ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA HOPF GRUBU

Sibel DEMİRALP

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2014

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

10/03/2014

Sibel DEMİRALP

ÖZET

Doktora Tezi

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA HOPF GRUBU

Sibel DEMİRALP

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Erdal GÜNER

Bu tezin ilk bölümü giriş kısmına ayrılmış, ikinci bölümde homotopi, kategori, funktor gibi kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy topolojik kavramlar incelenmiştir. Dördüncü bölümde noktalı fuzzy topolojik uzaylar tanımlanmış ve noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kofunktorun var olduğu ispatlanmıştır. Beşinci bölümde ise Hopf uzay ve Hopf grup tanımları verildikten sonra Hopf grup özelliğini sağlayan fuzzy noktalı topolojik uzaylar ile ilgili karakterizasyonlar araştırılmıştır.

Son bölümde fuzzy kapalı eğri uzayı tanımlanarak, bu uzay üzerinde Hopf grup olma özelliği araştırılmış ve bazı karakterizasyonlar verilmiştir.

Mart 2014, 66 sayfa

Anahtar Kelimeler: Homotopi, Kategori, Noktalı fuzzy topolojik uzay, Hopf grup, Kapalı fuzzy eğri uzayı

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

HOPF GROUP IN FUZZY TOPOLOGICAL SPACES

Sibel DEMİRALP

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erdal GÜNER

The first part has been reserved for the introduction, in the second part, concepts such as homotopy, category, functor have been given. In the third part, some definitions and theorems on fuzzy topological concepts have been studied. In the fourth part pointed fuzzy topological space has been defined and it is shown that there is a cofunctor from the category of pointed fuzzy topological spaces to the category of groups and homomorphisms. In the fifth part, Hopf space and Hopf group are defined and characterizations related to pointed fuzzy topological spaces having Hopf group structure have been investigated.

In the last part, fuzzy loop space has been defined and being Hopf group in this space has been investigated and some characterizations have been given.

March 2014, 66 pages

Key Words: Homotopy, Category, Pointed fuzzy topological space, Hopf group, Fuzzy loop space

TEŞEKKÜR

Tezimi yöneten ve çalışmalarımda yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman yakın ilgi ve desteğini gördüğüm danışman hocam sayın Doç. Dr. Erdal GÜNER'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), araştırmalarımda bilgi ve önerilerini esirgemeyen sayın hocalarım Prof. Dr. Ayhan SERBETÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) ve Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU' na (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), çalışmalarım sırasında beni maddi açıdan destekleyen TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu' na en derin duygularımla teşekkür ederim.

Ayrıca benden manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve eşime de teşekkür ederim.

Sibel DEMİRALP
Ankara, Mart 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI
ETİK ..... **i**
ÖZET ..... **ii**
ABSTRACT ..... **iii**
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR ..... **iv**
SİMGELER DİZİNİ ..... **vi**
ŞEKİLLER DİZİNİ ..... **vii**
1. GİRİŞ **1**
2. TEMEL KAVRAMLAR **4**
3. FUZZY TOPOLOJİK KAVRAMLAR **9**
3.1 Fuzzy Kümeler ve Özellikleri **9**
3.2 Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Fuzzy Topolojik Gruplar **15**
3.3 Fuzzy Kompakt Topolojik Uzaylar **21**
3.4 Fuzzy Homotopi Kavramı **24**
4. NOKTALI FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARIN HOMOTOPİ KATEGORİSİ **28**
5. FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA HOPF GRUBU **34**
5.1 Hopf Uzayı ve Hopf Grubu **34**
5.2 Fuzzy Topolojik Uzaylarda Hopf Grubu **36**
6. KAPALI FUZZY EĞRİ UZAYINDA HOPF GRUBU **50**
6.1 Kapalı Fuzzy Eğri Uzayı **50**
6.2 Kapalı Fuzzy Eğri Uzayında Hopf Grubu **52**
7. SONUÇLAR **62**
KAYNAKLAR **64**
ÖZGEÇMİŞ **66**

SİMGELER DİZİNİ

$hom_C(X, Y)$	*C* kategorisinde X den Y ye morfizmlerin cümlesi
π_Y	*C* kategorisinden *D* kategorisine funktor
π^Y	*C* kategorisinden *D* kategorisine kofunktor
μ_A	A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu
$F(X)$	X in tüm fuzzy kümelerinin cümlesi
0_X	değeri 0 olan sabit fuzzy küme
1_X	değeri 1 olan sabit fuzzy küme
$FC(X, Y)$	X den Y ye fuzzy sürekli fonksiyonların cümlesi
$A \vee B$	A ve B fuzzy kümelerinin birleşimi
$A \wedge B$	A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi
A^c	A fuzzy kümesinin tümleyeni
$\overline{A}$	A fuzzy kümesinin kapanışı
A_0	A fuzzy kümesinin desteği
x_r	fuzzy nokta
$A \cdot B$	A ve B fuzzy kümelerinin çarpımı
$\tilde{T}$	T topolojisinden elde edilen fuzzy topoloji
$\sim$	Homotopi bağıntısı
$[X; Y]$	X den Y ye fonksiyonların homotopi sınıflarının cümlesi
$[f]$	*f* fonksiyonunun homotopi sınıfı
$[X, \alpha_\lambda; Y, \beta_\lambda]$	(X, α_λ) dan (Y, β_λ) ya fuzzy sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının cümlesi
(Y, τ', e_λ)	Taban noktası e_λ olan fuzzy topolojik grup
$\Omega(X, x_\lambda)$	Kapalı fuzzy eğri uzayı
$(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$	Taban noktası $\omega_0(A)$ olan noktalı fuzzy topolojik uzay

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 *C* kategorisinden *D* kategorisine π_Y funktoru 7
Şekil 2.2 *C* kategorisinden *D* kategorisine π^Y kofunktoru 8
Şekil 4.1 Noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinden gruplar ve homomorfizmleri kategorisine π^Y funktoru 31
Şekil 4.2 Noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisi 32
Şekil 4.3 Gruplar ve homomorfizmleri kategorisi 33

1. GİRİŞ

Fuzzy küme teorisi, klasik küme teorisine alternatif olarak ilk kez L.A. Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır.

Zadeh'e göre gerçek dünyada bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiler kesin olarak tanımlanamamaktadır. 1965 yılına kadar matematikte incelenen konuların önceden belirlenen kurallara kesin olarak uyup uymadığı araştırılmış, bu incelemelerde her zaman bir kesinlik aranmıştır. Aristo mantığı üzerinde temellenen klasik küme teorisi, verilen bir alana ait tüm bireyleri, incelenen özelliğe göre ikiye ayırır. Bu teoriye göre bir önerme belirlenen kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlıştır. Ancak yaşadığımız dünyada bir çok olay vardır ki kesin olarak doğru ya da yanlış olduğunu ifade etmek zordur. Bu sebeple klasik küme teorisi uygulamada esnek olmamaktadır. Bu problem, klasik mantığın kabulü olan var – yok çiftinin ara değerlerini tanımlamakla giderilebilir. Fuzzy küme bu karmaşıklığı azaltmak için doğru ile yanlışı birbirinden ayıran kesinliği ortadan kaldırmaktadır.

Klasik küme teorisinde bir karakteristik fonksiyon, göz önüne alınan evrensel küme içinde, herhangi bir elemanın 0 veya 1 değeriyle kümeye ait olup olmadığını belirtmektedir. Zadeh, çalışmasında bu fonksiyonu, evrensel kümedeki elemanların gerçekte bu kümeye ait olabilme şiddetiyle veya yoğunluğuyla orantılı olarak genişletmiş ve değer kümesini [0, 1] kapalı aralığı olarak almıştır. Böylece elemanlar kümeye, 0 ile 1 arasında aldıkları üyelik dereceleriyle ait olurlar. Bir elemanın üyelik derecesinin 1'e daha yakın olması kümeye daha fazla ait olması anlamına gelir. Bu şekilde genişletilmiş fonksiyon ile karakterize edilen kümeye fuzzy küme denir.

Tam üye olma ve üye olmama durumu fuzzy kümede sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bu sebeple klasik küme kavramı fuzzy küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir şekli olarak görülebilir.Örnek olarak, normal oda sıcaklığı 23°C olarak kabul edilirse, klasik küme kuramına göre 23°C'nin üzerindeki sıcaklık dereceleri sıcak olarak kabul edilir. Bu derecelerin "sıcak kümesi" ne üyelik dereceleri 1 olur.

23°C'nin altındaki sıcaklıklar ise soğuktur ve sıcak kümesindeki üyelik dereceleri 0 olur. Dolayısıyla 22°C soğuk olarak kabul edilirken 24°C sıcak olur. "Soğuk kümesi" temel alındığında ise bu değerler tersine döner. Fuzzy küme yaklaşımında ise üyelik değerleri [0, 1] aralığında değerler alır. Örneğin 14°C'lik sıcaklık için üyelik derecesi 0, 23°C'lik sıcaklık için üyelik derecesi 0.25 olabilir. Böylece sıcaklık değerlerine "soğuk", "ılık", "sıcak" veya "çok sıcak" gibi tanımlamalar yapılabilmektedir.

Fuzzy küme üzerinde yapılan araştırmalar, ortaya çıktığı günden bu yana hızla büyümüştür. Oluşturduğu kavramsal çerçeve ve sonuçları itibarıyla şu anda oldukça geniş bir perspektife sahiptir. Klasik mantıktan farklı olarak problemin tam olarak tarif edilmediği, problemle ilgili bilginin yetersiz veya belirsiz olduğu durumlarda kullanılabilir olması, bu büyümenin temel nedenidir. Bilinen yöntemler ile yeterli doğrulukta modellenemeyen karmaşık sistemlerde ve başlangıç koşullarında veya tanımlarında belirsizlikler olan sistemlerde kullanılması ile en iyi çözüm elde edilir. Bu modelleme; değerlendirme, optimizasyon, karar verme, denetim, teşhis ve bilgi gibi uygulamalar olabilir. Ayrıca matematiksel olarak ifade edilemeyen sadece girdi–çıktı ilişkisi bilenen fonksiyonların tahmininde de kullanılır. Bu ilişki matematiksel denklemi bilinmeyen herhangi bir fonksiyonun özelliklerine yakın özellikler gösteren bir model oluşturulmasına imkân verir.

Uygulama alanlarının genişliği ve bu alanlarda oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından fuzzy küme teorisi bugün bilimsel çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır. Uluslararası bilim kuruluşları tarafından desteklenip birçok üniversitede ders olarak okutulmaktadır. Bunların yanı sıra teori, endüstriyel sahalarda uygulanmaya başlamıştır. Geliştirilen son teoremler, fuzzy mantığı ilke olmak üzere mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, ekonomi gibi konularda sistemleri modellemek üzere kullanılmaktadır.

Zadeh in 1965 yılındaki ilk makalesinden sonra Chang 1968'de genel topolojinin bazı temel kavramlarını fuzzy kümelere taşıyarak fuzzy topolojik uzaylar teorisini geliştirdi. Rosenfeld 1971'de bir grubun fuzzy alt grubunu tanımladı. Fuzzy topolojik grup kavramını ilk olarak Foster 1979'da inceledi. Liang ve Hai, 1984'de "Fuzzy Topological

Groups" başlıklı makalelerinde fuzzy topolojik grupların alt grupları, normal alt grupları ve bölüm gruplarını incelediler. Chang ve Liu 1984'de, Chuanlin 1985'de fuzzy homotopi kavramını tanımladı. Daha sonraki yıllarda cebirsel topolojideki birçok kavram fuzzy topolojiye taşındı. Gümüş ve Yıldız 2007 de noktalı fuzzy topolojik uzay kavramını inceledi. Göçer 2007 de fuzzy topolojik grubun bir Hopf grup olduğunu gösterdi.

Bir Hopf uzay $\gamma \circ (1_P, c) \sim 1_P$ ve $\gamma \circ (c, 1_P) \sim 1_P$ homotopilerini sağlayan, γ: $P \times P \rightarrow P$ sürekli çarpımı ve $c: X \rightarrow X$, $c(p) = p_0$ sabit fonksiyonu ile bir (P, p_0) noktalı topolojik uzayıdır. Grup işlemlerine benzer homotopi grup işlemleri ile Hopf uzay üzerinde bir grup yapısı inşa edilebilir. Bu gruba Hopf grup denir. Daha açık bir ifadeyle, bir Hopf grup, homotopi inversli ve homotopi birleşmeli bir Hopf uzaydır.

Bu çalışmada ilk olarak kategori, funktor, homotopi gibi temel kavramlar hatırlatılmış, devamında fuzzy topolojik uzaylarla ilgili önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra noktalı fuzzy topolojik uzayların bazı özellikleri tanımlanarak, noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kofunktor olduğu ispatlanmıştır. Tezin devamında Hopf uzayın tanımı ve özellikleri incelendikten sonra noktalı fuzzy topolojik uzaylarda Hopf grubu özelliği araştırılmış ve Hopf grup özelliği taşıyan noktalı fuzzy topolojik uzaylarla ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Son olarak ise kapalı fuzzy eğri uzayı tanımlanarak yine Hopf grup özelliği taşıyan kapalı fuzzy eğri uzayları üzerinde çalışılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde homotopi, kategori, funktor ve kofunktor gibi kavramlar ve bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.1: X ve Y iki topolojik uzay ve f, g: X → Y sürekli iki fonksiyon olsun. Eğer,

i) $\forall x \in X$ için $F(x, 0) = f(x)$
ii) $\forall x \in X$ için $F(x, 1) = g(x)$

şartlarını sağlayan bir

$$F = F(x, t) : X \times J \to Y$$

sürekli fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g ye homotoptur denir ve $f \sim g$ ile gösterilir. F fonksiyonuna, f den g ye homotopi, f ve g fonksiyonlarına homotopik eşdeğerlilik, X ve Y uzaylarına ise homotopik eşdeğer uzaylar denir.

Tanım 2.2: X, Y iki topolojik uzay ve $X_0 \subset X$ herhangi bir alt küme ve f, g : X → Y, $\forall x_0 \in X_0$ için $f(x_0) = g(x_0)$ şartını sağlayan iki sürekli fonksiyon olsun. Eğer,

i) $\forall x \in X$ için $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$
ii) $\forall x_0 \in X_0$ ve $\forall t \in J$ için $F(x_0, t) = f(x_0) = g(x_0)$

şartlarını sağlayan bir

$$F = F(x, t) : X \times J \to Y$$

sürekli fonksiyonu varsa f fonksiyonu g fonksiyonuna X_0 a göre homotoptur denir ve $f \sim g$ (rel.X_0) şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3: Topolojik uzaylarda homotopi altında değişmeyen özelliklere homotopik özellik veya homotopik invaryant denir.

Tanım 2.4: Nesne adı verilen elemanlardan oluşan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir sisteme kategori denir. Burada nesne, kümeler ve üzerilerinde tanımlı fonksiyonlardan oluşmaktadır. Daha açık bir ifadeyle bir *C* kategorisi,

a) Bir nesne sınıfıdır.

b) Her X, Y sıralı nesne çifti için

$$\hom_C(X, Y) = \{f \mid f : X \to Y\}$$

şeklinde bir fonksiyon kümesi tanımlıdır. Burada her bir fonksiyona morfizm denir.

c) Morfizmler için aşağıdaki şekilde bir kompozisyon tanımlanmıştır.

Her X, Y, Z sıralı nesne üçlüsü için,

$$f : X \to Y \text{ , } g : Y \to Z \text{ , } g \circ f : X \to Z$$

olmak üzere,

i) h: $Z \to W$ için $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : X \to W$ dir.

ii) Her bir Y nesnesi için bir $1_Y : Y \to Y$ morfizmi vardır ve

$$1_Y \circ f = f$$
$$g \circ 1_Y = g$$

dir. 1_Y morfizmine özdeş morfizm denir.

Tanım 2.5: *C* ve *C′* iki kategori olsun. Eğer

a) $\forall X \in C'$ için $X \in C$,

b) *C′* nün X ve Y nesneleri için $\hom_{C'}(X, Y) \subset \hom_C(X, Y)$,

c) *C′* nün $f' : X \to Y$ ve $g' : Y \to Z$ morfizmleri için, *f′* ve g′ nün *C′* deki kompozisyonları, *C* deki kompozisyonlarıdır,

ise *C′* ye *C* nin bir alt kategorisi denir.

Tanım 2.6: C ve D iki kategori ve F: $C \to D$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i) $\forall X \in C$ nesnesi için F(X), D nin bir nesnesi

ii) $\forall f \in \hom_C(X, Y)$ morfizmi için $F(f) \in \hom_D(F(X), F(Y))$ morfizmi,

a) $F(1_X) = 1_{F(X)}$

b) $f \in \hom_C(X, Y)$ ve $g \in \hom_C(Y, Z)$ morfizmleri için

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \in \hom_D(F(X), F(Z))$$

şartları sağlanıyorsa F ye kovaryant funktor veya kısaca funktor denir.

Tanım 2.7: C ve D iki kategori ve $F^*: C \to D$ bir fonksiyon olsun. Eğer

i) $\forall X \in C$ nesnesi için $F^*(X)$, D nin bir nesnesi

ii) $\forall f \in \hom_C(X, Y)$ morfizmi için $F^*(f) \in \hom_D(F^*(Y), F^*(X))$ morfizmi,

a) $F^*(1_X) = 1_{F^*(X)}$

b) $f \in \hom_C(X, Y)$ ve $g \in \hom_C(Y, Z)$ morfizmleri için

$$F^*(g \circ f) = F^*(f) \circ F^*(g) \in \hom_D(F^*(Z), F^*(X))$$

şartları sağlanıyorsa F ye kontravaryant funktor veya kısaca kofunktor denir.

Örnek 2.1: Herhangi bir C kategorisi ve $Y \in C$ nesnesi için π_Y, C kategorisinden, cümleler ve fonksiyonlarından oluşan bir D kategorisine funktordur. D kategorisinde,

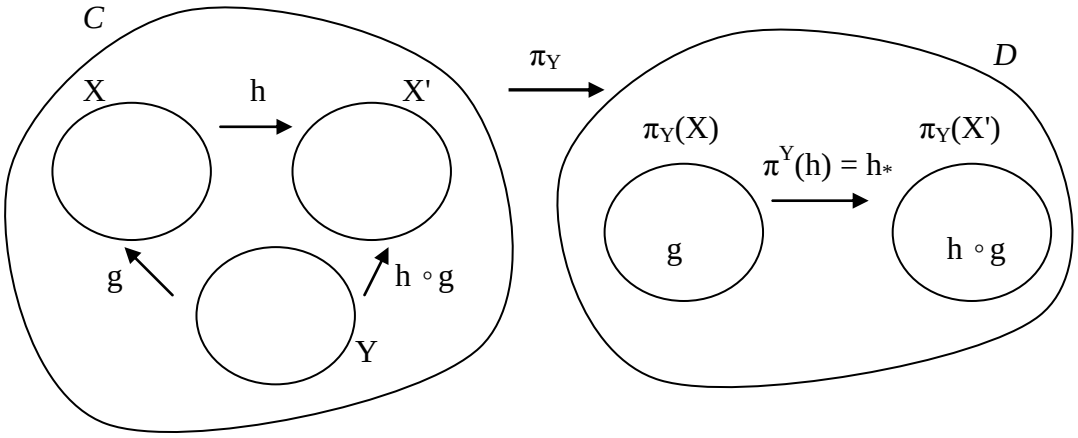
i) Nesneler: $\forall X \in C$ nesnesi için, $\pi_Y(X) = \hom_C(Y, X)$ cümlesidir.

i) Morfizmler: $h \in \hom_C(X, X')$ morfizmi için,

$$\begin{aligned} h_*: \hom_C(Y, X) &\to \hom_C(Y, X') \\ g &\to h_*(g) = h \circ g \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı $\pi_Y(h) = h_* \in \hom_D(\pi_Y(X), \pi_Y(X'))$ morfizmidir.

iii) Kompozisyon: Fonksiyonların kompozisyonudur.



Şekil 2.1 *C* kategorisinden *D* kategorisine π_Y funktoru

Örnek 2.2: Herhangi bir *C* kategorisi ve $Y \in C$ nesnesi için π^Y, *C* kategorisinden, cümleler ve fonksiyonlarından oluşan bir *D* kategorisine kofunktordur. *D* kategorisinde,

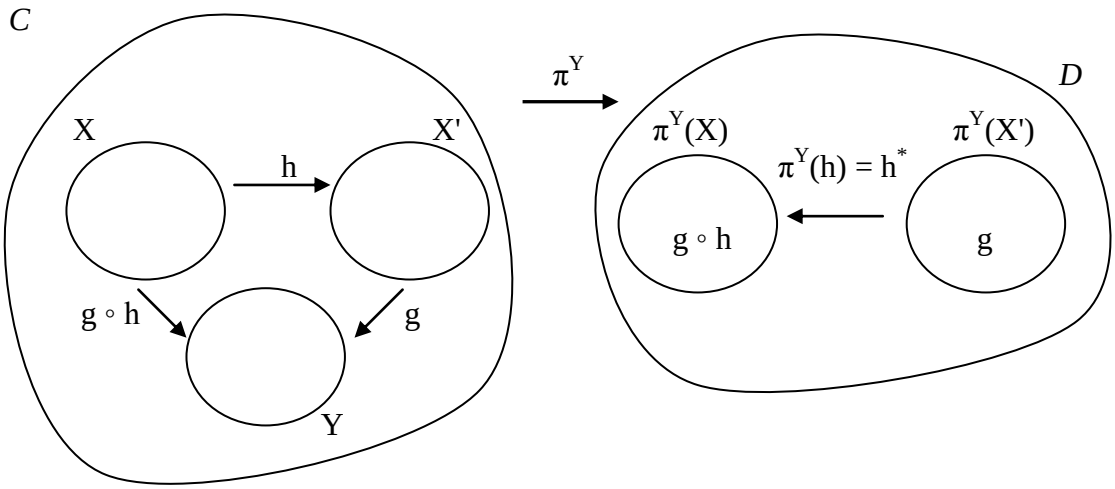
i) Nesneler: $\forall X \in C$ nesnesi için, $\pi^Y(X) = \hom_C(X, Y)$ cümlesidir.

ii) Morfizmler: $h \in \hom_C(X, X')$ morfizmi için,

$$h^*: \hom_C(X', Y) \rightarrow \hom_C(X, Y)$$
$$g \rightarrow h^*(g) = g \circ h$$

şeklinde tanımlı $\pi^Y(h) = h^* \in \hom_D(\pi^Y(X'), \pi^Y(X))$ morfizmidir.

iii) Kompozisyon: Fonksiyonların kompozisyonudur (Balcı 1978).



Şekil 2.2 *C* kategorisinden *D* kategorisine π^Y kofunktoru

3. FUZZY TOPOLOJİK KAVRAMLAR

Bu bölümde fuzzy kümeler, fuzzy topolojik gruplar, fuzzy kompakt topolojik uzay ve fuzzy homotopi gibi kavramlar ve bu kavramların çeşitli özellikleri verilmiştir.

3.1 Fuzzy Kümeler ve Özellikleri

Fuzzy küme teorisi kesin olmayan, belirsiz faaliyet ve gözlemlerin tanımlarının geçtiği problemleri çözmek için geliştirilmiştir. Bir fuzzy küme sürekli üyelik dereceleri olan nesneler sınıfıdır. Bu küme, her bir elemanı 0 ve 1 arasında değişen bir üyelik derecesine tayin eden üyelik fonksiyonu tarafından karakterize edilir.

Tanım 3.1.1: X boş olmayan bir küme ve $I = [0, 1] \subset R$ olsun. Bu durumda,
$\mu_A: X \to [0, 1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen,

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \subset X \times I$$

kümesine X de bir fuzzy küme denir. μ_A ya, A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu, $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine ise x in A ya ait olma derecesi denir. $\mu_A(x)$ in 1 e yaklaşması x in A ya daha fazla ait olması anlamına gelmektedir. $\forall x \in X$ için üyelik fonksiyonu $\mu_A(x) = c$ (sabit) şeklinde tanımlı A fuzzy kümesine X de bir sabit fuzzy küme denir (Zadeh 1965).

$\mu_X: X \to [0, 1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_X(x) = 1$ olarak tanımlanırsa X kümesi,

$\{(x, 1) \mid x \in X\}$ fuzzy kümesi olarak yazılabilir.

$\mu_\varnothing: X \to [0, 1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_\varnothing(x) = 0$ olarak tanımlanırsa boş küme,

$\{(x, 0) \mid x \in X\}$ fuzzy kümesi olarak yazılabilir.

X in tüm fuzzy kümelerinin cümlesini F(X) ile, fuzzy kümelerde boş küme ve X evrensel kümesini ise sırasıyla 0_X ve 1_X ile gösterelim.

Tanım 3.1.2: A, B$\in$F(X) olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B fuzzy kümeleri eşittir denir ve A = B yazılır.

Tanım 3.1.3: A, B$\in$F(X) olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ise B fuzzy kümesi A fuzzy kümesini kapsıyor denir ve $A \leq B$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4: A$\in$F(X) olmak üzere üyelik fonksiyonu $\forall x \in X$ için, $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$ şeklinde tanımlı A^c fuzzy kümesine A nın tümleyeni denir.

Tanım 3.1.5: A, B$\in$F(X) olsun. $\forall x \in X$ için, üyelik fonksiyonu

(i) $\mu_C(x) = \text{maks}\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ şeklinde tanımlı C fuzzy kümesine, A ve B fuzzy kümelerinin birleşimi denir ve $C = A \vee B$ yazılır.

(ii) $\mu_D(x) = \min\ \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ şeklinde tanımlı D fuzzy kümesine A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi denir ve $D = A \wedge B$ yazılır.

Genel olarak $\{A_i \mid i \in J, A_i \in F(X)\}$ fuzzy kümeleri için,

$C = \underset{i\in J}{\vee} A_i$ ve $D = \underset{i\in J}{\wedge} A_i$ fuzzy kümelerinin üyelik fonksiyonları,

$$\mu_C(x) = \sup_{i\in J} \{\mu_{A_i}(x)\}$$

$$\mu_D(x) = \inf_{i\in J} \{\mu_{A_i}(x)\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 3.1.1: X = {1, 2, 3, 4} olmak üzere X in A ve B fuzzy alt kümelerinin üyelik fonksiyonları,

$\mu_A(1) = \mu_B(4) = 0.7$
$\mu_A(2) = 0.9$
$\mu_A(3) = \mu_B(1) = \mu_A(4) = 0.5$
$\mu_B(2) = 0.8$
$\mu_B(3) = 0.1$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$A = \{(1, 0.7), (2, 0.9), (3, 0.5), (4, 0.5)\}$
$B = \{(1, 0.5), (2, 0.8), (3, 0.1), (4, 0.7)\}$
$A^c = \{(1, 0.3), (2, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.5)\}$
$B^c = \{(1, 0.5), (2, 0.2), (3, 0.9), (4, 0.3)\}$
$A \vee B = \{(1, 0.7), (2, 0.9), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$
$A \wedge B = \{(1, 0.5), (2, 0.8), (3, 0.1), (4, 0.5)\}$

olur.

Lemma 3.1.1: Bir X kümesinin A ve B fuzzy kümelerinin birleşimi, A ve B yi içeren en küçük fuzzy kümedir. Eğer C, X kümesinin, A ve B yi içeren herhangi bir fuzzy kümesi ise $A \vee B$ yi de içerir.

İspat: C, A ve B yi içeren herhangi bir fuzzy küme olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için,

$$\mu_C(x) \geq \mu_A(x) \text{ ve } \mu_C(x) \geq \mu_B(x) \Rightarrow \mu_C(x) \geq \text{maks } \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

olur. $D = A \vee B$ fuzzy kümesi $\mu_D(x) = \text{maks } \{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ şeklinde tanımlı olduğundan $\mu_C(x) \geq \mu_D(x)$ dir. Dolayısıyla $D \leq C$ olur.

Lemma 3.1.2: Bir X kümesinin A ve B fuzzy kümelerinin kesişimi A ve B tarafından içerilen en büyük fuzzy kümedir.

Teorem 3.1.1: X boş olmayan bir küme ve A, B, $C \in F(X)$ olsun. Bu durumda,

(i) $A \leq B \Rightarrow B^c \leq A^c$

(ii) $(A \vee B)^c = A^c \wedge B^c$

$(A \wedge B)^c = A^c \vee B^c$

(iii) $C \wedge (A \vee B) = (C \wedge A) \vee (C \wedge B)$

$C \vee (A \wedge B) = (C \vee A) \wedge (C \vee B)$

(iv) $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

(v) $(A^c)^c = A$

(vi) $A \wedge B = \varnothing \Leftrightarrow A \leq B^c$

(vii) $\{A_i \mid i \in J, A_i \in F(X)\}$ fuzzy kümeleri için,

$$(\vee_{i \in J} A_i)^c = \wedge_{i \in J} A_i^c$$

$$(\wedge_{i \in J} A_i)^c = \vee_{i \in J} A_i^c$$

(viii) $A \leq (A \vee B)$ ve $B \leq (A \vee B)$

(ix) $A \leq C$ ve $B \leq C \Rightarrow (A \vee B) \leq C$

dır (Zadeh 1965).

Bir fuzzy kümenin, tümleyeni ile kesişimi klasik küme teorisinde olduğu gibi boş küme olmak zorunda değildir. Benzer şekilde, tümleyeni ile birleşimi de evrensel kümeye eşit olmak zorunda değildir. Yani $A \in F(X)$ için, $A \wedge A^c = 0_X$ ve $A \vee A^c = 1_X$ olmayabilir.

Örnek 3.1.2: X = {1, 2, 3, 4} olmak üzere, A fuzzy kümesi,

A = {(1, 0.2), (2, 0.7), (3, 0.1), (4, 0.9)}

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

A^c = {(1, 0.8), (2, 0.3), (3, 0.9), (4, 0.1)}

olur. Dolayısıyla,

$A \wedge A^c$ = {(1, 0.2), (2, 0.3), (3, 0.1), (4, 0.1) $\neq 0_X$

$A \vee A^c$ = {(1, 0.8), (2, 0.7), (3, 0.9), (4, 0.9) $\neq 1_X$

dir.

Tanım 3.1.6: X bir küme ve $A \in F(X)$ olsun. supp $A = A_0 = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$ kümesine A fuzzy kümesinin desteği denir.

Tanım 3.1.7: X boş olmayan bir küme olsun. $r \in (0, 1]$ ve $\forall y \in X$ için,

$$\mu_{x_r}(y) = \begin{cases} r & , y = x \\ 0 & , y \neq x \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlı X in x_r fuzzy kümesine, X de bir fuzzy nokta denir. Yani desteği 0 dan farklı (x_r fuzzy noktasının desteği supp $x_r = x$ olur) tek bir değerden oluşan fuzzy kümeye bir fuzzy nokta denir.

Tanım 3.1.8: X bir küme, x_r ve y_t, X de iki fuzzy nokta olsun. Eğer

$$\text{supp } x_r \cap \text{supp } y_t = \varnothing$$

ise x_r ve y_t fuzzy noktaları ayrıktır denir.

Tanım 3.1.9: X boştan farklı herhangi bir küme, x_r, X de bir fuzzy nokta ve $A \in F(X)$ olsun. Eğer $\forall y \in X$ için $r \leq \mu_A(y)$ ise x_r, A ye aittir denir ve $x_r \in A$ şeklinde gösterilir. Böylece her fuzzy küme içerdiği fuzzy noktaların birleşimi olarak ifade edilebilir. Yani

$$A = \bigvee_{x_r \in A} x_r$$

yazılabilir.

Tanım 3.1.10: X ve Y iki küme, f: X → Y herhangi bir fonksiyon ve A∈F(X), B∈F(Y) olsun.

(i) A nın f altındaki görüntüsü f(A), ∀y∈Y için,

$$\mu_{f(A)}(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) & , f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & , f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlı Y de bir fuzzy kümedir.

(ii) B nin f altındaki ters görüntüsü f^{-1}(B), ∀x∈X için,

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B(f(x))$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlı X de bir fuzzy kümedir (Rosenfeld 1971).

Teorem 3.1.2: X ve Y iki küme, f: X → Y bir fonksiyon olsun. Bu durumda ∀A, B∈F(X) ve ∀C, D∈F(Y) fuzzy kümeleri için,

(a) $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$

(b) $(f(A))^c \leq f(A^c)$

(c) $C \leq D \Rightarrow f^{-1}(C) \leq f^{-1}(D)$

(d) $A \leq B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$

(e) $f(f^{-1}(C)) \leq C$

(f) f örten ise $f(f^{-1}(C)) = C$

(g) $A \leq f^{-1}(f(A))$

(h) f birebir ise $A = f^{-1}(f(A))$

dir (Chang 1968).

Teorem 3.1.3: f: X → Y ve g: Y → Z herhangi iki fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall A \in F(X)$ fuzzy kümesi için $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ dır.

İspat: $\forall z \in Z$ için,

$$\mu_{g(f(A))}(z) = \begin{cases} \sup\limits_{y \in g^{-1}(z)} \{ \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \} \} & , g^{-1}(z) \neq \varnothing,\ f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & , g^{-1}(z) = \varnothing,\ f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(g^{-1}(z))} \mu_A(x) & , f^{-1}(g^{-1}(z)) \neq \varnothing \\ 0 & , f^{-1}(g^{-1}(z)) = \varnothing \end{cases}$$

$$= \mu_{(g \circ f)(A)}(z)$$

olur.

3.2 Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Fuzzy Topolojik Gruplar

Bu kısımda fuzzy topolojik uzaylar ve fuzzy topolojik gruplar tanımlanarak bazı özellikleri ele alınmıştır.

Tanım 3.2.1: X bir küme, $\tau \subset F(X)$ olsun. Eğer,

(i) $\emptyset, X \in \tau$

(ii) $A, B \in \tau \Rightarrow (A \wedge B) \in \tau$ (sonlu kesişim)

(iii) $\forall i \in J$ için $A_i \in \tau \Rightarrow \bigvee\limits_{i \in J} A_i \in \tau$ (keyfi birleşim)

şartları sağlanıyorsa τ ya X üzerinde bir fuzzy topoloji denir. (X, τ) çiftine fuzzy topolojik uzay, τ nun elemanlarına ise τ–fuzzy açık kümeler denir. Tümleyeni τ–fuzzy açık olan bir fuzzy kümeye ise τ–fuzzy kapalı küme denir (Chon 2001).

Tanım 3.2.2: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $A \in F(X)$ olsun.

$$\tau_A = \{B \wedge A \mid B \in \tau\}$$

ailesi, A üzerinde bir fuzzy topolojidir. τ_A ya A üzerine indirgenmiş fuzzy topoloji veya τ dan indirgenen (rölatif) fuzzy topoloji denir. (A, τ_A) ikilisine ise (X, τ) nin bir fuzzy alt uzayı denir.

Tanım 3.2.3: (X, τ) fuzzy topolojik uzay ve x_λ, X de bir fuzzy nokta olsun. x_λ fuzzy noktasını içeren en az bir $U \in \tau$ fuzzy kümesini kapsayan $V \in \tau$ fuzzy kümesine x_λ fuzzy noktasının bir fuzzy komşuluğu denir. Yani,

V, x_λ fuzzy noktasının fuzzy komşuluğudur $\Leftrightarrow \exists U \in \tau \ni x_\lambda \leq U \leq V$ dir.

Tanım 3.2.4: (X, τ) ve (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay, x_λ, X de bir fuzzy nokta ve f:$(X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x_\lambda)$ nın bir V fuzzy komşuluğu için, x_λ nın en az bir U fuzzy komşuluğu var $\ni f(U) \leq V$ ise f ye x_λ fuzzy noktasında fuzzy süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in tüm fuzzy noktalarında fuzzy sürekli ise, f ye X üzerinde fuzzy sürekli fonksiyon denir.

X den Y ye tüm fuzzy sürekli fonksiyonların cümlesi FC(X, Y) ile gösterilir.

Teorem 3.2.1: (X, τ) ve (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar ve $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f nin fuzzy sürekli olması için gerek ve yeter koşul, Y de her τ'–fuzzy açık (τ'–fuzzy kapalı) kümenin ters görüntüsünün τ–fuzzy açık (τ–fuzzy kapalı) bir küme olmasıdır (Foster 1979).

Teorem 3.2.2: $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ ve $g : (Y, \tau') \rightarrow (Z, \tau'')$ fuzzy sürekli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $g \circ f : (X, \tau) \rightarrow (Z, \tau'')$ bir fuzzy sürekli fonksiyondur (Foster 1979).

Teorem 3.2.3: (X, τ) ve (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar olsun. $A \vee B = X$ olmak üzere (X, τ) daki τ–fuzzy kapalı A ve B kümeleri için μ_A ve μ_B üyelik fonksiyonları sadece 0 ve 1 değerlerini alsın. Bu durumda f:(A, τ_A) $\rightarrow$ (Y, τ') ve g:(B, τ_B) $\rightarrow$ (Y, τ') iki fuzzy sürekli fonksiyon olmak üzere $f|_{A\wedge B} = g|_{A\wedge B}$ ise,

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , x \in A \\ g(x) & , x \in B \end{cases}$$

fonksiyonu fuzzy süreklidir (Zheng 1984).

Tanım 3.2.5: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve $A \in F(X)$ olsun. A fuzzy kümesini kapsayan τ–fuzzy kapalı kümelerin arakesitine A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

$$\overline{A} = \wedge\{B \mid A \leq B \text{ ve } B^c \in \tau\}$$

dır.

Tanım 3.2.6: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay, $B \in F(X)$ ve $\mathcal{A} \subseteq F(X)$ olsun.

(i) Eğer,

$$B \leq \vee\{A_i \mid A_i \in \mathcal{A}, i \in J\}$$

ise, $\mathcal{A}$ ailesi B fuzzy altkümesi için bir örtüdür denir.

(ii) $\mathcal{A}$ örtüsünün, kendisi de bir örtü olan her alt ailesine, bir alt örtü denir.

(iii) $\mathcal{A} = \{A_i\}_{i\in J} \subseteq \tau$ olsun. Eğer $X = \vee_{i\in J} A_i$ ise $\mathcal{A}$ ya X in bir τ–fuzzy açık örtüsü denir.

Tanım 3.2.7: $(X, \cdot)$ bir grup ve (X, τ) fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer,

(i) $f: (X, \tau) \times (X, \tau) \to (X, \tau)$

$(x, y) \quad \to f(x, y) = x \cdot y$

fonksiyonu fuzzy sürekli

(ii) $g: (X, \tau) \to (X, \tau)$

$x \quad \to g(x) = x^{-1}$

fonksiyonu fuzzy sürekli

ise $(X, \tau, \cdot)$ ya fuzzy topolojik grup denir (Liang ve Hai 1987).

Teorem 3.2.4: (X, T) bir topolojik uzay olsun.

$$\tilde{T} = \{A \mid A \in F(X) \text{ ve } \operatorname{supp} A \in T\}$$

şeklinde tanımlı $\tilde{T}$, X üzerinde bir fuzzy topolojidir. $(X, \tilde{T})$ ya (X, T) topolojik uzayı tarafından elde edilen fuzzy topolojik uzay denir. Böylece her topolojik uzaya bir fuzzy topolojik uzay karşılık getirilebilir (Wuyts 1987).

Tanım 3.2.8: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve σ, τ nin bir alt ailesi olsun. τ nin her bir elemanı σ nın bazı elemanlarının birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa σ ya τ fuzzy topolojisi için bir tabandır denir. Yani,

$$\sigma, \tau \text{ için bir tabandır} \Leftrightarrow \forall A \in \tau \text{ için } \exists \sigma' \subseteq \sigma \ni A = \bigvee_{A_i \in \sigma'} A_i \text{ dir.}$$

Tanım 3.2.9: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay, (A, τ_A), (X, τ) nın bir fuzzy alt uzayı ve σ_A, τ_A nın bir alt ailesi olsun. τ_A nın her bir elemanı σ_A nın bazı elemanlarının birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa σ_A ya τ_A indirgenmiş fuzzy topolojisi için bir tabandır denir. Yani,

$$\sigma_A, \tau_A \text{ için bir tabandır} \Leftrightarrow \forall A \in \tau_A \text{ için } \exists \sigma_A' \subseteq \sigma_A \ni A = \bigvee_{A_i \in \sigma_A'} A_i \text{ dir.}$$

(X, τ) fuzzy topolojik uzayında υ, τ için bir taban ise,

$$\upsilon_A = \{B' \mid B' = B \wedge A, B \in \upsilon\}$$

şeklinde tanımlı υ_A ailesi (A, τ_A) fuzzy alt uzayında τ_A için bir tabandır.

Tanım 3.2.10: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve σ, τ nin bir alt ailesi olsun. σ nın bütün elemanlarının sonlu kesişimlerinin oluşturduğu aile τ için bir taban oluyorsa σ ya τ fuzzy topolojisi için bir alt tabandır denir.

Teorem 3.2.5: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay, (Y, τ', ·) bir fuzzy topolojik grup ve "e", (Y, ·) grubunun birim elemanı olsun. Bu durumda,

$$f * g : (X, \tau) \to (Y, \tau')$$
$$x \to (f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$f^{-1} : (Y, \tau') \to (X, \tau)$$
$$x \to f^{-1}(x) = (f(x))^{-1}$$

$$e^* : (X, \tau) \to (Y, \tau')$$
$$x \to e^*(x) = e$$

fonksiyonları fuzzy süreklidir (Ganster vd 2005).

Teorem 3.2.6: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay, (Y, τ', ·) bir fuzzy topolojik grup olsun. Bu durumda (FC(X, Y), $*$) ikilisi bir gruptur. (Y, ·) değişmeli ise (FC(X, Y), $*$) de değişmeli gruptur.

İspat:

i) Birleşme özelliği:

$\forall f, g, h \in FC(X, Y)$ için,

$$\begin{aligned}((f * g) * h)(x) &= (f * g)(x)\cdot h(x)\\ &= (f(x)\cdot g(x))\cdot h(x)\\ &= f(x)\cdot(g(x)\cdot h(x))\\ &= f(x)\cdot(g * h)(x)\\ &= (f * (g * h))(x)\end{aligned}$$

olup, "$*$" işlemi birleşmelidir.

ii) Birim eleman özelliği:

$\forall f \in FC(X, Y)$ için,

$$\begin{aligned}(f * e^*)(x) &= f(x)\cdot e^*(x)\\ &= f(x)\cdot e\\ &= f(x)\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$e^* * f = f$$

olduğundan e^* birim elemandır.

iii) Ters eleman özelliği:

$\forall f \in FC(X, Y)$ için,

$$(f * f^{-1})(x) = f(x)\cdot f^{-1}(x) = f(x)\cdot f(x)^{-1} = e = e^*(x)$$
$$(f^{-1} * f)(x) = f^{-1}(x)\cdot f(x) = f(x)^{-1}\cdot f(x) = e = e^*(x)$$

olduğundan $f^{-1} \in FC(X, Y)$ fonksiyonu f nin ters elemanıdır.

Böylece $(FC(X, Y), *)$ ikilisi bir gruptur.

(Y, ·) değişmeli ise $\forall f, g \in FC(X, Y)$ için,

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= f(x)\cdot g(x)\\ &= g(x)\cdot f(x)\\ &= (g * f)(x)\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla (FC(X, Y), $*$) ikilisi bir değişmeli grup olur.

3.3 Fuzzy Kompakt Topolojik Uzaylar

Bu kısımda fuzzy kompakt topolojik uzayın tanımı ve fuzzy kompakt topolojik uzay ile ilgili bazı teoremler verilmiştir.

Tanım 3.3.1: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. X deki her x_t ve y_r ayrık fuzzy noktaları için,

$$\exists U \in \tau \ni x_t \in U$$
$$\exists V \in \tau \ni y_r \in V$$
$$\text{ve } U \wedge V = 0_X$$

ise (X, τ) fuzzy topolojik uzayına Fuzzy Hausdorff Uzayı veya Fuzzy T_2 Uzayı denir.

Tanım 3.3.2: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. X in her τ–fuzzy açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa (X, τ) ya fuzzy kompakt topolojik uzay denir.

(X, τ) bir fuzzy kompakt topolojik uzaydır $\Leftrightarrow \mathcal{A} \subseteq \tau$ olmak üzere $X = \vee_{U_i \in \mathcal{A}} U_i$ ise $\exists \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ $\ni X = \vee_{U_j \in \mathcal{B}} U_j$ dir.

Tanım 3.3.3: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer X in bir x_t fuzzy noktası için, x_t yi içeren en az bir $U \in \tau$ var ve (U, τ_U) fuzzy kompakt topolojik uzay ise (X, τ) fuzzy topolojik uzayı x_t de fuzzy lokal kompakt topolojik uzaydır denir. Eğer (X, τ), her fuzzy noktasında fuzzy lokal kompakt ise, (X, τ) fuzzy lokal kompakt topolojik uzaydır denir.

Teorem 3.3.1: (X, τ) Fuzzy Hausdorff Uzayı olsun. Bu durumda X in her fuzzy kompakt alt uzayı τ–fuzzy kapalıdır (Dang ve Behera 1996).

Teorem 3.3.2: (X, τ) bir fuzzy kompakt topolojik uzay olsun. Bu durumda X in her τ–fuzzy kapalı alt uzayı fuzzy kompakttır (Ganguly ve Saha 1990).

Teorem 3.3.3: (X, τ) bir fuzzy Hausdorff uzay olsun. Bu durumda,

X fuzzy lokal kompakttır $\Leftrightarrow$ Her bir $x_t \in X$ fuzzy noktası için $\exists U \in \tau$ ə $x_t \in U$ ve $(\overline{U}, \tau_{\overline{U}})$ fuzzy kompakttır

(Dang ve Behera 1996).

Teorem 3.3.4: (X, τ) bir Fuzzy Hausdorff Uzayı olsun.

X, x_t fuzzy noktasında fuzzy lokal kompakttır $\Leftrightarrow$ x_t yi içeren her τ–fuzzy açık U kümesi için $x_t \in V$ olacak biçimde en az bir τ–fuzzy açık V kümesi vardır öyle ki $\overline{V}$ fuzzy kompakt ve $\overline{V} \leq U$ dur.

İspat:

($\Rightarrow$) (X, τ), x_t fuzzy noktasında fuzzy lokal kompakt $\Rightarrow$ $\exists U \in \tau$ ə $x_t \in U$ ve (U, τ_U) fuzzy kompakttır.

X Fuzzy Hausdorff Uzayı $\Rightarrow$ U, τ–fuzzy kapalı

$\Rightarrow U = \overline{U}$ dır.

X de bir $y_r \in U^c$ fuzzy noktası verilsin. Bu durumda,

$x_t \neq y_r$ ve X bir Fuzzy Hausdorff Uzayı $\Rightarrow$ $\exists C \in \tau$ ə $x_t \in C$

$\exists D \in \tau$ ə $y_r \in D$

ve $C \wedge D = 0_X$ dir.

$V = C \wedge U$ olsun. Böylece $V \leq U \Leftrightarrow \overline{V} \leq \overline{U} = U$ dur.

$\overline{V}$, τ–fuzzy kapalı ve U fuzzy kompakt $\Rightarrow$ $\overline{V}$ fuzzy kompakttır.

Dolayısıyla $x_t \in \overline{V} \leq U$ ve $\overline{U}$ fuzzy kompakttır.

($\Leftarrow$) Teorem 3.3.3 den açıktır.

Tanım 3.3.4: (X, τ) ve (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar,

$\mathcal{K} = \{K \in F(X) \mid K$ bir fuzzy kompakt küme$\}$

$\mathcal{U} = \{U \in F(Y) \mid U$ bir τ'–fuzzy açık küme$\}$

olmak üzere $\forall K \in \mathcal{K}$ ve $\forall U \in \mathcal{U}$ için,

$$N_{K,U} = \{f \in FC(X, Y) \mid f(K) \leq U\}$$

cümlesi FC(X, Y) üzerinde bir topoloji alt tabanıdır. Bu topolojiye fuzzy kompakt–açık topoloji denir. Bu topoloji ile FC(X, Y) cümlesine, fuzzy kompakt–açık topolojik uzay denir.

Tanım 3.3.5: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay $A \in F(X)$ olmak üzere,

$$A \wedge B \neq 0_X, \quad A \wedge C \neq 0_X, \quad A \leq B \vee C \quad \text{ve} \quad A \wedge B \wedge C = 0_X$$

olacak şekilde τ–fuzzy kapalı B ve C kümeleri varsa A ya (X, τ) de fuzzy irtibatsızdır denir. Fuzzy irtibatsız olmayan bir fuzzy kümeye ise fuzzy irtibatlı küme denir.

Tanım 3.3.6: (X, τ) ve (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar olsun.

$$E: FC(X, Y) \times (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$$
$$(f, x_t) \quad \rightarrow f(x_t)$$

şeklinde tanımlı E fonksiyonuna fuzzy değerlendirme (evaluation) fonksiyonu denir.

Teorem 3.3.5: (X, τ) bir fuzzy lokal kompakt Hausdorff uzayı, (Y, τ') bir fuzzy topolojik uzay olsun. Bu durumda,

$$E: FC(X, Y) \times (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$$

fuzzy değerlendirme fonksiyonu fuzzy süreklidir (Dang ve Behera 1996).

Teorem 3.3.6: (X, τ) bir fuzzy lokal kompakt Hausdorff uzayı, (Y, τ') ve (Z, τ'') fuzzy topolojik uzaylar olsun. Bu durumda,

g: (Z, τ'')→FC(X, Y) fonksiyonunun fuzzy sürekli olması için gerek ve yeter koşul,

$$E \circ (g \times 1) : (Z, \tau'') \times (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$$

fonksiyonunun fuzzy sürekli olmasıdır

(Dang ve Behera 1996).

3.4 Fuzzy Homotopi Kavramı

Bu kısımda fuzzy homotopi tanımı ve fuzzy homotopi ile ilgili bazı teoremler verilmiştir.

(R, U) reel sayıların alışılmış topolojik uzayı olmak üzere, ε_I ile I = [0, 1] kapalı aralığı üzerindeki reel sayıların alışılmış alt uzay topolojisini (metrik ile oluşturulan topoloji) ve $(I, \tilde{\varepsilon_I})$ ile de (I, ε_I) dan elde edilen fuzzy topolojik uzayı gösterelim.

Tanım 3.4.1: (X, τ) ve (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve $f, g \in FC(X, Y)$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için, $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$ koşullarını sağlayan bir

$$F: (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \rightarrow (Y, \tau')$$

fuzzy sürekli fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g ye fuzzy homotoptur denir ve $f \sim g$ olarak gösterilir. F fonksiyonuna ise f den g ye fuzzy homotopi denir.

Teorem 3.4.1: $(X \tau)$ ve (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar olsun. Homotopi bağıntısı "~" $FC(X, Y)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

(i) Yansıma özelliği:

$\forall f \in FC(X, Y)$ ve $\forall x \in X$ için $F: (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \rightarrow (Y, \tau')$ fonksiyonu $F(x, t) = f(x)$ şeklinde tanımlanırsa $f \sim f$ dir.

(ii) Simetri özelliği:

$f \sim g \Rightarrow \exists F:(X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \rightarrow (Y, \tau')$ öyle ki $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ dir. $G:(Y, \tau') \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \rightarrow (X, \tau)$ fonksiyonunu $G(x, t) = F(x, 1–t)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda G fuzzy sürekli ve

$G(x, 0) = F(x, 1) = g(x)$
$G(x, 1) = F(x, 0) = f(x)$

dir. Böylece $g \sim f$ dir.

(iii) Geçişme özelliği:

$f, g, h: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ olmak üzere $f \sim g$ ve $g \sim h$ olsun.

$f \sim g \Rightarrow \exists F:(X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \rightarrow (Y, \tau')$ ə $F(x, 0) = f(x)$ ve $F(x, 1) = g(x)$
$g \sim h \Rightarrow \exists G:(X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \rightarrow (Y, \tau')$ ə $G(x, 0) = g(x)$ ve $G(x, 1) = h(x)$

dir.

Bir H: $(X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon}_I) \rightarrow (Y, \tau')$ fonksiyonu,

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & , 0 \leq t \leq ½ \\ G(x, 2t - 1) & , ½ \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda H fuzzy süreklidir. Ayrıca,

$H(x, 0) = F(x, 0) = f(x)$

$H(x, 1) = G(x, 1) = h(x)$

olduğundan $f \sim h$ dir.

Böylece FC(X, Y) kümesi "~" bağıntısıyla ayrık eşdeğerlik sınıflarına ayrılır. İki fonksiyonun aynı sınıfta olması için gerek ve yeter koşul fuzzy homotop olmalarıdır. Bu eşdeğerlik sınıflarına fuzzy homotopi sınıfları denir ve bütün fuzzy homotopi sınıflarının cümlesi [X; Y] ile gösterilir. Bir $f \in FC(X, Y)$ fonksiyonunun fuzzy homotopi sınıfı $[f]$ ile ifade edilir.

Tanım 3.4.2: (X, τ) ve (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve $f, g \in FC(X, Y)$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için, $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ ve $X' \subset X$ olmak üzere $\forall x' \in X'$ için

$$F(x', t) = f(x') = g(x')$$

koşullarını sağlayan bir $F: (X, \tau) \times (I, \tilde{\varepsilon}_I) \rightarrow (Y, \tau')$ sürekli fonksiyonu varsa f fonksiyonu g ye, X' ye göre fuzzy homotoptur denir ve $f \sim g$ (fuzzy rel. X') olarak gösterilir.

Teorem 3.4.2: $(X \tau)$ ve (Y, τ') fuzzy topolojik uzaylar ve $X' \subset X$ olsun. Bu durumda " ~ (fuzzy rel. X')" bağıntısı FC(X, Y) üzerinde bir denklik bağıntısıdır
(Chang ve Liu 1984).

Tanım 3.4.3: (X, τ) ve (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve f:X $\rightarrow$ Y fuzzy sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

i) $f \circ g \sim 1_Y$
ii) $g \circ f \sim 1_X$

olacak biçimde bir g: Y $\rightarrow$ X fuzzy sürekli fonksiyonu varsa X ve Y fuzzy topolojik uzaylarına fuzzy homotopik eşdeğer uzaylar veya X ile Y aynı fuzzy homotopi tipindendir denir ve X $\sim$ Y ile gösterilir. f ve g fonksiyonlarına ise fuzzy eşdeğerlilik denir.

Tanım 3.4.4: Fuzzy topolojik uzaylar ve fuzzy topolojik uzaylar arasındaki fuzzy sürekli fonksiyonların fuzzy homotopi sınıfları bir kategori oluşturur. Bu kategorinin,

a) Nesneleri: Fuzzy topolojik uzaylardır.
b) Morfizmleri: $f \in$FC(X, Y) olmak üzere [f] homotopi sınıflarıdır.
c) Kompozisyon: Fonksiyonların kompozisyonudur.

Bu kategoriye fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisi denir.

4. NOKTALI FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARIN HOMOTOPİ KATEGORİSİ

Bu bölümde noktalı fuzzy topolojik uzaylar ve homotopi kategorisinin tanımları verildikten sonra noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kofunktorun var olduğu gösterilmiştir.

Tanım 4.1: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve x_λ, X de bir fuzzy nokta olsun. Bu durumda (X, x_λ) çiftine noktalı fuzzy topolojik uzay, x_λ ya ise (X, x_λ) noktalı fuzzy topolojik uzayının taban noktası denir.

(X, x_λ) ve (Y, y_λ) noktalı fuzzy topolojik uzaylar ise, tüm $f \in FC(X, Y)$ fonksiyonları taban noktasını korur. Ayrıca tüm $F : (X, x_\lambda) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \rightarrow (Y, y_\lambda)$ fuzzy homotopileri, taban noktasına göre fuzzy homotopidir.

(X, x_λ) den (Y, y_λ) ye tüm fuzzy sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının cümlesini $[X, x_\lambda; Y, y_\lambda]$ ile gösterelim.

$(Y, \cdot)$ grubunun birim elemanı "e" olmak üzere, $(Y, \tau', \cdot)$ fuzzy topolojik grubu taban noktası e_λ olan bir noktalı fuzzy topolojik uzay olarak alınabilir. Bu uzayı (Y, τ', e_λ) şeklinde gösterelim.

Tanım 4.2: Noktalı fuzzy topolojik uzaylar ve noktalı fuzzy topolojik uzaylar arasındaki fuzzy sürekli fonksiyonların oluşturduğu kategoriye noktalı fuzzy topolojik uzaylar ve fuzzy sürekli fonksiyonlar kategorisi denir. Bu kategorinin,

a) Nesneleri: Noktalı fuzzy topolojik uzaylardır.
b) Morfizmleri: Fuzzy topolojik uzaylar arasındaki fuzzy sürekli fonksiyonlardır.
c) Kompozisyon: Fonksiyonların kompozisyonudur.

Tanım 4.3: Noktalı fuzzy topolojik uzaylar ve noktalı fuzzy topolojik uzaylar arasındaki fuzzy sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının oluşturduğu kategoriye noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisi denir. Bu kategorinin,

a) Nesneleri: Noktalı fuzzy topolojik uzaylardır.
b) Morfizmleri: f:$(X, x_\lambda) \rightarrow (Y, y_\lambda)$ fuzzy sürekli fonksiyon olmak üzere $[f]$ homotopi sınıflarıdır.
c) Kompozisyon: Fonksiyonların kompozisyonudur.

Teorem 4.1: (X, x_λ) bir noktalı fuzzy topolojik uzay, (Y, τ', e_λ) bir fuzzy topolojik grup ve f, g: $(X, x_\lambda) \rightarrow (Y, \tau', e_\lambda)$ fuzzy sürekli fonksiyonlar olsun. $(f * g)(x) = f(x)\cdot g(x)$ olmak üzere, $[(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ üzerinde

$$[f] \bullet [g] = [f * g]$$

şeklinde bir işlem tanımlansın. Bu durumda $[(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$, homotopi sınıfları arasında tanımlanan bu işleme göre bir grup olur.

Eğer $(Y, \cdot)$ bir değişmeli grup ise $([(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)], \bullet)$ da değişmeli grup olur (Gümüş 2008).

İspat:

İlk olarak $([(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)], \bullet)$ ikilisinin bir grup olduğunu gösterelim.

i) Birleşme özelliği:

$\forall [f], [g], [h] \in [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ için,

$$([f] \bullet [g]) \bullet [h] = [f * g] \bullet [h]$$
$$= [(f * g) * h]$$
$$= [f * (g * h)]$$
$$= [f] \bullet ([g] \bullet [h])$$

olup "$\bullet$" işlemi birleşmelidir.

ii) Birim eleman özelliği:

$\forall[f] \in [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ için,

$$[f] \bullet [e^*] = [f * e^*] = [f]$$

olup $[e^*]$, "$\bullet$" için birim elemandır.

iii) Ters eleman özelliği:

$\forall[f] \in [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ için,

$$[f] \bullet [f^{-1}] = [f * f^{-1}] = [e^*]$$
$$[f^{-1}] \bullet [f] = [f^{-1} * f] = [e^*]$$

olduğundan $[f^{-1}] \in [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$, $[f]$ morfizminin tersidir.

Böylece (i), (ii) ve (iii) den $([(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)], \bullet)$ bir grup olur.

Şimdi $(Y, \cdot)$ bir değişmeli grup ise $([(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)], \bullet)$ nın da değişmeli bir grup olduğunu gösterelim.

$(Y, \cdot)$ değişmeli bir grup ise Teorem 3.2.6 dan $(FC(X, Y), *)$ de bir değişmeli grup olur.
$\forall[f], [g] \in [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ için,

$$\begin{aligned}[f] \bullet [g] &= [f * g] \\ &= [g * f] \\ &= [g] \bullet [f]\end{aligned}$$

olduğundan $([(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)], \bullet)$ da değişmeli bir grup olur.

Teorem 4.2: (Y, τ', e_λ) bir fuzzy topolojik grup olsun. Bu durumda π^Y, noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kofunktordur.

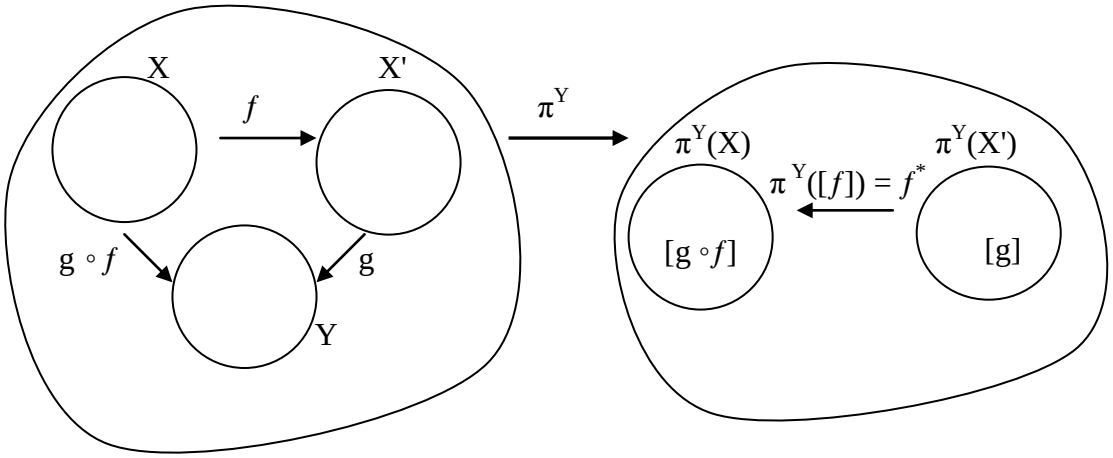
İspat: Noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinde, nesneler noktalı fuzzy topolojik uzaylar, morfizmler ise taban noktalarını koruyan fuzzy sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarıdır. (X, x_λ), noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinde herhangi bir nesne ise (X, x_λ) ile (Y, τ', e_λ) arasında morfizmlerin cümlesi

$$\hom(X, Y) = [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$$

olur. Dolayısıyla $\pi^Y(X) = \hom(X, Y)$ şeklinde tanımlı olduğundan, gruplar ve homomorfizmleri kategorisinde nesneler,

$$\pi^Y((X, x_\lambda)) = [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$$

dir.



Şekil 4.1 Noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine π^Y funktoru

(X', x'_λ) noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinde herhangi bir nesne ve $[f] \in [(X, x_\lambda); (X', x'_\lambda)]$ herhangi bir morfizm olsun. $[g] \in [(X', x'_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ olmak üzere,

$$\pi^Y([f]) = f^*: [(X', x'_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)] \rightarrow [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$$

morfizmi Tanım 2.9 dan,

$$f^*([g]) = [g] \circ f = [g \circ f]$$

şeklinde tanımlanır.

$[(X', x'_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ ve $[(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ birer grup olduğundan, f^* gruplar arasında bir morfizmdir. Şimdi f^* ın bir homomorfizm olduğunu gösterelim.

$[g'], [g''] \in [(X', x'_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ olsun.

$$\begin{aligned} f^*([g'] \bullet [g'']) &= f^*([g' * g'']) \\ &= [(g' * g'') \circ f] \\ &= [(g' \circ f) * (g'' \circ f)] \\ &= [g' \circ f] \bullet [g'' \circ f] \\ &= f^*([g']) \bullet f^*([g'']) \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla f^* bir homomorfizmdir.

π^Y nin bir kofunktor olduğunu gösterelim.

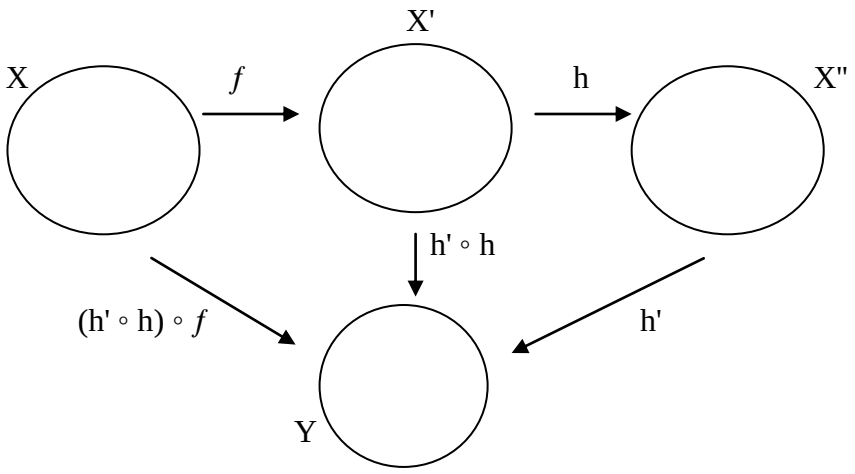
$[1_X] \in [(X, x_\lambda); (X, x_\lambda)]$ noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinde özdeş morfizm olsun. Bu durumda

$$\pi^Y([1_X]) : [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)] \rightarrow [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$$

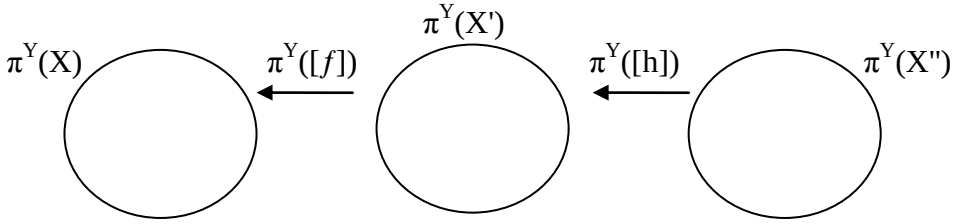
morfizmi için,

$\pi^Y([1_X]) = 1_X^*$ ve $[g] \in [(X, x_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ ise $1_X^*([g]) = [g \circ 1_X] = [g]$

olduğundan $\pi^Y([1_X])$ morfizmi de özdeştir.



Şekil 4.2 Noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisi



Şekil 4.3 Gruplar ve homomorfizmleri kategorisi

$h : X' \to X''$, $\pi^Y([h]) = h^*$ ve $h' \in [(X'', x''_\lambda); (Y, \tau', e_\lambda)]$ olmak üzere,

$$\pi^Y([h])([h']) = [h' \circ h] \tag{4.1}$$

ve

$$\begin{aligned}\pi^Y([f])([h' \circ h]) &= [(h' \circ h) \circ f] \\ &= [h' \circ (h \circ f)] \\ &= \pi^Y([h \circ f])([h'])\end{aligned} \tag{4.2}$$

dir. Böylece (4.1) ve (4.2)'den,

$$\begin{aligned}\pi^Y([f])([h' \circ h]) &= \pi^Y([f])(\pi^Y([h])([h'])) \\ &= (\pi^Y([f]) \circ \pi^Y([h]))([h'])\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla

$$\pi^Y([h \circ f]) = \pi^Y([f]) \circ \pi^Y([h])$$

dir. π^Y, özdeşliği ve kompozisyonu koruduğundan bir kofunktordur.

5. FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA HOPF GRUBU

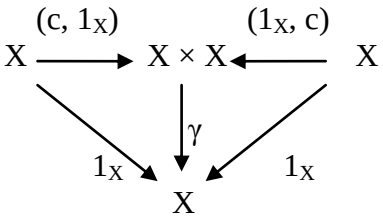
Bu bölümde öncelikle Hopf uzay ve Hopf grubun tanımları ve bazı önemli özellikleri verilmiştir. Daha sonra noktalı fuzzy topolojik uzaylarda Hopf grup özelliği araştırılmış ve Hopf grup olma özelliğinin homotopik invaryant olduğu gösterilmiştir.

5.1. Hopf Uzayı ve Hopf Grubu

Tanım 5.1.1: (X, x_0) bir noktalı topolojik uzay, $\gamma: X \times X \to X$ bir sürekli çarpım ve

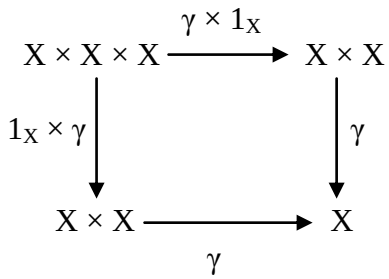
$$c: X \to X,$$
$$x \to c(x) = x_0$$

sabit bir fonksiyon olmak üzere,



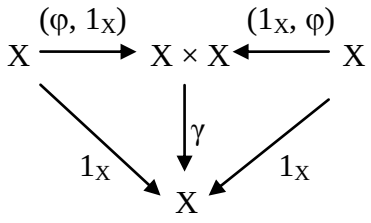
diyagramı $\gamma \circ (1_X, c) \sim 1_X$ ve $\gamma \circ (c, 1_X) \sim 1_X$ homotopilerini sağlıyorsa X e, Hopf uzayı, c ye ise homotopi özdeşlik denir. Burada 1_X: $X \to X$ özdeş dönüşüm ve $\forall x \in X$ için, $(c, 1_X)(x) = (c(x), 1_X(x)) = (x_0, x)$ dir (Park 1969).

Tanım 5.1.2: (X, x_0) bir noktalı topolojik uzay ve $\gamma: X \times X \to X$ bir sürekli çarpım olsun. Eğer,



diyagramı homotopi değişmeli, yani $\gamma \circ (\gamma \times 1_X) \sim \gamma \circ (1_X \times \gamma)$ ise γ çarpımına homotopi birleşmeli denir (Spanier 1966).

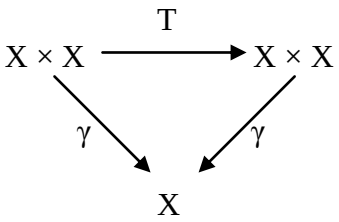
Tanım 5.1.3: (X, x_0) bir noktalı topolojik uzay ve $\gamma: X \times X \rightarrow X$ bir sürekli çarpım olsun. Bir $\varphi: X \rightarrow X$ sürekli dönüşümü için,



diyagramı $\gamma \circ (\varphi, 1_X) \sim 1_X \sim \gamma \circ (1_X, \varphi)$ homotopilerini sağlıyorsa φ ye homotopi invers denir.

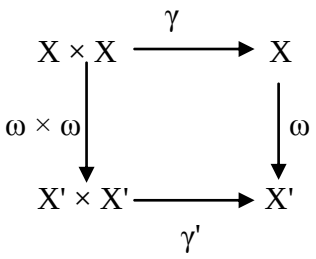
Tanım 5.1.4: Homotopi inversli ve homotopi birleşmeli bir Hopf uzayına, Hopf grubu denir (Switzer 1975).

Tanım 5.1.5: X bir Hopf uzayı, $\gamma: X \times X \rightarrow X$ sürekli çarpım ve $T(p_1, p_2) = (p_2, p_1)$ olmak üzere,



diyagramı homotopi değişmeli yani, $\gamma \circ T \sim \gamma$ ise γ ye homotopi değişmeli denir.

Tanım 5.1.6: X ve X' topolojik uzayları Hopf uzayı, γ, γ' sırasıyla X ve X' nin çarpmaları ve ω: X → X' bir sürekli fonksiyon olsun. Eğer,



diyagramı homotopi değişmeli, yani γ' ∘ (ω × ω) ~ ω ∘ γ ise, ω ya Hopf homomorfizm denir.

5.2. Fuzzy Topolojik Uzaylarda Hopf Grubu

Bu kısımda öncelikle bir fuzzy topolojik grubun bir Hopf grubu olduğu gösterilmiş, daha sonra Hopf uzay ve Hopf grup özellikleri noktalı fuzzy topolojik uzaylarda incelenmiştir.

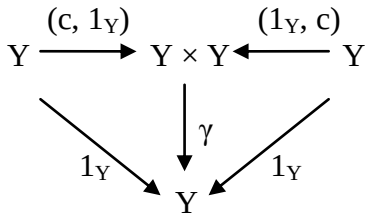
Teorem 5.2.1: (Y, τ', e_λ) fuzzy topolojik grubu bir Hopf grubudur (Göçer 2007).

İspat:

1. (Y, τ', e_λ) fuzzy topolojik grup olduğundan

$$\gamma: Y \times Y \rightarrow Y$$
$$(x, y) \rightarrow \gamma(x, y) = x \cdot y$$

çarpması fuzzy süreklidir. Ayrıca c:Y → Y, y → c(y) = e sabit fonksiyon olmak üzere,

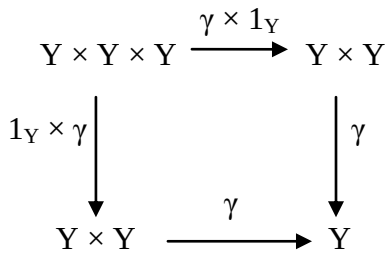


$\gamma \circ (c, 1_Y)(y) = \gamma(c(y), 1_Y(y)) = \gamma(e, y) = e \cdot y = y$

$\gamma \circ (1_Y, c)(y) = \gamma(1_Y(y), c(y)) = \gamma(y, e) = y \cdot e = y$

olduğundan $\gamma \circ (c, 1_Y) \sim 1_Y \sim \gamma \circ (1_Y, c)$ dir. Yani c homotopi özdeşliktir.

2.



diyagramının homotopi değişmeli olduğunu gösterelim.

$$(\gamma \circ (\gamma \times 1_Y))(x, y, z) = \gamma((\gamma \times 1_Y)(x, y, z))$$
$$= \gamma(\gamma(x, y), 1_Y(z))$$
$$= \gamma(x \cdot y, z)$$
$$= (x \cdot y) \cdot z$$

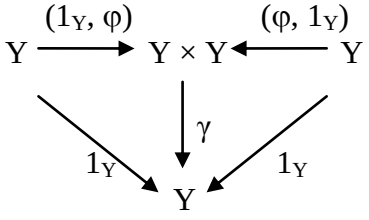
$$(\gamma \circ (1_Y \times \gamma))(x, y, z) = \gamma((1_Y \times \gamma)(x, y, z))$$
$$= \gamma(1_Y(x), \gamma(y, z))$$
$$= \gamma(x, (y \cdot z))$$
$$= x \cdot (y \cdot z)$$

ve $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ olduğundan $\gamma \circ (\gamma \times 1_Y) \sim \gamma \circ (1_Y \times \gamma)$ dır. Yani γ fuzzy homotopi birleşmelidir.

3. (Y, τ', e_λ) fuzzy topolojik grup olduğundan

$$\varphi: Y \to Y,$$
$$y \to \varphi(y) = y^{-1}$$

fonksiyonu fuzzy süreklidir. Ayrıca,



$$\gamma \circ (1_Y, \varphi)(y) = \gamma(1_Y(y), \varphi(y)) = \gamma(y, y^{-1}) = y \cdot y^{-1} = e = c(y)$$

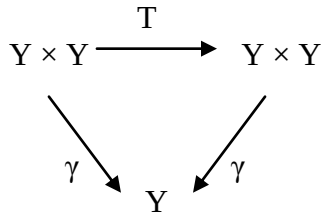
$\gamma \circ (\varphi, 1_Y)(y) = \gamma(\varphi(y), 1_Y(y)) = \gamma(y^{-1}, y) = y^{-1} \cdot y = e = c(y)$

olduğundan

$$\gamma \circ (1_Y, \varphi) \sim c \sim \gamma \circ (\varphi, 1_Y)$$

dir. Yani φ fonksiyonu, γ ve Y için homotopi inverstir. Böylece (Y, τ', e_λ) fuzzy topolojik grubu bir Hopf grubudur.

Eğer $(Y, \cdot)$ grubu değişmeli ise (Y, τ', e_λ) fuzzy topolojik grubu bir değişmeli Hopf grubudur. Gerçekten, $T(x, y) = (y, x)$ olmak üzere,



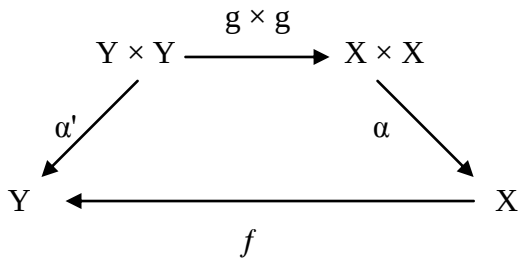
üçgeni homotopi değişmelidir. Yani,

$$(\gamma \circ T)(x, y) = \gamma(T(x, y)) = \gamma(y, x) = y \cdot x = x \cdot y = \gamma(x, y)$$

olduğundan $\gamma \circ T \sim \gamma$ dir. Dolayısıyla (Y, τ', e_λ) fuzzy topolojik grubu bir değişmeli Hopf grubudur.

Teorem 5.2.2: (X, x_λ) ve (Y, y_λ) aynı homotopi tipinden noktalı fuzzy topolojik uzaylar olsun. Bu durumda (X, x_λ) bir Hopf uzayı ise (Y, y_λ) de bir Hopf uzayıdır.

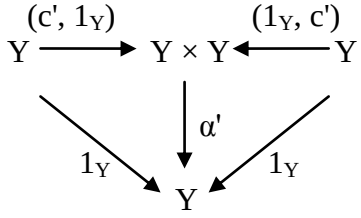
İspat: f: $(X, x_\lambda) \to (Y, y_\lambda)$ bir fuzzy sürekli fonksiyon olsun. X ve Y aynı homotopi tipinde olduklarından $f \circ g \sim 1_Y$ ve $g \circ f \sim 1_X$ olacak biçimde bir g: $(Y, y_\lambda) \to (X, x_\lambda)$ fuzzy sürekli fonksiyonu vardır. X üzerindeki fuzzy sürekli çarpım α: $X \times X \to X$ olsun. Bir α' fonksiyonunu $\alpha' = f \circ \alpha \circ (g \times g)$ şeklinde tanımlayalım.



olduğundan α': Y × Y → Y fonksiyonu, Y de bir fuzzy sürekli çarpım olur.

$$c: X \to X \qquad z \to c(z) = x \qquad\qquad c': Y \to Y \qquad v \to c'(v) = y$$

sabit fonksiyonlar olsun.



diyagramının $\alpha' \circ (1_Y, c') \sim 1_Y \sim \alpha' \circ (c', 1_Y)$ homotopilerini sağladığını gösterelim.

(i) $\forall v \in Y$ için,

$$\begin{aligned}
(\alpha' \circ (1_Y, c'))(v) &= \alpha'(1_Y(v), c'(v)) \\
&= \alpha'(v, y) \\
&= (f \circ \alpha \circ (g \times g))(v, y) \\
&= (f \circ \alpha)(g(v), g(y)) && (g \text{ taban noktasını korur} \Rightarrow g(y) = x) \\
&= f\big(\alpha(g(v), x)\big) \\
&= f\big(\alpha\big(g(v), c(g(v))\big)\big) && (\forall z \in X,\ c(z)=x \Rightarrow c(g(v)) = x) \\
&= (f \circ \alpha)\big(g(v), c(g(v))\big) \\
&= (f \circ \alpha)\big((1_X, c)(g(v))\big) \\
&= (f \circ \alpha \circ (1_X, c))(g(v)) \\
&= (f \circ \alpha \circ (1_X, c) \circ g)(v)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\alpha' \circ (1_Y, c') = f \circ \alpha \circ (1_X, c) \circ g$ olur.

(X, x_λ) bir Hopf uzayı olduğundan $\alpha \circ (1_X, c) \sim 1_X$ dır. Ayrıca $f \circ g \sim 1_Y$ olduğu için,

$\alpha' \circ (1_Y, c') = (f \circ \alpha \circ (1_X, c) \circ g) \sim (f \circ 1_X \circ g) = f \circ g \sim 1_Y \Rightarrow \alpha' \circ (1_Y, c') \sim 1_Y$

dir.

(ii) $\forall v \in Y$ için,

$$
\begin{aligned}
(\alpha' \circ (c', 1_Y))(v) &= \alpha'(c'(v), 1_Y(v)) \\
&= \alpha'(y, v) \\
&= (f \circ \alpha \circ (g \times g))(y, v) \\
&= (f \circ \alpha)(g(y), g(v)) \qquad (g \text{ taban noktasını korur} \Rightarrow g(y) = x) \\
&= (f \circ \alpha)(x, g(v)) \qquad (\forall z \in X,\ c(z)=x \Rightarrow c(g(v)) = x) \\
&= (f \circ \alpha)\big(c(g(v)), g(v)\big) \\
&= (f \circ \alpha \circ (c, 1_X))(g(v)) \\
&= (f \circ \alpha \circ (c, 1_X) \circ g)(v)
\end{aligned}
$$

dir. Dolayısıyla $\alpha' \circ (c', 1_Y) = f \circ \alpha \circ (c, 1_X) \circ g$ olur.

(X, x_λ) bir Hopf uzayı olduğundan $\alpha \circ (c, 1_X) \sim 1_X$ dir. Böylece,

$\alpha' \circ (c', 1_Y) = (f \circ \alpha \circ (c, 1_X) \circ g) \sim (f \circ 1_X \circ g) = f \circ g \sim 1_Y \Rightarrow \alpha' \circ (c', 1_Y) \sim 1_Y$

dir.

Dolayısıyla (i) ve (ii) den

$$\alpha' \circ (1_Y, c') \sim 1_Y \sim \alpha' \circ (c', 1_Y)$$

olup (Y, y_λ) noktalı fuzzy topolojik uzayı da bir Hopf uzayıdır.

Teorem 5.2.3: (X, x_λ) ve (Y, y_λ) aynı homotopi tipinde iki Hopf uzayı olsun. Bu durumda fuzzy eşdeğerlilik bir Hopf homomorfizmdir.

İspat: f: $(X, x_\lambda) \to (Y, y_\lambda)$ bir fuzzy sürekli fonksiyon, g fuzzy eşdeğerlilik ve (X, x_λ) ve (Y, y_λ) Hopf uzaylarının çarpmaları sırasıyla α ve $\alpha' = f \circ \alpha \circ (g \times g)$ olsun.
g nin bir Hopf homomorfizm olduğunu gösterelim.

$$g \circ \alpha' = g \circ (f \circ \alpha \circ (g \times g)) = (g \circ f) \circ (\alpha \circ (g \times g))$$

dir.

Ayrıca $g \circ f \sim 1_X$ olduğundan,

$$(g \circ f) \circ (\alpha \circ (g \times g)) \sim 1_X \circ (\alpha \circ (g \times g)) = \alpha \circ (g \times g)$$

dir. Dolayısıyla

$$g \circ \alpha' \sim \alpha \circ (g \times g)$$

dır. Böylece,

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{\alpha'} & Y \\ {\scriptstyle g \times g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X \times X & \xrightarrow[\alpha]{} & X \end{array}$$

diyagramı homotopi değişmelidir. O halde g bir Hopf homomorfizmdir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} g \circ f \sim 1_X &\Rightarrow (g \times g) \circ (f \times f) \sim 1_{X \times X} \\ &\Rightarrow f \circ \alpha \circ (g \times g) \circ (f \times f) \sim f \circ \alpha \\ &\Rightarrow \alpha' \circ (f \times f) \sim f \circ \alpha \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y & \xrightarrow{\alpha'} & Y \\ {\scriptstyle f \times f}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle f} \\ X \times X & \xrightarrow[\alpha]{} & X \end{array}$$

diyagramı homotopi değişmelidir. Dolayısıyla f de bir Hopf homomorfizmdir.

Teorem 5.2.4: (X, x_λ) bir Hopf grubu, (Y, y_λ), X ile aynı homotopi tipinde bir noktalı fuzzy topolojik uzay olsun. Bu durumda (Y, y_λ) da bir Hopf grubudur.

İspat:

Teorem 5.2.2 den (Y, y_λ) bir Hopf uzayıdır. f: $(X, x_\lambda) \to (Y, y_\lambda)$ bir fuzzy sürekli fonksiyon ve g fuzzy eşdeğerlilik olsun. (X, x_λ) ve (Y, y_λ) Hopf uzaylarının çarpmaları sırasıyla α ve $\alpha' = f \circ \alpha \circ (g \times g)$ olsun. (X, x_λ) bir Hopf grubu olduğundan homotopi birleşmeli ve homotopi inverslidir. Şimdi (Y, y_λ) nın bir Hopf grubu olduğunu gösterelim.

(i) α' fuzzy sürekli çarpımının homotopi birleşmeli olduğunu göstermek için

$$\begin{array}{ccc} Y \times Y \times Y & \xrightarrow{\alpha' \times 1_Y} & Y \times Y \\ \downarrow{\scriptstyle 1_Y \times \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} \\ Y \times Y & \xrightarrow{\alpha'} & Y \end{array}$$

diyagramının homotopi değişmeli olduğunu göstermeliyiz.

$\alpha' \times 1_Y = (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \times 1_Y$ ve

$$(f \times f) \circ (\alpha \times 1_X) \circ (g \times g \times g) = (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \times (f \circ 1_X \circ g)$$
$$= (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \times (f \circ g)$$

dir. Ayrıca,

$$f \circ g \sim 1_Y \Rightarrow (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \times (f \circ g) \sim (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \times 1_Y$$
$$\Rightarrow (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \times (f \circ g) \sim \alpha' \times 1_Y$$
$$\Rightarrow (f \times f) \circ (\alpha \times 1_X) \circ (g \times g \times g) \sim \alpha' \times 1_Y \qquad (5.1)$$

dir. Benzer şekilde,

$1_Y \times \alpha' = 1_Y \times (f \circ \alpha \circ (g \times g))$

ve

$$(f \times f) \circ (1_X \times \alpha) \circ (g \times g \times g) = (f \circ 1_X \circ g) \times (f \circ \alpha \circ (g \times g))$$
$$= (f \circ g) \times (f \circ \alpha \circ (g \times g))$$

dir.

$$f \circ g \sim 1_Y \Rightarrow (f \circ g) \times (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \sim 1_Y \times (f \circ \alpha \circ (g \times g))$$
$$\Rightarrow (f \circ g) \times (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \sim 1_Y \times \alpha'$$
$$\Rightarrow (f \times f) \circ (1_X \times \alpha) \circ (g \times g \times g) \sim 1_Y \times \alpha'$$

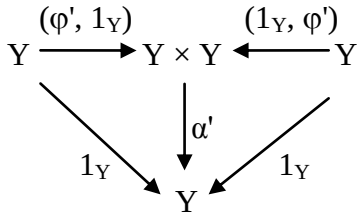
dir. α homotopi birleşmeli olduğundan,

$$\alpha \times 1_X \sim 1_X \times \alpha \Rightarrow (f \times f) \circ (\alpha \times 1_X) \circ (g \times g \times g) \sim (f \times f) \circ (1_X \times \alpha) \circ (g \times g \times g)$$
$$\Rightarrow (f \times f) \circ (\alpha \times 1_X) \circ (g \times g \times g) \sim 1_Y \times \alpha' \qquad (5.2)$$

dir. (5.1) ve (5.2)'den,

$$\alpha' \times 1_Y \sim 1_Y \times \alpha' \Rightarrow \alpha' \circ (\alpha' \times 1_Y) \sim \alpha' \circ (1_Y \times \alpha')$$
$$\Rightarrow \alpha' \text{ homotopi birleşmelidir.}$$

(ii) φ: $(X, x_\lambda) \rightarrow (X, x_\lambda)$ fuzzy sürekli dönüşümü X ve α için homotopi invers olmak üzere, bir φ' fonksiyonunu $\varphi' = f \circ \varphi \circ g$ şeklinde tanımlayalım.



$$(g \times g) \circ (1_Y, \varphi') = (g \circ 1_Y, g \circ \varphi')$$
$$= (g, g \circ (f \circ \varphi \circ g))$$

olur.

Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
g \circ f \sim 1_X \Rightarrow & (g, (g \circ f) \circ \varphi \circ g) \sim (g, 1_X \circ \varphi \circ g)) \\
\Rightarrow & (g, (g \circ f) \circ \varphi \circ g) \sim (g, \varphi \circ g)) \\
\Rightarrow & (g \times g)) \circ (1_Y, f \circ \varphi \circ g) \sim (g, \varphi \circ g) = (1_X, \varphi) \circ g \\
\Rightarrow & (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \circ (1_Y, f \circ \varphi \circ g) \sim f \circ \alpha \circ (1_X, \varphi) \circ g \\
\Rightarrow & \alpha' \circ (1_Y, \varphi') \sim f \circ \alpha \circ (1_X, \varphi) \circ g && (\alpha \circ (1_X, \varphi) \sim 1_X) \\
\Rightarrow & \alpha' \circ (1_Y, \varphi') \sim f \circ 1_X \circ g \\
\Rightarrow & \alpha' \circ (1_Y, \varphi') \sim f \circ g && (f \circ g \sim 1_Y) \\
\Rightarrow & \alpha' \circ (1_Y, \varphi') \sim 1_Y
\end{aligned}
$$

ve

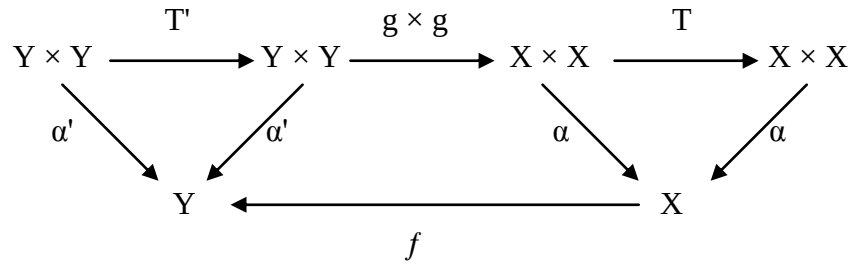
$$
\begin{aligned}
(g \times g) \circ (\varphi', 1_Y) &= (g \times g) \circ (f \circ \varphi \circ g, 1_Y) \\
&= (g \circ f \circ \varphi \circ g, g \circ 1_Y) \\
&= (g \circ f \circ \varphi \circ g, g) && (g \circ f \sim 1_X) \\
&\Rightarrow (g \circ f \circ \varphi \circ g, g) \sim (\varphi \circ g, g) \\
&\Rightarrow (g \times g) \circ (f \circ \varphi \circ g, 1_Y) \sim (\varphi \circ g, g) = (\varphi, 1_X) \circ g \\
&\Rightarrow (f \circ \alpha \circ (g \times g)) \circ (f \circ \varphi \circ g, 1_Y) \sim f \circ \alpha \circ (\varphi, 1_X) \circ g \\
&\Rightarrow \alpha' \circ (\varphi', 1_Y) \sim f \circ \alpha \circ (\varphi, 1_X) \circ g && (\alpha \circ (\varphi, 1_X) \sim 1_X) \\
&\Rightarrow \alpha' \circ (\varphi', 1_Y) \sim f \circ 1_X \circ g \\
&\Rightarrow \alpha' \circ (\varphi', 1_Y) \sim f \circ g && (f \circ g \sim 1_Y) \\
&\Rightarrow \alpha' \circ (\varphi', 1_Y) \sim 1_Y
\end{aligned}
$$

dır. Böylece φ', Y ve α' için bir homotopi inverstir. Dolayısıyla (Y, y_λ) bir Hopf grubudur.

Teorem 5.2.5: (X, x_λ) noktalı fuzzy topolojik uzayı homotopi değişmeli bir Hopf grubu olsun. Bu durumda (X, x_λ) ile aynı homotopi tipinde olan bir noktalı fuzzy topolojik uzay da homotopi değişmeli bir Hopf gruptur.

İspat: (Y, y_λ) Hopf grubu, (X, x_λ) ile aynı homotopi tipinde olan bir noktalı fuzzy topolojik uzay, f ve g fuzzy eşdeğerlilikler olsun. (Y, y_λ) nın bir Hopf grubu olduğu Teorem 5.2.4 te ispatlanmıştır.

(X, x_λ) ve (Y, y_λ) Hopf uzaylarının çarpmaları Teorem 5.2.2 deki gibi tanımlansın.
α homotopi değişmeli ise α' nün de homotopi değişmeli olduğunu gösterelim.



α homotopi değişmeli olduğundan T(a, b) = (b, a) olmak üzere, α ∘ T ~ α dır.
∀c, d∈Y için T'(c, d) = (d, c) olsun. Bu durumda,

$$((g \times g) \circ T')(c, d) = ((g \times g)(T'(c, d))$$
$$= (g \times g)(d, c)$$
$$= (g(d), g(c))$$
$$(T \circ (g \times g))(c, d) = T(g(c), g(d))$$
$$= (g(d), g(c))$$

olduğundan $(g \times g) \circ T' \sim T \circ (g \times g)$ dir. Dolayısıyla,

$$(g \times g) \circ T' \sim T \circ (g \times g) \Rightarrow f \circ \alpha \circ (g \times g) \circ T' \sim f \circ \alpha \circ T \circ (g \times g) \qquad (\alpha \circ T \sim \alpha)$$
$$\Rightarrow f \circ \alpha \circ (g \times g) \circ T' \sim f \circ \alpha \circ (g \times g)$$
$$\Rightarrow \alpha' \circ T' \sim \alpha'$$

olup α' de homotopi değişmelidir.

Teorem 5.2.6: (X, x_λ) noktalı fuzzy topolojik uzayı bir Hopf uzayı, $\alpha: X \times X \to X$ fuzzy sürekli çarpım ve (Y, y_λ) bir noktalı fuzzy topolojik uzay olsun. $[(Y, y_\lambda); (X, x_\lambda)]$ uzayı üzerinde $\forall[f], [g] \in [(Y, y_\lambda); (X, x_\lambda)]$ için,

$$[f] \otimes [g] = [\alpha \circ (f, g)]$$

şeklinde bir işlem tanımlansın. Bu durumda (X, x_λ) bir Hopf grubu ise, $[(Y, y_\lambda); (X, x_\lambda)]$ tanımlanan işlem ile bir grup olur.

İspat:

i) Birleşme özelliği:

$\forall[g_1], [g_2], [g_3] \in [(Y, y_\lambda); (X, x_\lambda)]$ için,

$$[g_1] \otimes ([g_2] \otimes [g_3]) = [g_1] \otimes ([\alpha \circ (g_2, g_3)])$$
$$= [\alpha \circ (g_1, \alpha \circ (g_2, g_3))]$$

$$([g_1] \otimes [g_2]) \otimes [g_3] = [\alpha \circ (g_1, g_2)] \otimes [g_3]$$
$$= [\alpha \circ (\alpha \circ (g_1, g_2), g_3))]$$

dir.

$$(1_X \times \alpha) \circ (g_1, (g_2, g_3)) = (g_1, \alpha \circ (g_2, g_3))$$
$$(\alpha \times 1_X) \circ ((g_1, g_2), g_3)) = (\alpha \circ (g_1, g_2), g_3)$$

olduğundan,

$$[\alpha \circ (1_X \times \alpha) \circ (g_1, (g_2, g_3))] = [\alpha \circ (g_1, \alpha \circ (g_2, g_3))]$$
$$[\alpha \circ (\alpha \times 1_X) \circ ((g_1, g_2), g_3))] = [\alpha \circ (\alpha \circ (g_1, g_2), g_3)]$$

dir.

α homotopi birleşmeli $\Rightarrow \alpha \circ (1_X \times \alpha) \sim \alpha \circ (\alpha \times 1_X)$

$$\Rightarrow \alpha \circ (1_X \times \alpha) \circ (g_1, (g_2, g_3)) \sim \alpha \circ (\alpha \times 1_X) \circ ((g_1, g_2), g_3))$$
$$\Rightarrow [\alpha \circ (1_X \times \alpha) \circ (g_1, (g_2, g_3))] = [\alpha \circ (\alpha \times 1_X) \circ ((g_1, g_2), g_3))]$$
$$\Rightarrow [\alpha \circ (g_1, \alpha \circ (g_2, g_3))] = [\alpha \circ (\alpha \circ (g_1, g_2), g_3)]$$
$$\Rightarrow [g_1] \otimes ([g_2] \otimes [g_3]) = ([g_1] \otimes [g_2]) \otimes [g_3]$$

ii) Birim eleman özelliği:

h: $(Y, y_\lambda) \to (X, x_\lambda)$ fonksiyonu $a \to h(a) = x$ şeklinde tanımlı olsun.

$$c: X \to X, z \to c(z) = x$$

sabit fonksiyon olmak üzere $\forall [g] \in [(Y, y_\lambda); (X, x_\lambda)]$ için,

$$[g] \otimes [h] = [\alpha \circ (g, h)]$$

ve $\forall a \in Y$ için,

$(\alpha \circ (g, h))(a) = \alpha(g(a), h(a)) = \alpha(g(a), x)$

ve

$(\alpha \circ (1_X, c) \circ g)(a) = (\alpha \circ (1_X, c))(g(a)) = \alpha(g(a), c(g(a))) = \alpha(g(a), x)$

dir. Dolayısıyla

$$\alpha \circ (g, h) = \alpha \circ (1_X, c) \circ g$$

olur. Ayrıca $\alpha \circ (1_X, c) \sim 1_X$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \alpha \circ (1_X, c) \circ g \sim 1_X \circ g = g &\Rightarrow [\alpha \circ (1_X, c) \circ g] = [g] \\ &\Rightarrow [\alpha \circ (g, h)] = [g] \\ &\Rightarrow [g] \otimes [h] = [g] \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $[h] \in [Y, y_\lambda; X, x_\lambda]$ birim elemandır.

iii) Ters eleman özelliği:

$\varphi: (X, x_\lambda) \to (X, x_\lambda)$, α ve X için homotopi invers ve $g: (Y, y_\lambda) \to (X, x_\lambda)$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $[\varphi \circ g] \in [(Y, y_\lambda); (X, x_\lambda)]$ dir.

$$\alpha \circ (g, \varphi \circ g) = \alpha \circ (1_X \circ g, \varphi \circ g) = \alpha \circ (1_X, \varphi) \circ g$$

olduğundan

$$[g] \otimes [\varphi \circ g] = [\alpha \circ (g, \varphi \circ g)] = [\alpha \circ (1_X, \varphi) \circ g] \qquad (5.3)$$

dir. $\forall a \in Y$ için,

$$(c \circ g)(a) = c(g(a)) = x \text{ ve } h(a) = x$$

olduğundan $c \circ g = h$ dir.

Ayrıca $\alpha \circ (1_X, \varphi) \sim c$ olduğundan

$$\alpha \circ (1_X, \varphi) \circ g \sim c \circ g = h \Rightarrow [\alpha \circ (1_X, \varphi) \circ g] = [h] \tag{5.4}$$

olur. Dolayısıyla (5.3) ve (5.4)'ten,

$$[g] \otimes [\varphi \circ g] = [h] \in [(Y, y_\lambda); (X, x_\lambda)]$$

dır. Benzer şekilde $[\varphi \circ g] \otimes [g] = [h]$ olduğu da gösterilebilir. Böylece $[\varphi \circ g]$, $[g]$ nin ters elemanıdır.

Teorem 5.2.7: (Y, y_λ) noktalı fuzzy topolojik uzayı bir Hopf grubu olsun. Bu durumda π^Y, noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinden, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kofunktordur.

İspat: α: $Y \times Y \to Y$ fuzzy sürekli çarpım, (X, x_λ) ve (Z, z_λ) noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinde herhangi iki nesne ve f: $(X, x_\lambda) \to (Z, z_\lambda)$ bir morfizm olsun. Teorem 4.2.2'den, gruplar ve homomorfizmleri kategorisinde nesnelerin,

$$\pi^Y(X, x_\lambda) = [(X, x_\lambda); (Y, y_\lambda)]$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$\pi^Y(f) = f^*:[(Z, z_\lambda); (Y, y_\lambda)] \to [(X, x_\lambda); (Y, y_\lambda)]$$
$$[g] \qquad \to f^*([g]) = [g] \circ f = [g \circ f]$$

morfizminin bir homomorfizm olduğunu gösterelim.

$\forall [g_1], [g_2] \in [(Z, z_\lambda); (Y, y_\lambda)]$ için,

$$f^*([g_1] \otimes [g_2]) = f^*([\alpha \circ (g_1, g_2)]) = [(\alpha \circ (g_1, g_2)) \circ f] = [\alpha \circ (g_1 \circ f, g_2 \circ f)]$$

ve

$$(f^*([g_1])) \otimes (f^*([g_2])) = ([g_1] \circ f) \otimes ([g_2] \circ f)$$
$$= [g_1 \circ f] \otimes [g_2 \circ f]$$
$$= [\alpha \circ (g_1 \circ f, g_2 \circ f)]$$

olur. Böylece

$$f^*([g_1] \otimes [g_2]) = (f^*([g_1])) \otimes (f^*([g_2]))$$

dir. Dolayısıyla π^Y, noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisindeki morfizmleri homomorfizmlere götürmektedir.

π^Y nin bir kofunktor olduğu Teorem 4.2.2'de ispatlanmıştır.

6. KAPALI FUZZY EĞRİ UZAYINDA HOPF GRUBU

Bu bölümde ilk olarak fuzzy eğri kavramı ve bazı özellikleri verilmiştir. Daha sonra kapalı fuzzy eğri uzayı tanımlanarak, bir kapalı fuzzy eğri uzayının Hopf grubu olduğu gösterilmiştir.

6.1. Kapalı Fuzzy Eğri Uzayı

Tanım 6.1.1: (X, τ) bir fuzzy topolojik uzay olsun. Eğer,

$$\alpha : (I, \tilde{\varepsilon_I}) \rightarrow (X, \tau)$$

fuzzy sürekli bir fonksiyon ve $\mu_A(0) > 0$, $\mu_A(1) > 0$ şartlarını sağlayan A fuzzy kümesi $(I, \tilde{\varepsilon_I})$ da fuzzy irtibatlı bir küme ise, $\alpha(A)$ fuzzy kümesine (X, τ) da bir fuzzy eğri denir.

$$(\alpha(0))_{\mu_{A(0)}} = \alpha(0_{\mu_{A(0)}})$$
$$(\alpha(1))_{\mu_{A(1)}} = \alpha(1_{\mu_{A(1)}})$$

noktalarına sırasıyla $\alpha(A)$ fuzzy eğrisinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

$\alpha^{-1} : (I, \tilde{\varepsilon_I}) \rightarrow (X, \tau)$ olmak üzere,

$$\alpha^{-1}(x_{\mu_{A(x)}}) = \alpha((1-x)_{\mu_{A(1-x)}})$$

şeklinde tanımlı olan $\alpha^{-1}(A)$ fuzzy kümesine, $\alpha(A)$ fuzzy eğrisinin tersi denir.

Eğer α fuzzy sürekli fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise, $\alpha(A)$ ya (X, τ) da bir fuzzy sıfır eğri denir (Guner ve Balci 2007).

Tanım 6.1.2: $\alpha(A)$ ve $\beta(B)$ bir (X, τ) fuzzy topolojik uzayında fuzzy eğriler ve,

$$\alpha(1_{\mu_{A(1)}}) = \beta(0_{\mu_{B(0)}})$$

olsun. Bu durumda,

$$\mu_C(t) = \begin{cases} \mu_A(2t) & , 0 \leq t \leq ½ \\ \mu_B(2t-1) & , ½ \leq t \leq 1 \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\gamma(C)(t_{\mu_{C(t)}}) = (\alpha(A)\beta(B))(t_{\mu_{C(t)}}) = \begin{cases} \alpha((2t)_{\mu_{A(2t)}}) & , 0 \leq t \leq ½ \\ \beta((2t-1)_{\mu_{B(2t-1)}}) & , ½ \leq t \leq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\gamma(C)$ fuzzy eğrisine $\alpha(A)$ ve $\beta(B)$ fuzzy eğrilerinin çarpımı denir ve $\gamma(C) = \alpha(A)\beta(B)$ şeklinde gösterilir. Burada C fuzzy kümesi $(I, \tilde{\varepsilon_I})$ da fuzzy irtibatlı ve $\mu_C(0) > 0$, $\mu_C(1) > 0$ olur.

Teorem 6.1.1: f:$(X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ bir fuzzy sürekli fonksiyon, $\alpha(A)$ ve $\beta(B)$, (X, τ) fuzzy topolojik uzayında fuzzy eğriler ve,

$$\alpha(1_{\mu_{A(1)}}) = \beta(0_{\mu_{A(0)}})$$

olsun. Bu durumda,

$$f((\alpha(A)\beta(B))(t)) = \begin{cases} f(\alpha((2t)_{\mu_{A(2t)}})) & , 0 \leq t \leq ½ \\ f(\beta((2t-1)_{\mu_{B(2t-1)}})) & , ½ \leq t \leq 1 \end{cases}$$

dir (Salleh 1993).

Tanım 6.1.3: (X, x_λ) bir noktalı fuzzy topolojik uzay olsun. (X, x_λ) da başlangıç ve bitim noktaları x_λ ya eşit olan bir $\alpha(A)$ fuzzy eğrisine, (X, x_λ) da x_λ merkezli kapalı fuzzy eğri denir.

$\alpha(A)$, (X, x_λ) da x_λ merkezli bir kapalı fuzzy eğridir $\Leftrightarrow (\alpha(0))_{\mu_{A(0)}} = (\alpha(1))_{\mu_{A(1)}} = x_\lambda$

(X, x_λ) da x_λ merkezli tüm kapalı fuzzy eğrilerin cümlesine kapalı fuzzy eğri uzayı denir ve $\Omega(X, x_\lambda)$ ile gösterilir. Bu uzay fuzzy kompakt–açık topoloji ile bir fuzzy topolojik uzaydır.

6.2 Kapalı Fuzzy Eğri Uzayında Hopf Grubu

$\Omega(X, x_\lambda)$ fuzzy topolojik uzayını, taban noktası $\omega_0(A)$ kapalı fuzzy eğrisi olan bir noktalı fuzzy uzay olarak alabiliriz. Böylece (X, x_λ) nun x_λ daki kapalı fuzzy eğrilerinin cümlesi, fuzzy kompakt–açık topoloji ile, tabanı $\omega_0(A)$ eğrisi olan bir noktalı fuzzy topolojik uzaydır. Bu uzayı $(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ ile gösterelim.

Teorem 6.2.1: $(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ kapalı fuzzy eğri uzayı bir Hopf uzayıdır.

İspat:
$\alpha(B), \beta(C) \in (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ olsun.

$$\gamma(\alpha(B), \beta(C))(t) = \begin{cases} \alpha((2t)_{\mu_{B(2t)}}) & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \beta((2t-1)_{\mu_{C(2t-1)}}) & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı bir

$$\gamma: (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \times (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \to (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$$

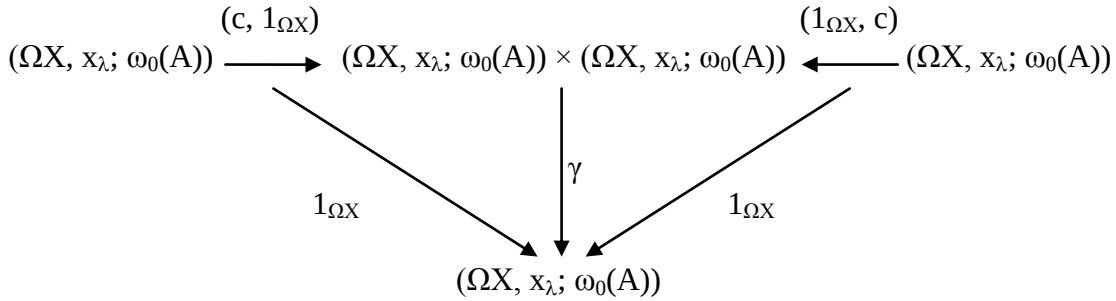
fonksiyonunu alalım. Teorem 3.2.3'den γ fuzzy süreklidir.

γ fuzzy sürekli çarpım, c: $(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \to (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ bütün kapalı fuzzy eğrileri $\omega_0(A)$ ya götüren sabit fonksiyon ve

$$1_{\Omega X} : (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \to (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$$
$$\alpha(B) \quad \to 1_{\Omega X}(\alpha(B)) = \alpha(B)$$

birim fonksiyon olsun.

Şimdi



diyagramının

$$\gamma \circ (1_{\Omega X}, c) \sim 1_{\Omega X} \sim \gamma \circ (c, 1_{\Omega X})$$

homotopilerini sağladığını gösterelim.

$$(\gamma \circ (1_{\Omega X}, c))(\alpha(B))(t) = \gamma(\alpha(B), \omega_0(A))(t) = \begin{cases} \alpha((2t)_{\mu_{B(2t)}}) & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ x_\lambda & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$(\gamma \circ (c, 1_{\Omega X}))(\alpha(B))(t) = \gamma(\omega_0(A), \alpha(B))(t) = \begin{cases} x_\lambda & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha((2t-1)_{\mu_{B(2t-1)}}) & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

ve

$(1_{\Omega X})(\alpha(B))(t) = \alpha(B)(t) = \alpha(t_{\mu_{B(t)}})$

dir. Bir $F : (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \to (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ fonksiyonunu,

$$F(\alpha(B), t)(t') = \begin{cases} \alpha(^{2t'}/_{1+t})_{\mu_{B((2t'/1+t)}} & , 0 \le t' \le {}^{1+t}/_{2} \\ x_\lambda & , {}^{1+t}/_{2} \le t' \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. F fonksiyonu fuzzy süreklidir. Ayrıca,

$$F(\alpha(B), 0)(t') = \begin{cases} \alpha(2t')_{\mu_{B(2t')}} & , 0 \le t' \le \frac{1}{2} \\ x_\lambda & , \frac{1}{2} \le t' \le 1 \end{cases}$$

$$= (\gamma \circ (1_{\Omega X}, c))(\alpha(B))(t')$$

$$F(\alpha(B), 1)(t') = \alpha(t')_{\mu_{B(t')}}$$

$$= (1_{\Omega X})(\alpha(B))(t')$$

olduğundan $\gamma \circ (1_{\Omega X}, c) \sim 1_{\Omega X}$ dir. Benzer şekilde $1_{\Omega X} \sim \gamma \circ (c, 1_{\Omega X})$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla

$$\gamma \circ (1_{\Omega X}, c) \sim 1_{\Omega X} \sim \gamma \circ (c, 1_{\Omega X})$$

homotopileri sağlandığından $(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ kapalı fuzzy eğri uzayı bir Hopf uzayıdır.

Teorem 6.2.2: $(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ kapalı fuzzy eğri uzayı bir Hopf grubudur.

İspat:

(i) γ: $(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \times (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \to (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ fuzzy sürekli çarpımı Teorem 6.2.1'deki gibi tanımlı olsun.

$(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ kapalı fuzzy eğri uzayının homotopi birleşmeli olduğunu göstermek için,

$$\begin{array}{ccc} (\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A))\times(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))\times(\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A)) & \xrightarrow{\gamma \times 1_{\Omega X}} & (\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A))\times(\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A)) \\ \downarrow{\scriptstyle 1_{\Omega X} \times \gamma} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} \\ (\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A)) \times (\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A)) & \xrightarrow[\gamma]{} & (\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A)) \end{array}$$

diyagramının

$$\gamma \circ (\gamma \circ 1_{\Omega X}) \sim \gamma \circ (1_{\Omega X} \circ \gamma)$$

homotopilerini sağladığını gösterelim.

$(\gamma \circ (\gamma \circ 1_{\Omega X}))(\alpha(B), \beta(C), \zeta(D))(t) = \gamma\,(\gamma\,(\alpha(B), \beta(C)), \zeta(D))(t)$

$$= \begin{cases} \gamma(\alpha(B), \beta(C))(2t) & , 0 \le t \le ½ \\ \zeta(2t-1)_{\mu D(2t-1)} & , ½ \le t \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha(4t)_{\mu B(4t)} & , 0 \le t \le ¼ \\ \beta(4t-1)_{\mu C(4t-1)} & , ¼ \le t \le ½ \\ \zeta(2t-1)_{\mu D(2t-1)} & , ½ \le t \le 1 \end{cases}$$

$(\gamma \circ (1_{\Omega X} \circ \gamma))(\alpha(B), \beta(C), \zeta(D))(t) = \gamma(\alpha(B), \gamma(\beta(C), \zeta(D)))(t)$

$$= \begin{cases} \alpha(2t)_{\mu B(2t)} & , 0 \le t \le ½ \\ \gamma(\beta(C), \zeta(D))(2t-1) & , ½ \le t \le 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \alpha(2t)_{\mu B(2t)} & , 0 \le t \le ½ \\ \beta(4t-2)_{\mu C(4t-2)} & , ½ \le t \le ¾ \\ \zeta(4t-3)_{\mu D(4t-3)} & , ¾ \le t \le 1 \end{cases}$$

dir.

$F : (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \times (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \times (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \to (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ fonksiyonunu,

$$F(\alpha(B), \beta(C), \zeta(D), t)(t') = \begin{cases} \alpha(^{4t'}/_{1+t})_{\mu B(4t'/1+t)} & , 0 \le t' \le {}^{1+t}/_{4} \\ \beta(4t'-t-1)_{\mu C(4t'-t-1)} & , {}^{1+t}/_{4} \le t' \le {}^{t+2}/_{4} \\ \zeta(^{4t'-2-t}/_{2-t}))_{\mu D((4t'-2-t)/(2-t))} & , {}^{t+2}/_{4} \le t' \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$t' = {}^{1+t}/_{4}$ için,

$F(\alpha(B), \beta(C), \zeta(D), t)(^{1+t}/_{4}) = \alpha(1_{\mu B(1)}) = \beta(0_{\mu C(0)}) = x_\lambda$

$t' = {}^{2+t}/_{4}$ için,

$F(\alpha(B), \beta(C), \zeta(D), t)({}^{2+t}/_{4}) = \beta(1_{\mu C(1)}) = \zeta(0_{\mu D(0)}) = x_\lambda$

olduğundan F süreklidir.

$F(\alpha(B), \beta(C), \zeta(D), 0) = (\gamma \circ (\gamma \circ 1_{\Omega X}))(\alpha(B), \beta(C), \zeta(D))$
$F(\alpha(B), \beta(C), \zeta(D), 1) = (\gamma \circ (1_{\Omega X} \circ \gamma))(\alpha(B), \beta(C), \zeta(D))$

dir. Dolayısıyla

$$\gamma \circ (\gamma \circ 1_{\Omega X}) \sim \gamma \circ (1_{\Omega X} \circ \gamma)$$

olup γ homotopi birleşmelidir.

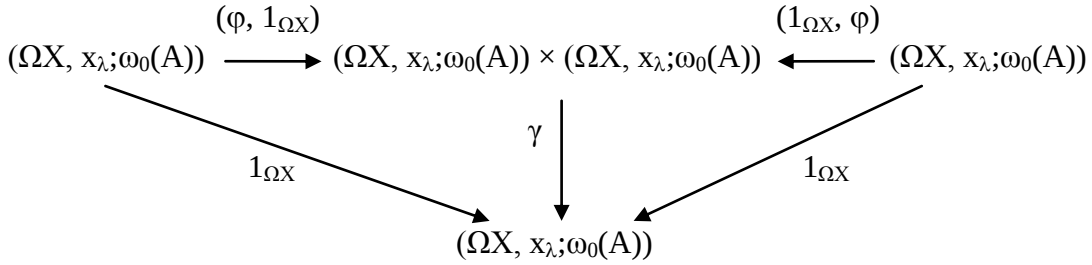
(ii) $(\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ kapalı fuzzy eğri uzayının fuzzy homotopi inversli olduğunu göstermek için,

$$\varphi: (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \rightarrow (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$$

dönüşümü,

$$\varphi(\alpha(B)(t)) = \alpha(B)(1 - t)$$

şeklinde tanımlı olsun.



diyagramının

$$\gamma \circ (\varphi, 1_{\Omega X}) \sim 1_{\Omega X} \sim \gamma \circ (1_{\Omega X}, \varphi)$$

homotopilerini sağladığını gösterelim.

Burada,

$$(\gamma \circ (\varphi, 1_{\Omega X}))(\alpha(B))(t) = \gamma(\alpha(B)(1-t), \alpha(B)(t))$$
$$= \gamma(\alpha^{-1}(B)(t), \alpha(B)(t))$$
$$= \begin{cases} \alpha^{-1}(2t)\mu_{B(2t)} & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1)\mu_{B(2t-1)} & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \alpha(1-2t)\mu_{B(1-2t)} & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2t-1)\mu_{B(2t-1)} & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$(\gamma \circ (1_{\Omega X}, \varphi))(\alpha(B))(t) = \gamma(\alpha(B)(t), \alpha(B)(1-t))$$
$$= \gamma(\alpha(B)(t), \alpha^{-1}(B)(t))$$
$$= \begin{cases} \alpha(2t)\mu_{B(2t)} & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha^{-1}(2t-1)\mu_{B(2t-1)} & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \alpha(2t)\mu_{B(2t)} & ,0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2t)\mu_{B(2-2t)} & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

dir. Şimdi bir $G: (\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A)) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \to (\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A))$ fonksiyonu,

$$G(\alpha(B), t)(t') = \begin{cases} x_\lambda & , 0 \le t' \le t/2 \\ \alpha(1-2t'+t)\mu_{B(1-2t'+t)} & , t/2 \le t' \le \frac{1}{2} \\ \alpha(2t'+t-1)\mu_{B(2t'+t-1)} & , \frac{1}{2} \le t' \le 1-t/2 \\ x_\lambda & , 1-t/2 \le t' \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak,

$t' = t/2 \Rightarrow G(\alpha(B), t)(t/2) = \alpha(1) = x_\lambda$

$t' = \frac{1}{2} \Rightarrow G(\alpha(B), t)(1/2) = \alpha(t)$

$t' = 1-t/2 \Rightarrow G(\alpha(B), t)(1-t/2) = \alpha(1) = x_\lambda$

olduğundan G' süreklidir. Ayrıca,

$G(\alpha(B), 0)(t') = (\gamma \circ (\varphi, 1_{\Omega X}))(\alpha(B)(t'))$

$G(\alpha(B), 1)(t') = \alpha(B)(t') = 1_{\Omega X}(\alpha(B)(t'))$

dir. Dolayısıyla $\gamma \circ (\varphi, 1_{\Omega X}) \sim 1_{\Omega X}$ olur.

G': $(\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A)) \times (I, \tilde{\varepsilon_I}) \to (\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A))$ fonksiyonunu,

$$G'(\alpha(B), t)(t') = \begin{cases} x_\lambda & , 0 \le t' \le {}^t/_2 \\ \alpha(2t'-t)_{\mu B(2t'-t)} & , {}^t/_2 \le t' \le \tfrac{1}{2} \\ \alpha(2-2t'-t)_{\mu B(2-2t'-t)} & , \tfrac{1}{2} \le t' \le 1-{}^t/_2 \\ x_\lambda & , 1-{}^t/_2 \le t' \le 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

$t' = {}^t/_2 \Rightarrow G'(\alpha(B), t)({}^t/_2) = \alpha(0) = x_\lambda$

$t' = \tfrac{1}{2} \Rightarrow G'(\alpha(B), t)({}^1/_2) = \alpha(1-t)$

$t' = 1-{}^t/_2 \Rightarrow G'(\alpha(B), t)(1-{}^t/_2) = \alpha(0) = x_\lambda$

olduğundan G' süreklidir. Ayrıca,

$G'(\alpha(B), 0) = (\gamma \circ (1_{\Omega X}, \varphi))(\alpha(B))$

$G'(\alpha(B), 1) = 1_{\Omega X}(\alpha(B))$

dir. Dolayısıyla,

$$\gamma \circ (1_{\Omega X}, \varphi) \sim 1_{\Omega X}$$

dir.

Böylece φ, γ nın fuzzy homotopi inversidir.

(i) ve (ii) den $(\Omega X, x_\lambda;\omega_0(A))$ kapalı fuzzy eğri uzayı bir Hopf grubudur.

Teorem 6.2.3: (X, x_λ) ve (Y, y_λ) noktalı fuzzy topolojik uzaylar, $(\Omega X; x_\lambda, \omega_0(A))$ ve $(\Omega Y, y_\lambda, \xi_0(B))$ kapalı fuzzy eğri uzayları ve $h: (X, x_\lambda) \to (Y, y_\lambda)$ bir fuzzy sürekli fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\Omega h(\alpha(C))(t) = (h \circ \alpha)(C)(t) = (h \circ \alpha)(t_{\mu C(t)})$$

şeklinde tanımlı

$$\Omega h: (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \to (\Omega Y, y_\lambda; \xi_0(B))$$
$$\alpha(C) \quad \to \Omega h(\alpha(C)) = (h \circ \alpha)(C)$$

fonksiyonu bir fuzzy sürekli homomorfizmdir. Burada Ω ya kapalı eğri funktoru denir.

İspat: h ve α fuzzy sürekli olduklarından $h \circ \alpha = \Omega h$ fonksiyonu da fuzzy süreklidir.
$h \circ \alpha: (I, \tilde{\varepsilon_I}) \to (Y, \tau')$ olduğundan $(h \circ \alpha)(C)$, $(\Omega Y, y_\lambda; \xi_0(B))$ de bir kapalı fuzzy eğridir. Gerçekten,

$\alpha(C)$, x_λ merkezli bir kapalı fuzzy eğri $\Rightarrow \alpha(0_{\mu C(0)}) = \alpha(1_{\mu C(1)}) = x_\lambda$

dir. Dolayısıyla,

$\Omega h(\alpha(C))(0) = h(\alpha(0_{\mu C(0)})) = h(x_\lambda) = y_\lambda$
$\Omega h(\alpha(C))(1) = h(\alpha(1_{\mu C(1)})) = h(x_\lambda) = y_\lambda$

olur. $\forall \alpha(C), \beta(D) \in (\Omega X, x_\lambda, \omega_0(A))$ için,

$$\Omega h(\alpha(C)\beta(D))(t) = h(\alpha(C)\beta(D)(t))$$
$$= \begin{cases} h(\alpha((2t)_{\mu C(2t)})) & , 0 \le t \le ½ \\ h(\beta((2t-1)_{\mu D(2t-1)})) & , ½ \le t \le 1 \end{cases}$$
$$= (\Omega h(\alpha(C))\Omega h(\beta(D)))(t)$$

olduğundan Ωh bir homomorfizmdir.

Teorem 6.2.4: Teorem 6.2.3'de tanımlanan Ω kapalı eğri funktoru noktalı fuzzy topolojik uzayların ve fuzzy sürekli fonksiyonların kategorisinden Hopf grupları ve sürekli homomorfizmleri kategorisine bir kontravaryant funktordur.

İspat:

Ωh nin bir funktor olduğunu gösterelim.

(i) $1_X : X \to X$ fonksiyonu birim fonksiyon olsun. Bu durumda

$\forall \alpha(C) \in (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ için,

$$\Omega 1_X(\alpha(t_{\mu_{C(t)}}) = (1_X \circ \alpha)(t_{\mu_{C(t)}}) = \alpha(t_{\mu_{C(t)}})$$

olur.

(ii) $h: X \to Y$ ve $h': Y \to Z$ fuzzy sürekli homomorfizmler olsun. Bu durumda

$\Omega h : (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \to (\Omega Y, y_\lambda; \xi_0(B))$

$\Omega h' : (\Omega Y, y_\lambda; \xi_0(B)) \to (\Omega Z, z_\lambda; \zeta_0(C))$

$\Omega(h' \circ h): (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A)) \to (\Omega Z, z_\lambda; \zeta_0(C))$

fuzzy sürekli homomorfizmlerdir.

$\alpha(C) \in (\Omega X, x_\lambda; \omega_0(A))$ fuzzy kapalı eğri olmak üzere $h \circ \alpha = \beta$ olsun. Bu durumda $\beta(D)$ fuzzy eğrisi $(\Omega Y, y_\lambda; \xi_0(B))$ de bir fuzzy kapalı eğridir.

$$\begin{aligned}\Omega h'(\beta(t)_{\mu_{D(t)}}) &= (h' \circ \beta)(t_{\mu_{D(t)}}) \\ &= (h' \circ (h \circ \alpha))(t_{\mu_{D(t)}}) \\ &= ((h' \circ h) \circ \alpha)(t_{\mu_{D(t)}}) \\ &= \Omega(h' \circ h)(\alpha(t_{\mu_{D(t)}})) \qquad (6.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Omega h(\alpha(t_{\mu_{D(t)}}) &= h(\alpha((t_{\mu_{D(t)}})) \\ &= (h \circ \alpha))(t_{\mu_{D(t)}}) \\ &= \beta(t_{\mu_{D(t)}})\end{aligned}$$

olduğundan

$$\Omega h'(\beta(t)_{\mu_{D(t)}}) = \Omega h'(\Omega h(\alpha(t_{\mu_{D(t)}}))$$
$$= (\Omega h' \circ \Omega h)(\alpha(t_{D(t)})) \quad (6.2)$$

dir.

Böylece (6.1) ve (6.2)'den $\Omega(h' \circ h) = \Omega h' \circ \Omega h$ olur.

(i) ve (ii) den Ω özdeşliği ve kompozisyonu koruduğundan bir kovaryant funktordur.

7. SONUÇLAR

- (Gümüş 2008)'de bir noktalı fuzzy topolojik uzaydan bir fuzzy topolojik gruba giden tüm fuzzy sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının cümlesi üzerinde bir işlem tanımlanmış ve homotopi sınıflarının cümlesinin bu işlem altında bir grup olduğu gösterilmiştir. Bu tezde, noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinden, nesneleri tanımlanan işlem ile bir grup oluşturan fuzzy sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının cümlesi olmak üzere, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kofunktorun var olduğu ispatlanmıştır.

- Aynı homotopi tipindeki iki noktalı fuzzy topolojik uzaydan biri Hopf uzay ise diğerinin de bir Hopf uzay olduğu gösterilmiştir.

- Aynı homotopi tipindeki iki noktalı fuzzy topolojik uzay için fuzzy eşdeğerliliğin bir Hopf homomorfizm olduğu ispatlanmıştır.

- Aynı homotopi tipindeki iki noktalı fuzzy topolojik uzaydan biri Hopf grubu ise diğerinin de bir Hopf grup olduğu gösterilmiştir. Böylece noktalı fuzzy topolojik uzaylarda Hopf uzay ve Hopf grup olma özelliklerinin homotopik invaryant olduğu ispatlanmıştır.

- Fuzzy eşdeğer iki noktalı fuzzy topolojik uzaydan biri değişmeli Hopf grup ise diğerinin de değişmeli Hopf grup olduğu ispatlanmıştır.

- Hopf uzay olan bir noktalı fuzzy topolojik uzaydan herhangi bir noktalı fuzzy topolojik uzaya giden tüm fuzzy sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının cümlesi üzerinde bir işlem tanımlanmıştır. Daha sonra baz alınan noktalı fuzzy topolojik uzayın Hopf grubu olması durumunda, fuzzy sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının cümlesinin tanımlanan işlem altında bir grup olduğu ispatlanmıştır.

- Daha önceki ispattan yola çıkarak, noktalı fuzzy topolojik uzayların homotopi kategorisinden, nesneleri, tanımlanan işlem ile bir grup oluşturan fuzzy sürekli fonksiyonların homotopi sınıflarının cümlesi olmak üzere, gruplar ve homomorfizmleri kategorisine bir kofunktorun var olduğu ispatlanmıştır.

- Bir kapalı fuzzy eğri uzayının Hopf uzay ve Hopf grup olduğu ispatlanmıştır.

- Kapalı fuzzy eğri uzayları arasında kapalı eğri funktoru tanımlanmış ve bu funktorun noktalı fuzzy topolojik uzaylar arasındaki fuzzy sürekli fonksiyonları, kapalı fuzzy eğri uzayları arasında fuzzy sürekli homomorfizmlere götürdüğü ispatlanmıştır.

- Daha önce tanımlanan kapalı eğri funktorunun, noktalı fuzzy topolojik uzayların ve fuzzy sürekli fonksiyonların kategorisinden, nesneleri kapalı fuzzy eğri uzayları ve morfizmleri fuzzy sürekli homomorfizmler olan Hopf grupları ve sürekli homomorfizmleri kategorisine bir kovaryant funktor olduğu ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

Balcı, S. 1978. Homotopi ve Bir Uzayın Esas Grubu. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 96, Ankara.

Chang, C.L. 1968. Fuzzy Topological Spaces. Journal of Mathematical Analysis and Applications 24, 182–190.

Chang, Z.Y. and Liu, W. J. 1984. Fuzzy Homotopy Type Invariance of Fundamental Group of Fuzzy Topological Space. Fuzzy Math, 4, No 4: 53–56.

Chon, I. 2001. Some Properties of Fuzzy Topological Groups. Fuzzy Sets and Systems 23, 197–201.

Chuanlin, S. 1985. Homotopy and Fundamental Group in Fuzzy Topology. Dongbei Shida Xuebao, 2, 25–31.

Dang, S. and Behera, A. 1996. A. On Fuzzy Compact–Open Topology. Fuzzy Sets and Systems, Vol. 80, Issue 3, 377–381.

Foster, D.H. 1979. Fuzzy Topological Groups. Journal of Mathematical Analysis and Applications 67–2.

Ganguly, S. and Saha, S. 1990. A Note on Compactness in Fuzzy Setting. Fuzzy Sets and Systems 34, 117–124.

Ganster, M., Georgiou, D.N. and Jafari, S. 2005. On Fuzzy Topological Groups and Fuzzy Continuous Function. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 34; pp.35–43.

Göçer, G. D. 2007. Fuzzy Topolojik Uzaylarda H–grubu Oluşturma, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 48, Ankara.

Gumus, S. and Yildiz, C. 2007. The Fuzzy Sheaf of the Groups Formed by Fuzzy Topological Space. Int. Jorn. of Pure and Appl. Math. 37, No.1, 101–112.

Guner, E. and Balci, S. 2007. On the Fuzzy Sheaf of the Fundamental Groups. Taiwanese J. Math. 11, No.4, 1057–1062.

Liang, M.J. and Hai, Y.C. 1987. On Fuzzy Topological Groups. Fuzzy Sets and Systems 23, 281–287.

Park, K. 1969. On Sub-H-groups of an H group and Their Duals. Journal of the Korean Mathematical Society 6, No:1, 41–46.

Salleh, A. R. 1993. The Homotopy Property of the Induced Homomorpisms on Homology Groups of Fuzzy Topological Spaces. Fuzzy Sets and Systems 56, 111–116.

Spanier, E.H. 1966. H-Spaces , In: Algebraic Homotopy. Mc Graw-Hill Publishing Company, ltd., 33–36, New Delhi.

Switzer, R.M. 1975. Homotopy Sets and Groups, In: Algebraic Topology-Homotopy and Homology. Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 11-16, New York.

Wuyts, P. 1987. Fuzzy Path and Fuzzy Connectedness. Fuzzy Sets and Systems 24, 127-128.

Zadeh, L. A. 1965. Fuzzy Sets. Information and Control, 8, 338-353.

Zheng, C.Y. 1984. Fuzzy Path and Fuzzy Connectedness. Fuzzy Sets and Systems 14, 273-280.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	: Sibel DEMİRALP
Doğum Yeri	: Kırıkkale
Doğum Tarihi	: 21/03/1983
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Alparslan Süper Lisesi (2002)
Lisans	: Ankara Üniversitesi (2006)
Yüksek Lisans	: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Ağustos 2008)
Doktora	: Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (Mart 2014)

Yayınlar (SCI) : Demiralp, S. and Guner, E. 2013. Some Characterizations of Hopf Spaces on Fuzzy Topological Spaces. Iranian Journal of Fuzzy Systems (Değerlendirme aşamasında)

Hakemli Dergi : Demiralp, S. and Guner, E. 2013. Fuzzy Loop Spaces Having Hopf Group Structure. Journal of Selçuk University Natural and Applied Science Vol. 2, No:4, 21– 28

Ulusal Kongre Sunum : Demiralp, S. ve Güner, E. 2010. Fuzzy Bölüm Halkaları Üzerine. XXII. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erciyes Üniversitesi, Kayseri.