

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NABLA AYRIK KESİRLİ ANALİZ VE BAZI EŞİTSİZLİKLER

Metehan KARAGÖZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her hakkı saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

11/07/2014

Metehan KARAGÖZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

NABLA AYRIK KESİRLİ ANALİZ VE BAZI EŞİTSİZLİKLER

Metehan KARAGÖZ

Ankara Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. A. Feza GÜVENİLİR

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezde gerekli olan bazı kavramlar, tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, nabla ayrik kesirli analizde incelenecek olan bazı eşitsizlikler ile ilgili teorem ve lemmalar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilmiş olan bilgilerden yararlanılarak Opial, Ostrowski, Poincaré, Sobolev ve Gronwall eşitsizlikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde, Nabla ayrik kesirli analizde incelenen bazı eşitsizliklerin uygulama alanlarındaki öneminden bahsedilmiştir.

Temmuz 2014, 50 sayfa

Anahtar Kelimeler: Nabla ayrik kesirli analiz, Nabla ayrik eşitsizlikler.

ABSTRACT

Master Thesis

NABLA DISCRETE FRACTIONAL CALCULUS AND INEQUALITIES

Metehan KARAGÖZ

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. A. Feza GÜVENİLİR

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter contains some notions, definitions and theorems which are needed in the thesis.

In the third chapter, theorems and lemmas about inequalities in Nabla discrete fractional calculus have been investigated.

In the fourth chapter, Opial, Ostrowski, Poincaré, Sobolev inequalities and Gronwall's inequality have been examined by using the notions given in the third chapter.

In the fifth chapter, the importance of inequalities which are observed in Nabla discrete fractional calculus has been mentioned in application areas.

July 2014, 50 pages

Key Words: Nabla discrete fractional calculus, Nabla discrete inequalities.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam Sayın Doç. Dr. A. Feza GÜVENİLİR'e (Ankara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı), hayatım boyunca yanımda olduğu gibi çalışmalarım süresince de fedakarlıklar göstererek beni destekleyen aileme en içten duygularıyla teşekkür ederim.

Metehan KARAGÖZ

Ankara, Temmuz 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
3. AYRIK NABLA KESİRLİ ANALİZ.....	6
4. AYRIK NABLA KESİRLİ ANALİZDE BAZI EŞİTSİZLİKLER.....	27
4.1 Opial Tipi Eşitsizlik.....	27
4.2 Ostrowski Tipi Eşitsizlik.....	32
4.3 Poincare Eşitsizliği.....	34
4.4 Sobolev Tipi Eşitsizlik.....	36
4.5 Gronwall Eşitsizliği.....	40
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	45
KAYNAKLAR.....	46
ÖZGEÇMİŞ.....	50

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n –boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi

1. GİRİŞ

Mühendislik ve bilimin farklı alanlarında yaygın olarak kullanılan kesirli diferensiyel hesabın temeli 1695 yılına dayanmaktadır. 19. yüzyılın sonlarına doğru Riemann, Liouville, Grünwald, Letnikov, Caputo gibi matematikçiler kesirli hesap konusunda önemli çalışmalar yapmıştır. Bunların en önemlileri Riemann-Liouville ve Caputo tipi olup hala geçerliliğini korumaktadır.

1988 yılında ise Hilger tarafından zaman skalasının temelleri atılmıştır. Daha sonra birçok matematikçi tarafından zaman skalasının teoremlerinden yararlanılarak ayrık kesirli hesaplamalarla ilgili çalışmalar yapılmıştır.

Ayrık kesirli hesap üzerine yapılan çalışmalar Atici ve Eloe ile ivme kazanmıştır. Atici ve Eloe (2007), kesirli fark operatörü için kuvvet kurallarını ve genelleştirilmiş fonksiyonun özelliklerini verdiler. 2009 yılında ise nabla operatörü ile ayrık kesirli hesaplamaları ifade edip geliştirdiler.

Burada ise öncelikle Caputo tipi ayrık kesirli fark denklemi tanımlanacaktır. Bu denklem daha önceden Riemann-Liouville tarafından verilmiş olan denklem ile kıyaslanacaktır. Ardından ayrık kesirli denklemler için Taylor formülü ve toplam denklemleri verilip bu tip denklemlerle ilgili Opial, Ostrowski, Poincaré, Sobolev ve Gronwall eşitsizlikleri incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışma boyunca yararlanılacak temel tanım ve kavramlar verilecektir.

$n \in \mathbb{N}$ için $t^{\bar{n}} := t(t+1)\dots(t+n-1)$ (rising factorial) ve $t^{\bar{0}} = 1$ dir.

$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $t \in \mathbb{R} - \{\dots, -2, -1, 0\}$ olmak üzere

$$t^{\bar{\alpha}} := \frac{\Gamma(t+\alpha)}{\Gamma(t)}, \quad 0^{\bar{\alpha}} := 0 \quad (2.1)$$

ve

$$\nabla(t^{\bar{\alpha}}) = \alpha t^{\overline{\alpha-1}} \quad (2.2)$$

dir. Burada $\nabla y(t) = y(t) - y(t-1)$ olup geri fark operatörü olarak adlandırılır.

Ayrıca

$$\nabla^k f(t) = \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} f(t-m) \quad (2.3)$$

dir. $f(t)$ nin n . basamaktan toplamı

$$\nabla_a^{-n} f(t) := \sum_{s=a}^t \frac{(t-\rho(s))^{\overline{n-1}}}{(n-1)!} f(s) \quad (2.4)$$

dir. Burada $\rho(s) = s-1$, $t \geq a$; $a \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ dir.

$f(t)$ nin ν . basamaktan kesirli toplamı

$$\nabla_a^{-\nu} f(t) := \sum_{s=a}^t \frac{(t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(s) \quad (2.5)$$

dir. Burada $\rho(s) = s-1$, $\nu > 0$, $\nu \notin \mathbb{Z}$ ve $t \geq a$, $a \in \mathbb{Z}$ dır.

Kesirli Caputo türev operatörünün nabla fark operatörü için tanımı $t \geq a$ için

$$\nabla_{a*}^{\mu} f(t) := \nabla_a^{-\nu} (\nabla^m f(t)) \quad (2.6)$$

şeklindedir.

Burada $\lceil \cdot \rceil$, ceiling (tavan) fonksiyonu olmak üzere $\mu > 0$, $m-1 < \mu < m$, $m = \lceil \mu \rceil$, $m \in \mathbb{N}$, $\nu = m - \mu$ dir (Atici ve Elloe 2009a).

Tanım 2.1. $m \in \mathbb{Z}_+$ için Δ^m , m . basamaktan ileri fark operatörü olmak üzere $t \in \mathbb{Z}$ için

$$(\Delta^m f)(t) = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} f(t+k) \quad (2.7)$$

dir. Ayrıca $\alpha > 0$ olmak üzere, $t \in \mathbb{R} - \{\dots, -2, -1\}$ için $t^\alpha = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-\alpha)}$ şeklindedir.

$n \in \mathbb{N}$ için $t^n = t(t-1)\dots(t-n+1)$ (falling factorial) dir. $t^\alpha = (t+\alpha-1)^\alpha$ şeklinde yazılır.

$\nu > 0$ için delta operatörü

$$\Delta_a^{-\nu} f(t) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^{t-\nu} (t-s-1)^{\nu-1} f(s) \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Ayrıca $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\Delta^m f(t-m) = \nabla^m f(t) \quad (2.9)$$

olduğu görülür (Atici ve Elloe 2009a).

Lemma 2.1. $0 \leq m-1 < \nu \leq m$, $m = \lceil \nu \rceil$ olsun. f , $\mathbb{N}_a = \{a, a+1, \dots\}$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere $\forall t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\Delta_a^{-\nu} f(t+\nu) = \nabla_a^{-\nu} f(t) \quad (2.10)$$

dir (Atici ve Elloe 2009a).

Teorem 2.1. $p \in \mathbb{N}$ ve $\nu > p$ olsun. Bu durumda

$$\Delta^p(\Delta_a^{-\nu}f(t)) = \Delta_a^{-(\nu-p)}f(t) \quad (2.11)$$

dir (Atici ve Eloe 2009b).

Teorem 2.2. f reel değerli bir fonksiyon ve $\mu, \nu > 0$ olsun. Bu durumda $\forall t \geq a$ için

$$\nabla_a^{-\nu}(\nabla_a^{-\mu}f(t)) = \nabla_a^{-(\mu+\nu)}f(t) = \nabla_a^{-\mu}(\nabla_a^{-\nu}f(t)) \quad (2.12)$$

dir (Atici ve Eloe 2009a).

Teorem 2.3. (Ayrık Taylor Formülü) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $t \geq a + m$ ve $\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} \nabla^k f(a) + \frac{1}{(m-1)!} \sum_{\tau=a+1}^t (t-\tau+1)^{\overline{m-1}} \nabla^m f(\tau) \quad (2.13)$$

dır (Anderson 2002).

Tanım 2.2. $a \in \mathbb{R}$ ve $\nu > 0$ olsun. $\forall t \in \mathbb{N}_a = \{a, a+1, \dots\}$ için

$$(\nabla_a^{-\nu}h)(t) := \sum_{s=a}^t \frac{(t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} h(s) = \nabla_a^{-\nu}h(t)$$

dir. Burada $\rho(s) = s - 1$ dir. Biz burada kesirli farkın Riemann-Liouville formunu kullanacağız.

$$(\nabla_a^{\nu}h)(t) := \nabla^k(\nabla_a^{\nu-k}h)(t)$$

olmak üzere burada $k \in \mathbb{Z}^+$, $k-1 < \nu < k$ ve $\nabla y(t) = y(t) - y(t-1)$ dir.

$\forall g(t) \in \mathbb{N}_a$ için

$$(\nabla_a^{-\nu}h)(g(t)) := \sum_{s=a}^t \frac{(g(t)-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} h(s) = \nabla_a^{-\nu}h(g(t))$$

ve $\forall t \in \mathbb{N}_a$ için

$$(\nabla_a^{-\nu} h \circ g)(t) := \sum_{s=a}^t \frac{(t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} (h \circ g)(s)$$

şeklinde tanımlanır (Atici ve Eloe 2012).

Tanım 2.3. (Mittag-Leffler fonksiyonu) $\alpha > 0$ ve $z \in \mathbb{C}$ için

$$E_\alpha(z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{\Gamma(\alpha j + 1)}$$

dir.

3. AYRIK NABLA KESİRLİ ANALİZ

Burada ayrık kesirli analizde bazı teorem ve sonuçlar verilecektir.

Teorem 3.1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{Z}$ olsun. $t \geq a + m$ ve $\forall t \in \mathbb{Z}$ için

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} \nabla^k f(a) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{\tau=a+1}^t (t-\tau+1)^{\overline{\mu-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \quad (3.1)$$

dır. Burada $m-1 < \mu < m$, $m = \lceil \mu \rceil$, $\mu > 0$ dır (Anastassiou 2009).

İspat: (2.6) ve (2.12) den

$$\begin{aligned} \nabla_{a+1}^{-\mu} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(t) &= \nabla_{a+1}^{-\mu} \nabla_{a+1}^{-(m-\mu)} \nabla^m f(t) \\ &= \nabla_{a+1}^{-\mu-m+\mu} \nabla^m f(t) \\ &= \nabla_{a+1}^{-m} \nabla^m f(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

dir. Ayrıca (2.4) ve (2.5) den

$$\nabla_{a+1}^{-m} \nabla^m f(t) = \sum_{\tau=a+1}^t \frac{(t-\tau+1)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} \nabla^m f(\tau) \quad (3.3)$$

ve

$$\nabla_{a+1}^{-\mu} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(t) = \sum_{\tau=a+1}^t \frac{(t-\tau+1)^{\overline{\mu-1}}}{\Gamma(\mu)} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \quad (3.4)$$

elde edilir. Ayrık Taylor formülü ve (3.3) den

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} \nabla^k f(a) + \nabla_{a+1}^{-m} \nabla^m f(t) \quad (3.5)$$

bulunur. Burada (3.2) ve (3.4) birlikte kullanılırsa

$$f(t) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} \nabla^k f(a) + \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{\tau=a+1}^t (t-\tau+1)^{\overline{\mu-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \quad (3.6)$$

elde edilir ki bu da istenilen ifadedir.

Sonuç 3.1. $k = 0, 1, \dots, m - 1$ için $\nabla^k f(a) = 0$ olsun. Bu durumda (3.1) de, $\forall t \geq a + m$ için

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{\tau=a+1}^t (t - \tau + 1)^{\overline{\mu-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \quad (3.7)$$

dır (Anastassiou 2009).

Teorem 3.2. $p \in \mathbb{N}$ ve $\nu > p$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\nabla^p(\nabla_a^{-\nu} f(t)) = \nabla_a^{-(\nu-p)} f(t) \quad (3.8)$$

dir (Anastassiou 2009).

İspat: (2.10) dan $t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\begin{aligned} \nabla^p(\nabla_a^{-\nu} f(t)) &= \Delta^p(\nabla_a^{-\nu} f)(t - p) \\ &= \Delta^p(\Delta_a^{-\nu} f)(t - p + \nu) \\ &= (\Delta^p \Delta_a^{-\nu} f)(t - p + \nu) \\ &= \Delta_a^{-(\nu-p)} f(t + \nu - p) \end{aligned} \quad (3.9)$$

ve

$$\nabla_a^{-(\nu-p)} f(t) = \Delta_a^{-(\nu-p)} f(t + \nu - p) \quad (3.10)$$

elde edilir.

Uyarı 3.1. $p \in \mathbb{N}$ ve $k \geq p$ için

$$\begin{aligned}
\nabla^p \left(\frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} \right) &= \nabla^p \left(\frac{(t-a+k-1)^{\bar{k}}}{k!} \right) \\
&= \Delta^p \left(\frac{(t-a+k-1-p)^{\bar{k}}}{k!} \right) \\
&= \frac{(t-a+k-1-p)^{\bar{k-p}}}{(k-p)!} \\
&= \frac{(t-a)^{\bar{k-p}}}{(k-p)!}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

dir.

Teorem 3.3. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $a \in \mathbb{Z}_+$ olsun. $p \in \mathbb{N}$ ve $\mu > p$ olmak üzere $\forall t \geq a + m$ için

$$\begin{aligned}
\nabla^p f(t) &= \sum_{k=p}^{m-1} \frac{(t-a)^{\bar{k-p}}}{(k-p)!} \nabla^k f(a) \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\mu-p)} \sum_{\tau=a+1}^t (t-\tau+1)^{\overline{\mu-p-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau)
\end{aligned} \tag{3.12}$$

dır. Burada $t \in \mathbb{N}$, $m-1 < \mu < m$, $m = \lceil \mu \rceil$, $\mu > 0$ dır (Anastassiou 2009).

İspat: (3.1) den

$$\begin{aligned}
\nabla^p f(t) &= \nabla^p \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} \nabla^k f(a) \right) \\
&\quad + \nabla^p \left(\frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{\tau=a+1}^t (t-\tau+1)^{\overline{\mu-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Burada

$$\nabla^p \left(\sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t-a)^{\bar{k}}}{k!} \nabla^k f(a) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla^p \left(\frac{(t-a)^{\bar{0}}}{0!} \nabla^0 f(a) + \frac{(t-a)^{\bar{1}}}{1!} \nabla^1 f(a) + \dots + \frac{(t-a)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} \nabla^{m-1} f(a) \right) \\
&= \nabla^p \left(\frac{(t-a)^{\bar{0}}}{0!} \right) f(a) + \nabla^p \left(\frac{(t-a)^{\bar{1}}}{1!} \right) \nabla^1 f(a) \\
&\quad + \dots + \nabla^p \left(\frac{(t-a)^{\overline{m-1}}}{(m-1)!} \right) \nabla^{m-1} f(a) \\
&= \frac{(t-a)^{\overline{0-p}}}{(0-p)!} f(a) + \frac{(t-a)^{\overline{1-p}}}{(1-p)!} \nabla^1 f(a) + \dots + \frac{(t-a)^{\overline{m-1-p}}}{(m-1-p)!} \nabla^{m-1} f(a) \\
&= \frac{(t-a)^{\overline{0-p}}}{(-p)!} f(a) + \dots + \frac{(t-a)^{\overline{p-1-p}}}{(p-1-p)!} \nabla^{p-1} f(a) + \frac{(t-a)^{\overline{p-p}}}{(p-p)!} \nabla^p f(a) \\
&\quad + \dots + \frac{(t-a)^{\overline{m-1-p}}}{(m-1-p)!} \nabla^{m-1} f(a) \\
&= 0 + 0 + \dots + 0 + \frac{(t-a)^{\overline{p-p}}}{(p-p)!} \nabla^p f(a) + \dots + \frac{(t-a)^{\overline{m-1-p}}}{(m-1-p)!} \nabla^{m-1} f(a) \\
&= \frac{(t-a)^{\bar{0}}}{0!} \nabla^p f(a) + \frac{(t-a)^{\bar{1}}}{1!} \nabla^{p+1} f(a) + \dots + \frac{(t-a)^{\overline{m-1-p}}}{(m-1-p)!} \nabla^{m-1} f(a) \\
&= \sum_{k=p}^{m-1} \frac{(t-a)^{\overline{k-p}}}{(k-p)!} \nabla^k f(a) \tag{3.14}
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\nabla^p \left(\frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{\tau=a+1}^t (t-\tau+1)^{\overline{\mu-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right) = \\
&\frac{1}{\Gamma(\mu-p)} \sum_{\tau=a+1}^t (t-\tau+1)^{\overline{\mu-p-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \tag{3.15}
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir.

Sonuç 3.2. Teorem 3.3' e ek olarak $k = p, \dots, m - 1$ için $\nabla^k f(a) = 0$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}$ ve $\forall t \geq a + m$ için

$$\nabla^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \sum_{\tau=a+1}^t (t - \tau + 1)^{\overline{\mu - p - 1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \quad (3.16)$$

dır (Anastassiou 2009).

Uyarı 3.2. $b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere f , $[a - m + 1, a - m + 2, \dots, b]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda (3.1) ve (3.12) sadece $t \in \{a + m, \dots, b\}$ için geçerlidir. Burada $b \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a + m < b$ dir.

Uyarı 3.3.

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=a+1}^t (t - \tau + 1)^{\overline{\mu - 1}} &= \int_{\tau=a+1}^{t+1} (t - \tau + 1)^{\overline{\mu - 1}} \nabla \tau \\ &= - \frac{(t - \tau + 1)^{\overline{\mu}}}{\mu} \Big|_{\tau=a+1}^{t+1} \\ &= - \frac{(t - (t + 1) + 1)^{\overline{\mu}}}{\mu} + \frac{(t - (a + 1) + 1)^{\overline{\mu}}}{\mu} \\ &= \frac{(t - a)^{\overline{\mu}}}{\mu} \end{aligned} \quad (3.17)$$

dir (Anastassiou 2009).

Sonuç 3.3. (3.1) ve (3.17) den

$$\begin{aligned} \left| f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(t - a)^{\overline{k}}}{k!} \nabla^k f(a) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_{\tau=a+1}^t (t - \tau + 1)^{\overline{\mu - 1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\mu)} \frac{(t - a)^{\overline{\mu}}}{\mu} \right| \max_{\tau \in \{a+1, \dots, t\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \\ &= \frac{(t - a)^{\overline{\mu}}}{\Gamma(\mu + 1)} \max_{\tau \in \{a+1, \dots, t\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \end{aligned} \quad (3.18)$$

elde edilir.

Sonuç 3.4. (3.12) ve (3.17) den

$$\begin{aligned}
\left| \nabla^p f(t) - \sum_{k=p}^{m-1} \frac{(t-a)^{\overline{k-p}}}{(k-p)!} \nabla^k f(a) \right| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\mu-p)} \sum_{\tau=a+1}^t (t-\tau+1)^{\overline{\mu-p-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \\
&\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\mu-p)} \sum_{\tau=a+1}^t (t-\tau+1)^{\overline{\mu-p-1}} \right| \\
&\quad \cdot \max_{\tau \in \{a+1, \dots, t\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu-p)} \frac{(t-a)^{\overline{\mu-p}}}{(\mu-p)} \max_{\tau \in \{a+1, \dots, t\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \\
&= \frac{(t-a)^{\overline{\mu-p}}}{\Gamma(\mu-p+1)} \max_{\tau \in \{a+1, \dots, t\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \quad (3.19)
\end{aligned}$$

elde edilir (Anastassiou 2009).

Lemma 3.1. $\forall t \in \mathbb{N}_a$ için

$$\nabla_a^{-\nu} (t-a+1)^{\overline{\mu}} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)} (t-a+1)^{\overline{\nu+\mu}}$$

dir (Atici ve Elloe 2012).

İspat:

$$\begin{aligned}
\nabla_a^{-\nu} (t-a+1)^{\overline{\mu}} &= \sum_{s=a}^t \frac{(t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} (s-a+1)^{\overline{\mu}} \\
&= \sum_{s=1}^{t-a+1} \frac{(t-s-a+2)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} s^{\overline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=1}^{t-a+1} (t-s-a+2)^{\overline{\nu-1}} s^{\overline{\mu}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{t-a} (t-s-a+1)^{\overline{\nu-1}} (s+1)^{\overline{\mu}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{t-a} \frac{\Gamma(t-s-a+\nu)\Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(t-s-a+1)\Gamma(s+1)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=0}^{t-a} \binom{t-a}{s} \frac{\Gamma(t-s-a+\nu)\Gamma(s+\mu+1)}{\Gamma(t-a+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t-a+1)} \sum_{s=0}^{t-a} \binom{t-a}{s} (\mu+1)^{\overline{s}} \nu^{\overline{t-s-a}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t-a+1)} \sum_{s=0}^{t-a+1-1} \binom{t-a+1-1}{s} (\mu+1)^{\overline{s}} \nu^{\overline{t-a+1-s-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t_1)} \sum_{s=0}^{t_1-1} \binom{t_1-1}{s} (\mu+1)^{\overline{s}} \nu^{\overline{t_1-s-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t_1)} (\nu+\mu+1)^{\overline{t_1-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t-a+1)} (\nu+\mu+1)^{\overline{t-a+1-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(t-a+1)} (\nu+\mu+1)^{\overline{t-a}} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+\mu+1+t-a)}{\Gamma(t-a+1)\Gamma(\nu+\mu+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\nu+\mu+1)} (t-a+1)^{\overline{\nu+\mu}}
\end{aligned}$$

dir. Burada

$$\sum_{s=0}^{t-a} \binom{t-1}{s} (\mu+1)^{\overline{s}} \nu^{\overline{t-s-1}} = (\nu+\mu+1)^{\overline{t-1}}$$

ifadesinden yararlanılmıştır.

İlk olarak Nabla operatörü için kuvvet kuralını verelim.

$$\nabla_s \left[(t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} f(s) \right] = (t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} \nabla_s f(s) - (\nu - 1)(t + 1 - \rho(s))^{\overline{\nu-2}} f(\rho(s))$$

dir.

$$\begin{aligned} (f.g)^{\nabla} &= f^{\nabla}.g + f^{\rho}.g^{\nabla} \\ &= f.g^{\nabla} + f^{\nabla}.g^{\rho} \end{aligned}$$

den yararlanılırsa

$$\nabla_s \left[(t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} f(s) \right] = (t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} \nabla_s f(s) + \nabla_s \left[(t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} \right] f(\rho(s))$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \nabla_s \left[(t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} \right] f(\rho(s)) &= \left[(t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} - (t - \rho(s-1))^{\overline{\nu-1}} \right] f(\rho(s)) \\ &= \left[(t - s + 1)^{\overline{\nu-1}} - (t - s + 2)^{\overline{\nu-1}} \right] f(\rho(s)) \\ &= \left[\frac{\Gamma(t - s + \nu)}{\Gamma(t - s + 1)} - \frac{\Gamma(t - s + \nu + 1)}{\Gamma(t - s + 2)} \right] f(\rho(s)) \\ &= \left[\frac{\Gamma(t - s + \nu)}{\Gamma(t - s + 1)} - \frac{(t - s + \nu)\Gamma(t - s + \nu)}{(t - s + 1)\Gamma(t - s + 1)} \right] f(\rho(s)) \\ &= \left[\frac{\Gamma(t - s + \nu)}{\Gamma(t - s + 1)} \left(1 - \frac{(t - s + \nu)}{(t - s + 1)} \right) \right] f(\rho(s)) \\ &= \frac{\Gamma(t - s + \nu)}{\Gamma(t - s + 2)} (1 - \nu) f(\rho(s)) \\ &= (1 - \nu)(t - s + 2)^{\overline{\nu-2}} f(\rho(s)) \\ &= (1 - \nu)(t + 1 - \rho(s))^{\overline{\nu-2}} f(\rho(s)) \end{aligned}$$

olup kuvvet kuralı gösterilmiştir.

Teorem 3.4. Herhangi bir $\nu > 0$ için

$$\nabla_{a+1}^{-\nu} \nabla f(t) = \nabla \nabla_a^{-\nu} f(t) - \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(a) \quad (3.20)$$

dir (Atici ve Eloe 2012).

İspat: Lemma 3.1 den yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{a+1}^{-\nu} \nabla f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a+1}^t (t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}} \nabla f(s) \\ &= \frac{(t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(s)|_a^t + \frac{(\nu-1)}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a+1}^t (t+1-\rho(s))^{\overline{\nu-2}} f(\rho(s)) \\ &= -\frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(a) + \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \sum_{s=a}^t (t-\rho(s))^{\overline{\nu-2}} f(s) \\ &= \nabla \nabla_a^{-\nu} f(t) - \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(a) \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \nabla \nabla_a^{-\nu} f(t) &= \nabla \sum_{s=a}^t \frac{(t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(s) \\ &= \sum_{s=a}^t \frac{\nabla_t (t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(s) + \frac{(t-1-\rho(t))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(t) \\ &= \sum_{s=a}^t \frac{(\nu-1)(t-\rho(s))^{\overline{\nu-2}}}{\Gamma(\nu)} f(s) + \frac{(0)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(t) \\ &= \sum_{s=a}^t \frac{(t-\rho(s))^{\overline{\nu-2}}}{\Gamma(\nu-1)} f(s) + \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(0)\Gamma(\nu)} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \sum_{s=a}^t (t-\rho(s))^{\overline{\nu-2}} f(s) \end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır.

Şimdi de

$$\nabla_a^\nu y(t) = f(t, y(t)), \quad t = a + 1, a + 2, \dots \quad (3.21)$$

$$\nabla_a^{-(1-\nu)} y(t)|_{t=a} = y(a) = c \quad (3.22)$$

başlangıç değer problemini ele alalım. Burada $0 < \nu \leq 1$ ve a herhangi bir reel sayıdır.

Lemma 3.2. y , (3.21) ve (3.22) başlangıç değer probleminin bir çözümüdür ancak ve ancak

$$y(t) = \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} y(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t)) \quad (3.23)$$

ifadesi sağlanır (Atici ve Eloe 2012).

İspat: (3.21) in her iki tarafına $\nabla_{a+1}^{-\nu}$ operatörü uygulanırsa

$$\nabla_{a+1}^{-\nu} \nabla_a^\nu y(t) = \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t))$$

olup

$$\nabla_{a+1}^{-\nu} \nabla \nabla_a^{-(1-\nu)} y(t) = \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t))$$

elde edilir. Burada (3.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{a+1}^{-\nu} \nabla \nabla_a^{-(1-\nu)} y(t) &= \nabla \nabla_a^{-\nu} \nabla_a^{-(1-\nu)} y(t) - \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} \nabla_a^{-(1-\nu)} y(t)|_{t=a} \\ &= \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t)) \end{aligned}$$

olup

$$\nabla \nabla_a^{-\nu} \nabla_a^{-(1-\nu)} y(t) = \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} \nabla_a^{-(1-\nu)} y(t)|_{t=a} + \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t))$$

elde edilir. (3.22) den

$$\nabla \nabla_a^{-\nu} \nabla_a^{-(1-\nu)} y(t) = \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} y(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t))$$

dir. Burada

$$\begin{aligned}
\nabla \nabla_a^{-\nu} \nabla_a^{-(1-\nu)} y(t) &= \nabla \nabla_a^{-1} y(t) \\
&= \nabla \sum_{s=a}^t \frac{(t - \rho(s))^{\bar{0}}}{\Gamma(1)} y(s) \\
&= \nabla \sum_{s=a}^t y(s) \\
&= \sum_{s=a}^t y(s) - \sum_{s=a}^{t-1} y(s) \\
&= y(t)
\end{aligned}$$

dir. O halde

$$y(t) = \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} y(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t))$$

dir. Diğer taraftan y , (3.23) ifadesini sağlasın. ∇_a^ν operatörünü (3.23) e uygulayalım.

İlk olarak;

$$\begin{aligned}
\nabla_a^\nu (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} &= \nabla^1 \nabla_a^{-(1-\nu)} (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \\
&= \nabla \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - 1 + 1 - \nu + 1)} (t - a + 1)^{\overline{\nu-1+1-\nu}} \\
&= \nabla \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1)} (t - a + 1)^{\bar{0}} \\
&= \nabla \Gamma(\nu) = 0
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t)) &= \sum_{s=a+1}^t \frac{(t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(s, y(s)) \\
&= \sum_{s=a}^t \frac{(t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(s, y(s)) - \frac{(t - \rho(a))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(a, y(a)) \\
&= \nabla_a^{-\nu} f(t, y(t)) - \frac{(t - \rho(a))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(a, y(a))
\end{aligned}$$

olup ∇_a^ν operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_a^\nu \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t)) &= \nabla_a^\nu \nabla_a^{-\nu} f(t, y(t)) - \nabla_a^\nu \frac{(t - \rho(a))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(a, y(a)) \\
&= \nabla^1 \nabla_a^{-(1-\nu)} \nabla_a^{-\nu} f(t, y(t)) - \frac{f(a, y(a))}{\Gamma(\nu)} \nabla^1 \nabla_a^{-(1-\nu)} (t - \rho(a))^{\overline{\nu-1}} \\
&= \nabla^1 \nabla_a^{-1} f(t, y(t)) - \frac{f(a, y(a))}{\Gamma(\nu)} \nabla^1 \nabla_a^{-(1-\nu)} (t - \rho(a))^{\overline{\nu-1}} \\
&= \nabla \sum_{s=a}^t \frac{(t - \rho(s))^{\overline{0}}}{\Gamma(1)} f(s, y(s)) - \frac{f(a, y(a))}{\Gamma(\nu)} \nabla \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1)} (t - a + 1)^{\overline{0}} \\
&= \nabla \sum_{s=a}^t f(s, y(s)) - \frac{f(a, y(a))}{\Gamma(\nu)} \nabla \Gamma(\nu) \\
&= \sum_{s=a}^t f(s, y(s)) - \sum_{s=a}^{t-1} f(s, y(s)) = f(t, y(t))
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
\nabla_a^\nu y(t) &= \nabla_a^\nu \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} y(a) + \nabla_a^\nu \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t)) \\
&= 0 + f(t, y(t)) \\
&= f(t, y(t))
\end{aligned}$$

dir. (3.22) sağlanmıştır. (3.23) koşulunu sağlatalım. (3.23) ifadesine $\nabla_a^{-(1-\nu)}$ uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_a^{-(1-\nu)} y(t) &= \nabla_a^{-(1-\nu)} \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} y(a) + \nabla_a^{-(1-\nu)} \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t)) \\
&= \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} \nabla_a^{-(1-\nu)} (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \\
&\quad + \nabla_a^{-(1-\nu)} \left[\nabla_a^{-\nu} f(t, y(t)) - \frac{(t - \rho(a))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(a, y(a)) \right] \\
&= \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - 1 + 1 - \nu + 1)} (t - a + 1)^{\overline{\nu-1+1-\nu}} + \nabla_a^{-(1-\nu)} \nabla_a^{-\nu} f(t, y(t)) \\
&\quad - \nabla_a^{-(1-\nu)} \frac{(t - \rho(a))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} f(a, y(a))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1)} (t-a+1)^{\bar{0}} + \nabla_a^{-1} f(t, y(t)) - \frac{f(a, y(a))}{\Gamma(\nu)} \nabla_a^{-(1-\nu)} (t-a+1)^{\overline{\nu-1}} \\
&= y(a) + \sum_{s=a}^t \frac{(t-\rho(s))^{\bar{0}}}{\Gamma(1)} f(s, y(s)) \\
&\quad - \frac{f(a, y(a))}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-1+1-\nu+1)} (t-a+1)^{\overline{\nu-1+1-\nu}} \\
&= y(a) + \sum_{s=a}^t f(s, y(s)) - \frac{f(a, y(a))}{\Gamma(\nu)} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1)} (t-a+1)^{\bar{0}} \\
&= y(a) + \sum_{s=a}^t f(s, y(s)) - f(a, y(a))
\end{aligned}$$

olup $t = a$ için

$$\begin{aligned}
\nabla_a^{-(1-\nu)} y(t)|_{t=a} &= y(a) + \sum_{s=a}^a f(s, y(s)) - f(a, y(a)) \\
&= y(a) + f(a, y(a)) - f(a, y(a)) \\
&= y(a) = c
\end{aligned}$$

dir. İspat tamamlanır.

Şimdi de

$$y(t) = \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} y(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, y(t))$$

olarak ele alınsın. Öyle w ve v olsun ki

$$w(t) \geq \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} w(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, w(t)) \quad (3.24)$$

ve

$$v(t) \leq \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} v(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, v(t)) \quad (3.25)$$

gerçeklensin. Bundan sonra $f(t, y(t))$ yerine $b(t)y(t)$ alalım. Burada $t = a, a+1, \dots$ için $0 \leq b(t) < 1$ dir (Atici ve Elloe 2012).

Teorem 3.5. w ve v sırasıyla (3.24) ve (3.25) yi sağlasın. Eğer $w(a) \geq v(a)$ ise o zaman $t = a, a + 1, \dots$ için $w(t) \geq v(t)$ dir (Atici ve Elloe 2012).

İspat: $u(t) = v(t) - w(t)$ olsun. $t = a, a + 1, \dots$ için $u(t) \leq 0$ olduğunu tümevarım prensibini kullanarak ispatlayacağız. $s = a$ için teoremin koşullarından $w(a) \geq v(a)$ olduğundan $u(a) = v(a) - w(a) \leq 0$ sağlanır. $s = a, a + 1, \dots, t - 1$ için $u(s) \leq 0$ sağlansın.

$s = a + 1$ için

$$\begin{aligned}
u(a + 1) &= v(a + 1) - w(a + 1) \\
&\leq \frac{(a + 1 - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} (v(a) - w(a)) \\
&\quad + \sum_{s=a+1}^{a+1} \frac{(a + 1 - \rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} b(s) (v(s) - w(s)) \\
&= \frac{(2)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} (v(a) - w(a)) + \frac{(1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} b(a + 1) (v(a + 1) - w(a + 1)) \\
&= \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu)} (v(a) - w(a)) + b(a + 1) (v(a + 1) - w(a + 1)) \\
&\leq b(a + 1) (v(a + 1) - w(a + 1))
\end{aligned}$$

olup

$$(1 - b(a + 1)) (v(a + 1) - w(a + 1)) \leq 0$$

dir. $0 \leq b(a + 1) < 1$ den $u(a + 1) = v(a + 1) - w(a + 1) \leq 0$ dir.

O halde $s = t$ için

$$\begin{aligned}
u(t) &= v(t) - w(t) \\
&\leq \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} v(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} b(t) v(t) - \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} w(a) - \nabla_{a+1}^{-\nu} b(t) w(t) \\
&= \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} (v(a) - w(a)) + \sum_{s=a+1}^t \frac{(t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} b(s) (v(s) - w(s)) \\
&= \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} (v(a) - w(a)) + \sum_{s=a+1}^{t-1} \frac{(t-\rho(s))^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} b(s) (v(s) - w(s)) \\
&\quad + b(t)(v(t) - w(t)) \\
&\leq b(t)(v(t) - w(t))
\end{aligned}$$

olup

$$(1 - b(t))(v(t) - w(t)) \leq 0$$

dir. $0 \leq b(t) < 1$ den $u(t) = v(t) - w(t) \leq 0$ olup bu da istenilendir.

İlk olarak

$$E_x \phi = \nabla_{a+1}^{-\nu} x(t) \phi(t)$$

ve

$$F_x \phi = \nabla_a^{-\nu} x(t) \phi(t)$$

olarak tanımlansın. ϕ sabit olduğu zaman Ayırık Mittag-Leffler fonksiyonu $E_x \phi$ ve $F_x \phi$ formunda yazılabilir.

Lemma 3.3. Herhangi bir λ sabiti için

$$\left| E_\lambda(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \right| \leq F_{|\lambda|}(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}$$

dir. Burada $t = a, a + 1, \dots$ dir (Atici ve Elloe 2012).

İspat:

$$\begin{aligned} \left| E_\lambda(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \right| &= \left| \nabla_{a+1}^{-\nu} \lambda(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \right| \\ &= \left| \frac{\lambda}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a+1}^t (t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} (s - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^t \lambda(t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} (s - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\nu)} \sum_{s=a}^t |\lambda| (t - \rho(s))^{\overline{\nu-1}} (s - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \\ &= \nabla_a^{-\nu} |\lambda| (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \\ &= F_{|\lambda|}(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \end{aligned}$$

elde edilir.

Lemma 3.4. Herhangi bir λ sabiti için

$$F_\lambda^n(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n\nu + \nu)} \lambda^n(t - a + 1)^{\overline{(n+1)\nu-1}}$$

dir. Burada $n \in \mathbb{N}$ dir (Atici ve Elloe 2012).

İspat: $n = 1$ için

$$\begin{aligned} F_\lambda(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} &= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu+\nu)} \lambda(t-a+1)^{\overline{(1+1)\nu-1}} \\ &= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} \lambda(t-a+1)^{\overline{2\nu-1}} \end{aligned}$$

dir. Lemma 3.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_\lambda(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} &= \nabla_a^{-\nu} \lambda(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} \\ &= \lambda \frac{\Gamma(\nu-1+1)}{\Gamma(\nu-1+\nu+1)} (t-a+1)^{\overline{\nu+\nu-1}} \\ &= \lambda \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(2\nu)} (t-a+1)^{\overline{2\nu-1}} \end{aligned}$$

elde edilir. $n = 1$ için doğrudur. $n = k - 1$ için doğru olsun. $n = k$ için

$$F_\lambda^k(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(k\nu+\nu)} \lambda^k(t-a+1)^{\overline{(k+1)\nu-1}}$$

doğru olduğunu gösterelim.

$$F_\lambda^{k-1}(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma((k-1)\nu+\nu)} \lambda^{k-1}(t-a+1)^{\overline{k\nu-1}}$$

ifadesinden

$$\begin{aligned} F_\lambda F_\lambda^{k-1}(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} &= F_\lambda \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma((k-1)\nu+\nu)} \lambda^{k-1}(t-a+1)^{\overline{k\nu-1}} \right] \\ &= \nabla_a^{-\nu} \lambda \left[\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma((k-1)\nu+\nu)} \lambda^{k-1}(t-a+1)^{\overline{k\nu-1}} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma((k-1)\nu+\nu)} \lambda^k \nabla_a^{-\nu} (t-a+1)^{\overline{k\nu-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma((k-1)\nu + \nu)} \lambda^k \frac{\Gamma(k\nu - 1 + 1)}{\Gamma(k\nu - 1 + \nu + 1)} (t - a + 1)^{\overline{\nu + k\nu - 1}} \\
&= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(k\nu + \nu)} \lambda^k (t - a + 1)^{\overline{k(\nu+1) - 1}}
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}
F_\lambda F_\lambda^{k-1} (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} &= F_\lambda^k (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \\
&= \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(k\nu + \nu)} \lambda^k (t - a + 1)^{\overline{k(\nu+1) - 1}}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Lemma 3.5. $\lambda > 0$ ve $t = a, a + 1, \dots$ için $|y(t)| < \lambda$ olsun. O halde herhangi $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left| E_y^n (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \right| \leq F_\lambda^n (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}$$

dir (Atici ve Eloe 2012).

İspat:

$$\begin{aligned}
\left| E_y^n (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \right| &= \left| y^n \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n\nu + \nu)} (t - a + 1)^{\overline{(n+1)\nu-1}} - y^n \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n\nu)} (t - a + 1)^{\overline{n\nu-1}} \right| \\
&= \left| y^n \left(\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n\nu + \nu)} (t - a + 1)^{\overline{(n+1)\nu-1}} - \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n\nu)} (t - a + 1)^{\overline{n\nu-1}} \right) \right| \\
&\leq \lambda^n \left| \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n\nu + \nu)} (t - a + 1)^{\overline{(n+1)\nu-1}} - \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n\nu)} (t - a + 1)^{\overline{n\nu-1}} \right| \\
&\leq \lambda^n \left| \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n\nu + \nu)} (t - a + 1)^{\overline{(n+1)\nu-1}} \right| \\
&= \lambda^n \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(n\nu + \nu)} (t - a + 1)^{\overline{(n+1)\nu-1}} \\
&= F_\lambda^n (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.6. $t \in \mathbb{N}_a \cap [a, b]$ için $|x(t)| < 1$ olsun. O halde $t \in \mathbb{N}_a \cap [a, b]$ için

$$y(t) = \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} y(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} x(t) y(t) \quad (3.26)$$

ise

$$y(t) = \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} E_x^k(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}$$

çözümüne sahiptir (Atici ve Eloe 2012).

İspat: Bu çözümü elde etmek için ardışık yaklaşımlar metodu kullanılacaktır. $n \geq 1$

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} y(a), \\ y_n(t) &= \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} y(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} x(t) y_{n-1}(t) \end{aligned}$$

dir. İlk olarak

$$\begin{aligned} y_1(t) &= y_0(t) + \nabla_{a+1}^{-\nu} x(t) y_0(t) \\ &= \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} (t-a+1)^{\overline{\nu-1}} + \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} \nabla_{a+1}^{-\nu} x(t) (t-a+1)^{\overline{\nu-1}} \\ &= \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} E_x^0(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} + \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} E_x(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} \end{aligned}$$

dir. Tümevarımdan $n = 0, 1, 2, \dots$ için

$$y_n(t) = \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^n E_x^k(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}$$

dir. Burada $n \rightarrow \infty$ için limit alırsak

$$y(t) = \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} E_x^k(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} \quad (3.27)$$

elde edilir.

(3.27) serisinin mutlak yakınsak olduğunu göstermek için Lemma 3.2.3 – 3.2.5, karşılaştırma testi ve d'Alembert oran testi kullanılacaktır.

O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{(t-a+1)^{\overline{(n+1)\nu-1}}}{\Gamma(n\nu+\nu)} \quad (3.28)$$

yazılabilir. Burada $0 \leq \lambda < 1$ dir.

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda^n \frac{(t-a+1)^{\overline{(n+1)\nu-1}}}{\Gamma(n\nu+\nu)} \\ &= \lambda^n \frac{\Gamma(t-a+(n+1)\nu)}{\Gamma(n\nu+\nu)\Gamma(t-a+1)} \\ &= \lambda^n \frac{\Gamma(t-a)}{\beta(t-a, (n+1)\nu)\Gamma(t-a+1)} \end{aligned}$$

olsun.

$$\beta(t-a, (n+1)\nu) = \frac{\Gamma(t-a)\Gamma((n+1)\nu)}{\Gamma(t-a+(n+1)\nu)}$$

olup

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \lambda^{n+1} \frac{\Gamma(t-a)\beta(t-a, (n+1)\nu)\Gamma(t-a+1)}{\beta(t-a, (n+2)\nu)\Gamma(t-a+1)\lambda^n\Gamma(t-a)} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \lambda \frac{\beta(t-a, (n+1)\nu)}{\beta(t-a, (n+2)\nu)} \right| \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Beta fonksiyonu $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ dir. Beta fonksiyonu için Stirling yaklaşımlar formülü kullanılacaktır.

$$\beta(x, \epsilon) \sim \Gamma(\epsilon)x^{-\epsilon}$$

dir. Burada x yeterince büyük ve ϵ sabittir. Bizim ihtiyacımız olan tek şey

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\beta(x, \epsilon)}{\Gamma(\epsilon)x^{-\epsilon}} \right| = 1$$

olduğunu göstermektir.

Gamma fonksiyonu için Stirling formülü kullanılırsa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\beta(t-a, (n+1)\nu)}{\Gamma(t-a)((n+1)\nu)^{-(t-a)}} \right| = 1$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\beta(t-a, (n+2)\nu)}{\Gamma(t-a)((n+2)\nu)^{-(t-a)}} \right| = 1$$

olup

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+2)\nu}{(n+1)\nu} \right)^{t-a} = \lambda$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} E_y^k(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} \right| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{y(a)}{\Gamma(\nu)} F_{\lambda}^k(t-a+1)^{\overline{\nu-1}} \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda^n (t-a+1)^{\overline{(n+1)\nu-1}}}{\Gamma(n\nu + \nu)} \right| < \infty \end{aligned}$$

olup karşılaştırma testinden (3.27) mutlak yakınsaktır. O halde (3.27), (3.26) nın bir çözümüdür.

4. AYRIK NABLA KESİRLİ ANALİZDE BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde Opial, Ostrowski, Poincaré, Sobolev Tipi eşitsizlikler ve Gronwall eşitsizliği verilecektir.

4.1 Opial Tipi Eşitsizlik

Bu kısımda ilk olarak diferensiyel denklemlerdeki Opial Tipi Eşitsizlik verilecektir.

Teorem 4.1.1. (Opial Tipi Eşitsizlik) $\forall x \in (0, h)$ için $f(x) > 0$ ve $f(0) = f(h) = 0$ olmak üzere $f \in C^1[0, h]$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^h |f(x)f'(x)| dx \leq \frac{h}{4} \int_0^h (f'(x))^2 dx$$

dir.

Şimdi ayrık kesirli analizde Opial Tipi Eşitsizliği verelim.

Teorem 4.1.2. (Opial Tipi Eşitsizlik) $\mu > 2$ olmak üzere $m = \lceil \mu \rceil \geq 3$, $p \in \mathbb{Z}_+$ olmak üzere $\mu > p$, $a \in \mathbb{Z}_+$ ve f , $\{a - m + 1, a - m + 2, \dots\}$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Ayrıca $k = p, \dots, m - 1$ için $\nabla^k f(a) = 0$ olsun. Bu durumda $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall t \geq a + m$ için

$$\sum_{t'=a+m}^t D(t') \left| \nabla^p f(t') \right| \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(t') \right| \leq K(t) (G(t, a, m, g))^{\frac{1}{\delta}} \quad (4.1)$$

dır. Burada $t \geq a + m$ olmak üzere

$$G(t, a, m, g) : = 2 (g^2(t) - g^2(a + m - 1)) + \frac{(g^2(t - 1) - g^2(a + m - 2))}{2}$$

$$- 2 [g(t)g(t - 1) - g(a + m - 1)g(a + m - 2)] \quad (4.2)$$

$$g(t) : = \sum_{\tau=a+1}^t (C(\tau))^\delta \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta, \quad t \geq a+1 \quad (4.3)$$

$$\theta(t, a, \mu, p, C, \gamma) : = \left(\sum_{\tau=a+1}^t \left[(t - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} (C(\tau))^{-1} \right]^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.4)$$

$$K(t) : = \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \left(\sum_{t'=a+m}^t \left[D(t')(C(t'))^{-1} \theta(t', a, \mu, p, C, \gamma) \right]^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (4.5)$$

olup $\gamma, \delta > 1$ olmak üzere $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 1$; $\tau = a+1, \dots, t$ için $C(\tau) > 0$; $t' = a+m, \dots, t$ için $D(t') \geq 0$ dir (Anastassiou 2009).

İspat: (3.16) dan $\forall t \geq a+m$ için

$$\begin{aligned} |\nabla^p f(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \sum_{\tau=a+1}^t (t - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \sum_{\tau=a+1}^t (t - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} (C(\tau))^{-1} C(\tau) \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right| \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir.

Ayrık Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |\nabla^p f(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \left(\sum_{\tau=a+1}^t \left[(t - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} (C(\tau))^{-1} \right]^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ &\quad \cdot \left(\sum_{\tau=a+1}^t (C(\tau))^\delta \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \\ &= \frac{\theta(t, a, \mu, p, C, \gamma)}{\Gamma(\mu - p)} \left(\sum_{\tau=a+1}^t (C(\tau))^\delta \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

bulunur. Burada $g(t)$, $t \geq a+1 \geq a-m+1$ de azalmayandır.

$$\nabla g(t) = (C(t))^\delta \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(t) \right|^\delta, \quad t \in \{a+1, \dots\} \quad (4.8)$$

ve

$$\left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(t) \right| = (\nabla g(t))^{\frac{1}{\delta}} (C(t))^{-1} \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.7) ve (4.9) birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{t'=a+m}^t D(t') \left| \nabla^p f(t') \right| \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(t') \right| \\ & \leq \sum_{t'=a+m}^t D(t') \frac{\theta(t, a, \mu, p, C, \gamma)}{\Gamma(\mu - p)} (g(t'))^{\frac{1}{\delta}} (\nabla g(t'))^{\frac{1}{\delta}} (C(t'))^{-1} \end{aligned} \quad (4.10)$$

bulunur. Ayrık Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \sum_{t'=a+m}^t D(t') \left| \nabla^p f(t') \right| \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(t') \right| \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \left(\sum_{t'=a+m}^t [D(t')(C(t'))^{-1} \theta(t, a, \mu, p, C, \gamma)]^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \\ & \quad \cdot \left(\sum_{t'=a+m}^t g(t') \nabla g(t') \right)^{\frac{1}{\delta}} \\ & = K(t) \left(\sum_{t'=a+m}^t g(t') \nabla g(t') \right)^{\frac{1}{\delta}} \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir.

$x \in [t' - 1, t']$ için

$$\psi(x) = g(t') + \nabla g(t')(x - t' + 1) \quad (4.12)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $x \in [t', t' + 1]$ için

$$\psi(x) = g(t' + 1) + \nabla g(t' + 1)(x - t') \quad (4.13)$$

dir.

$$\begin{aligned}
\psi(t'-) &= g(t') + \nabla g(t')(t' - t' + 1) \\
&= g(t') + g(t') - g(t' - 1) \\
&= 2g(t') - g(t' - 1)
\end{aligned} \tag{4.14}$$

ve

$$\begin{aligned}
\psi(t'+) &= g(t' + 1) + \nabla g(t' + 1)(t' - t') \\
&= g(t' + 1)
\end{aligned} \tag{4.15}$$

olduğundan ψ süreksizdir.

$$\psi'(x) = \nabla g(t') \tag{4.16}$$

olup, burada $g(t)$, $\nabla g(t) \geq 0$ dir. Ayrıca $t' = a + m - 1, a + m, \dots$ için

$$\begin{aligned}
g(t') &\leq g(t') + \frac{g(t') - g(t' - 1)}{2} \\
&= \frac{3g(t') - g(t' - 1)}{2}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\int_{t'-1}^{t'} \psi(x) dx &= \int_{t'-1}^{t'} [g(t') + \nabla g(t')(x - t' + 1)] dx \\
&= \int_{t'-1}^{t'} g(t') dx + \nabla g(t') \int_{t'-1}^{t'} (x - t' + 1) dx \\
&= g(t') + \frac{\nabla g(t')}{2} \\
&= \frac{3g(t') - g(t' - 1)}{2}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

dir. (4.17) den $t' = a + m - 1, a + m, \dots$ için

$$\begin{aligned}
g(t') &\leq g(t') + \frac{g(t') - g(t' - 1)}{2} \\
&= \int_{t'-1}^{t'} \psi(x) dx
\end{aligned} \tag{4.19}$$

olup

$$\begin{aligned}
g(t')\nabla g(t') &\leq \int_{t'-1}^{t'} \psi(x)\nabla g(t')dx \\
&= \int_{t'-1}^{t'} \psi(x)\psi'(x)dx \\
&= \int_{t'-1}^{t'} \psi(x)d\psi(x) \\
&= \frac{1}{2} [(\psi(t'))^2 - (\psi(t'-1))^2]
\end{aligned} \tag{4.20}$$

bulunur. (4.20) den

$$\begin{aligned}
\sum_{t'=a+m}^t g(t')\nabla g(t') &\leq \frac{1}{2} \sum_{t'=a+m}^t [(\psi(t'))^2 - (\psi(t'-1))^2] \\
&= \frac{1}{2} [(\psi(a+m))^2 - (\psi(a+m-1))^2 \\
&\quad + (\psi(a+m+1))^2 - (\psi(a+m))^2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (\psi(t))^2 - (\psi(t-1))^2] \\
&= \frac{1}{2} [(\psi(t))^2 - (\psi(a+m-1))^2] \\
&= \frac{1}{2} [(2g(t) - g(t-1))^2 - (2g(a+m-1) - g(a+m-2))^2] \\
&= G(t, a, m, g)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.11) ve (4.21) den

$$\begin{aligned}
\sum_{t'=a+m}^t D(t') |\nabla^p f(t')| \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(t') \right| &\leq K(t) \left(\sum_{t'=a+m}^t g(t')\nabla g(t') \right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq K(t) (G(t, a, m, g))^{\frac{1}{\delta}}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

bulunur.

4.2 Ostrowski Tipi Eşitsizlik

İlk olarak diferensiyel denklemlerdeki Ostrowski Tipi Eşitsizlik verilecektir.

Teorem 4.2.1. (Ostrowski Tipi Eşitsizlik) $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere (a, b) de türevlenebilir olsun. $\forall t \in (a, b)$ için $|f'(x)| \leq M$ sağlansın. O halde $\forall t \in [a, b]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left[\frac{1}{4} + \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{(b-a)^2} \right] (b-a) M$$

dir.

Şimdi ayrık kesirli analizde Ostrowski Tipi Eşitsizliği verelim.

Teorem 4.2.2. (Ostrowski Tipi Eşitsizlik) $m-1 < \mu < m$, $m = \lceil \mu \rceil$, $\mu \notin \mathbb{Z}$ ve $\mu > 0$ olsun. Ayrıca $\mu > p$ olmak üzere p , $a \in \mathbb{Z}_+$, $b \in \mathbb{N}$, $a+m < b$ olacak şekilde f , $[a-m+1, a-m+2, \dots, b]$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $k = p+1, \dots, m-1$ için $\nabla^k f(a) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{(b-a-m)} \sum_{j=a+m+1}^b \nabla^p f(j) - \nabla^p f(a) \right| \leq \frac{\left((b-a)^{\overline{\mu-p+1}} - m^{\overline{\mu-p+1}} \right)}{\Gamma(\mu-p+2)(b-a-m)} \cdot \left(\max_{\tau \in \{a+1, \dots, b\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \right) \quad (4.23)$$

dır. Burada $j \in [a+m, \dots, b]$ dir (Anastassiou 2009).

İspat: Hipotezden ve (3.12) den $\forall j \in [a+m+1, a+m+2, \dots, b]$ için

$$\nabla^p f(j) - \nabla^p f(a) = \frac{1}{\Gamma(\mu-p)} \sum_{\tau=a+1}^j (j-\tau+1)^{\overline{\mu-p-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \quad (4.24)$$

elde edilir.

Ayrıca (4.24) den

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b - (a + m)} \sum_{j=a+m+1}^b \nabla^p f(j) - \nabla^p f(a) \\
&= \frac{1}{(b - a - m)} \sum_{j=a+m+1}^b (\nabla^p f(j) - \nabla^p f(a)) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu - p)(b - a - m)} \sum_{j=a+m+1}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j (j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

bulunur. (3.17) ve (4.25) den

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{(b - a - m)} \sum_{j=a+m+1}^b \nabla^p f(j) - \nabla^p f(a) \right| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\mu - p)(b - a - m)} \sum_{j=a+m+1}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j (j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\mu - p)(b - a - m)} \left(\sum_{j=a+m+1}^b \frac{(j - a)^{\overline{\mu-p}}}{(\mu - p)} \right) \left(\max_{\tau \in \{a+1, \dots, b\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu - p + 1)(b - a - m)} \left(\sum_{j=a+m+1}^b (j - a)^{\overline{\mu-p}} \right) \left(\max_{\tau \in \{a+1, \dots, b\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu - p + 1)(b - a - m)} \left(\frac{1}{(\mu - p + 1)} \left((b - a)^{\overline{\mu-p+1}} - m^{\overline{\mu-p+1}} \right) \right) \\
&\quad \cdot \left(\max_{\tau \in \{a+1, \dots, b\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \right)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$= \frac{\left((b - a)^{\overline{\mu-p+1}} - m^{\overline{\mu-p+1}} \right)}{\Gamma(\mu - p + 2)(b - a - m)} \left(\max_{\tau \in \{a+1, \dots, b\}} \left| \nabla_{(a+1)*}^{\mu} f(\tau) \right| \right) \tag{4.27}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.3 Poincaré Eşitsizliği

Öncelikle klasik Poincaré Eşitsizliği verilecektir.

Teorem 4.3.1. (Poincaré Eşitsizliği) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir sınırlı bölge ve Lipschitz sınırına sahip olsun. O halde C_p pozitif sabiti varsa $\forall u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

dir.

Ayrık kesirli analizde Poincaré Eşitsizliğini verelim.

Teorem 4.3.2. (Poincaré Eşitsizliği) $\mu > p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \notin \mathbb{Z}$, $m = \lceil \mu \rceil$ ve $a \in \mathbb{Z}_+$ olsun. $f : [a - m + 1, \dots, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $a + m < b$, $b \in \mathbb{N}$ olmak üzere $k = p, \dots, m - 1$ için $\nabla^k f(a) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \sum_{j=a+m}^b |\nabla^p f(j)|^\delta \\ & \leq \frac{1}{(\Gamma(\mu - p))^\delta} \left\{ \sum_{j=a+m}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \right)^\gamma \right)^{\frac{\delta}{\gamma}} \right\} \\ & \quad \cdot \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right) \end{aligned} \quad (4.28)$$

dır. Burada $\gamma, \delta > 1$ olmak üzere $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 1$ dir (Anastassiou 2009).

İspat: (3.16) dan $\forall j \in [a + m, a + m + 1, \dots, b]$ için

$$\nabla^p f(j) = \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \sum_{\tau=a+1}^j (j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \quad (4.29)$$

dır.

$$|\nabla^p f(j)| \leq \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \sum_{\tau=a+1}^j (j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right| \quad (4.30)$$

bulunur.

Ayrık Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
& |\nabla^p f(j)| \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \right)^\gamma \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

ve

$$\begin{aligned}
& |\nabla^p f(j)|^\delta \\
& \leq \frac{1}{(\Gamma(\mu - p))^\delta} \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \right)^\gamma \right)^{\frac{\delta}{\gamma}} \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right) \\
& \leq \frac{1}{(\Gamma(\mu - p))^\delta} \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \right)^\gamma \right)^{\frac{\delta}{\gamma}} \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

elde edilir. $\forall j \in [a + m, a + m + 1, \dots, b]$ için

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=a+m}^b |\nabla^p f(j)|^\delta \\
& \leq \frac{1}{(\Gamma(\mu - p))^\delta} \left\{ \sum_{j=a+m}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \right)^\gamma \right)^{\frac{\delta}{\gamma}} \right\} \\
& \quad \cdot \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

olup istenilen ifade bulunur.

4.4 Sobolev Tipi Eşitsizlik

Klasik Sobolev Tipi Eşitsizlik şu şekilde verilmektedir:

Teorem 4.4.1. (Sobolev Tipi Eşitsizlik) $0 < \alpha < n$, $1 < p < q < \infty$ ve $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ olsun. O halde

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)dy}{|x-y|^{n-\alpha}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

dir.

Teorem 4.4.2. (Ayrık Analizde Sobolev Tipi Eşitsizlik) $\mu \notin \mathbb{Z}$ olmak üzere $\mu > p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $m = \lceil \mu \rceil$ ve $a \in \mathbb{Z}_+$ alalım. $b \in \mathbb{N}$, $a + m < b$ olmak üzere $f : [a - m + 1, \dots, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $k = p, \dots, m - 1$ için $\nabla^k f(a) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=a+m}^b |\nabla^p f(j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \left[\sum_{j=a+m}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \right)^\gamma \right)^{\frac{r}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{r}} \\ & \quad \cdot \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left| \nabla_{(a+1)_*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

dır. Burada $\gamma, \delta > 1$ olmak üzere $\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} = 1$ ve $r \geq 1$ dir (Anastassiou 2009).

İspat: (4.31) den $\forall j \in [a + m, a + m + 1, \dots, b]$ için

$$\begin{aligned} & |\nabla^p f(j)|^r \\ & \leq \frac{1}{(\Gamma(\mu - p))^r} \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \right)^\gamma \right)^{\frac{r}{\gamma}} \\ & \quad \cdot \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left| \nabla_{(a+1)_*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right)^{\frac{r}{\delta}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

bulunur.

Eşitsizliğin her iki yanında $a + m$ den b ye toplam alınırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=a+m}^b |\nabla^p f(j)|^r \\
& \leq \frac{1}{(\Gamma(\mu - p))^r} \left[\sum_{j=a+m}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \right)^\gamma \right)^{\frac{r}{\gamma}} \right] \\
& \quad \cdot \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right)^{\frac{r}{\delta}}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
& \left(\sum_{j=a+m}^b |\nabla^p f(j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\
& \leq \frac{1}{\Gamma(\mu - p)} \left[\sum_{j=a+m}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j - \tau + 1)^{\overline{\mu-p-1}} \right)^\gamma \right)^{\frac{r}{\gamma}} \right]^{\frac{1}{r}} \\
& \quad \cdot \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left| \nabla_{(a+1)*}^\mu f(\tau) \right|^\delta \right)^{\frac{1}{\delta}}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.3. (Ortalama Sobolev Tipi Eşitsizlik) $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k$ tam sayı olmamak üzere $k \in \mathbb{N}$, $l = 1, \dots, k$ için $m_l = \lceil \mu_l \rceil$ alalım. $b \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}_+$ olmak üzere $f : [a - m_k + 1, \dots, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\tau = 0, 1, \dots, m_k - 1$ için $\nabla^\tau f(a) = 0$ olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{r, [a+m_k, b]} \leq \sqrt{\delta^* \rho^*} \left(\frac{\sum_{l=1}^k B_l}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.38}$$

dir. Burada

$$B_l := \sum_{\tau=a+1}^b C_l(\tau) \left(\nabla_{(a+1)*}^{\mu_l} f(\tau) \right)^2, \tag{4.39}$$

$$\delta^* := \max_{1 \leq l \leq k} \left\{ \frac{1}{(\Gamma(\mu_l))^2} \left[\sum_{j=a+m_l}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j (j-\tau+1)^2 \right)^{\frac{2}{r}} \right]^{\frac{2}{r}} \right\} \quad (4.40)$$

ve

$$\rho^* := \max_{1 \leq l \leq k} \left\| \frac{1}{C_l(\tau)} \right\|_{\infty, [a+1, b]} \quad (4.41)$$

olup $r \geq 1$; $l = 1, \dots, k$ için $C_l(s) > 0$ $[a+1, \dots, b]$ de tanımlı ve $a + m_k < b$ dir (Anastassiou 2009).

İspat: Hipotezden, $l = 1, \dots, k$ ve $\tau = 0, 1, \dots, m_k - 1$ için $\nabla^\tau f(a) = 0$ dir. Bu durumda f ve kesirli basamaktan μ_l için Teorem 3.7 nin koşulları sağlanır. Burada $p = 0$ ve $\gamma = \delta = 2$ alıp (4.34) den

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=a+m_l}^b |f(j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \\ & \leq \frac{1}{\Gamma(\mu_l)} \left[\sum_{j=a+m_l}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j-\tau+1)^{\overline{\mu_l-1}} \right)^2 \right)^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{1}{r}} \\ & \quad \cdot \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left(\nabla_{(a+1)*}^{\mu_l} f(\tau) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.42)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=a+m_l}^b |f(j)|^r \right)^{\frac{2}{r}} \\ & \leq \frac{1}{(\Gamma(\mu_l))^2} \left[\sum_{j=a+m_l}^b \left(\sum_{\tau=a+1}^j \left((j-\tau+1)^{\overline{\mu_l-1}} \right)^2 \right)^{\frac{r}{2}} \right]^{\frac{2}{r}} \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left(\nabla_{(a+1)*}^{\mu_l} f(\tau) \right)^2 \right) \\ & \leq \delta^* \left(\sum_{\tau=a+1}^b \left(\nabla_{(a+1)*}^{\mu_l} f(\tau) \right)^2 \right) \\ & = \delta^* \left(\sum_{\tau=a+1}^b (C_l(\tau))^{-1} C_l(\tau) \left(\nabla_{(a+1)*}^{\mu_l} f(\tau) \right)^2 \right) \\ & \leq \delta^* \rho^* \left(\sum_{\tau=a+1}^b C_l(\tau) \left(\nabla_{(a+1)*}^{\mu_l} f(\tau) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

dir.

Buradan

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=a+m_k}^b |f(j)|^r \right)^{\frac{2}{r}} &\leq \left(\sum_{j=a+m_l}^b |f(j)|^r \right)^{\frac{2}{r}} \\
&\leq \delta^* \rho^* \left(\sum_{\tau=a+1}^b C_l(\tau) \left(\nabla_{(a+1)_*}^{\mu_l} f(\tau) \right)^2 \right) \\
&= \delta^* \rho^* B_l
\end{aligned} \tag{4.43}$$

elde edilir. Böylece

$$\|f\|_{r,[a+m_k,b]} = \left(\sum_{j=a+m_k}^b |f(j)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \sqrt{\delta^* \rho^*} \left(\frac{\sum_{l=1}^k B_l}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.44}$$

dir. İspat tamamlanır.

4.5 Gronwall Eşitsizliği

İlk olarak klasik Gronwall eşitsizliği verilecektir.

Teorem 4.5.1. $I = [a, \infty)$ da $f(t)$ ve $u(t)$ negatif olmayan sürekli fonksiyon olsun. c negatif olmayan bir sabit olmak üzere $t \in I$ için

$$u(t) \leq c + \int_a^t f(s)u(s)ds$$

sağlansın. Bu durumda

$$u(t) \leq c \exp \left(\int_a^t f(s)ds \right)$$

dir.

Şimdi ayrık kesirli analizde Gronwall eşitsizliğini verelim.

Teorem 4.5.2. v ve y negatif olmayan reel değerli fonksiyonlar olmak üzere $\forall t \in \mathbb{N}_a$ için $0 \leq y(t) < 1$ ve

$$v(t) \leq \frac{(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} v(a) + \nabla_{a+1}^{-\nu} v(t) y(t)$$

olsun. Bu durumda

$$v(t) \leq \frac{v(a)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} E_y^k(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}$$

dir (Atici ve Eloe 2012).

İspat:

$$w(t) = \frac{v(a)}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^{\infty} E_y^k(t-a+1)^{\overline{\nu-1}}$$

alınp Teorem 3.5 ve Teorem 3.6 birlikte düşünülürse ispat elde edilir.

Eğer $\nu = 1$ ise ayrık analizde Gronwall eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç 4.5.1. $\forall t \in \mathbb{N}_a$ için $0 \leq y(t) < 1$ olsun. Eğer

$$v(t) \leq v(a) + \sum_{s=a+1}^t y(s)v(s)$$

ise

$$v(t) \leq v(a)\widehat{e}_y(t, a)$$

dir. Burada $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ zaman skalası için nabla üstel fonksiyonu

$$\widehat{e}_y(t, a) = (1 - y)^{a-t}$$

dir (Atici ve Eloe 2012).

İspat: Teorem 4.5.1 den $\nu = 1$ için

$$\begin{aligned} v(t) &\leq \frac{v(a)}{\Gamma(1)} \sum_{k=0}^{\infty} E_y^k(t - a + 1)^{\bar{0}} \\ &= v(a) \sum_{k=0}^{\infty} E_y^k 1 \end{aligned}$$

dir. Burada iddia edilen

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_y^k 1 = \widehat{e}_y(t, a)$$

dir. $\widehat{e}_y(t, a)$ üstel fonksiyonu

$$\nabla x(t) = y(t)x(t), \quad x(a) = 1$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür.

Gerçekten

$$\begin{aligned} \nabla \sum_{k=0}^{\infty} E_y^k 1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \nabla E_y^k 1 \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \nabla E_y^k 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nabla E_y (E_y^{k-1} 1) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \nabla \nabla_{a+1}^{-1} y(t) E_y^{k-1} 1 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} y(t) E_y^{k-1} 1 \\
&= y(t) \sum_{k=0}^{\infty} E_y^k 1
\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_y^k 1(a) = 1$$

dir. O halde

$$\sum_{k=0}^{\infty} E_y^k 1 = \widehat{e}_y(t, a)$$

dir ve ispat tamamlanır.

Ayrıca Sonuç 4.5.1 de $y(t) = \lambda$, $a = 0$, $v(0) = 1$ durumunu ele alalım. O halde Sonuç 4.5.1 den

$$v(t) \leq 1 + \sum_{s=1}^t \lambda v(s)$$

olup

$$\begin{aligned}
v(t) &\leq 1 \cdot \widehat{e}_y(t, 0) \\
&= (1 - \lambda)^{-t}
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitsizlik tümevarım ile de elde edilir. Burada $k = 1, 2, \dots$ için

$$(1 - \lambda)^k + \lambda \sum_{j=0}^{k-1} (1 - \lambda)^j = 1$$

ifadesinden yararlanır.

Örnek 4.5.1. Her bir t ve y için $0 \leq K < 1$ de $f(t, y)$ Lipschitz koşulunu sağlasın.

$t = a + 1, a + 2, \dots$ için $\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ sırasıyla

$$\nabla_a^\nu \varphi(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (4.45)$$

$$\nabla_a^{-(1-\nu)} \varphi(t)|_{t=a} = \alpha \quad (4.46)$$

ve

$$\nabla_a^\nu \psi(t) = f(t, \psi(t)) \quad (4.47)$$

$$\nabla_a^{-(1-\nu)} \psi(t)|_{t=a} = \beta \quad (4.48)$$

sağlasın.

$$\varphi(t) = \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} \alpha + \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, \varphi(t))$$

ve

$$\psi(t) = \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} \beta + \nabla_{a+1}^{-\nu} f(t, \psi(t))$$

olup

$$\varphi(t) - \psi(t) = \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} (\alpha - \beta) + \nabla_{a+1}^{-\nu} (f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)))$$

dir.

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| &\leq \left| \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} \right| |\alpha - \beta| + \left| \nabla_{a+1}^{-\nu} (f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))) \right| \\ &\leq \frac{(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}}}{\Gamma(\nu)} |\alpha - \beta| + K \nabla_{a+1}^{-\nu} |\varphi(t) - \psi(t)| \end{aligned}$$

dir.

Gronwall eşitsizliği ve Lemma 3.5 den

$$\begin{aligned}
|\varphi(t) - \psi(t)| &\leq \frac{|\alpha - \beta|}{\Gamma(\nu)} \sum_{i=0}^{\infty} E_K^i(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \\
&\leq \frac{|\alpha - \beta|}{\Gamma(\nu)} \sum_{i=0}^{\infty} F_K^i(t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} \\
&= |\alpha - \beta| \sum_{i=0}^{\infty} \frac{K^i}{\Gamma(i\nu + \nu)} (t - a + 1)^{\overline{(i+1)\nu-1}} \\
&= |\alpha - \beta| (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} F_{v,\nu}(K(t - a + v)^{\bar{\nu}})
\end{aligned}$$

dir, burada $F_{v,\nu}$ ayrık Mittag-Leffler fonksiyonudur.

$t = a + 1, a + 2, \dots$ için (4.47) ve (4.48) i

$$\nabla_a^\nu \psi(t) = f(t, \psi(t)) \quad (4.49)$$

$$\nabla_a^{-(1-\nu)} \psi(t)|_{t=a} = \alpha_n \quad (4.50)$$

alalım. Burada $\alpha_n \rightarrow \alpha$ dır.

O halde $[a, a + T] \cap \mathbb{N}_a$ aralılığı için (4.49) ve (4.50) denklemlerinin ψ_n çözümü

$$\begin{aligned}
|\varphi(t) - \psi_n(t)| &\leq |\alpha - \alpha_n| (t - a + 1)^{\overline{\nu-1}} F_{v,\nu}(K(t - a + v)^{\bar{\nu}}) \\
&\leq |\alpha - \alpha_n| (T + 1)^{\overline{\nu-1}} F_{v,\nu}(K(T + v)^{\bar{\nu}})
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken $\alpha_n \rightarrow \alpha$ olup

$$|\varphi(t) - \psi_n(t)| \rightarrow 0$$

dir. Sonuç olarak başlangıç koşullarındaki küçük bir değişikliğin çözümde de küçük değişikliklere neden olduğu görülmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Mühendislik ve bilimin farklı alanlarında yaygın olarak kullanılan ayrık kesirli hesaplamalar birçok matematikçi tarafından çalışılmaktadır ve ayrıca ayrık kesirli hesaplamalarla ilgili yapılmakta olan çalışmalar teknolojik gelişmelere de büyük katkılar sağlamaktadır. Bu sayede bu alanda yapılan çalışmalar daha çok önem kazanmaktadır.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. 2011. On riemann and Caputo fractional differences. Comput. Math. Appl. 62 (3); 1602-1611.
- Abdeljawad, T. and Benli, B. 2011. A quantum generalized Mittag-Leffler function via Caputo q -fractional equations. <http://arxiv.org/abs/1102.1585v1>[math DS].
- Abdeljawad, T. and Baleanu, D. 2011a. Caputo q -fractional initial value problems and q -analogue Mittag-Leffler function. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 16 (12); 4682-4688.
- Abdeljawad, T., Baleanu, D. 2011b. Fractional differences and integration by parts. J. Comput. Anal. Appl. 13 (3); 574-582.
- Anastassiou, G.A. 2009. Discrete fractional calculus and inequalities (submitted for publication).
- Anastassiou, G.A. 2010. Nabla Discrete Fractional Calculus and Nabla Inequalities. Math. Comput. Modelling 51 (5-6); 562-571.
- Anastassiou, G.A. 2011. Nabla time scales inequalities. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 3; 59-83.
- Anderson, D.R. 2002. Taylor polynomials for nabla dynamic equations on time scales. Panamer. Math. J. 12 (4); 17-27.
- Atici, F. and Eloe, P. 2007. A Transform Method In Discrete Fractional Calculus. Intern. J. of Difference Equations. Vol.2 (2); 165-176.

- Atici, F. and Eloe, P. 2009a. Discrete fractional calculus with the nabla operator. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. Spec. Ed.* 3; 1-12.
- Atici, F. and Eloe, P. 2009b. Initial value problems in discrete fractional calculus. *Proc. AMS* 137 (3); 981-989.
- Atici, F. and Eloe, P. 2011. Linear systems of fractional nabla difference equations. *Rocky Mountain J. Math.* 41 (2); 353-370(Special issue honoring Prof. Lloyd Jackson).
- Atici, F. and Eloe, P. 2012. Gronwall's inequality on discrete fractional calculus. *Comput. Math. Appl.* 64; 3193-3200.
- Atici, F. and Şengül, S. 2010. Modeling with fractional difference equations. *J.Math. Anal. Appl.* 639; 1-9.
- Bastos, N.R.O., Mozyrska, D. and Torres, D.F.M. 2011. Fractional derivatives and integrals on time scales via the inverse generalized Laplace transform. *Int. J. Math. Comput.* J11 (11); 1-9.
- Bastos, N.R.O., Ferreira, R.A.C. and Torres, D.F.M. 2011. Discrete-Time fractional variational problems. *Signal Process.* 3 (91); 513-524.
- Bastos, N.R.O., Ferreira, R.A.C. and Torres, D.F.M. 2011. Necessary optimality conditions for fractional difference problems of the calculus of variations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2 (29); 417-437.
- Bohner, M. and Peterson, A. 2001. *Dynamic Equations on Time Scales*, Birkhäuser, Boston.

- Denton, Z. and Vatsala, A.S. 2010. Fractional Integral Inequalities and Applications. Comput. Math. Appl. 59 (3); 1087-1094.
- Diaz, J.B. and Osler, T.J. 1974. Differences of fractional order. Math. Comp. 28; 185-201.
- Ferreira, R.A.C. and Torres, D.F.M. 2011. Fractional integral inequalities and applications. Comput. Math. Appl. 59; 1087-1094.
- Granger, C.W.J. and Joyeux, R. 1980. An introduction to long-memory time series models and fractional differences. J. Time Series Anal. 1; 15-29.
- Gray, H.L. and Zhang, N.F. 1988. On a new definition of the fractional differences. Math. Comp. 50 (182); 513-529.
- Goodrich, C. 2010a. Existence of a positive solution to a class of fractional differential equations. Appl. Math. Lett. 23; 1050-1055.
- Goodrich, C. 2010b. Solutions to a discrete right-focal fractional boundary value problem. Int. J. Differ. Equ. 5; 195-216.
- Holm, M. 2011. Solutions to discrete, nonlinear $(N - 1, 1)$ fractional boundary value problem. Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. 3; 267-287.
- Hosking, J.R.M. 1981. Fractional differencing. Biometrika 68; 165-176.
- Isaacs, G.L. 1980. Exponential laws for fractional differences. Math. Comp. 35; 933-936.
- Miller, K.S. and Ross, B. 1989. Fractional Difference Calculus. Ellis Horwood, Chichester, West Susses, England; 139-152.

Podlubny, I. 2000. Matrix approach to discrete fractional calculus. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 3; 359-386.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Metehan KARAGÖZ

Doğum Yeri : Ortaca

Doğum Tarihi : 15.06.1989

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ortaca Lisesi (2006)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2011)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (Şubat 2012 - Temmuz 2014)