \leq \iota_\psi \vee_{j\in J} A_j$ bulunur.

**Teorem 4.1.2:** $\psi \in \Psi(P)$ olmak üzere

$$g = \{G \in I^X : G = \iota_\psi G\}$$

şeklinde tanımlanan g, X de bir GFT dir.

**İspat:** Lemma 4.1.1 (a) dan $0_x \in g$ dir. $G_j \in g$, $j \in J \neq \emptyset$ için $G = \vee_{j\in J} G_j$ olsun. Lemma 4.1.1 (b) den $\iota_\psi G \leq G$ dir. Her $j \in J$ için $G_j \in g$ yani $G_j = \iota_\psi G_j$ olduğundan

$$G = \vee_{j\in J} G_j = \vee_{j\in J}\, \iota_\psi G_j$$

dir. Ayrıca Teorem 4.1.1 den

$$G = \vee_{j\in J}\, \iota_\psi G_j \leq \iota_\psi(\vee_{j\in J}\, G_j) = \iota_\psi G$$

dır. Böylece $G \leq \iota_\psi G$ ve $\vee_{j\in J} G_j \in g$ elde edilir.

Teorem 4.1.2 den dolayı her GFKS bir GFT üretir. Bu GFT yi $g_\psi$ ile göstereceğiz. Burada $g_\psi$ nin elemanlarına $g_\psi$-açık, tümleyenlerine ise $g_\psi$- kapalı denir.

**Sonuç 4.1.1:** Her $x_\lambda \in A$ için $A \in \psi(x_\lambda)$ ise A, $g_\psi$-açıktır.

**İspat:** $\forall\ x_\lambda \in A$ için $A \in \psi(x_\lambda)$ olsun. $\iota_\psi A = A$ olduğunu gösterelim. $\iota_\psi A \leq A$ olduğu Lemma 4.1.1 (b) den sağlanır. $A(x) = t$ olsun. O halde $x_t \in A$ ve $A \in \psi(x_t)$ dır. Buradan $t \leq \iota_\psi A(x)$ elde edilir. Böylece $A(x) \leq \iota_\psi A(x)$ yani $A \leq \iota_\psi A$ dır. Dolayısıyla A, $g_\psi$-açıktır.

**Teorem 4.1.3:** g, X de bir GFT olsun. Bu durumda $g = g_\psi$ olacak şekilde bir $\psi \in \Psi(P)$ vardır. Bu $\psi$

$$V \in \psi(x_\lambda) \Leftrightarrow x_\lambda \in V \in g \qquad (*)$$

şeklinde elde edilebilir.

**İspat:** $\psi(x_\lambda) = \{ V \in I^X : x_\lambda \in V \in g \}$ olsun. Bu durumda açıkça $\psi \in \Psi(P)$ dır. Şimdi $g = g_\psi$ olduğunu gösterelim. $G \in g$ ve keyfi bir $x \in X$ için $G(x) = t > 0$ olsun. Buradan $x_t \in G \in g$ ve $G \in \psi(x_t)$dir. Böylece

$$G(x) = t \leq \iota_\psi G(x)$$

dir. $\iota_\psi G \leq G$ her zaman sağlandığından $G \in g_\psi$ dır.

Diğer taraftan $G \in g_\psi$ olsun**.** $G = 0x$ ise $G \in g$ dir. $G \neq 0x$ olsun. G yi, g-açık kümelerin birleşimi şeklinde göstereceğiz. $G \neq 0x$ olduğundan $G(x) = t > 0$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. dolayısıyla

$$G(x) = (\iota_\psi G)(x) = \sup\{z_\lambda(x) : \exists V \in \psi(z_\lambda) \ni V \leq G\} = t$$

dir. Bu durumda $\sup t_j = t$ olmak üzere her $x_{tj} \in P$, $j \in J \neq \emptyset$ için $V_j \leq G$ olacak şekilde bir $V_j \in \psi(x_{tj})$ vardır. Böylece

$$V_x = \vee_{j \in J} V_j \leq G\ ,\ (V_j)_{j \in J} \subseteq g$$

alınırsa

$$t_j \leq V_j(x) < \vee_{j \in J} V_j(x) = V_x(x) \leq G(x) = t \Rightarrow \sup t_j < V_x(x) \leq t$$

$$\Rightarrow V_x(x) = t = G(x)$$

dir. Şimdi $V= \vee_{G(x)>0} V_x$ diyelim. Açık olarak $V \in g$ ve $V=G$ dır. Eğer aynı x için $G(x) = t = 0$ olsaydı benzer şekilde

$$G(x) = (\iota_\psi G)(x) = \sup\{z_\lambda(x): \exists V \in \psi(z_\lambda) \ni V \leq G\} = 0$$

$$\Rightarrow V_x(x) = 0$$

bulunurdu. Bu durumda yine $V=G$ dir. Sonuç olarak $G \in g$ dir.

Bu şekilde elde edilen $\psi$ yi, $\psi_g$ ile göstereceğiz ve bir $\psi$, $(*)$ özelliğini sağlıyorsa $\psi \in \Psi_g(X)$ şeklinde ifade edeceğiz.

**Örnek 4.1.2:** Örnek 4.1.1 deki kümeyi ve $\psi$ yi göz önüne alalım. Buna göre $g_\psi = \{0_x, B, C, 1_x\}$ bulunur. Bu g için yukarıdaki teoremi uygularsak $g = g_{\psi^*}$ olacak şekilde bir $\psi^* \in \Psi(P)$ vardır. Bu $\psi^*(x_\lambda) = \{ V \in I^X : x_\lambda \in V \in g \}$ şeklinde ise

$$\psi^*(a_\lambda) = \begin{cases} \{B, C, 1_x\} & 0 \leq \lambda \leq 0.1 \\ \{C, 1_x\} & 0.1 < \lambda \leq 0.6 \\ \{1_x\} & 0.6 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi^*(b_\lambda) = \begin{cases} \{B, C, 1_x\} & 0 \leq \lambda \leq 0.2 \\ \{C, 1_x\} & 0.2 < \lambda \leq 0.7 \\ \{1_x\} & 0.7 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi^*(c_\lambda) = \{1_x\}, \forall \lambda \in I$$

elde edilir. Dolayısıyla $\psi^* \neq \psi$ dır. Yani teoremi sağlayan tek GFKS, $(*)$ özelliğini sağlamak zorunda değildir.

Eğer g bir $\psi \in \Psi(P)$ komşuluğundan üretilmişse iç operatörünü $i_\psi = i_{g_\psi}$ şeklinde gösterelim.

**Teorem 4.1.4:** $\psi \in \Psi(P)$ ve $A \in I^X$ olsun. Bu durumda $i_\psi A \leq \iota_\psi A$ dır.

**İspat :** $J \neq \emptyset$ ve $(G_j)_{j\in J} \subset I^X$ ailesi, $G_j \leq A$ şartını sağlayan $g_\psi$ nin elemanların ailesi olsun. Tanım 3.3.2 den

$$i_\psi A = \vee_{j\in J} G_j$$

dir. Bu durumda Teorem 4.1.1 ve Lemma 4.1.1 (c) den

$$i_\psi A = \vee_{j\in J} G_j = \vee_{j\in J} \iota_\psi G_j \leq \iota_\psi(\vee_{j\in J} G_j) = \iota_\psi (i_\psi A) \leq \iota_\psi A$$

dır. Dolayısıyla istenen elde edilir.

**Uyarı 4.1.1:** Genel olarak $i_\psi A \neq \iota_\psi A$ dir. Örneğin X={a, b} kümesi için A ve B fuzzy kümeleri

$$A=\{(a, 0.1), (b, 0.5)\} \text{ ve } B=\{(a, 0.3), (b, 0.3)\}$$

olarak göz önüne alınsın. Eğer $\psi$,

$$\psi(a_\lambda) = \begin{cases} \{A\} & 0 \leq \lambda \leq 0.1 \\ \{1_x\} & 0.1 \leq \lambda \leq 1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \psi(b_\lambda) = \begin{cases} \{B\} & 0 \leq \lambda \leq 0.3 \\ \{1_x\} & 0.3 \leq \lambda \leq 1 \end{cases}$$

ise $g_\psi = \{0_x, 1_x\}$ dir. Bu durumda $i_\psi A = 0x$ ve $\iota_\psi A=\{(a, 0.1), (b, 0)\}$ bulunur.

Bu iki iç operatörünün eşitliği, genelleştirilmiş fuzzy komşuluklar aynı zamanda birer genelleştirilmiş fuzzy açık küme ise sağlanır. Bu amaçla bir $x_\lambda \in P$ fuzzy noktası için

$$\psi \in \Psi_g(P) \Leftrightarrow V \in \psi(x_\lambda) \text{ için } V \in g$$

tanımını yapalım.

**Teorem 4.1.5:** Bir $g = g_\psi$ için $\psi \in \Psi_g(P)$ ise $i_\psi = \iota_\psi$ dir.

**İspat:** $x \in X$ ve $A \in I^X$ için

$$\imath_{\psi}A(x) = \sup\{y_{\lambda}(x): \exists V \in \psi(y_{\lambda}) \ni V \leq A \} = t > 0$$

olsun. Buradan her $j \in J \neq \emptyset$, $x_{t_j}$ için $V_j \leq A$ ve $\sup t_j = t$ olacak şekilde bir $V_j \in \psi(x_{t_j})$ vardır. Yani,

$$\imath_{\psi}A(x) = \sup\{x_{t_j}(x): \exists V_j \in \psi(x_{t_j}) \ni V_j \leq A \} = t$$

dır. Ayrıca komşuluk şartından dolayı

$$x_{t_j} \leq V_j \text{ ve } t = \sup x_{t_j}(x) \leq \sup_{j \in J} V_j(x) = \vee_{j \in J} V_j(x)$$

elde edilir. Buradan,

$$\vee_{j \in J} V_j \leq A \text{ , } (V_j)_{j \in J} \subset g_{\psi} \text{ ve } \imath_{\psi}(\vee_{j \in J} V_j) \leq \imath_{\psi}A$$

ve dolayısıyla

$$(\vee_{j \in J} V_j)(x) = (\vee_{j \in J} \imath_{\psi} V_j)(x) \leq \imath_{\psi}(\vee_{j \in J} V_j)(x) \leq \imath_{\psi}A(x) = t$$

bulunur. Böylece $\vee_{j \in J} V_j(x) = t$ dir. $i_{\psi}A$, A nın kapsadığı tüm $g_{\psi}$-açıkların birleşimi olduğundan $\imath_{\psi}A \leq i_{\psi}A$ elde edilir.

### 4.2 Genelleştirilmiş Fuzzy Süreklilik

Bu kısımda şimdiye kadar verdiğimiz kavramlar yardımıyla genelleştirilmiş fuzzy süreklilik kavramı biri diğerinden daha genel olan iki şekilde tanımlanacaktır. Bu tanımlar genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemleri ve genelleştirilmiş fuzzy topoloji kavramları kullanılarak verilecektir.

**Tanım 4.2.1:** X ve X′ iki küme, $\psi \in \Psi(P)$ , $\psi' \in \Psi(P')$ ve f: X $\rightarrow$ X′ olsun. Her $x_{\lambda} \in P$ ve her $V \in \psi'(f(x_{\lambda}))$ için $f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in \psi(x_{\lambda})$ varsa f fonksiyonuna fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli denir.

Bu tanımı kullanarak literatürdeki bir çok fuzzy süreklilik çeşidini tek bir tanımın özel halleriolarak ifade etmek için yeni bir operatör yardımıyla bir genelleştirilmiş komşuluk sistemi tanımlanacaktır. Bu operatör monoton olmalıdır.

X bir küme; g, X de bir GFT ve $\kappa: I^X \to I^X$ olmak üzere

$$A \leq B \leq X \qquad \text{ise} \qquad \kappa A \leq \kappa B \quad \text{ve} \quad A \leq \kappa A$$

sağlansın. $\kappa$ operatörü, örneğin fuzzy zayıf süreklilik için fuzzy kapanış operatörü, fuzzy zayıf yarı süreklilik için fuzzy yarı kapanış operatörü görevi görecek. Her $x_\lambda \in P$ için

$$\psi(\kappa, g)(x_\lambda) = \{ V: \exists G \in g \ni x_\lambda \in G \text{ ve } \kappa G = V \} \qquad (*)$$

şeklinde tanımlanan $\psi$ açık olarak bir GFKS dir. Bu durumda birçok fuzzy ($\psi$ , $\psi'$)-süreklilik çeşidi $\psi(\kappa, g)$ GFKS kullanılarak elde edebilir.

X ve X′ kümeleri üzerinde $\tau$ ve $\tau'$ fuzzy topolojileri verilsin. Ayrıca $\psi$ ve $\psi'$ ile sırasıyla X ve X′ üzerinde tanımlı GFKS leri gösterilsin. (∗) ile verilen sistem ele alındığında, özel olarak:

$\psi = \psi_\tau$ ve $\psi' = \psi(cl_{\tau'}, \tau')$ durumunda fuzzy zayıf süreklilik,

$\psi = \psi_\tau$ ve $\psi' = \psi(cl_{FS\tau'}, \tau')$ durumunda fuzzy zayıf yarı-süreklilik,

$\psi = \psi(cl_{FS\tau}, FS\tau)$ ve $\psi' = \psi_{FS\tau'}$ durumunda fuzzy kuvvetli irresolute dönüşümleri,

$\psi = \psi_\tau$ ve $\psi' = \psi(cl_{FS\tau'}, FS\tau')$ durumunda fuzzy yarı- irresolute dönüşümleri,

$\psi = \psi_\tau$ ve $\psi' = \psi(int_{\tau'}cl_{\tau'}, \tau')$ durumunda fuzzy hemen hemen süreklilik,

$\psi = \psi_{F\beta\tau}$ ve $\psi' = \psi(int_{\tau'}cl_{\tau'}, \tau')$ durumunda fuzzy hemen hemen β-süreklilik,

$\psi = \psi_{FS\tau}$ ve $\psi' = \psi_{FR\tau'}$ durumunda fuzzy hemen hemen yarı-süreklilik,

$\psi = \psi(\text{int}_\tau\text{cl}_\tau, \tau)$ ve $\psi' = \psi(\text{int}_{\tau'}\text{cl}_{\tau'}, \tau')$ durumunda fuzzy $\delta$-süreklilik

elde edilir.

Özel durumda elde edilen bu denkliklerden bir kısmını açıkça ispatlayalım. Diğerleri de benzer şekilde elde edilecektir.

**Teorem 4.2.1:** $(X, \tau)$ ve $(X', \tau')$ fuzzy topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \to (X', \tau')$ fonksiyonu verilsin. $\psi = \psi(\text{int}_\tau\text{cl}_\tau, \tau)$ ve $\psi' = \psi(\text{int}_{\tau'}\text{cl}_{\tau'}, \tau')$ olmak üzere

$$f, \text{ fuzzy } \delta\text{- sürekli} \Leftrightarrow f \text{ fuzzy } (\psi, \psi')\text{-sürekli}$$

dir.

**İspat:** ($\Rightarrow$): İspat için Tanım 3.3.4(f) yi kullanacağız. f, fuzzy $\delta$- sürekli, $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \psi'(f(x)_\lambda)$ olsun. $\exists U \in \psi(x_\lambda)$ ə $f(U) \leq V$ olduğunu gösterelim.

$$V \in \psi'(f(x)_\lambda) = \psi(\text{int}_{\tau'}\text{cl}_{\tau'}, \tau')(f(x)_\lambda)$$

ise $\exists G \in \tau'$ ə $f(x)_\lambda \in G$ ve $\text{int}_{\tau'}\text{cl}_{\tau'}G = V$ dir. $G \in \tau'$ ve $f(x)_\lambda \in G$ ise $G \in \mathcal{U}'(f(x)_\lambda)$ dır. Burada $\mathcal{U}'(f(x)_\lambda)$, $f(x)_\lambda$ nın $\tau'$ ye göre komşuluk ailesidir. f fuzzy $\delta$- sürekli olduğundan $\exists W \in \tau$ ə $x_\lambda \in W$ ve

$$f(\text{int}_\tau\text{cl}_\tau W) \leq \text{int}_{\tau'}\text{cl}_{\tau'}G = V$$

dir. $U = \text{int}_\tau\text{cl}_\tau W$ seçilirse $U \in \psi(x_\lambda) = \psi(\text{int}_\tau\text{cl}_\tau, \tau)(x_\lambda)$ ve

$$f(U) \leq f(\text{int}_\tau\text{cl}_\tau W) \leq \text{int}_{\tau'}\text{cl}_{\tau'}G = V$$

elde edilir.

(⇐): Şimdi f, fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olsun. $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \mathcal{U}'(f(x)_\lambda)$, $V \in \tau'$ olsun. $\exists U \in \mathcal{U}(x_\lambda)$ , $U \in \tau$ ə $f(int_\tau cl_\tau U) \leq int_{\tau'} cl_{\tau'} V$ olduğunu gösterelim. $V \leq cl_{\tau'} V$ olduğundan

$$V = int_{\tau'} V \leq int_{\tau'} cl_{\tau'} V$$

dır ve $int_{\tau'} cl_{\tau'} V = W$ seçilirse $W \in \psi'(f(x)_\lambda)$ dir. f fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olduğundan $\exists G \in \psi(x_\lambda)$ ə $f(G) \leq W$ dir. $G \in \psi(x_\lambda)$ ise $\exists U \in \tau$ ə $x_\lambda \in U$ ve

$$int_\tau cl_\tau U = G$$

dir. $x_\lambda \in U \in \tau$ olduğundan $U \in \mathcal{U}(x_\lambda)$ ve $f(int_\tau cl_\tau U) = f(G) \leq W \leq int_{\tau'} cl_{\tau'} V$ elde edilir.

**Teorem 4.2.2:** (X, τ) ve (X′, τ′) fuzzy topolojik uzaylar ve f: (X, τ) → (X′, τ′) fonksiyonu verilsin. $\psi = \psi_\tau$ ve $\psi' = \psi( int_{\tau'} cl_{\tau'}, \tau')$ olmak üzere

f , fuzzy hemen hemen sürekli ⇔ f, fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli.

**İspat:** (⇒): İspat için Tanım 3.3.4(e) yi kullanacağız. f, fuzzy hemen hemen sürekli , $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \psi'(f(x)_\lambda)$ olsun. $\exists U \in \psi(x_\lambda)$ ə $f(U) \leq V$ olduğunu gösterelim

$$V \in \psi'(f(x)_\lambda) \Rightarrow \exists G \in \tau' \text{ ə } f(x)_\lambda \in G \text{ ve } int_{\tau'} cl_{\tau'} G = V$$

dir. $G \in \tau'$ ve $f(x)_\lambda \in G$ ise $G \in \mathcal{U}'(f(x)_\lambda)$ ve f hemen hemen sürekli olduğundan

$$\exists W \in \mathcal{U}(x_\lambda) \text{ ə } f(W) \leq int_{\tau'} cl_{\tau'} G$$

dir. $W \in \mathcal{U}(x_\lambda)$ ise

$$\exists U \in \tau \text{ ə } x_\lambda \in U \leq W$$

dır. Böylece $U \in \psi(x_\lambda)$ ve $f(U) \leq f(W) \leq int_{\tau'} cl_{\tau'} G = V$ elde edilir.

(⇐): f, fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olsun. $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \mathcal{U}'(f(x)_\lambda)$ olmak üzere $\exists U \in \mathcal{U}(x_\lambda)$ ə $f(U) \leq int_{\tau'} cl_{\tau'} V$ olduğunu gösterelim. $V \in \mathcal{U}'(f(x)_\lambda)$ ise $\exists G \in \tau'$ ə $f(x)_\lambda \in G \leq V$ dir. $G \leq cl_{\tau'} G$ olduğundan

$$G \leq int_{\tau'} cl_{\tau'} G =: W$$

dır. $int_{\tau'} cl_{\tau'} G = W$ seçilirse $W \in \psi'(f(x)_\lambda)$ dir. f fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olduğundan $\exists U \in \psi(x_\lambda)$ ə $f(U) \leq W$ dir. $U \in \psi(x_\lambda)$ ise $x_\lambda \in U \in \tau$ olduğuna göre $U \in \mathcal{U}(x_\lambda)$ ve $f(U) \leq W$ dir. $G \leq V$ ise

$$int_{\tau'} cl_{\tau'} G \leq int_{\tau'} cl_{\tau'} V \text{ ve } int_{\tau'} cl_{\tau'} G = W$$

olduğundan $f(U) \leq int_{\tau'} cl_{\tau'} V$ elde edilir.

**Teorem 4.2.3:** X ve X′ iki küme, $\psi \in \Psi(P)$ , $\psi' \in \Psi(P')$ ve f: $X \to X'$ olsun. Her $V \in \psi'(f(x_\lambda))$ için $f^{-1}(V) \in \psi(x_\lambda)$ ise f fuzzy $(\psi , \psi')$-süreklidir.

**İspat:** Her $V \in \psi'( f(x_\lambda) )$ için $f^{-1}(V) \in \psi(x_\lambda)$ olsun. $U = f^{-1}(V)$ alınırsa $f(U) = f(f^{-1}(V)) \leq V$ dir. Dolayısıyla f, fuzzy $(\psi , \psi')$-süreklidir.

**Teorem 4.2.4:** Fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli her fonksiyon fuzzy $(g_\psi , g_{\psi'})$-süreklidir.

**İspat:** f fonksiyonu fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli, $G' \in g_{\psi'}$ ve bir $z \in X$ için $f^{-1}(G')(z) = t > 0$ olsun.

$$f^{-1}(G')(z) = G'(f(z)) = \iota_{\psi'} G'(f(z))$$

$$= \sup\{y_\lambda(f(z)): \exists V \in \psi'(y_\lambda) \ni V \leq G' \} = t$$

olduğundan $\exists \beta \in I$ ve $\exists V \in \psi'(f(z)_\beta)$ ə $V \leq G'$ dir. O halde bu şartı sağlayan $\beta$ değerleri için $\sup\beta = t$ dir. f, fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olduğuna göre $f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in \psi(z_\beta)$ vardır. Buradan $z_\beta \in U \leq f^{-1}(G')$ ve

$$\iota_\psi f^{-1}(G')(z) = \sup\{x_\lambda(z): \exists U \in \psi(x_\lambda) \ni U \leq f^{-1}(G') \}$$

$$\geq \sup\beta = t = f^{-1}(G')(z)$$

dir. Buradan $f^{-1}(G') = \iota_\psi f^{-1}(G')$ olduğundan $f^{-1}(G') \in g_\psi$ elde edilir.

**Örnek 4.2.1:** X={a, b} kümesi için A ve B fuzzy kümeleri

$$A=\{(a, 0.1), (b, 0.5)\} \text{ ve } B=\{(a, 0.3), (b, 0.3)\}$$

şeklinde verilsin.

$$\psi(a_\lambda) = \begin{cases} \{A\} & 0 \leq \lambda \leq 0.1 \\ \{1_x\} & 0.1 < \lambda \leq 1 \end{cases}, \quad \psi'(a_\lambda) = \begin{cases} \{B\} & 0 \leq \lambda \leq 0.3 \\ \{1_x\} & 0.3 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi(b_\lambda) = \begin{cases} \{B\} & 0 \leq \lambda \leq 0.3 \\ \{1_x\} & 0.3 < \lambda \leq 1 \end{cases}, \quad \psi'(b_\lambda) = \begin{cases} \{A\} & 0 \leq \lambda \leq 0.1 \\ \{1_x\} & 0.1 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere $g_\psi = \{0_x, 1_x\}$ ve $g_{\psi'} = \{0_x, 1_x\}$ dir. Bu durumda f, özdeşlik fonksiyonu olmak üzere f, fuzzy $(g_\psi, g_{\psi'})$–süreklidir. Ancak $a_{0.2}$ fuzzy noktası için $B \in \psi'(f(a_{0.2}))$ olmasına rağmen $f(U) \leq B$ olacak şekilde bir $U \in \psi(a_{0.2})$ yoktur. Böylece f fuzzy $(\psi, \psi')$-sürekli değildir.

**Teorem 4.2.5:** f, fonksiyonu fuzzy $(g_\psi, g_{\psi'})$-sürekli , $\psi = \psi_g$ ve $\psi' = \psi_{g'}$ ise f, fonksiyonu fuzzy $(\psi, \psi')$-süreklidir.

**İspat:** $x_\lambda \in P$ ve $V \in \psi'(f(x)_\lambda)$ olsun. Buradan $\lambda \leq V(f(x))$ ,$V \in g' = g_{\psi'}$ ve f, fuzzy $(g_\psi, g_{\psi'})$ sürekli olduğundan $\lambda \leq f^{-1}(V)(x)$ ve $f^{-1}(V) \in g_\psi$ dir. Buradan

$$0 < \lambda \leq \iota_\psi f^{-1}(V)(x) = \sup\{z_r(x): \exists U \in \psi(z_r) \ni U \leq f^{-1}(V)\}$$

dir. O halde $U_j \leq f^{-1}(V)$ olacak şekilde bir $U_j \in \psi(x_{tj})$ , $\lambda \leq \sup_j t_j \in J$ dizisi vardır. Bu durumda $\psi = \psi_g$ olduğundan $U_j \in g$ ve $\vee_{j\in J} U_j \in g$. Ayrıca

$$\lambda \leq \sup t_j \leq \sup U_j(x) = (\vee_{j\in J} U_j)(x)$$

ise $x_\lambda \in \vee_{j\in J} U_j$ dır. Dolayısıyla $\vee_{j\in J} U_j \in \psi(x_\lambda)$ dır. Böylece $U = \vee_{j\in J} U_j$ denilirse $V \in \psi'(f(x)_\lambda)$ için $f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in \psi(x_\lambda)$ vardır.

Bu teoremin önemli bir sonucu olarak aşağıdaki denklikler elde edilir. Gerçekten $\tau$ ve $\tau'$ sırasıyla X ve X′ de fuzzy topoloji, $\psi$ ve $\psi'$ ile de sırasıyla X ve X′ üzerinde tanımlı GFKS leri gösterilsin. Bu durumda,

$\psi = \psi_{\tau}$ ve $\psi' = \psi_{\tau'}$ durumunda fuzzy süreklilik

$\psi = \psi_{F\alpha\tau}$ ve $\psi' = \psi_{\tau'}$ durumunda fuzzy $\alpha$-süreklilik

$\psi = \psi_{FS\tau}$ ve $\psi' = \psi_{\tau'}$ durumunda fuzzy yarı- süreklilik

$\psi = \psi_{FP\tau}$ ve $\psi' = \psi_{\tau'}$ durumunda fuzzy ön- süreklilik

$\psi = \psi_{F\beta\tau}$ ve $\psi' = \psi_{\tau'}$ durumunda fuzzy $\beta$- süreklilik

$\psi = \psi_{F\alpha\tau}$ ve $\psi' = \psi_{FS\tau'}$ durumunda fuzzy kuvvetli $\alpha$-süreklilik

$\psi = \psi_{FSP\tau}$ ve $\psi' = \psi_{\tau'}$ durumunda fuzzy yarı- ön süreklilik

$\psi = \psi_{F\beta\tau}$ ve $\psi' = \psi_{F\beta\tau'}$ durumunda M-$\beta$- fuzzy süreklilik

$\psi = \psi_{FP\tau}$ ve $\psi' = \psi_{FP\,\tau'}$ durumunda M- fuzzy ön süreklilik

$\psi = \psi_{FS\tau}$ ve $\psi' = \psi_{FS\tau'}$ durumunda fuzzy irresolute dönüşümler

$\psi = \psi_{F\alpha\tau}$ ve $\psi' = \psi_{F\alpha\tau'}$ durumunda fuzzy $\alpha$- irresolute dönüşümler

$\psi = \psi_{FP\tau}$ ve $\psi' = \psi_{FP\tau'}$ durumunda fuzzy ön- irresolute dönüşümler

$\psi = \psi_{FS\tau}$ ve $\psi' = \psi_{F\alpha\tau'}$ durumunda fuzzy yarı- $\alpha$- irresolute dönüşümler

$\psi = \psi_{F\beta\tau}$ ve $\psi' = \psi_{FP\tau'}$ durumunda fuzzy $\beta$- ön- irresolute dönüşümler

elde edilir.

**Teorem 4.2.6:** (X, $\tau$) ve (X′, $\tau'$) fuzzy topolojik uzaylar ve f: (X, $\tau$) $\rightarrow$ (X′, $\tau'$) fonksiyonu verilsin. U′, $\tau'$ ye göre X′ üzerinde fuzzy komşuluk sistemi olsun. Bu durumda $\psi = \psi_{FP\tau}$ ve $\psi' = \psi_{\tau'}$ olmak üzere

f, fuzzy ön- süreklidir $\Leftrightarrow$ f, fuzzy $(\psi , \psi')$-süreklidir.

**İspat:** $(\Rightarrow)$: İspat için Tanım 3.3.4 (a) yı kullanacağız. f, fuzzy ön-sürekli, $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \psi'(f(x)_\lambda) = \psi_{\tau'}(f(x)_\lambda) = \{V: f(x)_\lambda \in V \in \tau'\}$ olsun. Bu durumda $\exists U \in \psi(x_\lambda)$ ə $f(U) \leq V$ olduğunu gösterelim. $V \in \psi'(f(x)_\lambda)$ ise $f(x)_\lambda \in V$ ve $V \in \tau'$ dür. Buradan $V \in U'(f(x)_\lambda)$ ve f fuzzy ön- sürekli olduğundan $\exists U \in FP\tau(X)$ ə $x_\lambda \in U$ ve $f(U) \leq V$ dir. O halde

$$\exists U \in \psi(x_\lambda) = \psi_{FP\tau}(x_\lambda) = \{U: x_\lambda \in U \in FP\tau(X)\} \text{ ə } f(U) \leq V$$

dir. Böylece f fuzzy $(\psi , \psi')$-süreklidir.

$(\Leftarrow)$: Şimdi f, fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olsun. $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in U'(f(x)_\lambda)$ alalım. Bu durumda $\exists H \in \tau'$ ə $f(x)_\lambda \in H \leq V$ dir. O halde $H \in \psi'(f(x)_\lambda)$ ve f fonksiyonu fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olduğundan $\exists U \in \psi(x_\lambda)$ ə $f(U) \leq V$ dir. Burada $U \in \psi(x_\lambda) = \psi_{FP\tau}(x_\lambda)$ olduğuna göre $x_\lambda \in U \in FP\tau(X)$ sağlanır. Böylece f fonksiyonu fuzzy ön- süreklidir.

**Teorem 4.2.7:** (X, $\tau$) ve (X′, $\tau'$) fuzzy topolojik uzaylar ve f: (X, $\tau$) $\rightarrow$ (X′, $\tau'$) fonksiyonu verilsin. Bu durumda $\psi = \psi_{FS\tau}$ ve $\psi' = \psi_{F\alpha\tau'}$ olmak üzere

f, fuzzy yarı- $\alpha$- irresolute dönüşümdür $\Leftrightarrow$ f, fuzzy $(\psi , \psi')$-süreklidir.

**İspat:** $(\Rightarrow)$: İspat için Tanım 3.3.4(h) yi kullanacağız. f, fuzzy yarı- $\alpha$- irresolute dönüşüm, $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \psi'(f(x)_\lambda) = \psi_{F\alpha\tau'}(f(x)_\lambda) = \{V: f(x)_\lambda \in V \in F\alpha\tau'\}$ olsun. Bu durumda $\exists U \in \psi(x_\lambda)$ ə $f(U) \leq V$ olduğunu gösterelim. $V \in \psi'(f(x)_\lambda)$ ise

$$f(x)_\lambda \in V \text{ ve } V \in F\alpha\tau'$$

dür. f fuzzy yarı- $\alpha$- irresolute dönüşüm olduğundan

$$\exists U \in FS\tau(X) \text{ ə } x_\lambda \in U \text{ ve } f(U) \leq V$$

dir. O halde $\exists U \in \psi(x_\lambda) = \psi_{FS\tau}(x_\lambda) = \{U: x_\lambda \in U \in FS\tau(X)\} \ni f(U) \leq V$ dir. Böylece f fuzzy $(\psi , \psi')$-süreklidir.

$(\Leftarrow)$: f, fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olsun. $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta, $V \in F\alpha\tau'$ ve $f(x)_\lambda \in V$ alalım. Bu durumda $V \in \psi'(f(x)_\lambda)$ dir. f fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olduğundan

$$\exists U \in \psi(x_\lambda) \ni f(U) \leq V$$

dir. Burada $U \in \psi(x_\lambda)$ olduğuna göre $x_\lambda \in U \in FS\tau(X)$ sağlanır. Böylece f, fuzzy yarı- $\alpha$-irresolute dönüşümdür.

**Teorem 4.2.8:** X ve X′ iki küme, $\psi \in \Psi(P)$ , $\psi' \in \Psi(P')$ ve f: X $\rightarrow$ X′ olsun. Bu durumda $B \in I^{X'}$ için

$$\text{f, fuzzy } (\psi , \psi')\text{-sürekli} \Rightarrow f^{-1}(\iota_{\psi'}B) \leq \iota_\psi f^{-1}(B)$$

dır.

**İspat:** $f^{-1}(\iota_{\psi'}B)(z) = \iota_{\psi'}B(f(z)) = \sup\{y_\lambda(f(z)): \exists V \in \psi'(y_\lambda) \ni V \leq B\} = t$ olsun. t = 0 ise

$0 = f^{-1}(\iota_{\psi'}B)(z) \leq \iota_\psi f^{-1}(B)(z)$ sağlanır. $t \neq 0$ ise $\exists V_w \in \psi'(w_\lambda = f(z)_\lambda) \ni V_w \leq B$ dir. f, fuzzy $(\psi, \psi')$-sürekli olduğundan $V_w \in \psi'(w_\lambda)$ genelleştirilmiş fuzzy komşuluğuna karşılık

$$\exists U_z \in \psi(z_\lambda) \ni f(U_z) \leq V_w \leq B$$

dir. O halde bu şartını sağlayanlar dahil olmak üzere $U \leq f^{-1}(B)$ olacak şekildeki tüm $U \in \psi(z_\lambda)$ lar göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} 0 < t &= f^{-1}(\iota_{\psi'}B)(z) \\ &= \sup\{y_\lambda(f(z)): \exists V \in \psi'(y_\lambda) \ni V \leq B\} \\ &\leq \sup\{x_\lambda(z): \exists V \in \psi'(y_\lambda) \ \exists U \in \psi(x_\lambda) \ni f(U) \leq V \text{ ve } U \leq f^{-1}(B)\} \\ &= \sup\{x_\lambda(z): \exists U \in \psi(x_\lambda) \ni U \leq f^{-1}(B)\} \\ &= \iota_\psi f^{-1}(B)(z) \end{aligned}$$

elde edilir.

**Örnek 4.2.2:** X={a, b} kümesi için A ve B fuzzy kümeleri

$$A=\{(a, 0.1), (b, 0.2)\} \text{ ve } B=\{(a, 0.3), (b, 0.5)\}$$

şeklinde verilsin.

$$\psi(a_\lambda) = \begin{cases} \{A\} & 0 \leq \lambda \leq 0.1 \\ \{B\} & 0.1 < \lambda \leq 0.3 \\ \{1_x\} & 0.3 < \lambda \leq 1 \end{cases}, \quad \psi'(a_\lambda) = \begin{cases} \{B\} & 0 \leq \lambda \leq 0.3 \\ \{1_x\} & 0.3 < \lambda \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi(b_\lambda) = \begin{cases} \{A\} & 0 \leq \lambda \leq 0.2 \\ \{B\} & 0.2 < \lambda \leq 0.5 \\ \{1_x\} & 0.5 < \lambda \leq 1 \end{cases}, \quad \psi'(b_\lambda) = \{1_x\} \ ,\forall \lambda \in I$$

olmak üzere f = idx ise f, fuzzy ($\psi$, $\psi'$)-süreklidir. Ayrıca $\iota_{\psi'}B=\{(a, 0.3), (b, 0)\}=f^{-1}(\iota_{\psi'}B)$ ve $\iota_\psi f^{-1}(B)= B$ olacağından $f^{-1}(\iota_{\psi'}B) < \iota_\psi f^{-1}(B)$ dır.

**Tanım 4.2.2:** X ve X′ iki küme, $\psi \in \Psi(P)$ , $\psi' \in \Psi(P')$ ve f: X $\rightarrow$ X′ olsun.

(a) Her $x_\lambda \in P$ ve her $U \in \psi(x_\lambda)$ için $V \leq f(U)$ olacak şekilde bir $V \in \psi'(f(x_\lambda))$ varsa f ye fuzzy ($\psi$ , $\psi'$)-açık denir.

(b) Her $G \in g_\psi$ için $f(G) \in g_{\psi'}$ ise f ye fuzzy ($g_\psi$ , $g_{\psi'}$)-açık denir.

**Teorem 4.2.9:** f, fuzzy ($\psi$ , $\psi'$)-açık ise ($g_\psi$ , $g_{\psi'}$)-açıktır.

**İspat:** $G \in g_\psi$ olsun. $f(G)(w) = \sup_{z \in f^{-1}(w)} G(z)= t$ olsun. t = 0 ise $f(G)(w) \leq \iota_{\psi'} f(G)(w)$ sağlanır. $t \neq 0$ olsun. O halde bir $z \in f^{-1}(w)$ için $G(z) \neq 0$ ve $G \in g_\psi$ olduğundan $\iota_\psi G(z) \neq 0$ dır. Buradan

$$f(G)(w) = \sup_{z \in f^{-1}(w)} G(z)$$
$$= \sup_{z \in f^{-1}(w)} \iota_\psi G(z)$$

$$= \sup_{z\in f^{-1}(w)} [\sup\{x_\lambda(z): \exists U\in\psi(x_\lambda) \ni U\leq G\}]$$

$$\neq 0$$

dır. Dolayısıyla $\exists U_z\in\psi(z_\lambda) \ni U_z \leq G$ dir. f, fuzzy $(\psi , \psi')$-açık olduğundan bu $U_z$ ye karşılık

$$\exists V_w\in \psi'(w_\lambda=f(z_\lambda))\ni V_w \leq f(U_z)$$

dir. O halde bu şartı sağlayanlar dahil olmak üzere $V\leq f(G)$ olacak şekildeki tüm $V_w\in\psi'(w_\lambda)$ lar göz önüne alınırsa,

$$0 < f(G)(w) = \sup_{z\in f^{-1}(w)} [\sup\{x_\lambda(z): \exists U\in\psi(x_\lambda) \ni U\leq G\}]$$

$$\leq \sup\{y_\lambda(w): \exists U\in\psi(x_\lambda)\ \exists V\in\psi'(y_\lambda) \ni V\leq f(U) \text{ ve } V\leq f(G)\}$$

$$= \sup\{y_\lambda(w): \exists V\in\psi'(y_\lambda) \ni V\leq f(G)\}$$

$$= \iota_{\psi'}f(G)(w)$$

elde edilir. Dolayısıyla $f(G) \leq \iota_{\psi'}f(G)$ ve böylece $f(G)\in g_{\psi'}$ ve f fuzzy $(g_\psi , g_{\psi'})$-açıktır.

Bu teoremin karşıtı her zaman doğru değildir. Aşağıdaki örnek bu durumu göstermektedir.

**Örnek 4.2.3:** Örnek 4.2.2 de $g_\psi= \{0_x, A, B, 1_x\}$ ve $g_{\psi'}= \{0_x, 1_x\}$ olduğundan f, $(g_\psi , g_{\psi'})$-açıktır. Fakat $\{A\}\in \psi(a_{0.1})$ olmasına rağmen $V\leq f(A)$ olacak şekilde bir $V\in \psi'(f(a_{0.1}))$ yoktur. Böylece f $(\psi, \psi')$-açık değildir.

**Teorem 4.2.10:** f, fuzzy $(g_\psi , g_{\psi'})$-açık ve $\psi= \psi_g$, $\psi' = \psi_{g'}$ ise f $(\psi , \psi')$-açıktır.

**İspat :** $x_\lambda\in P$ ve $U\in \psi(x_\lambda)$ olsun. $V \leq f(U)$ olacak şekilde bir $V \in \psi'(f(x_\lambda))$ olduğunu göstereceğiz. $U\in\psi(x_\lambda)$ ise $\psi= \psi_g$ olduğundan $U\in g$ dir. f, fuzzy $(g_\psi , g_{\psi'})$-açık olduğundan $f(U)\in g_{\psi'}$ dür. Ayrıca $x_\lambda\in U$ olduğundan $f(x_\lambda) \in f(U)$ dur. Böylece $f(U) \in \psi'(f(x_\lambda))$ dır. $V= f(U)$ alınırsa $V\leq f(U)$ olduğundan istenen elde edilir.

**Teorem 4.2.11:** X ve X′ iki küme, $\psi \in\Psi(P)$ , $\psi' \in \Psi(P')$ ve f: $X \to X'$ olsun. Bu durumda f fonksiyonu $(\psi , \psi')$-açık ise

a) $f(\iota_\psi A) \leq \iota_{\psi'} f(A)$ ,$A \in I^X$

b) $\iota_\psi f^{-1}(B) \leq f^{-1}(\iota_{\psi'} B)$ ,$B \in I^Y$

dir.

**İspat:** a) f, ($\psi$ , $\psi'$)-açık olsun. Bir $w \in X'$ için $f(\iota_\psi A)(w) = t = 0$ ise sonuç açıktır. $0 \neq t = f(\iota_\psi A)(w)$ olsun. Bu durumda

$$f(\iota_\psi A)(w) = \sup_{z \in f^{-1}(w)} (\iota_\psi A)(z)$$

$$= \sup_{z \in f^{-1}(w)} [\sup\{x_\lambda(z): \exists U \in \psi(x_\lambda) \ni U \leq A\}]$$

dır. O halde $\exists U_z \in \psi(z_\lambda) \ni U_z \leq A$ ve kabulden

$$\exists V_z \in \psi'(f(z_\lambda)) \ni V_z \leq f(U_z) \leq f(A)$$

bulunur. Bu şartı sağlayan $V_z$ ler ve $V \leq f(A)$ olacak şekildeki tüm $V \in \psi'(f(z_\lambda))$ ler üzerinden sup alınırsa

$$0 \neq t = f(\iota_\psi A)(w) = \sup_{z \in f^{-1}(w)} [\sup\{x_\lambda(z): \exists U \in \psi(x_\lambda) \ni U \leq A\}]$$

$$\leq \sup\{y_\lambda(w): \exists U \in \psi(x_\lambda)\ \exists V \in \psi'(y_\lambda) \ni V \leq f(U) \text{ ve } V \leq f(A)\}$$

$$= \sup\{y_\lambda(w): \exists V \in \psi'(y_\lambda) \ni V \leq f(A)\} = \iota_{\psi'} f(A)(w)$$

elde edilir.

b) $f(\iota_\psi A) \leq \iota_{\psi'} f(A)$ ,$A \in I^X$ olsun. $A = f^{-1}(B)$ alınırsa

$$f(\iota_\psi f^{-1}(B)) \leq \iota_{\psi'} f(f^{-1}(B)) \leq \iota_{\psi'} B$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f(\iota_\psi f^{-1}(B))) \leq f^{-1}(\iota_{\psi'} B)$$

$$\Rightarrow \iota_\psi f^{-1}(B) \leq f^{-1}(\iota_{\psi'} B)$$

bulunur.

**Tanım 4.2.3:** X üzerindeki bir g genelleştirilmiş fuzzy topolojinin tabanı, elemanlarının birleşimleri g nin elemanlarını veren bir $\mathfrak{B} \subseteq g$ alt ailesidir. Yani

$$g = \{ \bigcup_{B \in \mathfrak{B}'} B : \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B} \}$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 4.2.12:** g, X üzerinde bir genelleştirilmiş fuzzy topoloji ve bir $\mathfrak{B} \subseteq g$ ailesi

$$\forall x_\lambda \in G \in g \text{ için } \exists B \in \mathfrak{B} \ni x_\lambda \in B \leq G$$

şartını sağlasın. O halde $\mathfrak{B}$ , g için bir tabandır.

**İspat:** Her fuzzy küme içerdiği fuzzy noktaların birleşimi olduğundan bir $G \in g$ için $G = \sup_{x_\lambda \in G} x_\lambda \leq \sup_{x_\lambda \in B \leq G} B \leq G$ dir.

**Teorem 4.2.13:** $f:(X, g) \to (X', g')$ fonksiyon ve $\mathfrak{B}$ ile $\mathfrak{B}'$ sırasıyla g ve $g'$ nün tabanı olsun.

$$f, (g, g') - \text{sürekli} \Leftrightarrow \forall H \in \mathfrak{B}' \text{ için } f^{-1}(H) \in g$$

**İspat:** $H \in \mathfrak{B}'$ ise $H \in g'$ ve $(g, g')$ – sürekli olduğundan $f^{-1}(H) \in g$ dir.

Diğer taraftan $g'$ nün bir $\mathfrak{B}'$ tabanının her elemanının ters görüntüsü g de ise bir $O \in g'$ için

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(\vee_{H \in H' \subseteq \mathfrak{B}'} H) = \vee_{H \in H' \subseteq \mathfrak{B}'} f^{-1}(H) \in g$$

elde edilir.

**Tanım 4.2.3:** $\psi$, X de bir GFKS olsun. $\forall x \in X$ , $\forall U \in \psi(x_\lambda)$ için $W \leq U$ olacak şekilde bir $x_\lambda \in W \in S(x_\lambda)$ varsa $S(x_\lambda) \subseteq \psi(x_\lambda)$ alt ailesine $x_\lambda$ nın $\psi$ ye göre bir komşuluk tabanı denir.

**Teorem 4.2.14:** $\psi$, X de bir GFKS olsun. Bir $\mathfrak{B} \subseteq g_\psi$ alt ailesi için

$$S(x_\lambda) = \{B : x_\lambda \in B \text{ ve } B \in \mathfrak{B}\}$$

ailesi $x_\lambda$ nın bir komşuluk tabanı ise $\mathfrak{B}$, $g_\psi$ için bir tabandır.

**İspat:** Göstereceğiz ki bir $A \in g_\psi$ , $\mathfrak{B}$ nin elemanlarının bir birleşimi şeklinde yazılabilir. $x_\lambda \in A$ ise $S(x_\lambda)$ yi komşuluk tabanı kabul ettiğimizden $\forall U \in \psi(x_\lambda)$ için $x_\lambda \in W_{x_\lambda} \leq U$ olacak şekilde bir $W_{x_\lambda} \in \mathfrak{B}$ vardır ve

$$A = \sup_{x_\lambda \in A} x_\lambda \leq \sup_{x_\lambda \in G} W_{x_\lambda}$$

dır. Ayrıca A nın içi kendine eşit ve $x_\lambda$ nın herbir komşuluğunun altında kalacak şekilde bir $W_{x_\lambda} \in \mathfrak{B}$ bulunabildiğine göre

$$\lambda \leq A(x) = k = \sup\{z_r(x) : \exists V \in \psi(z_r) \ni V \leq A\}$$

iken bazı $W_{x_\lambda} \in \mathfrak{B}$ lar için

$$x_\lambda \in W_{x_\lambda}(x) \leq V(x) \leq A(x) \quad , \lambda \leq k \, , \exists V \in \psi(x_\lambda)$$

$$k = A(x) = \sup_{x_\lambda \in A} x_\lambda(x) \leq \sup W_{x_\lambda} \leq A(x)$$

dır. Böylece $A = \sup\{W_{x_\lambda} : x_\lambda \in A$ için $\exists V \in \psi(x_\lambda) \ni V \leq A\}$ şeklinde bir birleşimdir.

# 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY Q-KOMŞULUK SİSTEMİ VE SÜREKLİLİK

Bu bölümde fuzzy kümeler için genelleştirilmiş fuzzy Q-komşuluk sistemi ile genelleştirilmiş fuzzy Q-süreklilik kavramı verilerek bazı karakterizasyonları elde edilmiştir.

## 5.1 Genelleştirilmiş Q-Fuzzy Komşuluk Sistemi

Bu bölümde fuzzy kümeler için genelleştirilmiş q-komşuluk sistemi ve bu sistemin ürettiği iç ve kapanış operatörünü tanımlanacaktır.

**Tanım 5.1.1:** $P$, X deki tüm fuzzy noktaların kümesi olmak üzere

$\psi_q : P \to P(I^X)$ dönüşümü

$$W \in \psi_q(x_\lambda) \Rightarrow x_\lambda q W$$

şartını sağlasın. Bu durumda $W \in \psi_q(x_\lambda)$ fuzzy kümesine $x_\lambda$ fuzzy noktasının genelleştirilmiş fuzzy q-komşuluğu (kısaca GFqK) ve $\psi_q$ dönüşümüne ise $P$ de genelleştirilmiş fuzzy q-komşuluk sistemi (kısaca GFqKS) denir. $P$ deki tüm GFqKS leri kümesini $\Psi^q(P)$ ile gösterilecektir.

Şimdi bu sisteme bağlı iç ve kapanış operatörünü tanımlayalım.

**Tanım 5.1.2:** $\psi_q \in \Psi^q(P)$ ve $A \in I^X$ olsun. Her $z \in X$ için

$$\iota_{\psi q}A(z) = \sup\{ x_\lambda(z) : \exists W \in \psi_q(x_\lambda)\ x_\lambda \in W \leq A \}$$

şeklinde tanımlı $\iota_{\psi q}A$ fuzzy kümesine, A nın $\psi_q$ ye göre içi denir.

$$\gamma_{\psi q}A(z) = \inf\{(\max(A(z),W(z)) : W \in \psi_q(z_\lambda)\}$$

şeklinde tanımlı $\gamma_{\psi q}A$ fuzzy kümesine, A nın $\psi_q$ ye göre kapanışı denir.

**Lemma 5.1.1:** $\psi_q \in \Psi^q(P)$ olsun. Bu durumda

(a) $\iota_{\psi q}0_X = 0_X$ ve $\gamma_{\psi q}1_x = 1_x$

(b) $\iota_{\psi q}A \leq A$ ve $A \leq \gamma_{\psi q} A \ \forall A \in I^X$

(c) $A \leq B \Rightarrow \iota_{\psi q}A \leq \iota_{\psi q}B$ ve $\gamma_{\psi q} A \leq \gamma_{\psi q} B \ \ \forall A,B \in I^X$

dır.

**İspat:** (a) $\forall V \in \psi_q(x_\lambda)$ için $V > 0_X$ olduğundan her $z \in X$ için $\iota_{\psi q}0_X(z) = \sup_{\emptyset} x_\lambda(z) = 0$ dır. Böylece $\iota_{\psi q}\, 0_X = 0_X$ dır. Ayrıca

$$\gamma_{\psi q}1_x(z) = \inf\{(\max(1_X(z),W(z)) : W \in \psi_q(z_\lambda)\}$$

$$= \inf\{(\max(1,W(z)) : W \in \psi_q(z_\lambda)\}$$

$$= 1 = 1_x(z)$$

dır.

(b) $(\iota_{\psi q}A)(z) = \sup\{ x_\lambda(z): \exists W \in \psi_q(x_\lambda) \ni x_\lambda \in W \leq A \} = t \neq 0$ olsun. Bu durumda $\sup t_j = t$ olacak şekilde bir $\{t_j\}$ indis dizisi için $t_j \leq W_j(z) \leq A(z)$ olacak şekilde $W_j \in \psi_q(z_{tj})$ vardır. Böylece

$$t = \sup_{j \in J} t_j \leq A(z)$$

dır. O halde $\iota_\psi A \leq A$ elde edilir. Şimdi $A \leq \gamma_{\psi q} A$ olduğunu gösterelim. $A(z) = t$ olsun.

$$\gamma_{\psi q}A(z) = \inf\{(\max(A(z),W(z)) : W \in \psi_q(z_\lambda)\}$$

$$= \inf\{(\max(t,W(z)) : W \in \psi_q(z_\lambda)\}$$

$$\geq \inf t$$

$$= t = A(z)$$

dır.

(c) $A \leq B$ olsun. $(\iota_{\psi q}A)(z) = \sup\{ x_\lambda(z): \exists W \in \psi_q(x_\lambda) \ni x_\lambda \in W \leq A \} = t$ olsun. $V \leq A$ olacak şekildeki her $V \in \psi_q(x_\lambda)$ için

$$V \leq A \leq B$$

olduğundan $t \leq (\iota_{\psi q}B)(z)$ dir. Böylece $\iota_{\psi q}A \leq \iota_{\psi q}B$ elde edilir. Ayrıca,

$$\gamma_{\psi q}A(z) = \inf\{(\max(A(z),W(z)) : W \in \psi_q(z_\lambda)\}$$

$$\leq \inf\{(\max(B(z),W(z)) : W \in \psi_q(z_\lambda)\}$$

$$= \gamma_{\psi q}B(z)$$

olduğundan $\gamma_{\psi q} A \leq \gamma_{\psi q} B$ bulunur.

**Örnek 5.1.1:** X={a, b, c} kümesi için A, B ve C fuzzy kümeleri

A={(a,0.4), (b,0.4), (c,0.7)} , B={(a,0.6), (b,0.4), (c,0.8)} , C={(a,0.8), (b, 1), (c,0.9)}

şeklinde verilsin.

$$\psi_q(a_\lambda) = \begin{cases} \{X\} & 0 \leq \lambda \leq 0.5 \\ \{B, C\} & 0.5 < \lambda \leq 0.8 \\ \{A\} & 0.8 < \lambda \leq 1 \end{cases},$$

$$\psi_q(c_\lambda) = \begin{cases} \{X\} & 0 \leq \lambda \leq 0.4 \\ \{A\} & 0.4 < \lambda \leq 0.7 \\ \{A, C\} & 0.7 < \lambda \leq 1 \end{cases},$$

$$\psi_q(b_\lambda) = \{C, X\} \ , \forall \lambda \in I$$

olmak üzere $\iota_{\psi q}B$ ve $\gamma_{\psi q}B$ fuzzy kümelerini bulalım.

$\iota_{\psi q}B\ (a) = \sup\{x_\lambda(a) : \exists W \in \psi_q(x_\lambda) \ni x_\lambda \in W \leq B \}$

$= \sup\{a_\lambda(a) : B \in \psi_q(a_\lambda) \ni 5 < \lambda \leq 0.6 \} = 0.6$

$\iota_{\psi q}B\ (b) = \sup_{\emptyset} x_\lambda(b) = 0x(b)= 0$

$\iota_{\psi q}B\ (c) = \sup\{x_\lambda(c) : \exists W \in \psi_q(x_\lambda) \ni x_\lambda \in W \leq B\}$

$= \sup\{c_\lambda(c) : A \in \psi_q(c_\lambda) \ni 0.4 < \lambda \leq 0.7\} = 0.7$

olduğundan $\iota_{\psi q}B = \{(a, 0.6), (b, 0), (c, 0.7)\}$ bulunur.

$\gamma_{\psi q}B\ (a) = \gamma_{\psi q}B\ (a) = \inf\{(\max(B(a),W(a)) : W \in \psi_q(a_\lambda)\}$

$= \inf (\max(B(a),A(a)), \max(B(a),B(a)),\max(B(a), C(a)), \max(B(a), X(a))$

$= \inf (0.6, 0.6, 0.8, 1) = 0.6$

$\gamma_{\psi q}B(b) = \inf (\max(B(b),C(b)), \max(B(a),X(b)) = \inf (1,1) = 1$

$\gamma_{\psi q}B(c) = \inf (\max(B(c),A(c)), \max(B(c), C(a)), \max(B(c), X(c)) = \inf (0.8, 0.9, 1) = 0.8$

olduğundan $\gamma_{\psi q}B = \{(a, 0.6), (b, 1), (c, 0.8)\}$ olarak bulunur.

**Teorem 5.1.1:** $\psi_q \in \Psi^q(P)$ olmak üzere

$$g = \{G \in I^X : x_\lambda q\, G \Rightarrow \exists W \in \psi_q(x_\lambda) \ni W \leq G\}$$

şeklinde tanımlı g, X de bir GFT dir.

**İspat:** Açık olarak $0_x \in g$ dir. Şimdi $G = \vee_{j\in J} G_j$ , $G_j \in g$ ,$\forall\ j \in J \neq \emptyset$ olsun. $x_\lambda q G$ iken Teorem 3.2.1 den dolayı

$$\exists\ j \in J \ni x_\lambda q G_j$$

dir. O halde $\exists W \in \psi_q(x_\lambda) \ni W \leq G_j \leq G$ dır. Böylece $G \in g$ dir.

Her $\psi_q$, GFqKS den bir g, GFT elde edilir. Bu g yi $g_{\psi q}$ ile göstereceğiz. Burada

$g_{\psi q}$ nin elemanlarına $g_{\psi q}$ -açık tümleyenlerine ise $g_{\psi q}$ - kapalı denir.

**Sonuç 5.1.1:** Her $x_\lambda qA$ için $A \in \psi_q(x_\lambda)$ ise A $g_{\psi q}$-açıktır.

**İspat:** $x_\lambda qA$ olsun. W=A alınırsa $\exists W \in \psi_q(x_\lambda) \ni W \leq A$ dır. Dolayısıyla A, $g_{\psi q}$-açıktır.

**Teorem 5.1.2:** g, X de bir GFT olsun. Bu durumda $g = g_{\psi q}$ olacak şekilde bir $\psi_q \in \Psi^q(P)$ vardır. Bu $\psi_q$

$$G \in \psi_q(x_\lambda) \Leftrightarrow x_\lambda qG \in g$$

şeklindedir.

**İspat:** $\psi_q(x_\lambda) := \{ G \in I^X : x_\lambda qG \in g \}$ olsun. Bu durumda açık olarak $\psi_q \in \Psi^q(P)$ dir. Şimdi $g = g_{\psi q}$ olduğunu gösterelim;

Eğer $G \in g$ ve $x_\lambda qG$ ise Teorem 5.1.1. den dolayı $G \in g_{\psi q}$ dir. Buradan $g \subseteq g_{\psi q}$ dir.

Eğer $G \in g_{\psi q}$ ise $x_\lambda qG$ olacak şekildeki her $x_\lambda$ için

$$\exists W_\lambda \in \psi_q(x_\lambda) \ni W_\lambda \leq G$$

dir. G ile çakışımsı olan tüm fuzzy noktalar ve onların G nin altında kalan komşulukları (ki bunlar g nin elemanlarıdır) için

$$W = \sup_{\substack{x_\lambda qG \\ W\lambda \leq G}} W_\lambda$$

denilirse $W \leq G$ dir. W=G eşitliğini gösterirsek G de g-açık olacaktır. Şimdi herhangi bir $z \in X$ için

$$G(z) = t \text{ ve } \rho = 1-t$$

olsun. $\rho$ ya yakınsayan azalan bir $\{\rho_j\}_{j \in J}$ , $\rho < \rho_j \leq 1$ sayı dizisi için $z_{\rho j} qG$ dir. Böylece

$$\forall j \in J, \exists W_j \in \psi_q(z_{\rho j}) \ni W_j \leq G \text{ ve } W_j(z) > 1-\rho_j$$

dir. O halde

$$W(z) = (\vee_{j\in J} W_j)(z) > 1-\rho_j \ , \ \forall j \in J.$$

dir. Burada $\{\rho_j\}_{j\in J}$ ler azalarak $\rho$ ya yaklaştığından $W(z) \geq t$ dır. Yani $G \leq W$ dir. O halde $G \in g$ elde edilir.

Teorem 5.1.2 de varlığı gösterilen $\psi_q$ yu $\psi_{g^q}$ ile göstereceğiz.

**Sonuç 5.1.2:** g , X de bir GFT ve $\psi_q = \psi_{g^q}$ ise $g_{\psi q} = g$ dir.

**İspat:** Teorem 5.1.2 nin açık bir sonucudur.

### 5.2 Genelleştirilmiş Fuzzy Q- Süreklilik

Bu kısımda genelleştirilmiş fuzzy Q-süreklilik kavramı verilerek bazı karakterizasyonları incelenecektir.

**Tanım 5.2.1:** X ve X′ iki küme, $\psi_q \in \Psi^q(P)$ , $\psi_q' \in \Psi^q(P')$ ve f: X $\rightarrow$ X′ olsun. Her $x_\lambda \in P$ ve her $V \in \psi_q'(f(x_\lambda))$ için $f(U) \leq V$ olacak şekilde bir $U \in \psi_q(x_\lambda)$ varsa f fonksiyonuna fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-sürekli denir.

Şimdi bölüm 4.2 de tanımlanana benzer bir şekilde

$$\psi_q(\kappa , g)(x_\lambda) = \{ V: \exists G \in g \ni x_\lambda q G \text{ ve } \kappa G = V \}$$

sistemini tanımlayalım. Burada $\kappa$ operatörü monotondur. Bu genelleştirilmiş fuzzy q-komşuluk sistemi kullanılarak literatürdeki birçok süreklilik çeşidi için denklikler elde edilebilir.

**Teorem 5.2.1 :** (X, $\tau$) ve (X′, $\tau'$) fuzzy topolojik uzaylar ve f: (X, $\tau$) $\rightarrow$ (X′, $\tau'$) fonksiyonu verilsin. $\psi_q = \psi_q(cl_\tau, \tau)$ ve $\psi_q' = \psi_q(int_{\tau'}cl_{\tau'}, \tau')$ olmak üzere

f, fuzzy hemen hemen kuvvetli $\theta$- sürekli $\Leftrightarrow$ f, fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-sürekli

**İspat:** ($\Rightarrow$): İspat için Tanım 3.3.4(i) yi kullanacağız. f, fuzzy hemen hemen kuvvetli $\theta$-sürekli, $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \psi_q'(f(x)_\lambda)$ olsun. $\exists\, U \in \psi_q(x_\lambda)$ ə $f(U) \leq V$ olduğunu gösterelim. $V \in \psi_q'(f(x)_\lambda) = \psi(int_{\tau'}cl_{\tau'}, \tau')(f(x)_\lambda)$ ise

$$\exists G \in \tau' \text{ ə } f(x)_\lambda q\, G \text{ ve } int_{\tau'}cl_{\tau'}G = V$$

dir. $G \in \tau'$ ve $f(x)_\lambda qG$ ise $G \in \mathcal{U}_Q'(f(x)_\lambda)$ dır. Burada $\mathcal{U}_Q'(f(x)_\lambda)$, $f(x)_\lambda$ nın $\tau'$ ye göre Q-komşuluk ailesidir. f fuzzy hemen hemen kuvvetli $\theta$- sürekli olduğundan

$$\exists W \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda),\ W \in \tau \text{ öyle ki } f(cl_\tau W) \leq int_{\tau'}cl_{\tau'}G$$

dir. $W \in \tau$ ve $x_\lambda qW$ olduğundan $cl_\tau W = U$ seçilirse $f(U) \leq int_{\tau'}cl_{\tau'}G = V$ elde edilir.

($\Leftarrow$): Şimdi f fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-sürekli olsun. $x_\lambda$, X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \mathcal{U}_Q'(f(x)_\lambda)$, $V \in \tau'$ olsun. $\exists U \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda)$, $U \in \tau$ ə $f(cl_\tau U) \leq int_{\tau'}cl_{\tau'}V$ olduğunu gösterelim. $V \in \mathcal{U}_Q'(f(x)_\lambda)$, $V \in \tau'$ ise $f(x)_\lambda qV$ dir.

$$int_{\tau'}cl_{\tau'}V = W$$

denilirse $W \in \psi_q'(f(x)_\lambda)$ dir. f fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-sürekli olduğundan

$$\exists G \in \psi_q(x_\lambda) \text{ ə } f(G) \leq W$$

dir. $G \in \psi(x_\lambda)$ ise $\exists U \in \tau$ ə $x_\lambda qU$ ve $cl_\tau U = G$ dir. $U \in \tau$ olduğundan $U \in \mathcal{U}_Q(x_\lambda)$ ve $f(cl_\tau U) = f(G) \leq W = int_{\tau'}cl_{\tau'}V$ elde edilir.

**Teorem 5.2.2:** X ve X′ iki küme, f: X $\rightarrow$ X′ , $\psi_q \in \Psi^q(P)$ ve $\psi_q' \in \Psi^q(P')$ olsun. Her $V \in \psi_q'(f(x_\lambda))$ için $f^{-1}(V) \in \psi_q(x_\lambda)$ ise f fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-süreklidir.

**İspat:** $V \in \psi_q'(f(x_\lambda))$ olsun. $U = f^{-1}(V) \in \psi_q(x_\lambda)$ alınırsa $f(U) = f(f^{-1}(V)) \leq V$ elde edilir.

**Teorem 5.2.3:** Fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-sürekli her fonksiyon fuzzy $(g_{\psi q}, g_{\psi q'})$-süreklidir.

**İspat:** f, fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-sürekli ve $G' \in g_{\psi q'}$ olsun. $f^{-1}(G') \in g_{\psi q}$ olduğunu gösterelim.

$x_\lambda q\, f^{-1}(G')$ olsun. Buradan

$$1 < \lambda + f^{-1}(G')(x) = \lambda + G'(f(x))$$

olduğundan $f(x_\lambda) q G'$ dır. O halde

$$\exists W' \in \psi_q'(f(x_\lambda)) \ni W' \leq G'$$

dır. Hipotezden dolayı $\exists U \in \psi_q(x_\lambda) \ni f(U) \leq W' \leq G'$ dir. Böylece $\exists U \in \psi_q(x_\lambda) \ni U \leq f^{-1}(G')$ elde edilir.

**Teorem 5.2.4:** f, fuzzy $(g_{\psi q}, g_{\psi q}')$-sürekli , $\psi_q = \psi_{g^q}$ ve $\psi_q' = \psi_{g^{q'}}$ ise f, fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-süreklidir.

**İspat:** $x_\lambda \in P$ ve $V \in \psi_q'(f(x_\lambda))$ olsun. O halde $f(x_\lambda) q V$ ve $V \in g_{\psi q}'$ dir. Hipotezden dolayı

$$f^{-1}(V) \in g_{\psi q} \text{ ve } x_\lambda q\, f^{-1}(V)$$

olduğundan $f^{-1}(V) \in \psi_q(x_\lambda)$ dir . Teorem 5.2.1. den dolayı f fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-süreklidir.

**Teorem 5.2.5:** $(X, \tau)$ ve $(X', \tau')$ fuzzy topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \to (X', \tau')$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\psi_q = \psi^q{}_{F\alpha\,\tau}$ ve $\psi_q' = \psi^q{}_{\tau'}$ olmak üzere

f, fuzzy kuvvetli yarı sürekli $\Leftrightarrow$ f, fuzzy $(\psi_q, \psi_q')$-süreklidir.

**İspat:** ($\Rightarrow$): İspat için Tanım 3.3.4 (j) yı kullanacağız. f, fuzzy kuvvetli yarı sürekli, $x_\lambda$ X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \psi_q'(f(x)_\lambda)$ olsun. $\exists U \in \psi_q(x_\lambda)$ ə $f(U) \leq V$ olduğunu gösterelim. $V \in \psi'(f(x)_\lambda)$ ise

$$f(x)_\lambda q V \text{ ve } V \in \tau'$$

dür. Buradan $V \in \mathcal{U}_Q'(f(x)_\lambda)$ ve f fuzzy kuvvetli yarı sürekli olduğundan

$$\exists U \in F\alpha\tau(X) \text{ ə } x_\lambda q U \text{ ve } f(U) \leq V$$

dir. O halde $\exists U \in \psi_q(x_\lambda) = \psi^q{}_{F\alpha\tau}(x_\lambda) = \{U: x_\lambda q U \in F\alpha\tau(X)\}$ ə $f(U) \leq V$ dir.

($\Leftarrow$): Şimdi f fuzzy ($\psi_q$ , $\psi_q'$)-sürekli olsun. $x_\lambda$ , X de herhangi bir fuzzy nokta ve $V \in \mathcal{U}_Q'(f(x)_\lambda)$ alalım. Bu durumda

$$\exists\, H \in \tau' \text{ ə } f(x)_\lambda\, qH \leq V$$

dir. O halde $H \in \psi_q'(f(x)_\lambda)$ dir . f , fuzzy ( $\psi_q$ , $\psi_q'$ )-sürekli olduğundan

$$\exists U \in \psi_q(x_\lambda) \text{ ə } f(U) \leq V$$

dir. Dolayısıyla $x_\lambda\, qU \in F\alpha\tau(X)$ ve $f(U) \leq V$ sağlanır.

**Tanım 5.2.2:** X ve X′ iki küme, $\psi_q \in \Psi(P)$ , $\psi_q' \in \Psi(P')$ ve f: $X \to X'$ olsun.

(a) Her $x_\lambda \in P$ ve her $U \in \psi_q(x_\lambda)$ için $V \leq f(U)$ olacak şekilde bir $V \in \psi'_q(f(x_\lambda))$ varsa f ye fuzzy ($\psi_q$ , $\psi_q'$)-açık denir.

(b) Her $G \in g_{\psi q}$ için $f(G) \in g_{\psi q'}$ ise f ye fuzzy ($g_{\psi q}$ , $g_{\psi q}{}'$)-açık denir.

**Teorem 5.2.6:** f, fuzzy ($\psi_q$ , $\psi_q'$)-açık ise ($g_{\psi q}$ , $g_{\psi q}{}'$)-açıktır.

**İspat**: Teorem 4.2.9 dakine benzer yolla yapılabilir.

**Teorem 5.2.7:** $\psi$, X kümesinde bir GFKS ve $g_\psi$ , X de $\psi$ nin ürettiği GFT olmak üzere

$$\psi_{g_\psi}{}^q(x_\lambda) = \{W \in g_\psi : x_\lambda\, qW\}$$

ailesi X de bir GFqKS ve $g_{\psi}= g_{\psi^{q}{}_{g_{\psi}}}$ dir.

**İspat:** $\psi_{g_{\psi}{}^{q}}$ nin GFqKS olduğu tanımdan açıktır. $g_{\psi^{q}{}_{g_{\psi}}}$ ise $g_{\psi}$ nin ürettiği $\psi_{g}{}^{q}$ nin ürettiği g olduğuna göre Sonuç 5.1.2 den $g_{\psi}= g_{\psi^{q}{}_{g_{\psi}}}$ dir.

Aşağıdaki sonuçta, 4. Bölümde incelenen ($g_{\psi}$ , $g_{\psi'}$)-süreklilik ile bu bölümde ele aldığımız ($g_{\psi q}$ , $g_{\psi q'}$)-süreklilik arasındaki ilişki incelenmiştir.

**Sonuç 5.2.1:** X ve X′ birer küme f: X → X′ bir fonksiyon , $\psi \in \Psi(P)$ , $\psi' \in \Psi(P')$ olsun. Eğer f, ($g_{\psi}$ , $g_{\psi'}$)-sürekli ve $\psi_{q} = \psi_{g_{\psi}{}^{q}}$ ve $\psi_{q}{}' = \psi_{g_{\psi'}{}^{q}}$ ise f, ($g_{\psi q}$ , $g_{\psi q'}$)-süreklidir.

**İspat:** f, X den X′ ye ($g_{\psi}$ , $g_{\psi'}$)-sürekli bir fonksiyon olsun. $B \in g_{\psi q'}$ için $f^{-1}(B) \in g_{\psi q}$ olduğunu gösterelim. $x_{\lambda} q\, f^{-1}(B)$ olsun. Buradan

$$f(x_{\lambda}) q B \text{ ve } B \in g_{\psi q'}$$

dir. O halde en az bir $W \in \psi'_{q}(f(x_{\lambda}))$ için $W \leq B$ dir. Burada $W \in \psi'_{q}(f(x_{\lambda}))$ olduğundan $W \in g_{\psi'}$ dür. f , ($g_{\psi}$ , $g_{\psi'}$)-sürekli olduğundan

$$f^{-1}(W) \in g_{\psi} \text{ ve } W \in \psi'_{q}(f(x_{\lambda}))$$

dır. Dolayısıyla $x_{\lambda} q\, f^{-1}(W)$ dir. O halde $f^{-1}(W) \in \psi_{q}(x_{\lambda})$ dır. Böylece $f^{-1}(W) \leq f^{-1}(B)$ olduğundan $f^{-1}(B) \in g_{\psi q}$ elde edilir.

## 6. SONUÇLAR

1) Bu tezde bir $x_\lambda$ fuzzy noktasının genelleştirilmiş fuzzy komşuluğu (kısaca GFK) ve $\psi$ genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemi (kısaca GFKS) tanımlanarak bu sisteme bağlı $\iota_\psi$ iç ve $\gamma_\psi$ kapanış operatörleri elde edilmiştir. Operatörlerin monoton olduğu ispatlanmıştır. Bu operatörlere göre fuzzy boş kümenin açık olduğu ispatlanmıştır. Herhangi bir fuzzy kümenin genelleştirilmiş iç kümesini kapsadığı ve kapanış kümesinin altında kaldığı gösterilmiştir.

2) Keyfi çoklukta fuzzy kümenin birleşiminin, $\iota_\psi$ iç operatörüne göre içinin, içlerinin birleşiminden daha geniş olduğu ispatlanmıştır.

3) $\iota_\psi$ operatörü altında kendisine eşit olan fuzzy kümelerin ailesinin genelleştirilmiş fuzzy topoloji (GFT) olduğu ispatlanmıştır. Böylece her GFKS ne karşılık bir GFT elde edilmiştir. Bu GFT, $\psi$ yardımıyla üretildiği için $g_\psi$ ile gösterilmiştir.

4) İçerdiği her fuzzy nokta için bir GFK olan fuzzy kümenin, $g_\psi$-açık olduğu ispatlanmıştır.

5) g, bir küme üzerinde bir GFT olmak üzere; bu kümede ürettiği GFT, g ye eşit olacak şekilde en az bir GFKS olduğu ispatlanmış ve bu GFKS nin bir formu olan $\psi_g$ verilmiştir.

6) $g_\psi$ nin iç operatörü $i_\psi$ nin $\iota_\psi$ den daha dar olduğu ispatlanmıştır. Bu iki operatörün eşitliğinin $g_\psi$ , $\psi_g$ den üretilmişse gerçekleştiği ispatlanmıştır.

7) GFKS yardımıyla ($\psi$ , $\psi'$)-süreklilik tanımlanmıştır. Ayrıca özel bir GFKS olan $\psi(\kappa$ , g ) tanımlanmış ve bu tanımlar yardımıyla fuzzy zayıf süreklilik, fuzzy zayıf yarı-süreklilik, fuzzy kuvvetli irresolute dönüşümleri, fuzzy yarı- irresolute dönüşümleri, fuzzy hemen hemen süreklilik, fuzzy hemen hemen $\beta$-süreklilik , fuzzy hemen hemen yarı-süreklilik , fuzzy $\delta$-süreklilik için tek bir form elde edilmiştir.

8) f bir fonksiyon olmak üzere; değer kümesindeki her GFK nın f altındaki ters görüntüsü tanım kümesinde bir GFK ise f fonksiyonunun fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olduğu ispatlanmıştır.

9) Fuzzy $(\psi, \psi')$-sürekli her fonksiyonun fuzzy $(g_\psi, g_{\psi'})$-sürekli olduğu ispatlanmıştır. Bu ifadenin tersinin her zaman geçerli olmadığı gösterilmiştir.

10) f, fuzzy $(g_\psi , g_{\psi'})$-sürekli olmak üzere $\psi = \psi_g$ ve $\psi'=\psi_{g'}$ ise f fonksiyonunun fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekli olduğu ispatlanmıştır. Bu önemli ispat yardımıyla fuzzy süreklilik , fuzzy α-süreklilik, fuzzy yarı- süreklilik, fuzzy ön- süreklilik, fuzzy β- süreklilik, fuzzy kuvvetli α-süreklilik , fuzzy yarı- ön süreklilik , M-β- fuzzy süreklilik , M- fuzzy ön süreklilik , fuzzy irresolute dönüşümler, fuzzy α-irresolute dönüşümler, fuzzy ön- irresolute dönüşümler , fuzzy yarı- α- irresolute dönüşümler fuzzy β-ön-irresolute dönüşümler gibi sürekliliklerin fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekliliğe denklikleri elde edilmiştir.

11) Bir f fonksiyonu için fuzzy $(\psi , \psi')$-sürekliliğin $f(\gamma_\psi A) \leq \gamma_{\psi'} f(A)$ ve $\gamma_\psi f^{-1}(B) \leq f^{-1}(\gamma_{\psi'} B)$ ile ayrı ayrı denk olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca $(\psi , \psi')$-sürekliğin $f^{-1}(\iota_{\psi'} B) \leq \iota_\psi f^{-1}(B)$ ifadesini gerektirdiği ispatlanmıştır.

12) Bir f fonksiyonu için $(\psi , \psi')$-açık ve $(g_\psi , g_{\psi'})$-açık kavramları tanımlanarak $(\psi , \psi')$-açık kavramının $(g_\psi, g_{\psi'})$-açık kavramından daha genel olduğu ispatlanmıştır. Eğer $\psi=\psi_g$ ve $\psi'= \psi_{g'}$ ise bu iki açıklık kavramının aynı anlama geleceği ispatlanmıştır.

13) Bir f fonksiyonu için f, $(\psi , \psi')$-açık ise $f(\iota_\psi A) \leq \iota_{\psi'} f(A)$ dır ve $f(\iota_\psi A) \leq \iota_{\psi'} f(A)$ ise $\iota_\psi f^{-1}(B) \leq f^{-1}(\iota_{\psi'} B)$ ifadeleri ispatlanmıştır.

14) Bir g, GFT nin tabanı tanımlanarak taban için özel bir form verilmiştir. Ayrıca $(g , g')$-sürekliliğin taban yardımıyla yeni bir denkliği verilmiştir.

15) Bir $\psi$, GFKS için komşuluk tabanı tanımlanarak bu taban yardımıyla $g_\psi$ nin bir tabanının varlığı ispatlanmıştır.

16) Bir $x_\lambda$ fuzzy noktasının genelleştirilmiş fuzzy q komşuluğu (kısaca GFqK) ve $\psi$ genelleştirilmiş fuzzy komşuluk sistemi (kısaca GFqKS) tanımlanarak bu sisteme bağlı $\imath^{\psi}_{q}$ iç ve $^{\gamma}{}_{\psi_q}$ kapanış operatörleri elde edilmiştir. Operatörlerin monoton olduğu ispatlanmıştır. Bu operatörlere göre fuzzy boş kümenin açık olduğu ispatlanmıştır. Herhangi bir fuzzy kümenin genelleştirilmiş iç kümesini kapsadığı ve kapanış kümesinin altında kaldığı gösterilmiştir.

17) Çakışımsı olduğu her fuzzy nokta için bir GFqK yı kapsayan kümelerin ailesinin bir GFT olduğu ispatlanmıştır. Bu GFT yi $g_{\psi q}$ ile göstererek, bir küme kendisiyle çakışımsı olan her noktanın bir GFqK sı ise bu kümenin $g_{\psi q}$-açık olduğu ispatlanmıştır.

18) g bir küme üzerinde bir GFT iken; bu kümede ürettiği GFT, g ye eşit olacak şekilde en az bir GFqKS olduğu ispatlanmış ve bu GFqKS nin bir formu olan $\psi_g{}^q$ verilmiştir.

19) GFqKS yardımıyla ($\psi_q$ , $\psi_q'$)-süreklilik kavramı verilmiştir. Ayrıca özel bir GFKS olan $\psi_q(\kappa, g)$ tanımlanmış ve bu tanımlar yardımıyla fuzzy hemen hemen kuvvetli $\theta$-süreklilik ile ($\psi_q$ , $\psi_q'$)-sürekliliğin denk olduğu ispatlanmıştır.

20) Fuzzy ($\psi_q$, $\psi_q'$)-sürekli her fonksiyonun fuzzy ($g_{\psi q}$ , $g_{\psi q'}$)-sürekli olduğu olduğu ve bu iki sürekliliğin denkliğininin ancak $\psi_q = \psi_g{}^q$ ve $\psi_q' = \psi_g{}^{q'}$ iken sağlandığı ispatlanmıştır. Bu denklik yardımıyla fuzzy kuvvetli yarı sürekliliğin, ($\psi_q$, $\psi_q'$)-sürekliliğe denkliği ispatlanmıştır.

21) Son olarak ise, ($g_\psi$ , $g_{\psi'}$)-süreklilik ile ($g_{\psi q}$ , $g_{\psi q'}$)-süreklilik arasındaki ilşkiyi veren bir karakterizasyon ispatlanmıştır.

**KAYNAKLAR**


Ajmal, N. and Azad, S.K. 1990. Fuzzy almost continuity and its pointwise characterization by dual points and fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 34, 81-101.

Azad, K.K. 1981. On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity, J. Math. Anal. Appl. 82, 14-32.

Bai, S.Z. and Liang, W.W. 1998. Fuzzy non-continuous mapping and fuzzy pre-semiseperation axioms, Fuzzy Sets and Systems, 94, 261-268.

Balasubramanian, G. 1997. On fuzzy β-compact spaces and fuzzy β-extremally disconnected spaces, Kybernetika, 33 (3), 271-277.

Balasubramanian, G. 1998. On fuzzy preseperation axioms, Bull. Cal. Math. Soc., 90, 427-434.

Chang, C. L. 1968. Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl. 24, 182-190.

Chu, W.W. 1992. Neighbourhood and associative query answering, Journal of Intelligent Information Systems.1, 355-382.

Császár, Á. 1997. Generalized open sets, Acta Math. Hungar., 75(1-2) , 65-87.

Császár, Á. 2002. Generalized topology, generalized continuity. Acta Math. Hungar., 96(4) , 351-357.

Császár, Á. 2008. On Generalized Neighbourhood systems, Acta Math. Hungar., 121 (4) , 395-400,

Császár, Á. 2009. Product of Generalized topologies, Acta Math. Hungar.123(1-2), 127-132.

Dang S, Behera A. and Nanda S. 1994. On fuzzy weakly semi-continuous functions, Fuzzy Sets and Systems, 67, 239-245.

De Mitri, C. and Pascali, E. 1983. Characterization of fuzzy topologies from neighbourhoods of fuzzy points, J. Math. Anal. Appl., 93, 1-14.

Essenger, K. 1995. Some connections between topological and Modal Logic, Mathematical Logic Quarterly, 41, 49- 64.

Liang, M.J. and Hai, Y.C. 1987. On fuzzy topological groups, Fuzzy Sets and Systems 23,281-287.

Lowen, R. 1976. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness, J. Math. Anal. Appl,56, 621-633.

Maki, H. 1996. On generalizing semi-open and preopen sets. in: Report for Meeting on Topological Spaces, Theory and its Applications, Yatsushiro College of Technology , 13-18.

Malakar , S. 1992. On fuzzy semi irresolute and strong irresolute functions, Fuzzy Sets and Systems, 45, 239-244.

Mashhour, A.S., Allam A.A., Mahmoud F.S. and Khedr, F.H. 1983. On supratopological spaces, Indian J. Pure and Appl. Math. 14, no. 4, 502-510.

Min, W.K. 2005. Some Results On Generalized topological spaces and generalized systems. Acta Math. Hungar., 108 (1-2), 171-181.

Ming, P.P. and Ming, L.Y. 1980. Fuzzy topology. I. Neighbourhood structure of a fuzzy point and Moore -Smith convergence, J. Math. Anal. Appl. 76 , 571-579.

Mukherjee, M.N. and Sinha S.P. 1989a. Irresolute and almost open functions between fuzzy topological spaces. Fuzzy Sets and Systems, 29, 381-388.

Mukherje, M.N. and Sinha S. P. 1989b. On some weaker forms of fuzzy continuous and fuzzy open mappings on fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets ans Systems, 32, 103-114.

Mukherjee, M.N. and Sinha S.P. 1990. On some near-fuzzy continuous functions between fuzzy topological spaces, Fuzzy Sets and Systems, 34,245-254.

Mukherjee, A. 2006. Fuzzy almost semi-continuous and almost semi-generalized continuous mappings, Acta Cienc. Indica Math. 32 (4), 1363.1368.

Othman, H. A., Latha S. 2009. Some weaker forms of fuzzy almost continuous mappings,Bull. of Kerela Math. Assoc., 5 (2), 109-113.

Palani Chetty, G. 2008. Generalized fuzzy topology, Ital. J. Pure and Appl. Mat., 24, 91-96.

Pawlak, Z. 1991. Rough Sets, Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic Publishers.

Prasol, R., Thakur S.S. and Saraf R.K. 1994. Fuzzy α-irresolute mappings, J. Fuzzy Math., 2, 335-339.

Saraf, K.K., Caldas M. and Navalagi N. 2008. On strongly fuzzy α-preirresolute functions,Advances in Fuzzy Mathematics, 3 (1), 19-25.

Saraf, R. K., Mishra S. and Navalagi G. 2003. On fuzzy strongly α-continuous functions, Bull. Greek Math. Soc. 47, 153.159.

Sarma, R. D., Sharfuddin A., Bhargava A. 2012. On generalized open fuzzy sets, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 4 (1), 143- 154.

Seenivasan, V., Neyveli G. and Balasubramanian G. 2007. Fuzzy semi α-irresolute functions. Mat. Bohemica, 132 (2), 113-123.

Shahna, A. B. 1991. On fuzzy strong semi continuity and fuzzy precontinuity, Fuzzy Sets and Systems, 44 (2), 303-308.

Signal, M.K, Rajvanshi N. 1992. Fuzzy alpha–sets and alpha–continuous maps, Fuzzy Sets and Systems, 48, 383-390.

Supriti, S. 1987. Fuzzy δ-continuous mappings, J. Math. Anal. Appl., 126,130-142.

Thakur, S.S, Singh S.1998. On fuzzy semi-preopen sets and fuzzy semi-precontinuity. Fuzzy Sets and Systems, 98 ,383-391.

Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets, Information and Control 8, 338-353.

# ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Eda YAZAR KOÇYİĞİT
Doğum Yeri : Erzurum
Doğum Tarihi : 13/08/1982
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : Almanca

**Eğitim Durumu**

Lise : Eskişehir Cumhuriyet Lisesi (1999)
Lisans : Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği (2006)
Yüksek lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı ( Eylül 2006- Ağustos 2008)
Doktora : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Mayıs 2014)

**Hakemli Dergi**

Sağıroğlu S., Güner, E. And Koçyiğit E. 2013. Generalized Neighbourhood Systems of Fuzzy Points, Commun.Fac.Sci.Univ.Ank.Series A1, Vol. 62, No2, 67-74.

**Ulusal Kongre Sunum**

Yazar E. ve Güner, E. 2010. Fuzzy Gruplar Üzerine, XXII. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erciyes Üniversitesi, Kayseri