

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SÜREKLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK VE
ÇATALLANMA ANALİZİ

Nesli BURKANKULU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2022

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SÜREKLİ DİNAMİK SİSTEMLERİN KARARLILIK VE ÇATALLANMA ANALİZİ

Nesli BURKANKULU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gizem SEYHAN ÖZTEPE

Bu tezde sürekli dinamik sistemler ele alınmaktadır. Bu sistemlerin çatallanma özellikleri incelenmekte ve bunlar yardımıyla oluşturulan farklı matematiksel modeller irdelenmektedir.

Bu tez sekiz bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Burada dinamik sistemlerin tarihi, bilim insanlarının bu alandaki çalışmaları ve bazı temel kavramlar açıklanmıştır. İkinci bölümde tek boyutlu akışlardan bahsedilip grafik yöntemi, kararlılık analizi, varlık-teklik teoreminin önemi üzerinde durulmuştur. Ayrıca bu kesimde bazı matematiksel modeller ele alınıp bunların kararlılık analizi grafik yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Üçüncü bölümde tek boyutlu sistemler için çatallanma türleri ele alınmıştır. Burada çatallanma türüne göre parametredeki değişim göz önüne alınarak grafikler analiz edilmiştir. Dördüncü bölümde çember üzerindeki bir vektör alanı incelenmiş ve bu vektör alanının oluşturduğu salınım sisteminin periyodik çözümlerinin kararlılıkları sınıflandırılmıştır. Beşinci bölümde çok boyutlu sistemlerin en temel sınıfı olan iki boyutlu lineer sistemler incelenip sınıflandırılmıştır. Altıncı bölümde iki boyutlu lineer olmayan sistemler üzerinde durulmuştur. Önce genel özellikler ele alınıp daha sonra beşinci bölümde işlenen lineer sistemler ile ilgili bilgilere dayanarak oluşabilecek sabit nokta türleri sınıflandırılmıştır. Yedinci bölümde limit döngüsü ve bunun bazı türleri hakkında temel bilgiler edinilip verilen bir sistemin periyodik bir çözüme sahip olup olmadığını anlamak için kullanılan bazı yöntemler incelenmiştir. Son bölümde ise, iki boyutlu sistemler için çatallanma türleri incelenmiştir. Bunların tek boyutlu sistemlerle benzer olan durumları açıklanmış ancak iki boyutlu sistemlerde, bunlara ek olarak kapalı yörüngelerin durumları da göz önüne alınmıştır.

Eylül 2022, 82 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dinamik sistem, Sürekli sistem, Kararlılık, Çatallanma

ABSTRACT

Master Thesis

Stability and Bifurcation Analysis of Continuous Dynamical Systems

Nesli BURKANKULU

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc.Prof. Dr. Gizem SEYHAN ÖZTEPE

In this thesis continuous dynamical systems are discussed. The bifurcation properties of these systems are examined and different mathematical models created with the help of them are studied.

This thesis consists of eight chapters. The first chapter is devoted to the introduction. Here, the history of dynamical systems, the work of scientists in this field and some basic concepts are explained. In the second chapter, one-dimensional flows are mentioned and the importance of graphical method, stability analysis, existence-uniqueness theorem is emphasized and some methods are developed. In addition, in this section, some mathematical models are discussed and their stability analysis is made using the graphical method. In the third chapter, bifurcation types for one-dimensional systems are discussed. Here, the graphs are analyzed by considering the change in the parameter according to the bifurcation type. In the fourth chapter, a vector field on the circle is examined and the stability of the periodic solutions of the oscillation system formed by this vector field is classified. In the fifth chapter, two-dimensional linear systems, which are the most basic class of multidimensional systems, are examined and classified. In the sixth chapter, two-dimensional nonlinear systems are emphasized. First, the general properties are discussed and then the types of fixed points that can be formed are classified based on the information about linear systems, which are covered in the fifth chapter. In the seventh chapter, basic information about the limit cycle and some of its types is obtained and some methods used to understand whether a given system has a periodic solution are examined. In the last chapter, bifurcation types for two-dimensional systems are examined. Their similar situations with one-dimensional systems are explained, but in two-dimensional systems, the cases of closed orbits are also considered.

September 2022, 82 pages

Key Words: Dynamical system, Continuous system, Stability, Bifurcation

TEŞEKKÜR

Beni bugünlere getiren aileme, bana her zaman destek olan eşime, canım kızım ve kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Gizem SEYHAN ÖZTEPE'ye sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Nesli BURKANKULU
Ankara, Eylül 2022



İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iv
SİMGELER DİZİNİ	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEK BOYUTLU AKIŞLAR	7
2.1 Grafik Yöntemi	7
2.2 Lineer Kararlılık Analizi	9
2.3 Varlık ve Teklik	10
2.4 Bazı Matematiksel Modeller	11
3. TEK BOYUTLU SİSTEMLER İÇİN ÇATALLANMA TÜRLERİ	17
3.1 Semer-Düğüm (Saddle-Node) Çatallanma	18
3.2 Transkritik (Transcritical) Çatallanma	20
3.3 Dirgen (Pitchfork) Çatallanma	25
3.4 Kusurlu Çatallanma	31
4. BİR ÇEMBER ÜZERİNDEKİ AKIŞLAR	35
4.1 Giriş	35
4.2 Düzgün Osilatörler	36
4.3 Düzgün Olmayan Osilatörler	37
5. İKİ BOYUTLU AKIŞLAR	39
5.1 Lineer sistemler	39
5.2 Lineer Sistemlerin Sınıflandırılması	45
6. FAZ DÜZLEMİ	55
6.1 Faz Portresi	55
6.2 Varlık-Teklik Teoremi ve Bazı Topolojik Sonuçlar	57
6.3 Sabit Noktalar ve Lineerleştirme	58
7. LİMİT DÖNGÜSÜ	61
7.1 Temel Bilgiler	61
7.2 Limit Döngüsü için Bazı Testler	64
7.2.1 Gradyan sistemler	64
7.2.2 Liapunov fonksiyonları	65
7.2.3 Dulac kriteri	66
7.2.4 Poincaré-Bendixson teoremi	67
7.2.5 Liénard sistemleri	69

8. İKİ BOYUTLU SİSTEMLER İÇİN ÇATALLANMA TÜRLERİ	
.....	71
8.1 Semer-Düğüm Çatallanması.....	71
8.2 Transkritik Çatallanma.....	74
8.3 Dirgen Çatallanma.....	74
8.4 Hopf Çatallanması.....	76
9. SONUÇ.....	79
KAYNAKLAR.....	80



SİMGELER DİZİNİ

$\dot{x}$	x değişkenin zamana göre türevi
X	X vektörü
V	potansiyel enerji
F	vektör fonksiyonu



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Lorenz modelinin çözüm grafiği	3
Şekil 1.2	Sarkaç modeli	5
Şekil 1.3	Bir noktanın bir eğri boyunca hareketi	6
Şekil 2.1	$(x, \sin x)$ grafiği	8
Şekil 2.2	$f(x) = x^2 - 1$ grafiği	8
Şekil 2.3	$y = x$ ve $y = \cos x$ in grafikleri	9
Şekil 2.4	N yeterince büyük olduğunda elde edilen kişi başına düşen büyüme oranı	11
Şekil 2.5	(2.4.1) in $(N, rN(1 - \frac{N}{K}))$ grafiği	12
Şekil 2.6	Popülasyonun zamana bağlı kararlılık grafiği	13
Şekil 2.7	Viskoz sıvı içerisindeki bir yaya bağlı kütle	14
Şekil 2.8	Yapışkan tabakalı potansiyel kuyusunun grafiği	15
Şekil 2.9	$V(x) = \frac{x^2}{2}$ grafiği	16
Şekil 3.1	Kiriş-yük modeli	17
Şekil 3.2	Parametre değişkeni r ye göre çatallanma grafiği	18
Şekil 3.3	Semer-düğüm çatallanmasının çatallanma diyagramı	19
Şekil 3.4	$\dot{x} = r - x - e^{-x}$ denkleminin r parametresine göre çatallanma durumu	19
Şekil 3.5	r ye göre transkritik çatallanma grafiği	20
Şekil 3.6	Transkritik çatallanmanın çatallanma diyagramı	21
Şekil 3.7	Katı hal lazerinin yapısı	23
Şekil 3.8	Lazer eşiği modelinin transkritik çatallanma grafiği	24
Şekil 3.9	(N_0, n) grafiği	25
Şekil 3.10	(3.3.1) in $(x, \dot{x})$ düzlemindeki grafiği	26
Şekil 3.11	(3.3.1) in çatallanma diyagramı	26
Şekil 3.12	$y = -x$ ve $y = \beta \tanh x$ in aynı düzlemde çizilen grafikleri	27
Şekil 3.13	$\dot{x} = -x + \beta \tanh x$ denkleminin çatallanma diyagramı	28
Şekil 3.14	$\dot{x} = rx + x^2$ denkleminin $(x, \dot{x})$ grafiği	28
Şekil 3.15	$\dot{x} = rx + x^3$ denkleminin çatallanma diyagramı	29
Şekil 3.16	Dönen bir çember üzerinde dönen bir boncuk	29
Şekil 3.17	Çember üzerindeki boncuğa etki eden kuvvetler	29
Şekil 3.18	$\cos \phi$ ve ϕ eğrilerinin $\frac{1}{\gamma}$ sabit fonksiyonu ile kesişim noktaları grafiği	31
Şekil 3.19	Sabit noktaların $\gamma < 1$ ve $\gamma > 1$ için çember üzerindeki yerleri	31
Şekil 3.20	(γ, ϕ) grafiği	31
Şekil 3.21	h parametresine göre $y = -h$ ve $y = rx - x^3$ eğrileri	32
Şekil 3.22	(r, h) düzleminde $h = \pm h_c(r)$ çatallanma eğrisi	33
Şekil 3.23	$\dot{x} = h + rx - x^3$ denkleminin çatallanma diyagramı	34
Şekil 3.24	$\dot{x} = h + rx - x^3$ denkleminin çatallanma diyagramı	34
Şekil 4.1	$\theta' = \sin \theta$ sistemi için faz portresi	36
Şekil 4.2	$\dot{\theta} = w - a \sin \theta$ denkleminin $(\theta, \dot{\theta})$ düzlemindeki grafiği	37
Şekil 4.3	a nın değişimine göre akışın hareketi	37
Şekil 4.4	a parametresinin değişimine göre çember üzerinde çizilen vektör alanı	38

Şekil 5.1	Yaya asılmış bir kütle düzeneği	40
Şekil 5.2	Faz düzleminde (5.1.3) sisteminin vektör alanı	41
Şekil 5.3	(5.1.3) sisteminin yörüngeleri	41
Şekil 5.4	Yaya bağlı kütlelerin konumları	42
Şekil 5.5	Yaya bağlı kütlelerin her bir durumunun yörüngedeki karşılığı	42
Şekil 5.6	a parametresine göre sistemin faz portreleri	43
Şekil 5.7	Bir çember üzerindeki $\dot{\theta} = 1 - \cos \theta$ sistemi	45
Şekil 5.8	λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen V_1 ve V_2 özvektörlerinin lineer kombinasyonu	47
Şekil 5.9	Örnek 5.2.1’de verilen sistemin faz portresi	48
Şekil 5.10	$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ için λ özdeğerlerine karşılık gelen faz portresi	49
Şekil 5.11	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ve $\lambda \neq 0$ için faz portresi	50
Şekil 5.12	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ve $\lambda = 0$ için faz portresi	50
Şekil 5.13	Özdeğerler kompleks sayı ise karşılık gelen faz portreleri	50
Şekil 5.14	Lineer sistemlerin sınıflandırılmasının grafik üzerindeki özeti	51
Şekil 5.15	(R, J) grafiği	53
Şekil 5.16	(J, R) düzlemi üzerinde faz portreleri	54
Şekil 6.1	Örnek bir faz portresi	55
Şekil 6.2	(x, y) düzleminde sıfır eğimlilerin gösterimi	56
Şekil 6.3	Varlık-tekliliğin bozulduğu bir yörünge modeli	57
Şekil 6.4	Örnek 6.3.1 sisteminin faz portresi	60
Şekil 7.1	Yörüngelerin durumuna göre limit döngüleri	61
Şekil 7.2	$\dot{X} = AX$ lineer bir sistemin periyodik çözüm şematığı	62
Şekil 7.3	Örnek 7.1.1 in $(r, \dot{r})$ grafiği	62
Şekil 7.4	Örnek 7.1.1 in faz portresi	63
Şekil 7.5	Örnek 7.1.1 in periyodik salınımlı çözümleri	63
Şekil 7.6	Van der Pol osilatörünün faz portresi ve $X(t)$ periyodik çözüm grafiği	64
Şekil 7.7	Poincaré-Bendixson teoreminin şartını sağlayan R kapalı bölgesi	68
Şekil 8.1	μ değişimine göre çatallanma grafiği	71
Şekil 8.2	Örnek 8.1.1’in grafiği	72
Şekil 8.3	Örnek 8.1.1’in faz portresi	73
Şekil 8.4	Örnek 8.3.1 in faz portresi	76
Şekil 8.5	λ_1 ve λ_2 ye göre (Re, Im) grafiği	76
Şekil 8.6	Örnek 8.4.1’deki sistemin μ ye göre faz portresi	77
Şekil 8.7	Örnek 8.4.2’deki sistemin faz portresi	78

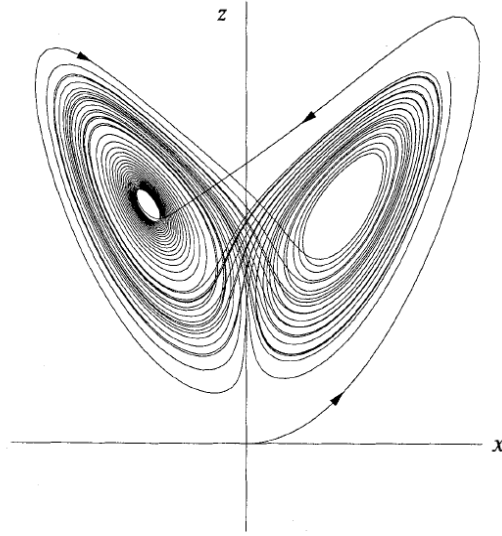
1. GİRİŞ

Son yıllarda lineer olmayan sistemler üzerine yapılan popüler çalışmalara bakıldığında iki kavramın yoğun bir şekilde incelendiği görülmektedir: Kaos ve Fraktal. Bu iki kavramın tarihi çok eski yıllara dayanmasına rağmen, sergiledikleri karmaşık ama estetik yapı, bilim insanlarının bu konulara olan ilgilerini hala canlı tutmaktadır. Bilim dünyasının hemen hemen her alanından bir bilim insanı kendi çalıştığı konu ile kaos ya da fraktallar arasında bir bağlantı kurarak bu kavramları daha ayrıntılı inceleme ihtiyacı hissetmektedir. Ancak bu iki kavramdan daha kapsamlı, derin ve kullanışlı olan bir yapının varlığından bahsetmemek olmaz. Bu kavram dinamik-tir. Dinamik zaman içinde gelişen sistemlerin değişimi ile ilgilenen bir konudur ve diferensiyel denklemler, klasik mekanik, kimya ve popülasyon biyolojisi gibi güncel pek çok alanda görülür. Bu konu kapsamında bilim insanları genellikle ele aldıkları sistemin denge durumu, periyodiklik özellikleri, asimptotik davranışları gibi birçok farklı özelliklerini incelerler.

Dinamik günümüzde disiplinlerarası bir konu olmasına rağmen, ilk başta fizikğin bir dalıydı. Newton'nun 1600'li yılların ortasında diferensiyel denklemleri bulması, hareket yasalarını ve evrensel yerçekimi yasalarını keşfetmesi, daha sonra onları Kepler'in gezegensel hareket yasalarını açıklamak için birleştirmesi sonucu dinamik konusu ortaya çıkmıştır (Strogatz 2014). Newton, özel olarak iki cisim problemini, yani dünyanın güneş etrafındaki hareketini hesaplarken aralarındaki çekimsel ters kare yasasını incelemiştir. Sonraki nesil matematikçiler ve fizikçiler ise Newton'un bu analitik metodunu üç cisim problemine yani dünya, güneş ve ay arasındaki ilişkiye genişletmeye çalışmışlar fakat bu problemin çözümünün hiç de kolay olmadığını görmüşlerdir. Yıllar süren çabalardan sonra bu üç cisim probleminin, cisimlerin hareketleri için açık formülleri elde ederek çözilemeyeceğini farketmişlerdir. Durum ümitsiz görünüyordu, ancak 1800'li yılların sonuna doğru Poincaré'nin çalışmasıyla birlikte yeni ve farklı bir düşünce şekli ortaya çıktı. Mesela gezegenlerin kesin konumlarını sormak yerine, "Güneş sistemi daima kararlı mı yoksa bazı gezegenler sonsuza mı uçup gidecek?" gibi sorular soruyordu. Poincaré bu soruları analiz etmek

için güçlü bir geometrik yaklaşım geliştirdi. Bu yaklaşım, gök mekaniğinin çok ötesine ulaşan uygulamalar ile modern dinamiğin temel yapıtaşı oldu. Ayrıca Poincaré kaos fikrini ilk ortaya atan kişiydi. Çünkü Poincaré'ye göre deterministik bir sistem başlangıç koşullarına duyarlı olarak periyodik olmayan bir davranış sergiliyorsa, bu durumda bu sistemin davranışları ile ilgili uzun vadeli bir çıkarımda bulunmak mümkün değildir (Strogatz 1994). Ancak, kaos fikri 19. yüzyılın ilk yarısına kadar yukarıda bahsedilen bu basit tanımıyla arka planda kaldı. Öte yandan dinamikler, lineer olmayan osilatörler ve bunların fizik ve mühendislikteki uygulamalarıyla birlikte ön plana çıkmıştı. Lineer olmayan osilatörler, uygulama bakımından radyo, radar ve lazer gibi teknolojilerin gelişmesinde önemli bir rol oynarken, teoriksel olarak Andronov, Cartwright ve Smale gibi öncülerle birlikte yeni matematiksel tekniklerin keşfedilmesini tetikledi (Cartwright 1952, Smale 1967, Andronov vd. 1973).

1950'li yıllarda yüksek hızlı bilgisayarın icadı, dinamik tarihinin dönüm noktası oldu. Bu bilgisayar daha önce mümkün olmayan bir yolla denklemleri analiz ederek lineer olmayan sistemler hakkında bazı fikirlerin ortaya çıkmasına yardımcı oldu. Lorenz' in 1963'de sıradışı atraktörler üzerindeki kaotik hareketleri keşfetmesinde bu bilgisayarın rolü çok büyüktür. Lorenz (1963), hava durumunun öngörülemezliğine dair fikir edinmek için atmosferde basitleştirilmiş konveksiyon merdane modeli üzerine çalışmıştır. Lorenz, denklemlerin çözümlerinin hiçbir zaman dengeye ve periyodik bir duruma gelmediğini, aksine düzensiz, periyodik olmayan bir şekilde davranış sergilemeye devam ettiğini gözlemlemiştir. Ayrıca, simülasyonlarına birbirinden çok az farklı iki başlangıç koşuluyla başlaması durumunda gözlemlediği davranışların tamamen farklı olduğunu deneyimlemiştir. Bunun anlamı ise sistemin kendiliğinden tahmin edilememesidir. Yani atmosferin (ya da başka herhangi bir kaotik sistemin) mevcut durum ölçümlerindeki küçük hataların kötü tahminlere yol açabileceğini ispatlamıştır. Ayrıca, Lorenz incelediği denklemlerin çözümlerinin üç boyutlu çizimi yapıldığında, bu çizimde kelebek şeklinde bir yapı oluştuğunu gözlemlemiştir (Şekil 1.1). Lorenz' in bu çalışması, 1970'lere kadar küçük bir etki yaratmasına rağmen 1970'lerden sonra kaos alanındaki çalışmaların hız kazanmasına yardımcı oldu. Şimdi bu çalışmaların bazılarından bahsedelim:



Şekil 1.1 Lorenz modelinin çözüm grafiği

Ruelle ve Takens sıradışı atraktörlere dair soyut fikirlere dayanarak sıvılardaki türbülansın başlaması ile ilgili yeni bir teori önerdi (Ruelle ve Takens 1971). Birkaç yıl sonra, May (1976) populasyon biyolojisinde görülen iterasyonların birer kaos örneği olduğunu gösterdi ve basit lineer olmayan sistemlerin incelenmesinin önemini belirttiği dikkat çekici bir makale yayınladı. Daha sonra fizikçi Feigenbaum tarafından en şaşırtıcı keşif geldi. Feigenbaum (1978) düzenli davranıştan kaotik davranışa geçişi düzenleyen belirli evrensel yasaların varolduğu gerçeğini ispatladı. Feigenbaum'a göre tamamen farklı sistemler aynı şekilde kaotikleşebiliyordu. Onun çalışmaları kaos ve faz geçişleri arasında bir bağlantı kurdu ve bir nesil fizikçilerini dinamik çalışmaya yönlendirdi. Daha sonra, Libchaber, Linsay ve Moon gibi bilim insanları sıvılar, kimyasal reaksiyonlar, elektronik devreler, mekanik osilatörler ve yarı iletkenler üzerinde yapılan deneylerde kaos hakkındaki yeni teorileri test ettiler (Linsay 1981, Libchaber vd. 1982, Moon 1992).

Son 20 yılda ise yeni kaotik sistemler ortaya konmuş ve bunların farklı özellikleri incelenmiştir: 2010 yılında Hesse sistemindeki semer-düğüm çatallanması incelenmiştir (Boitillaev 2010). 2015'de uçak kanadının aerodinamik titreşimlerini modelleyen sistemin Hopf çatallanması üzerinde durulmuş (Li vd. 2015), 2018'de Degn-Harrison kimyasal modelinin kararlılığı ve Hopf çatallanması irdelenmiştir (Chen ve Zhang 2018). 2020'de gecikmeli bir tüberküloz matematiksel modeli üzerinde Hopf

çatallanması göz önüne alınmış (Bonyah vd. 2020) ve 2021’de gecikmeli bir mutualist sisteminin kararlılığı ve Hopf çatallanması incelenmiştir (Zhang vd. 2021). 2022’de ise karışık elastohidrodinamik yağlamalı (elastohydrodynamic lubrication) EHL sürtünmeli planet dişli transmisyon sisteminin çatallanma ve kaos özellikleri üzerine araştırmalar yapılmıştır (Wang vd. 2022).

Şimdi dinamiklerin matematiksel yapısını ele alalım. Dinamik sistemler *diferensiyel denklemler* ve *fark denklemleri* olmak üzere iki ana kısımdan oluşur. Diferensiyel denklemler sistemlerin sürekli zaman içindeki oluşumunu tanımlarken fark denklemleri ise zamanın ayrık olduğu problemlerde karşımıza çıkar (Strogatz 2014). Diferensiyel denklemler *adi diferensiyel denklemler* ve *kısmi türevli denklemler* olmak üzere ikiye ayrılır. Adi diferensiyel denklem içinde bir bağımlı, bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre bazı türevlerini içerir. Örneğin, sönümlü harmonik osilatör denklemi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (1.1)$$

bir adi diferensiyel denklemdir, burada x bağımlı değişken, t bağımsız değişken ve m , b ve k ise keyfi sabitlerdir. Diğer taraftan,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

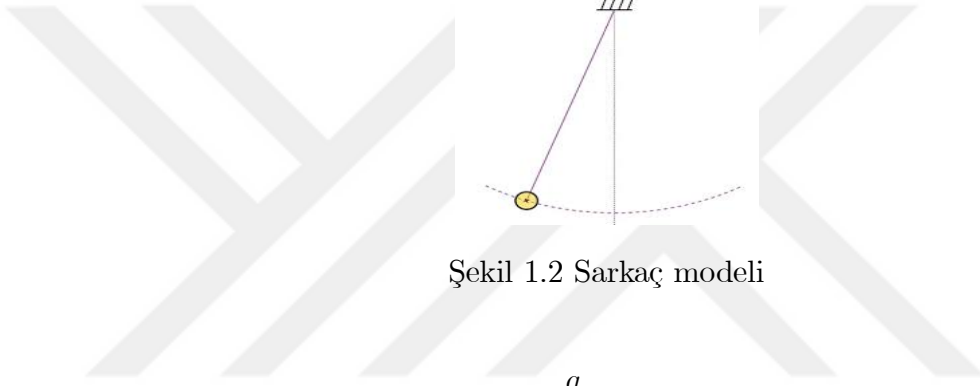
ısı denklemi, u bağımlı, t ve x bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli diferensiyel denklemdir. Bir kısmi türevli denklem içerisinde en az bir bağımlı ve en az iki bağımsız değişken içeren ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre bazı türevlerini içeren denklemler olarak tanımlanır. Bu çalışma adi diferensiyel denklemlerin çatallanma özelliklerini incelemektedir. Şu andan itibaren adi diferensiyel denklem yerine diferensiyel denklem ibaresi kullanılacaktır. En genel şekli ile bir diferensiyel denklem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1.2)$$

ile verilir, burada $\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt}$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ dir. (1.2) deki $x_1, \dots, x_n$ dir (Strogatz 2014). Şimdi (1.1) denklemini (1.2) sistemine indirgemek için $x_1 = x$ ve $x_2 = \dot{x}$ değişkenleri tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Lineer diferensiyel denklemler literatürde önemli bir teoriye sahip olmasına rağmen, gerçek hayat modellerinde karşımıza çoğunlukla lineer olmayan denklemler çıkar. Örneğin,



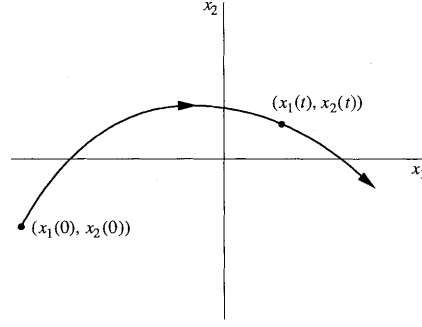
Şekil 1.2 Sarkaç modeli

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} \sin x = 0$$

ile verilen sarkaç modeli şekil 1.2'yi ele alalım, burada x sarkacın dikey açısı, g yerçekim ivmesi ve L sarkacın uzunluğudur. Bu denkleme karşılık gelen lineer olmayan sistem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L} \sin x_1\end{aligned}$$

dir. Fakat buradaki lineer olmayan terim ($\sin x$) denklemin analitik olarak çözümünün elde edilmesini oldukça zorlaştırmıştır. Bu yüzden lineer olmayan bir diferensiyel denklemin çözümüne ulaşmadan da geometriksel metotlarla denklemin çözümü hakkında bilgi edinilebileceği üzerinde durulmuştur (Strogatz 2014). $x_1(t)$ ve $x_2(t)$ belirli bir başlangıç koşuluyla birlikte sarkaç sisteminin çözümleri olsun. Eğer (x_1, x_2) koordinatlarından oluşan soyut bir uzay oluşturulursa, bu durumda $(x_1(t), x_2(t))$ çözümü o uzaydaki bir noktanın bir eğri boyunca hareketini gösterir (Şekil 1.3).



Şekil 1.3 Bir noktanın bir eğri boyunca hareketi

Grafikteki eğri *yörünge*, (x_1, x_2) koordinatlarının oluşturduğu düzlem ise *faz uzayı* olarak adlandırılır.

Bu tezde tek boyutlu ve iki boyutlu diferensiyel denklem sistemleri ele alınarak her bir sistem için var olan çatallanma türleri incelenmiştir. Bu çatallanma türlerinin tanımları verilmiş ve bu özellikleri incelemek için kullanılan çeşitli yöntemler üzerinde durulmuştur.

2. TEK BOYUTLU AKIŞLAR

Birinci bölümde söz edilen (1.2) sisteminin çözümleri $(x_1, \dots, x_n)$ koordinatlı n - boyutlu bir faz uzayında bulunan yörüngeler olarak düşünülebilir. (1.2) de $n = 1$ alırsa

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

elde edilir, burada $x(t)$, t nin reel değerli bir fonksiyonu ve $f(x)$, x in düzgün reel değerli fonksiyonudur. Bu denklemlere *tek boyutlu* veya *birinci basamaktan sistemler* denir (Strogatz 2014).

2.1 Grafik Yöntemi

(2.1) sistemi, f nin yapısına göre lineer olmayan bir sistem olabilir. Genellikle, lineer olmayan sistemleri grafik yöntemi yardımı ile analiz etmek, çözümleri üzerinden analiz etmekten daha kolaydır. Bu yöntemin ne kadar kullanışlı olduğunu açıklamak için tek boyutlu lineer olmayan

$$\dot{x} = \sin x \quad (2.1.1)$$

denklem sistemini ele alalım. (2.1.1) in çözümü

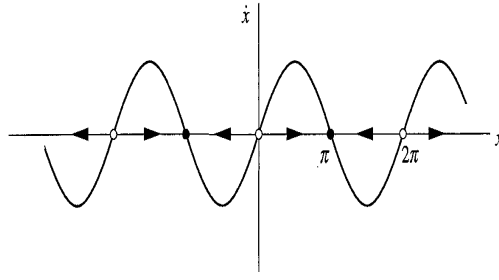
$$t = -|\ln \csc x + \cot x| + c$$

dir, burada c bir keyfi sabittir. $x(0) = x_0$ başlangıç koşulu altında çözüm,

$$t = \ln \left| \frac{\csc x + \cot x}{\csc x_0 + \cot x_0} \right|$$

olur. Burada $t \rightarrow \infty$ için denklemin sağ tarafı hakkında bir yorum yapılamayacağı açıkça görülmektedir. Öte yandan, denklem sisteminin grafiği çizildiğinde belirli kurallar çerçevesinde çözümü hakkında bilgi sahibi olunabilir. Şimdi $\dot{x} = \sin x$ grafiğini göz önüne alalım (Şekil 2.1). Burada x eksenini boyunca hareket eden hayali bir parçacığın konumu gösterilsin, $\dot{x}$ de bu parçacığın hızı olsun. Bu durumda $\dot{x} = \sin x$ denklemi eksen üzerinde bir vektör alanı belirtir yani her bir x e bir $\dot{x}$ hız vektörü karşılık gelir. Bu vektör alanının $X\dot{X}$ – düzleminde çizilmesi uygun olacaktır.

Daha anlaşılır olması açısından, hayali bir akışkanın (su, elektrik alanı vb. gibi) $\dot{x} = \sin x$ kuralına sahip bir hızla x eksenini boyunca hareket ettiğini düşünelim.

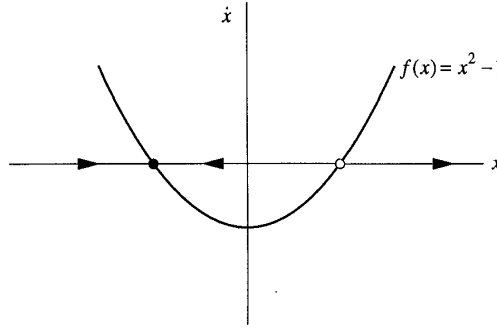


Şekil 2.1 $(x, \sin x)$ grafiği

Şekil 2.1'e göre eğer $\dot{x} > 0$ ise akış sağa doğru, $\dot{x} < 0$ ise sola doğru olur. $\dot{x} = 0$ olduğu yerlerde akış yoktur, bu noktalara *sabit nokta (denge noktası)* adı verilir. Şekil 2.1'de x ekseninde içi boş olan sabit noktalara *kararsız sabit nokta*, içi dolu olanlara ise *kararlı sabit nokta* denir. Böylece bir $\dot{x} = f(x)$ denklem sisteminin sabit noktaları $f(x^*) = 0$ denklemini sağlayan x^* noktalarıdır, denebilir. Şimdi aşağıdaki örneklerle verilen bir denklem sisteminin sabit noktalarını ve bu sabit noktaların kararlılık durumlarını inceleyelim.

Örnek 2.1.1 $\dot{x} = x^2 - 1$ denklemini inceleyiniz.

Çözüm Burada $f(x) = x^2 - 1$ olup $f(x^*) = 0$ için $x^* = \pm 1$ dir.



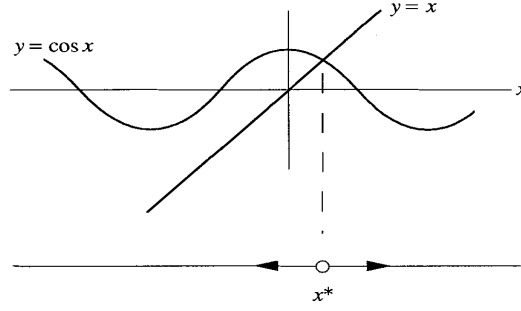
Şekil 2.2 $f(x) = x^2 - 1$ grafiği

Yukarıdaki grafikte görüldüğü gibi $\dot{x} > 0$ olduğu yerlerde akış sağa, $\dot{x} < 0$ olduğu yerlerde akış sola doğru hareket eder. Böylece $x^* = -1$ sabit noktası kararlı iken $x^* = 1$ noktası kararsız olur.

Örnek 2.1.2 $\dot{x} = x - \cos x$ denkleminin tüm sabit noktalarının kararlılıklarını inceleyiniz.

Çözüm $f(x) = x - \cos x$ dir. Doğrudan $f(x)$ grafiğini çizmek kolay olmayacağından $y = x$ ve $y = \cos x$ grafiklerini ayrı ayrı aynı faz portresi üzerinde çizip kesiştikleri

noktaları bulalım.



Şekil 2.3 $y = x$ ve $y = \cos x$ in grafikleri

Şekil 2.3’de görüldüğü gibi $y = x$ ve $y = \cos x$ bir tek noktada kesişir. Bu sabit noktanın kararlılığı için $f(x^*) > 0$ ve $f(x^*) < 0$ olduğu değerlere bakılırsa $x^* - \cos x^* > 0$ olduğunda $x^* > \cos x^*$ olur. Bu da x ekseninde okların sağa doğru olduğu anlamına gelir. Aynı şekilde $x^* - \cos x^* < 0$ olduğunda $x^* < \cos x^*$ olup x ekseninde oklar sola doğrudur. O halde sistemin tek sabit noktası kararsızdır.

2.2 Lineer Kararlılık Analizi

Lineer kararlılık analizi sabit noktaların kararlılığına grafik yöntemine göre daha kalitatif bir yaklaşım sunar. x^* , verilen sistemin bir sabit noktası ve

$$\mu(t) = x(t) - x^* \quad (2.2.1)$$

x^* etrafındaki küçük bir sapma (pertürbasyon) olsun. Bu sapmanın büyüyip büyümediğini görmek için (2.2.1) in türevi alınırsa

$$\dot{\mu} = \dot{x} = f(x) = f(x^* + \mu)$$

elde edilir. $f(x^* + \mu)$ için x^* çevresinde Taylor Seri açılımı yapılırsa

$$f(x^* + \mu) = f(x^*) + \mu f'(x^*) + O(\mu^2)$$

olur. Böylece

$$\dot{\mu} \approx \mu f'(x^*)$$

bulunur. Bu denklem μ ye göre lineer olup x^* etrafında lineerleştirme adımı alır. Eğer $f'(x^*) > 0$ ise, $\mu(t)$ sapması artıyor, aksine $f'(x^*) < 0$ ise $\mu(t)$ azalıyor demektir.

Eğimin negatif olduğu yerlerdeki sabit noktalar kararlı iken eğimin pozitif olduğu yerlerde kararsız olurlar. $f'(x^*) = 0$ olduğu durumlarda ise Taylor Seri açılımındaki ikinci dereceden terimler gözardı edilemediğinden daha derin bir inceleme gerekir.

Örnek 2.2.1 $\dot{x} = \sin x$ denkleminin denge noktalarını sınıflandırınız.

Çözüm $f(x^*) = \sin x^* = 0$ için $x^* = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ olduğundan verilen denklemin denge noktaları $x^* = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dir. Buradan

$$f'(x^*) = \cos k\pi = \begin{cases} 1, & k \text{ çift} \\ -1, & k \text{ tek} \end{cases}$$

olup k çift olduğunda $f'(x^*) > 0$ olduğundan x^* kararsız, ve k tek olduğunda x^* kararlı olur.

2.3 Varlık ve Teklik

Bu kesimde, ele alınan sistemin çözümlerinin varlık ve tekliği üzerinde durulacaktır.

Örnek 2.3.1 $\dot{x} = x^{\frac{1}{3}}$, $x(0) = 0$ başlangıç değer problemini inceleyiniz.

Çözüm $x = 0$ yukarıdaki problemin bir denge noktasıdır. Ayrıca $x(t) = 0$ bu sistemin aşık bir çözümdür. Diğer taraftan verilen başlangıç değer problemi çözüldüğünde aşık çözümden başka $x(t) = (\frac{2}{3}t)^{3/2}$ çözümleri de elde edilir. Yani verilen sistem tek çözüme sahip değildir. Teklik bozulduğunda grafik yöntem çalışmaz, çünkü başlangıç noktası nasıl hareket edeceğine karar veremez. Yukarıdaki örneğe göre $x_0 = 0$ dan başlayan çözümler orijin etrafında mı kalacak yoksa diğer $x(t) = (\frac{2}{3}t)^{3/2}$ çözümüne göre mi hareket edecek? Bu durumu netleştirmek için aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 2.3.1

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

başlangıç değer problemleri verilsin. $f(x)$ ve $f'(x)$, x ekseninde açık bir aralık olan R de sürekli olsun ve $x_0 \in R$ olsun. Bu durumda verilen başlangıç değer problemleri $t = 0$ için $(-\tau, \tau)$ aralığında bir $x(t)$ çözümüne sahiptir ve bu çözüm tektir (Borelli ve Coleman 1987).

Örnek 2.3.1 $\dot{x} = 1 + x^2$, $x(0) = x_0$ başlangıç değer probleminin çözümlerinin varlık ve tekliğini inceleyiniz.

Çözüm $f(x) = 1 + x^2$ olup, her $x \in \mathbb{R}$ için kendisi ve türevi süreklidir. O halde varlık ve teklik teoremine göre herhangi bir başlangıç koşulu için çözüm var ve tektir. Ancak bu teorem çözümlerin yalnızca $t = 0$ komşuluğunda var olduğunu garanti eder. Şimdi $x(0) = 0$ durumunu ele alalım. Verilen problemin analitik çözümü

$$x(t) = \tan t$$

şeklinde elde edilir. Bu çözüm sadece $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ aralığında vardır, çünkü fonksiyon bu aralıkta tanımlı ve süreklidir. Bu aralık dışında $x_0 = 0$ için çözüm yoktur.

2.4 Bazı Matematiksel Modeller

Bu kesimde tek boyutlu denklem sistemi ile kurulan bazı matematiksel modellerden bahsedilmektedir (Strogatz 2014).

Nüfus Artışı Modeli

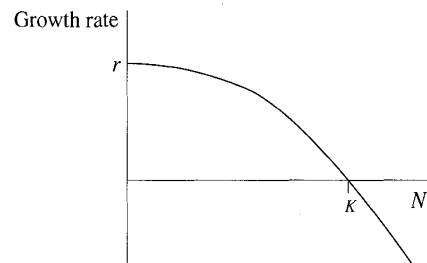
Bir canlı topluluğunun nüfusunu modellemek için kurulan en basit model

$$\dot{N} = rN$$

dir, burada $N(t)$, t anındaki nüfus büyüklüğü ve $r > 0$ ise büyüme oranıdır. Buradan N_0 , $t = 0$ anındaki nüfus büyüklüğü olmak üzere

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

şeklinde, üstel olarak artan bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyonun sonsuza kadar artarak ilerlemeyeceği aşıkardır.



Şekil 2.4 N yeterince büyük olduğunda elde edilen kişi başına düşen büyüme oranı

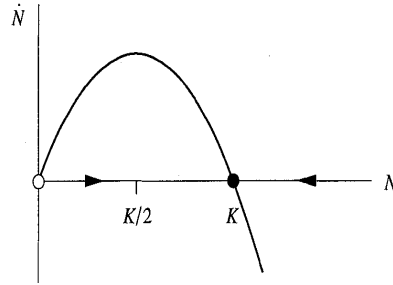
Popülasyon biyologları ve demograflar genellikle aşırı yoğunluğun ve sınırlı kaynakların etkilerini modellemek için N yeteri kadar büyüdüğünde kişi başına düşen büyüme oranının düştüğünü kabul ederler (Şekil 2.4). Küçük N ler için büyüme oranı r ye eşittir. N , K taşıma kapasitesinden daha fazla ise büyüme oranı negatif yönde seyreder. Bu da ölüm oranının doğum oranından daha fazla olduğu anlamına gelir. Bu yorumların matematiksel olarak daha anlamlı bir şekilde ifade edilmesi için kişi başına düşen $\frac{N'}{N}$ büyüme oranının N ye göre lineer bir şekilde azaldığı kabul edilirse

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad (2.4.1)$$

lojistik denklemi elde edilir. Bu denklem ilk defa 1838 yılında Verhulst tarafından insan nüfusunun artışı modellemek için kurulmuştur (Strogatz 2014). Bu denklemin çözümü

$$N(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}$$

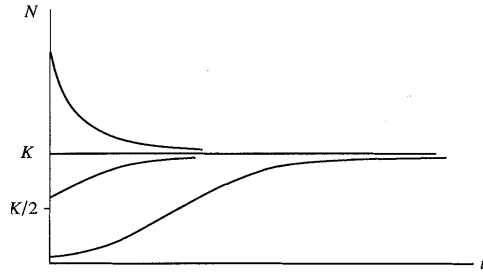
dir. Buradan, $t \rightarrow \infty$ iken $N(t) \rightarrow K$ elde edilir. Yani zaman geçtikçe nüfus artışı taşıma kapasitesine ulaşır (Şekil 2.5).



Şekil 2.5 (2.4.1) in $(N, rN(1 - \frac{N}{K}))$ grafiği

Diğer taraftan grafik yöntemini uygulayalım. Popülasyon pozitif olduğundan sadece $N \geq 0$ değerleri ele alınmıştır. (2.4.1) in sabit noktaları $N^* = 0$ ve $N^* = K$ dir. Şekil 2.5’den $N^* = 0$ daki sabit noktanın kararsız, $N^* = K$ da ise kararlı olduğu görülür. Biyolojik olarak bakıldığında, $N = 0$ kararsız bir denge noktasıdır, yani başlangıçtaki nüfus çok hızlı bir şekilde artacak ve $N = 0$ noktasından uzaklaşacaktır. Öte yandan, eğer N , K dan çok az uzaklaşırsa bu uzaklaşma monoton olarak azalacak ve $t \rightarrow \infty$ için $N(t) \rightarrow K$ olacaktır. Gerçekten şekil 2.5’den de görüldüğü üzere herhangi bir $N_0 > 0$ başlangıç noktası için her zaman $N = K$ olacaktır. O

halde popülasyon her zaman taşıma kapasitesine yaklaşma eğilimindedir sonucuna varılır. Burada sadece tek bir istisna nokta vardır: $N = 0$. Yani başlangıçta üremeyi başlatacak kimse yoksa nüfus artamaz, bir başka ifadeyle model kendiliğinden oluşuma izin vermemektedir. Ayrıca, şekil 2.5 probleme kalitatif bir yaklaşımda da bulunmaktadır. Eğer $N_0 < \frac{K}{2}$ ise yörünge üzerinde alınan bir nokta (faz noktası) $\frac{K}{2}$ ye kadar hızlanarak artar ve parabolün maximum değerini aldığı $\frac{K}{2}$ den itibaren faz noktası yavaşlayarak $N = K$ durumuna ulaşır.

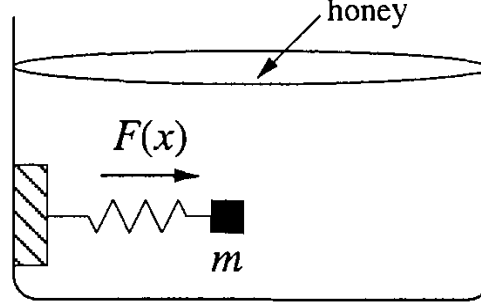


Şekil 2.6 Popülasyonun zamana bağlı kararlılık grafiği

Birinci basamaktan sistemlerin sabit noktaları bu sistemlerin davranışları için belirleyicidir. Önceki örneklerden görüldüğü gibi birinci basamaktan sistemlerde sistemin yörüngeleri ya sabit noktaya yakınsar ya da $\pm\infty$ a ıraksar. $\dot{x} = f(x)$ sistemi bir doğru üzerindeki akışa karşılık gelir ve bu sistemlerin denge noktalarına olan yaklaşım daima monotondur, bu yüzden sistemin çözümleri hiçbir zaman başlangıç noktalarına geri dönemez yani sistem periyodik çözümlere sahip olamaz.

Diğer taraftan bu sistemlerin salınımlı çözümleri de yoktur. Bu durumu aşağıdaki örneklerle açıklayalım:

Aşırı Sönümlü Sistemler

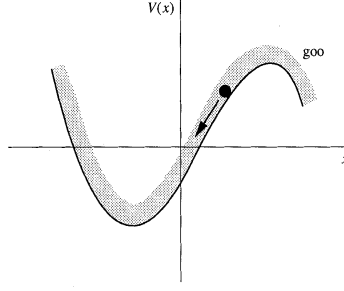


Şekil 2.7 Viskoz sıvı içerisindeki bir yaya bağlı kütle

Şekil 2.7’de gösterildiği üzere bir m kütesinin, geri çekme kuvveti $F(x)$ olan doğrusal olmayan yaya bağlandığını varsayalım, burada x başlangıç noktasına olan uzaklıktır. Ayrıca bu düzenegin bal veya motor yağı gibi çok viskoz sıvı dolu bir kaba batırıldığını düşünelim, böylece kütle $b\dot{x}$ sönümlleme kuvveti etkisi altında olur. Bu durumda, Newton kanunu $m\ddot{x} + b\dot{x} = F(x)$ şeklinde yazılır. Viskoz sıvının sönümllemesi, $m\ddot{x}$ eylemsizlik terimine kıyasla çok daha güçlüyse, yani $b\dot{x} \gg m\ddot{x}$ ise, sistem $b\dot{x} = F(x)$ gibi davranmalıdır ya da $\dot{x} = f(x)$ dir, burada $f(x) = b^{-1}F(x)$ olur. Bu aşırı sönümlü durumda mekanik sistemin davranışı bellidir. Kütle $f(x) = 0$ ve $f'(x) < 0$ olduğu kararlı bir denge noktasında kalmayı tercih eder. Kütle biraz yer değiştirdiğinde geri çekme kuvveti etkisi yavaş yavaş dengeye geri gelir. Sistemde aşırı bir sönümlleme durumu olduğundan dengeyi aşma meydana gelmez.

Potansiyel Sistemler

$\dot{x} = f(x)$ birinci basamaktan sisteminin davranışlarını görselleştirmenin bir yolu da fizikteki potansiyel enerji fikrine dayanarak şekildeki sistemi kurmaktır:



Şekil 2.8 Yapışkan tabakalı potansiyel kuyusunun grafiği

Şimdi bir parçacığın, duvarları tamamen kalın yapışkan bir tabaka ile kaplı olan bir potansiyel kuyusunun duvarlarından kaydığını düşünelim. Bu durumda $V(x)$ parçacığın potansiyel enerjisi olmak üzere

$$f(x) = -\frac{dV}{dx}$$

yazılır. Buradaki $(-)$ işareti parçacığın hareketinin yönünden kaynaklanmaktadır.

Buradan x, t nin fonksiyonu olmak üzere $V(x(t))$ ifadesinin t ye göre türevinden

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \frac{dx}{dt}$$

olur. Böylece $f(x) = -\frac{dV}{dx}$ ve $\dot{x} = f(x)$ olduğundan

$$\frac{dV}{dt} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 \leq 0$$

elde edilir. Sonuç olarak parçacığın $V(t)$ potansiyel enerjisi yörüngeler boyunca azalır ve parçacık her zaman düşük potansiyele doğru hareket eder. Eğer parçacık $\frac{dV}{dx} = 0$ denge noktası ile karşılaşursa V potansiyelinin sabit kalması beklenir, çünkü $\frac{dV}{dx} = 0$ demek $\dot{x} = 0$ demektir. Öte yandan, $V(x)$ potansiyelinin yerel minimum noktaları kararlı sabit noktalara denk gelirken yerel maksimum noktaları ise kararsız sabit noktalara karşılık gelir.

Örnek 2.4.1

$$\dot{x} = -x$$

sisteminin potansiyel grafiğini çizin ve denge noktalarını bulunuz.

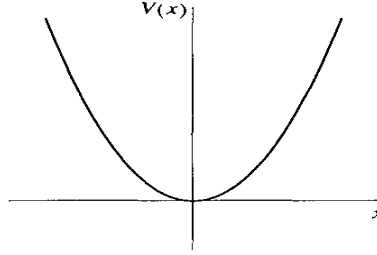
Çözüm

$$-\frac{dV}{dx} = -x \tag{2.4.2}$$

olacak şekilde $V(x)$ i bulmalıyız. (2.4.2) in genel çözümü

$$V = \frac{x^2}{2} + c$$

dir, burada c keyfi sabittir. Genellikle $c = 0$ alınır ve böylece $V(x)$ in grafiği aşağıdaki gibidir (Şekil 2.9).



Şekil 2.9 $V(x) = \frac{x^2}{2}$ grafiği

Örnek 2.4.2

$$\dot{x} = x - x^3$$

sisteminin potansiyel grafiğini çiziniz ve denge noktalarını bulunuz.

Çözüm

$$-\frac{dV}{dx} = x - x^3 \quad (2.4.3)$$

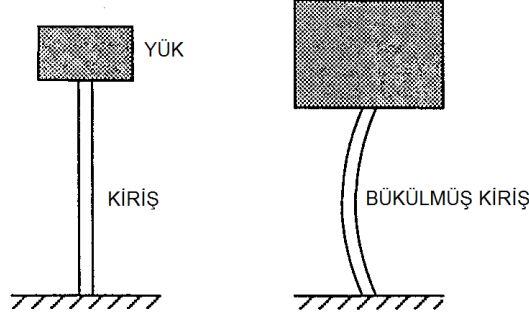
olacak şekilde $V(x)$ i bulmalıyız.(2.4.3) ün genel çözümü

$$V = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + c$$

dir, burada c keyfi sabittir. Genellikle $c = 0$ alınır.

3. TEK BOYUTLU SİSTEMLER İÇİN ÇATALLANMA TÜRLERİ

Önceki bölümde de görüldüğü üzere bir doğru üzerindeki vektör alanlarının davranışları oldukça sınırlıdır. Bu sistemler için tüm çözümler ya denge noktasına yaklaşır ya da sonsuza gider. Peki bu sistemler neden incelenmektedir? Bu sorunun cevabı sistemin parametrelerine bağlıdır. Çünkü parametrelerin değişimine göre akışın kalitatif durumu farklılık gösterir: sabit noktalar oluşabilir, yok olabilir veya kararlılıkları değişebilir. Sistemde oluşan bu kalitatif değişikliklere *çatallanma*, çatallanmaların olduğu noktadaki parametre değerlerine ise *çatallanma noktaları* denir (Strogatz 2014).



Şekil 3.1 Kiriş-yük modeli

Bu durumu şekil 3.1 ile açıklayalım. Şekil 3.1'e bakıldığında soldaki kirişin üzerine konulan yük hafif olduğu için kirişte bir bükülme görülmezken sağdaki kirişin üzerine konulan yükün fazla ağır olmasından dolayı kirişte bir bükülme gözlemlenir. Yani soldaki kiriş dikey pozisyonda dengede iken sağdaki kiriş dikey pozisyonunu koruyamamaktadır. Dolayısıyla, burada yük r kontrol parametresine, kirişin dikey pozisyonundaki eğilme ise x değişkenine karşılık gelmektedir. O halde incelenecek birinci basamaktan denklem sistemi

$$\dot{x} = f(x, r)$$

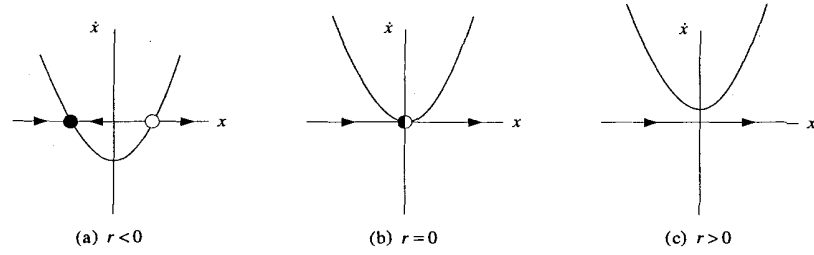
şeklinde ele alınabilir. Şimdi farklı çatallanma türlerini inceleyelim.

3.1 Semer-Düğüm (Saddle-Node) Çatallanma

Semer-Düğüm çatallanması sabit noktaların ortaya çıktığı ve yok olduğu temel bir çatallanma türüdür. Bazı kaynaklarda bu çatallanma *kat çatallanması (fold bifurcation)* ya da *nokta dönüş çatallanması (turning-point çatallanması)* adını alır. Bu çatallanmada parametre değiştikçe sistemin iki sabit noktası birbirine yaklaşır, çarpışır ve yok olur. Semer-Düğüm çatallanması içeren birinci basamaktan denklem sisteminin normal formu

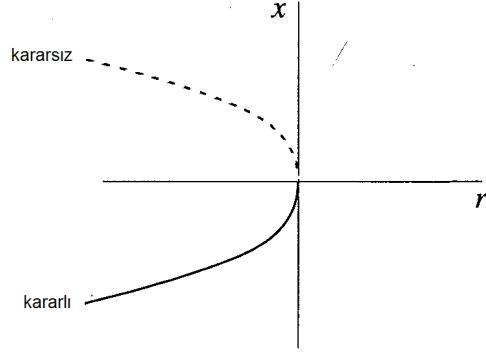
$$\dot{x} = r + x^2 \quad (3.1.1)$$

dir, burada r parametre ve x bağımlı değişkendir. Şimdi (3.1.1) sisteminin çatallanma grafiğini r nin negatif, sıfır ve pozitif olma durumlarına göre $(x, \dot{x})$ düzleminde inceleyelim.



Şekil 3.2 Parametre değişkeni r ye göre çatallanma grafiği

Yukarıdaki grafiklerde görüldüğü üzere (a) da biri kararlı diğeri kararsız iki sabit nokta mevcutken r değeri büyüdükçe sabit noktalar birbirine yaklaşır, $r = 0$ olduğunda sabit noktalar birleşir ve yarı- kararlı bir durum ortaya çıkar (b), $r > 0$ olduğunda da bu sabit noktalar tamamen kaybolur (c). $r < 0$ ve $r > 0$ için vektör alanlarının kalitatif yapısı birbirinden farklı olduğundan bu sistemin çatallanma noktası $r = 0$ dır. Bu bilgiler ışığında semer- düğüm çatallanmasının (x, r) düzlemindeki grafiği çizilebilir. Bu grafiğe *çatallanma diyagramı* denir (Strogatz 2014). Benzer şekilde $\dot{x} = r - x^2$ de bu çatallanma türü için normal formdur. Buradaki fark sabit noktaların oluşumundaki sıra değişikliğidir. Yani bu sistemin $r < 0$ iken sabit bir noktası yoktur. $r = 0$ olduğunda bir tane oluşur. $r > 0$ için de iki tane sabit nokta vardır. Eğer verilen sistem bu normal formlardan biri şeklinde değilse, önce Taylor Seri açılımı yardımıyla bu normal formlardan birine dönüştürülür, daha sonra hangi



Şekil 3.3 Semer-düğüm çatallanmasının çatallanma diyagramı

parametre değerinde çatallanma olduğu tespit edilir.

Örnek 3.1.1

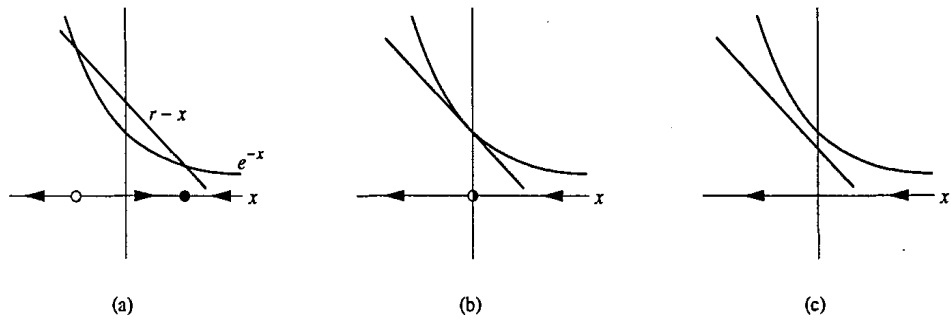
$$\dot{x} = r - x - e^{-x}$$

denklem sisteminin çatallanma durumunu inceleyin.

Çözüm İlk önce bu sistemin sabit noktalarını bulalım

$$f(x) = r - x - e^{-x} = 0$$

olacak şekilde x değerini bulmalıyız, fakat bu pek kolay görünmüyor. Bu yüzden geometrik bir yaklaşım izlemek daha anlamlı olacaktır. $f(x)$ fonksiyonunu $g(x) = r - x$ ve $h(x) = e^{-x}$ şeklinde iki fonksiyona ayıralım ve bu fonksiyonların grafiklerini aynı düzlemde çizelim.



Şekil 3.4 $\dot{x} = r - x - e^{-x}$ denkleminin r parametresine göre çatallanma durumu

$r - x$ doğrusu ile e^{-x} eğrisinin kesiştiği noktada $r - x = e^{-x}$ olup $f(x) = 0$ dir. Yani $g(x)$ doğrusu ile $h(x)$ eğrisinin kesişim noktaları bizim sistemimizin sabit noktalarına karşılık gelir. Şekil 3.4a'da görüldüğü gibi pozitif sabit nokta kararlı iken negatif sabit nokta kararsızdır. Şimdi r parametresini yavaş yavaş azaltalım. Bu

durumda $r - x$ doğrusu aşağı doğru kayarken sabit noktalar birbirine yaklaşır ve kritik bir r_c değerinde doğru eğriye teğet olur ve sabit noktalar birleşir (Şekil 3.4b). Bu kritik değer altındaki r ler için doğru eğrinin altında kalır ve hiç sabit nokta kalmaz (Şekil 3.4c). r_c çatallanma noktasını belirlemek için $h(x)$ ve $g(x)$ in teğet olarak kesiştiği noktayı bulmalıyız. Yani hem fonksiyonlar hem de türevleri birbirine eşitlenirse e^{-x} ve $\frac{d}{dx}e^{-x} = \frac{d}{dx}(r - x)$ olup ikinci denklemden $-e^{-x} = -1$ elde edilir, yani $x = 0$ da çatallanma meydana gelir. Diğer taraftan e^{-x} için $x = 0$ çevresinde Taylor seri açılımı yapılırsa,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= r - x - e^{-x} \\ &= r - x - \left[1 - x + \frac{x^2}{2!} - \dots\right] \\ &= (r - 1) - \frac{x^2}{2} + \dots\end{aligned}$$

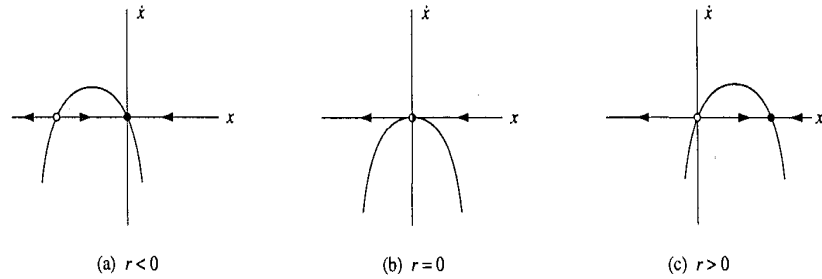
elde edilir ki bu form $\dot{x} = r - x^2$ normal formu ile aynı cebirsel yapıdadır.

3.2 Transkritik (Transcritical) Çatallanma

Tüm parametre değerlerinde sabit noktaların var olduğu ve hiçbir zaman yok olmadığı fakat bu sabit noktaların parametre değerlerine göre kararlılıklarını değiştirdiği çatallanma türüne *Transkritik (kritik geçiş) çatallanma* denir. Bu çatallanmanın normal formu

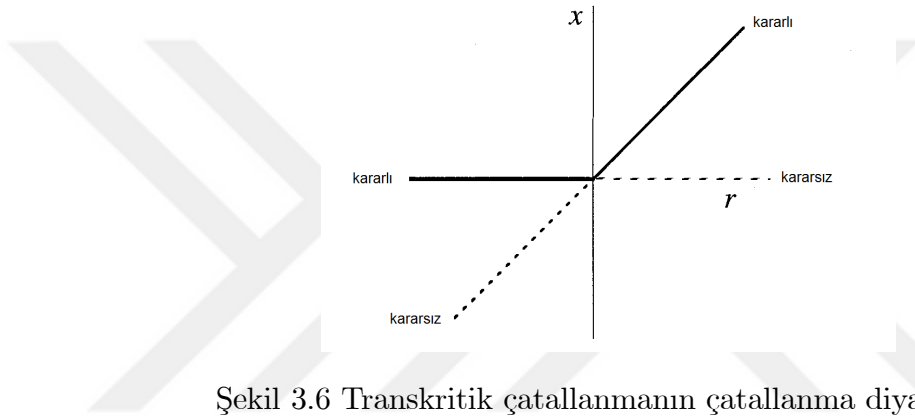
$$\dot{x} = rx - x^2$$

dir. $x^* = 0$, r nin tüm değerleri için bu sistemin sabit noktasıdır. Bir önceki çatallanma modelinde olduğu gibi burada da r parametresine göre $(x, \dot{x})$ grafiğini inceleyelim.



Şekil 3.5 r ye göre transkritik çatallanma grafiği

Yukarıdaki grafikte görüldüğü üzere (a) da $x^* = r$ kararsız, $x^* = 0$ kararlı sabit noktadır. r değeri arttıkça, kararsız sabit nokta $x = 0$ noktasına yaklaşır ve $r = 0$ değerinde bu nokta ile birleşir. Daha sonra (c) de görüldüğü gibi başlangıçtaki sabit noktaların kararlılığı yer değiştirir. Yani $x^* = 0$ kararsız; $x^* = r$ kararlı olur. İki sabit nokta birbirlerinin yerini aldığı için buna *kararlılıkların değişimi* de denir. Burada dikkat edilmesi gereken nokta, transkritik çatallanmada semer-düğüm çatallanmasından farklı olarak, çatallanma gerçekleştikten sonra sabit noktalar kaybolmayarak sadece kararlılık yapılarının değişmesidir. Transkritik çatallanma modelinin çatallanma diyagramı aşağıda görülmektedir:



Şekil 3.6 Transkritik çatallanmanın çatallanma diyagramı

Örnek 3.2.1

$$\dot{x} = r \ln x + x - 1 \quad (3.2.1)$$

sisteminin $x = 1$ komşuluğundaki davranışlarını inceleyiniz ve belirli bir r değeri için sistemin transkritik çatallanmaya sahip olduğunu gösteriniz. Ardından öyle bir R ve X değerleri bulun ki sistem bu çatallanma etrafında normal formuna çevrilebilsin.

Çözüm Tüm r değerleri için $x = 1$ (3.2.1) in bir sabit noktasıdır. Sabit noktanın komşuluğundaki davranışlarla ilgilendiğimiz için $u = x - 1$ olacak şekilde yeni bir değişken tanımlayalım, burada u yeterince küçüktür. Böylece

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} \\ &= r \ln(1 + u) + u \\ &= r \left[u - \frac{1}{2}u^2 + O(u^3) \right] + u \\ &\approx (r + 1)u - \frac{1}{2}ru^2 + O(u^3) \end{aligned}$$

elde edilir ve transkritik çatallanmanın $r_c = -1$ de ortaya çıktığı görülür. (3.2.1) sistemini normal forma çevirebilmek için u^2 nin katsayısından kurtulmak gerekir. Bu amaçla a daha sonra seçilmek üzere $u = av$ alınırsa,

$$\begin{aligned} a\dot{v} &= a(r+1)v - \frac{ra^2}{2}v^2 + O(v^3) \\ &= (r+1)v - \frac{ra}{2}v^2 + O(v^3) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $a = \frac{2}{r}$ seçilirse, yukarıdaki denklem

$$\dot{v} = (r+1)v - v^2 + O(v^3)$$

şeklinde olur. Buradan $r+1 = R$ ve $v = X$ alalım, böylece

$$\dot{X} \approx RX - X^2$$

normal formu elde edilir. Burada $O(v^3)$ çok küçük bir olduğundan göz ardı edilebilir. Orijinal değişkenler yazılırsa,

$$X = v = \frac{u}{a} = \frac{r}{2}(x-1)$$

bulunur.

Örnek 3.2.2

$$\dot{x} = x(1-x^2) - a(1-e^{bx})$$

birinci basamaktan sistemi verilsin. Bu sistemin $x = 0$ noktasında transkritik çatallanmaya sahip olduğunu gösteriniz ve $x = 0$ noktasında gerçekleşen çatallanmada sabit nokta için yaklaşık bir formül bulunuz.

Çözüm Tüm (a, b) parametreleri için $x = 0$ ın verilen sistem için bir sabit nokta olduğu aşikardır. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} 1 - e^{-bx} &= 1 - \left[1 - bx + \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3) \right] \\ &= bx - \frac{1}{2}b^2x^2 + O(x^3) \end{aligned}$$

olduğundan, verilen sistemden

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - a(bx - \frac{1}{2}b^2x^2) + O(x^3) \\ &= (1-ab)x + \frac{1}{2}ab^2x^2 + O(x^3) \end{aligned}$$

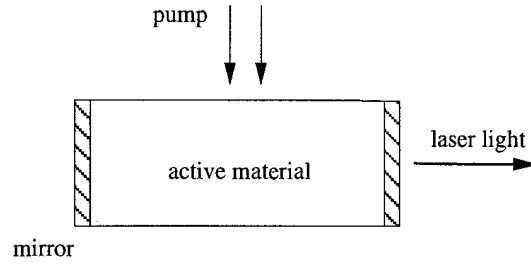
olur. Burada x katsayısını sıfır yapan kritik değer $1 - ab = 0$ olduğunda $ab = 1$ olup, $ab = 1$ olduğunda transkritik çatallanma meydana gelir. Sistemin sıfırdan farklı sabit noktası

$$x^* \approx \frac{2(ab - 1)}{ab^2}$$

ile verilir. Bu formül sadece $ab \rightarrow 1$ olduğunda geçerlidir. Yani parametreler çatallanma eğrisine yaklaştığında geçerlidir.

Tanım 3.2.1 Çatallanmanın olduğu noktada sistemin parametreleri arasında bir denklem oluşur. Bu denklemin (a, b) düzlemindeki grafiğine sistemin çatallanma eğrisi denir (Strogatz 2014).

Örnek 3.2.3 (Lazer eşiği modeli) Bu örnekle yukarıdaki teorik olarak bahsedilen özelliklerin fiziksel bir modeli üzerinde durulmaktadır (Haken 1983). Bu model barkod okuyucularında, DVD oynatıcılarında ve sağlık gibi alanlarda kullanılmıştır. Hatta lazer sayesinde ay ile dünya arasındaki mesafe ölçülebilmıştır (Strogatz 2014). Modelin fiziksel yapısı aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.7 Katı hal lazerinin yapısı

Bu örnekte özel bir lazer türü olan katı hal lazeri incelenmiştir. Bu lazerin iki ucu kısmen yansıyan aynalarla sınırlandırılmıştır ve gövdesinde katı hal matrisine gömülü özel lazer aktif atomları bulunmaktadır. Bu atomları bulundukları konumdan dışa doğru uyarmak için dışarıdan etki eden bir enerji kaynağı kullanılır. Her bir atom enerjiyi yayan küçük bir anten olarak düşünülebilir. Uyarılma nispeten zayıf olduğunda lazer, sıradan bir lamba gibi davranır, yani uyarılan atomlar birbirinden bağımsız olarak salınır ve rastgele ışık dalgaları yayar. Şimdi uyarılmanın arttığını düşünelim. İlk başta gözle görülür bir değişim görülmez fakat aniden uyarılma gücü belirli bir eşiği aştığı anda, atomlar fazla salınmaya başlar ve lamba lazere dönüşür. Artık trilyonlarca küçük anten, dev bir anten gibi davranır ve lazer eşiğinin altında

üretilemlerden çok daha yoğun bir radyasyon ışını üretir. Sözü edilen katı hal lazerinin davranışları için matematiksel bir model kuralım: $n(t)$ lazerdeki fotonların sayısı olmak üzere, $n(t)$ nin değışim oranı

$$\begin{aligned}\dot{n} &= \textit{kazanılan} - \textit{kaybedilen} \\ &= GnN - kn\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

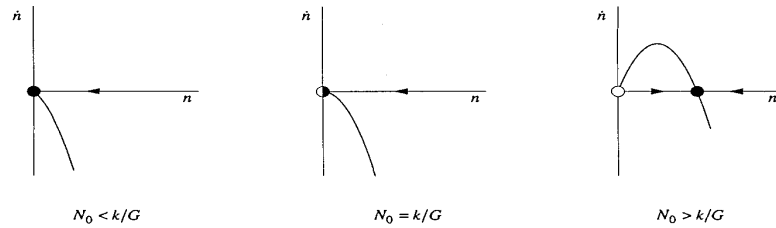
dir. Burada $N(t)$ uyarılmış atomlar; $G > 0$ kazanım katsayısı; $k > 0$ oran sabiti olup tersi $\frac{1}{k} = \tau$ lazerdeki bir fotonun ömrünü temsil eder. Uyarılmış atomlar foton yaydıktan sonra düşük enerji seviyesine geçerler ve artık uyarılmış değillerdir. Bu durumda N (uyarılmış atom sayısı) fotonların yayılmasıyla azalır. Aralarındaki bu etkileşimi görmek için N yi n cinsinden yazarak bir denklem kurulması gerekir. Kabul edelim ki lazer etkisi olmadığında, lazerde sabit N_0 kadar uyarılmış atom bulunsun. Bu durumda uyarılmış atomların gerçek sayısı lazer işlemiyle azalacaktır. Özel olarak,

$$N(t) = N_0 - \alpha n\tag{3.2.3}$$

alınsın, burada α atomların ilk durumlarına dönüşme oranıdır. O halde, (3.2.3), (3.2.2) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\dot{n} &= Gn(N_0 - \alpha n) - kn \\ &= (GN_0 - k)n - (\alpha G)n^2\end{aligned}$$

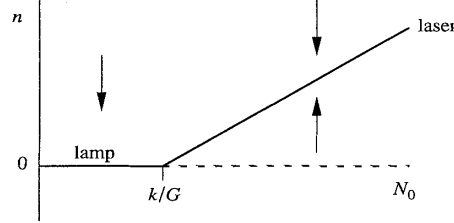
elde edilir. Bu sonuç aşına olduğumuz transkritik çatallanmanın normal formudur. Şimdi bu sonuçları grafik yöntemini kullanarak inceleyelim:



Şekil 3.8 Lazer eşığı modelinin transkritik çatallanma grafiğı

Şekil 3.8'e göre $N_0 < \frac{k}{G}$ olduğunda, $n^* = 0$ denge noktası kararlıdır. Bu, lazerin bir lamba gibi davrandığı anlamına gelir. N_0 değeri arttıkça $N_0 = \frac{k}{G}$ olduğunda

sistemde transkritik çatallanma oluşur. N_0 değeri daha da arttıkça orijin kararlılığını kaybeder ve $n^* = \frac{GN_0 - k}{\alpha G} > 0$ kararlı sabit nokta olur. Bu durum doğal lazer hareketine karşılık gelir. Sonuç olarak, $N_0 = \frac{k}{G}$ lazer eşiği olarak adlandırılır. Şekil 3.9 (N_0, n) grafiği bu durumu özetler niteliktedir:



Şekil 3.9 (N_0, n) grafiği

3.3 Dirgen (Pitchfork) Çatallanma

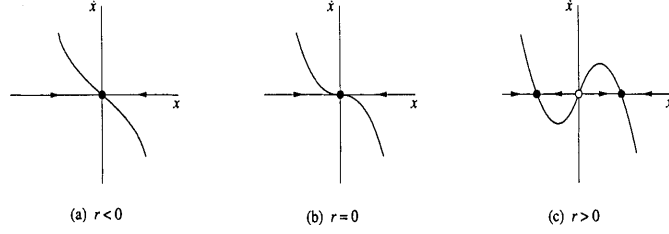
Bu çatallanma modeli genellikle simetriye sahip fiziksel problemlerde görülür. Bu bölümün başında verdiğimiz kiriş-yük (Şekil 3.1) örneğinde olduğu gibi, yük hafif olduğunda kiriş dikey pozisyonunu korur, bu durum bükülmenin olmadığı kararlı sabit noktaya karşılık gelir. Fakat yük bükülme eşiğini aştığında kiriş sağa veya sola doğru bükülebilir. Bu durumda dikey pozisyon kararsız olurken sağa ve sola bükülmeye karşılık gelen yeni iki sabit simetrik nokta ortaya çıkar, işte bu tarz çatallanmaya *dirgen çatallanma* denir (Strogatz 2014). Bu çatallanmanın süperkritik ve subkritik olmak üzere iki farklı türü vardır:

(A) Süperkritik Dirgen Çatallanma

Bu çatallanmanın normal formu

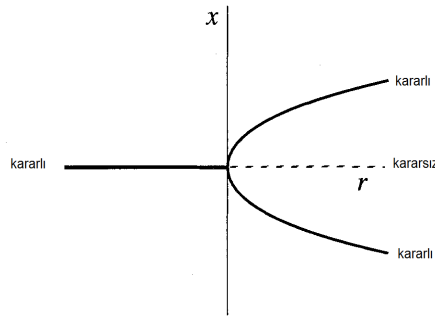
$$\dot{x} = rx - x^3 \quad (3.3.1)$$

dir. Burada (x) yerine $(-x)$ alınırsa, (3.3.1) in tekrar elde edildiği görülür. Yani bu denklem invaryanttır. Bu durum sağ ve sol simetrinin matematiksel karşılığıdır. (3.3.1) in r değerlerine göre $(x, \dot{x})$ grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.10 (3.3.1) in $(x, \dot{x})$ düzlemindeki grafiği

Şekil 3.9'a göre $r < 0$ için orijin tek sabit noktadır ve kararlıdır. $r = 0$ durumuna gelindiğinde lineerleşme azaldığından orijindeki kararlılık da zayıflar. Nihayet $r > 0$ olduğunda orijin kararsız hale gelir ve $x^* = \pm\sqrt{r}$ şeklinde orijine simetrik olacak biçimde iki yeni kararlı sabit nokta oluşur. (3.3.1) in çatallanma diyagramı aşağıdaki gibidir:



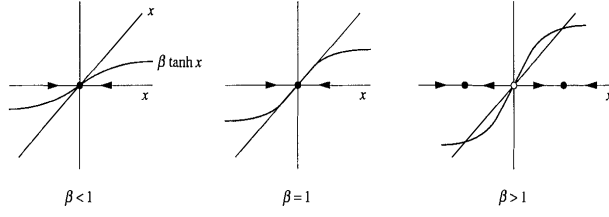
Şekil 3.11 (3.3.1) in çatallanma diyagramı

Örnek 3.3.1 $\dot{x} = -x + \beta \tanh x$ denklemini ele alalım. Bu tür denklemler mik-natısların ve sinir ağlarının istatistiksel modellerinde görülürler (Palmer 1989). Bu denklemin β ya göre süperkritik çatallanmaya sahip olduğunu ispatlayınız.

Çözüm Bu sistemin sabit noktaları

$$f(x) = -x + \beta \tanh x = 0$$

denklemini sağlayan x lerdir. Bu noktalar $y = -x$ ve $y = \beta \tanh x$ şeklinde iki ayrı fonksiyonun grafiklerinin aynı düzlemde çizilmesiyle elde edilen kesişim noktalarıdır. Bu durum aşağıdaki şekilde görülmektedir.



Şekil 3.12 $y = -x$ ve $y = \beta \tanh x$ in aynı düzlemde çizilen grafikleri

Diğer taraftan, β parametresinin sınır değerini bulmak için $\tanh x$ in $x = 0$ çevresinde Taylor seri açılımı yapılırsa,

$$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{17x^7}{315} + \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + \beta \left(x - \frac{x^3}{3} + O(x^5) \right) \\ &= (\beta - 1)x - \beta \frac{x^3}{3} + O(x^5) \end{aligned}$$

elde edilir. $x = \alpha v$ dönüşümü uygulandığında

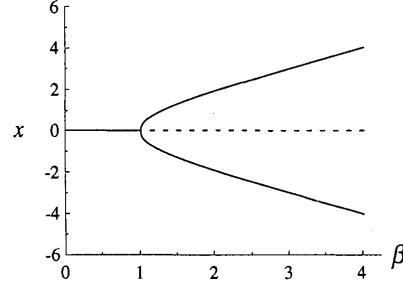
$$\dot{v} = (\beta - 1)v - \beta \alpha^2 \frac{v^3}{3} + O(v^5)$$

olup $\alpha = \sqrt{\frac{3}{\beta}}$ alınırsa

$$\dot{v} = (\beta - 1)v - v^3 + O(v^5)$$

şeklinde süperkritik dirgen çatallanmanın normal formuna benzeyen bir denklem bulunur.

Şekil 3.12'ye göre $\beta < 1$ için orijin tek kararlı sabit nokta iken $\beta = 1$ olduğunda sistemde dirgen çatallanma oluşur ve $\beta > 1$ için orijin kararlılığını kaybederek iki yeni simetrik sabit nokta oluşur. Böylece verilen sistemin çatallanma diyagramı aşağıdaki gibidir:



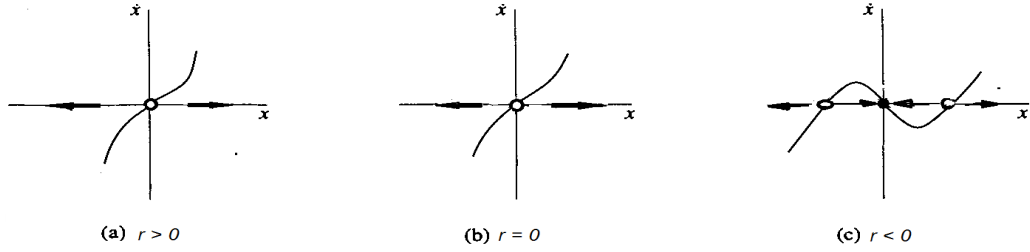
Şekil 3.13 $\dot{x} = -x + \beta \tanh x$ denkleminin çatallanma diyagramı

(B) Subkritik Dirgen Çatallanma

Bu çatallanmanın normal formu

$$\dot{x} = rx + x^3$$

şeklinde olup, $(x, \dot{x})$ grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 3.14 $\dot{x} = rx + x^2$ denkleminin $(x, \dot{x})$ grafiği

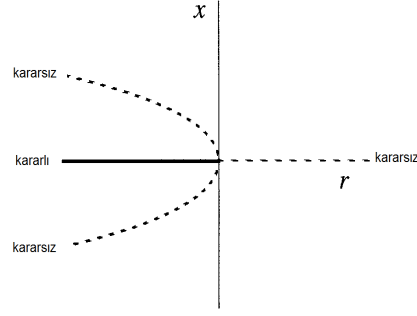
Yukarıdaki grafikte $r < 0$ için sistem orijinde kararlılığını korurken $r = 0$ olduğunda orijindeki kararlılık aniden bozulup sistem kararsız hale gelir. Yani süperkritik model $r = 0$ da eski durumuna dönme eğiliminde iken subkritik model bozulma eğilimindedir. Çatallanma diyagramı aşağıdaki gibidir:

Şimdi dirgen çatallanmaya bir örnek olarak aşağıdaki modeli inceleyelim (Strogatz 2014).

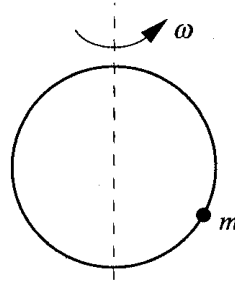
Örnek 3.3.2 (Dönen bir çember üzerindeki aşırı sönümlü boncuk modeli)

Şekil 3.16'da görüldüğü üzere, incelenmek istenen sistem aşağıdadır:

m kütleli bir boncuk, r yarıçaplı, dikey eksen üzerinde w açısal hızıyla sabit olarak dönen bir çember üzerinde kaymaktadır. Buradaki amaç hem yerçekimi hem de merkezkaç kuvveti etkisi altında olan bu boncuğun hareketini incelemektir. Bu prob-

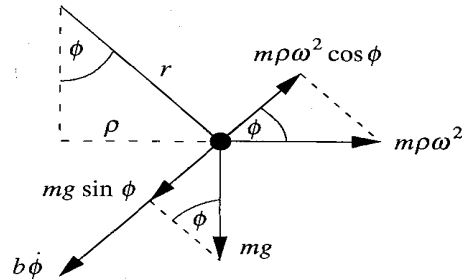


Şekil 3.15 $\dot{x} = rx + x^3$ denkleminin çatallanma diyagramı



Şekil 3.16 Dönen bir çember üzerinde dönen bir boncuk

lem, pek çok insan tarafından incelenen yaygın bir problemdir. Şimdi bu probleme yeni bir girdi ekleyelim ve kabul edelim ki sözü edilen sistemdeki boncuğa hareketinin aksi yönünde bir kuvvet etki etsin. Yani tüm sistem pekmez benzeri viskoz bir sıvı içeren bir fiçinin tabanına yerleştirilmiş olsun. Bu durumda sistem üzerinde bir sürtünme kaynağı oluşmuş olur. ϕ , $-\pi < \phi < \pi$, boncuk ile dikey yönde aşağı doğru yapılan açı, r dönen çemberin yarıçapı ve $\rho = r \sin \phi$ boncuğun dikey eksene olan uzaklığı olsun. Böylece boncuk üzerindeki kuvvetler aşağıdaki şekilde açıklanabilir:



Şekil 3.17 Çember üzerindeki boncuğa etki eden kuvvetler

Burada, mg aşağı yönlü yerçekim kuvveti; mrw^2 yana doğru merkezkaç kuvveti; $b\dot{\phi}$ teğetsel sönümleme kuvveti olup g ve b sabitleri pozitif alınmıştır (gerekli olması durumunda negatif işaretleri daha sonra eklenecektir). Newton'un ikinci yasası göz önüne alınırsa, sistem üzerindeki ivme $r\ddot{\phi}$ ve $\rho = r \sin \phi$ olmak üzere

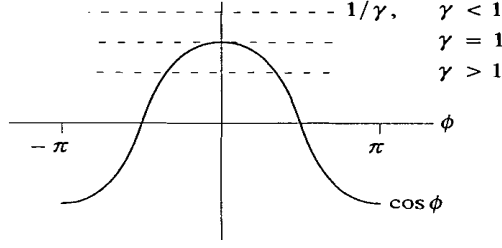
$$F = m.a$$

$$-b\dot{\phi} - mg \sin \phi + mrw^2 \sin \phi \cos \phi = m.r.\ddot{\phi}$$

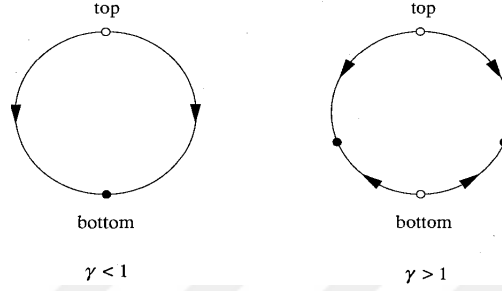
elde edilir. Bu denklem ikinci basamaktan bir denklemdir. Fakat amacımız birinci basamaktan bir sistem için örnek oluşturmak olduğundan şimdilik $mr\ddot{\phi}$ terimini gözardı edelim. Böylece

$$\begin{aligned} b\dot{\phi} &= -mg \sin \phi + mrw^2 \sin \phi \cos \phi \\ \dot{\phi} &= \frac{mg \sin \phi}{b} \left(\frac{rw^2}{g} \cos \phi - 1 \right) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

sistemi elde edilir. (3.3.2) nin sabit noktaları boncuğun denge durumlarına karşılık gelir. (3.3.2) nin sağ tarafı $f(\phi)$ ile gösterilirse, $f(\phi^*) = 0$ olacak şekildeki sabit noktalar $\sin \phi^* = 0$ den her zaman $\phi^* = 0$ (çemberin en alt kısmı) ve $\phi^* = \pi$ (çemberin en üst kısmı) dır. Diğer taraftan $\frac{rw^2}{g} > 1$ olduğunda (yani çember yeterince hızlı dönüyorsa) iki tane fazladan sabit nokta da oluşur. Bu noktalar $\phi^* = \pm \arccos(g/rw^2)$ dir. Şimdi bu sabit noktaları görselleştirmek için $\gamma = \frac{rw^2}{g}$ şeklinde bir γ parametresi tanımlayalım ve $\cos \phi^* = \frac{1}{\gamma}$ denklemini grafik üzerinde görelim. Şekil 3.19'da görüldüğü üzere $\cos \phi$ ve ϕ eğrilerinin $\frac{1}{\gamma}$ sabit fonksiyonu ile kesişim noktalarını arıyoruz. $\gamma < 1$ iken hiçbir noktada kesişme yokken $\gamma > 1$ için $\phi^* = 0$ m her iki tarafında yer alan bir çift simetrik kesişim noktaları vardır ve $\gamma \rightarrow \infty$ için bu kesişim noktaları $\pm \frac{\pi}{2}$ ye yaklaşır. $\gamma < 1$ olduğunda, çember yavaş döner ve merkezkaç kuvveti yerçekimi kuvvetini dengelemekte zorlanır, bu yüzden boncuk aşağı doğru kayar ve çemberin tabanında kalır. Fakat $\gamma > 1$ olduğunda, çember yeterince hızlı döner ve çemberin tabanı kararsızlaşır ve boncuk hareket etmeye başlar. Boncuk tabandan uzaklaştıkça merkezkaç kuvveti arttığından, boncuğun hareketi artar. Bu nedenle, yerçekimi, merkezkaç kuvvetini dengeleyene kadar boncuk çembere itilir. Bu denge $\phi = \pm \arccos(g/rw^2)$ noktalarında oluşur.

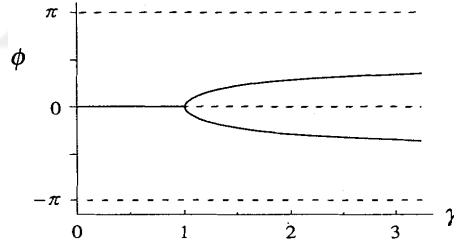


Şekil 3.18 $\cos \phi$ ve ϕ eğrilerinin $\frac{1}{\gamma}$ sabit fonksiyonu ile kesişim noktaları grafiği



Şekil 3.19 Sabit noktaların $\gamma < 1$ ve $\gamma > 1$ için çember üzerindeki yerleri

Şimdiye kadar elde edilen sonuçları özetlemek amacıyla tüm sabit noktalar γ parametresinin bir fonksiyonu olarak düşünlürse aşağıdaki grafik elde edilir:



Şekil 3.20 (γ, ϕ) grafiği

Burada düz çizgiler kararlı sabit noktaları, kesikli olanlar da kararsız noktaları göstermektedir. Şekil 3.18'den de açıkça görüldüğü üzere $\gamma = 1$ de süperkritik dirgen çatallanma vardır.

Bu yapılan analiz fiziksel açıdan aşağıdaki gibi yorumlanabilir.

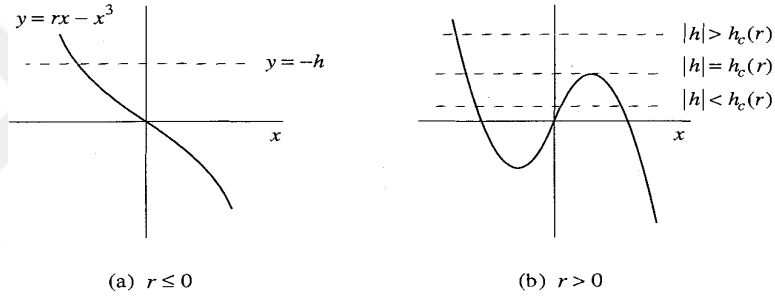
3.4 Kusurlu Çatallanma

Bir önceki kesimde anlatıldığı üzere simetri içeren problemlerde dirgen çatallanmalar görülür, örneğin bir çember üzerindeki boncuk probleminde olduğu gibi çemberin sol ve sağ tarafları arasında mükemmel bir simetri vardır. Ancak gerçek hayatta bu

durumla pek karşılaşılmaz (Strogatz 2014). Aşağıdaki örneği ele alalım:

$$\dot{x} = h + rx - x^3 \quad (3.4.1)$$

olsun. (3.4.1) denkleminde $h = 0$ alınırsa, denklem süperkritik dirgen çatallanmasının normal formuna indirgenir ve burada x ile $-x$ arasında mükemmel bir simetri vardır. $h \neq 0$ olduğunda bu simetri bozulur, bu sebeple buradaki h parametresine *kusur (imperfection) parametresi* denir. (3.4.1) denkleminde h ve r şeklinde iki tane parametre bulunmaktadır, bu yüzden bu denklemi iki parametreye göre incelemek zordur. Bu zorluktan kurtulmak adına r yi sabit kabul ederek h parametresinin değişimine göre denklem incelenecektir. Önce denklemin sabit noktalarını bulalım. Bunun için $y = -h$ ve $y = rx - x^3$ grafiklerini aynı düzlemde çizerek kesişim noktalarını bulalım, bu noktalar (3.4.1) in sabit noktalarıdır.



Şekil 3.21 h parametresine göre $y = -h$ ve $y = rx - x^3$ eğrileri

$r \leq 0$ iken, $y = rx - x^3$ eğrisi monoton olarak azaldığından $y = -h$ doğrusu ile bir tek noktada kesişir (Şekil 3.22a). $r > 0$ ise, $y = rx - x^3$ eğrisi h nin durumuna göre $y = -h$ doğrusu ile bir, iki ya da üç farklı noktada kesişebilir (Şekil 3.22b). Dolayısıyla kritik değer, yatay doğrunun kübik terim içeren eğrinin yerel maximum ya da minimumuna teğet olduğu nokta burada olup bu noktada semer düğüm çatallanması vardır. Şimdi çatallanmanın görüldüğü h değerlerini bulmak için $f(x) = rx - x^3$ fonksiyonun yerel maksimum ve minimum noktalarını bulalım. Fonksiyonun birinci türevinden

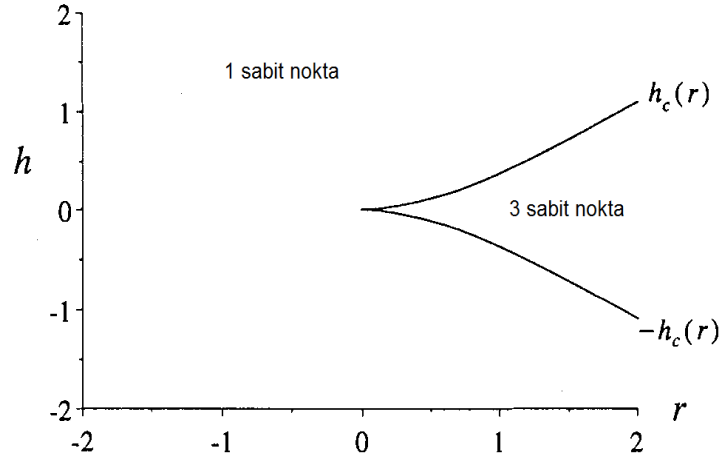
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(rx - x^3) &= 0 \\ r - 3x^2 &= 0 \\ x &= \pm \sqrt{\frac{r}{3}} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $x_{\max} = \sqrt{\frac{r}{3}}$ ve $x_{\min} = -\sqrt{\frac{r}{3}}$ olup yerel maksimum ve minimum değerleri sırasıyla

$$h_{\max} = rx_{\max} - (x_{\max})^3 = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{3}}$$

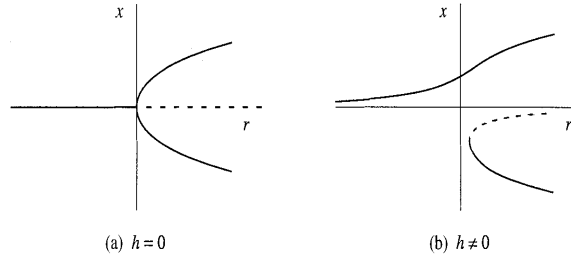
$$h_{\min} = rx_{\min} - (x_{\min})^3 = -\frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{3}}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla semer-düğüm çatallanmaları $h = \pm h_c(r)$ noktalarında oluşur, burada $h_c(r) = \frac{2r}{3} \sqrt{\frac{r}{3}}$ dür. $|h| < h_c(r)$ için (3.4.1) üç tane sabit noktaya sahipken, $|h| > h_c(r)$ için bir tane sabit noktaya sahip olur. Şimdiye kadar elde edilen sonuçları daha anlaşılır kılmak için aşağıdaki grafiği göz önüne alalım: (r, h) düzleminde $h = \pm h_c(r)$ çatallanma eğrileri (r, h) çizilirse, bunların $(r, h) = (0, 0)$ noktasında teğet olarak karşılaştıkları görülür.



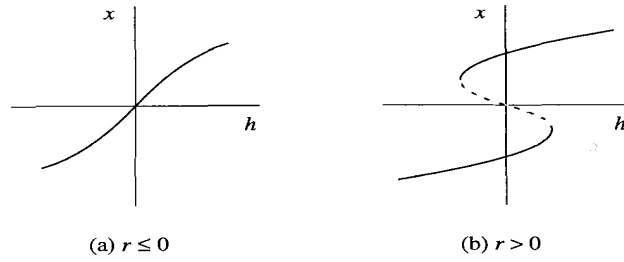
Şekil 3.22 (r, h) düzleminde $h = \pm h_c(r)$ çatallanma eğrisi

Diğer taraftan h sabit tutularak (x, r) çatallanma diyagramını çizelim (Şekil 3.24). Şekil 3.24a'da $h = 0$ olduğunda geleneksel dirgen çatallanma görülürken şekil 3.24b'de



Şekil 3.23 $\dot{x} = h + rx - x^3$ denkleminin çatallanma diyagramı

$h \neq 0$ olduğunda yapının değiştiği görülür. Üst parça tamamen kararlı sabit noktaları içerirken, alt parçada hem kararlı hem de kararsız noktalar görülür. $r \leq 0$ iken



Şekil 3.24 $\dot{x} = h + rx - x^3$ denkleminin çatallanma diyagramı

her h değeri için bir tek kararlı sabit nokta vardır (Şekil 3.25a). Ancak $r > 0$ ise, $|h| < h_c(r)$ iken üç; $|h| > h_c(r)$ iken bir tane sabit nokta vardır.

4. BİR ÇEMBER ÜZERİNDEKİ AKIŞLAR

4.1 Giriş

Önceki bölümlerde tek boyutlu

$$\dot{x} = f(x)$$

sistemi üzerine yoğunlaşmıştık. Bu denklem, doğru üzerindeki bir vektör alanına karşılık gelir. Bu bölümde

$$\dot{\theta} = f(\theta)$$

şeklinde verilen yine tek boyutlu sistem incelenecektir. Bu sistem çember üzerindeki bir vektör alanını temsil eder. θ çember üzerindeki bir nokta olmak üzere $\dot{\theta}$ o noktadaki $\dot{\theta} = f(\theta)$ şeklindeki bir hız vektörüdür. Bir doğru üzerindeki akış gibi bir çember üzerindeki akış da tek boyutludur, fakat çember üzerinde parçacık başladığı noktaya geri döner. Böylece periyodik çözümler karşımıza çıkar.

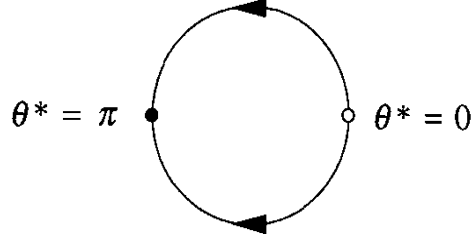
Başka bir ifadeyle, çember üzerindeki vektör alanları salınım yapan sistemlerin en temel modelini oluştururlar. Diğer tüm özellikler açısından çember üzerindeki akışlar ile doğru üzerindeki akışlar benzerlik gösterirler (Strogatz 2014). Şimdi bazı örnekler verelim.

Örnek 4.1.1 Bir çember üzerinde

$$\dot{\theta} = \sin \theta$$

sistemine karşılık gelen vektör alanını çiziniz.

Çözüm İlk adım olarak sistemin sabit noktalarını bulalım. $f(\theta) = \sin \theta$ olmak üzere sistemin sabit noktaları $\sin \theta^* = 0$ koşulunu sağlayan θ^* değerleridir. Buradan $\theta^* = 0$ ve $\theta^* = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$ bulunur. Şimdi üzerinde vektör alanı çizilecek çemberin hayali bir kartezyen düzlemi üzerine yerleştirildiğini düşünelim. Böylece $\theta = 0$ başlangıç noktası olmak üzere θ değerleri saat yönünün tersinde artar. Sabit noktaların kararlılık durumlarını belirlemek için $f(\theta) > 0$ ve $f(\theta) < 0$ olduğu durumlara bakılır. Çemberin üst yarısında $\sin \theta > 0$ olduğundan $\dot{\theta} > 0$ olup akış saat yönün tersidir. Benzer olarak alt yarı çemberde $\sin \theta < 0$ olup akış saat yönündedir. Sonuç olarak $\theta^* = \pi$ kararlı, $\theta^* = 0$ kararsız sabit noktalardır (Şekil 4.2).



Şekil 4.1 $\theta' = \sin \theta$ sistemi için faz portresi

4.2 Düzgün Osilatörler

Çember üzerindeki bir nokta genellikle *açı* ya da *faz* olarak adlandırılır. Bu durumda en basit osilatör örneği olarak

$$\dot{\theta} = w$$

denklemini alnabilir, burada w bir sabittir. Verilen denklemin çözümü

$$\theta(t) = wt + \theta_0 \quad (4.2.1)$$

olup bu çözüm çember etrafında w açısal frekansına sahip bir parçacığın düzgün hareketine karşılık gelir. (4.2.1) çözümü periyodiktir çünkü $\theta(t)$, 2π periyodiktir. Dolayısıyla $T = \frac{2\pi}{w}$ zaman sonra parçacık çember üzerindeki başlangıç noktasına geri döner. Buradaki T *salınım periyodu* olarak adlandırılır. Bu noktada salınım genliğinin gözönüne alınmadığını belirtmekte fayda var. Gerçekten de incelenen sistemde genlik değişkeni yoktur. Eğer faz değişkeninin yanı sıra bir de genlik değişkeni göz önüne alınsaydı sistem iki boyutlu faz uzayında göz önüne alınmak zorunda olurdu. Bu durum iki boyutlu sisteme geçildiğinde incelenecektir.

Örnek 4.2.1 Ali ve Mehmet, dairesel bir pistin etrafında sabit bir şekilde koşmaktadırlar. Ali, pisti T_1 saniyede tamamlarken Mehmet, $T_2 > T_1$ saniyede tamamlıyor. Buna göre ikisinin aynı anda koşmaya başladığı varsayımı altında, Ali'nin Mehmet'i ilk geçişi ne kadar sürer?

Çözüm $\theta_1(t)$ Ali'nin pist üzerindeki konumu olsun. Bu durumda $w_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ olmak üzere $\dot{\theta} = w_1$ olur. Bu denklem Ali'nin sabit bir şekilde koştuğunu ve her T_1 saniyede turu tamamladığını gösterir. Benzer şekilde Mehmet için de $\dot{\theta}_2 = w_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ yazılır. Ali'nin Mehmet'i ilk geçişi aralarındaki ϕ açısının 2π kadar artmasına bağlıdır. Bu

iki koşucu arasındaki faz farkı $\phi = \theta_1 - \theta_2$ olmak üzere

$$\dot{\phi} = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2 = w_1 - w_2 = 2\pi \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

olup

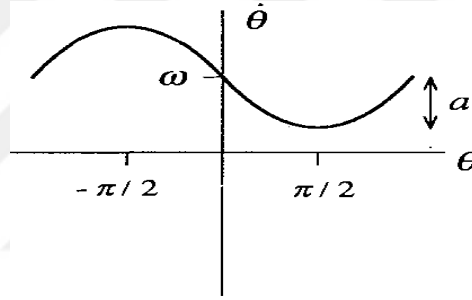
$$T_{geçiş} = \frac{2\pi}{w_1 - w_2} = \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

bulunur. Yani Ali Mehmet'i $T = T_{geçiş}$ periyoduyla defalarca geçer.

4.3 Düzgün Olmayan Osilatörler

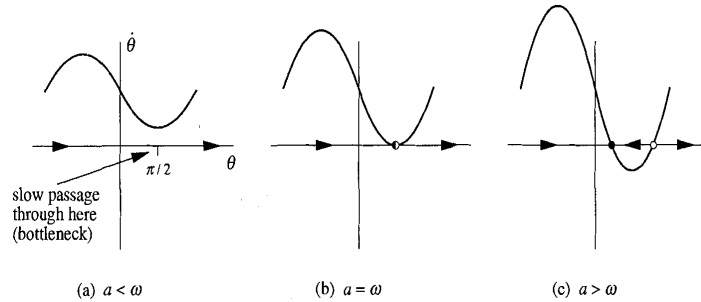
$$\dot{\theta} = w - a \sin \theta$$

şeklindeki osilatörlerdir. Bu denklem elektronik, biyoloji, yoğun madde fiziğı, mekanik gibi farklı alanlarda birçok uygulamaya sahiptir.



Şekil 4.2 $\dot{\theta} = w - a \sin \theta$ denkleminin $(\theta, \dot{\theta})$ düzlemindeki grafiğı

Uygunluk açısından $w > 0$, $a \geq 0$ alınırsa $f(\theta) = w$ olup bir önceki kesimdeki düzgün osilatör elde edilir. O halde a için düzensizlik (nonuniformity) parametresi denebilir. Buna göre a nın değışimine göre akışın grafikleri aşağıdaki gibi çizilir:

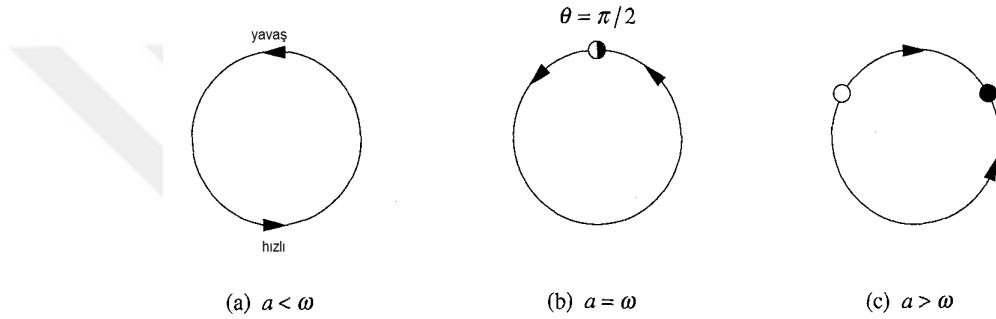


Şekil 4.3 a nın değışimine göre akışın hareketi

Akışın en hızlı olduğı açı $\theta = -\frac{\pi}{2}$, en yavaş olduğı açı ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ dir (Şekil 4.4a). a

arttıkça akışta düzensizlik görülmeye başlar. a , w dan birazcık küçükken, akıştaki salınım oldukça inişli çıkışlıdır. $\theta(t)$ nin $\theta = \frac{\pi}{2}$ kritik değerini geçmesi çok uzun sürer fakat bu noktayı geçtikten sonra akış oldukça hızlıdır. $a = w$ olduğunda, sistem salınımı yapmayı tümüyle bırakır. $\theta = \frac{\pi}{2}$ noktasında yarı- kararlı bir sabit nokta oluşur yani bu noktada semer- düğüm çatallanması görülür (Şekil 4.4b). Son olarak $a > w$ için, bu yarı- kararlı sabit nokta yerini biri kararlı diğeri kararsız olmak üzere iki yeni sabit noktaya bırakır (Şekil 4.4c).

Yukarıda anlatılanlar çember üzerinde çizilen bir vektör alanı yardımıyla aşağıdaki gibi görülür (Şekil 4.5).



Şekil 4.4 a parametresinin değişimine göre çember üzerinde çizilen vektör alanı

Örnek 4.3.1

$$\dot{\theta} = w - a \sin \theta$$

denkleminin sabit noktalarını $a > w$ için sınıflandırınız.

Çözüm Sistemin sabit noktaları

$$\sin \theta^* = \frac{w}{a}$$

olacak biçimdeki θ^* değerleridir, buradan $\cos \theta^*$ için $\cos \theta^* = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{w}{a}\right)^2}$ yazılabilir. Kesim 2.2’de verilen lineer kararlılık analizini kullanalım. Buna göre

$$f'(\theta^*) = -a \cos \theta^* = \pm a \sqrt{1 - \left(\frac{w}{a}\right)^2}$$

olur. $\cos \theta^* > 0$ olacak şekildeki sabit θ^* noktası için $f'(\theta^*) < 0$ olup bu nokta kararlıdır. Bu durum şekil 4.4c ile de tutarlıdır.

5. İKİ BOYUTLU AKIŞLAR

5.1 Lineer sistemler

Tek boyutlu sistemlerde, akışın davranışları oldukça sınırlıdır. Bu sistemlerin yörüngeleri ya sabit kalır ya da monoton bir şekilde davranır. Çok boyutlu faz uzaylarında kurulan sistemler ise çeşitli özellikler barındırırlar çünkü bu sistemlerin yörüngeleri çok boyutlu uzayda daha fazla manevra kabiliyetine sahiptir (Strogatz 2014). Çok boyutlu sistemlerin en temel sınıfı olan iki boyutlu lineer sistemleri incelemeye başlayalım. Bu sistemler kendilerine özgü özellikler içermenin yanı sıra lineer olmayan sistemlerin incelenmesinde de önemli rol oynarlar. İki boyutlu lineer bir sistem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy\end{aligned}$$

şeklindedir, burada a, b, c ve d sistemin parametreleridir. Bu sistem matris formunda

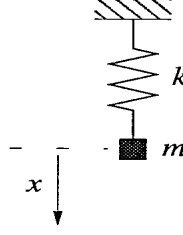
$$\dot{X} = AX \quad (5.1.1)$$

olarak yazılır, burada $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ bir vektördür. X_1 ve X_2 , (5.1.1) sisteminin çözümleri olsun. Bu durumda c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere $c_1x_1 + c_2x_2$ lineer kombinasyonu da (5.1.1) i sağlar, dolayısıyla bu özellik (5.1.1) in lineer olmasını destekler. Diğer taraftan $X = 0$ için $\dot{X} = 0$ olup, A matrisinin seçiminden bağımsız olarak $\dot{X} = 0$ (5.1.1) in her zaman bir sabit noktasıdır. (5.1.1) sisteminin çözümlerine (x, y) düzleminde yörüngeler karşılık gelir. Bu iki boyutlu düzleme *faz düzlemi* denir. Aşağıdaki örnekte iyi bilinen bir sistem için faz düzlem analizi yapılmıştır.

Örnek 5.1.1 Doğrusal bir yaya asılmış bir kütlenin titreşimleri

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (5.1.2)$$

lineer diferensiyel denklemi ile verilir, burada m cismin kütlesi, k yay sabiti ve x kütlenin denge noktasına olan yer değiştirme mesafesidir (Şekil 5.1).



Şekil 5.1 Yaya asılmış bir kütle düzenegi

Buna göre bu basit harmonik osilatörün faz düzlem analizini yapınız.

Çözüm (5.1.2) lineer denkleminin tam çözümü analitik yöntemler yardımıyla elde edilebilir. Ancak bu durum her zaman mümkün olmaz, örneğin çoğu lineer olmayan denklemleri analitik yöntemlerle çözmek imkansızdır. Bu yüzden denklemleri çözmeden, denklemin davranışlarını incelememizi sağlayacak bir yöntem kullanmak faydalı olacaktır. (5.1.2) denkleminin karşılık gelen vektör alanı, faz düzlemindeki hareketi tanımlar. Bu vektör alanını bulmak için sistemin *durumu* göz önüne alınmalıdır. Belirtelim ki sistemin durumu, sistemin şu andaki pozisyonu x ve hızı v ile belirlenir, dolayısıyla x ve v değerlerinin ikisi birden bilinirse, bu durumda sistemin gelecek davranışları hakkında yorum yapılabilir. Bu amaçla (5.1.2) sistemini x ve v cinsinden tekrar yazalım:

$$\dot{x} = v$$

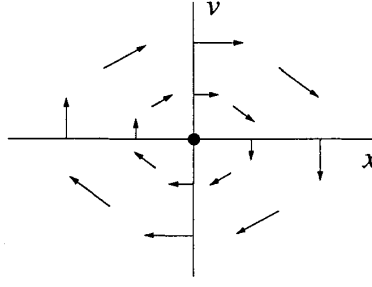
olmak üzere, (5.1.2) denkleminin

$$\dot{v} = -\frac{k}{m}x$$

elde edilir. Basitlik açısından $w^2 = \frac{k}{m}$ alınırsa

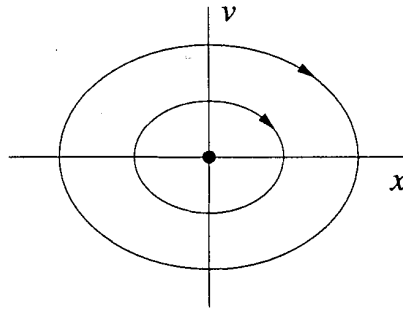
$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -w^2x \end{cases} \quad (5.1.3)$$

sistemi elde edilir. (5.1.3) sistemi her bir (x, v) noktası için $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -w^2x)$ olacak şekilde bir $(\dot{x}, \dot{v})$ vektörünü ifade eder, dolayısıyla bu sistem faz düzlemi üzerinde bir vektör alanı temsil eder. Böylece aşağıdaki grafik çizilir:



Şekil 5.2 Faz düzleminde (5.1.3) sisteminin vektör alanı

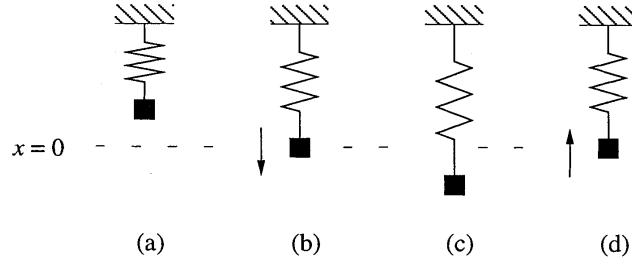
Şekil 5.2'ye göre, x eksenindeyken $v = 0$ olup $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, -w^2x)$ dır. Böylece x pozitif olduğunda v dikey olarak azalan, x negatif olduğunda v dikey olarak artan durumda olur. Benzer şekilde v ekseninde $x = 0$ olup $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, 0)$ elde edilir ve v pozitifken x yatay olarak artan, v negatifken x yatay olarak azalan durumundadır. Böylece faz uzayı etrafında vektörler yer değiştirir (Şekil 5.2). Daha önce olduğu gibi buradaki vektör alanının hareketini görselleştirmek adına vektör alanını hayali bir akışkanın hareketi gibi düşünebiliriz. Bu durumda akışkanın $(\dot{x}, \dot{v}) = (v, -w^2x)$ hızıyla düzlemde hareket eder. Bu akışın yörüngesini bulmak için hayali bir parçacığın (x_0, v_0) noktasından harekete başladığını ve akış boyunca nasıl davrandığını inceleyelim. Akış orijin etrafında dönmektedir ve bu nokta hareketsizdir, çünkü $(x, v) = (0, 0)$ için $(\dot{x}, \dot{v}) = (0, 0)$ dır. O halde orijin bir sabit nokta olup herhangi bir noktadan başlayan hareket orijin etrafında dairesel bir yol takip edecek ve başlangıç noktasına dönecektir. Bu türden yörüngelere *kapalı yörüngeler* adı verilir (Şekil 5.3).



Şekil 5.3 (5.1.3) sisteminin yörüngeleri

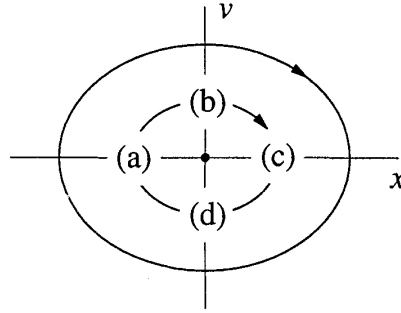
Şekil 5.3 sistemin faz portresi olarak adlandırılır. Şimdi burada incelenen sabit nokta ve kapalı yörünge kavramlarının orijinal kütle-yay problemindeki karşılıklarına

bakalım. $(x, v) = (0, 0)$ sabit noktası sistemin durgun denge noktasına karşılık gelir: kütle denge konumundadır ve yay gevşediği için sonsuza kadar orada kalır. Kapanlı yörüngeler ise periyodik harekete yani kütlenin salınımlı olmasına karşılık gelir. Örneğin yer değişimi x negatif olduğunda, hız v sıfır olup salınımın en çok olduğu duruma karşılık gelir, çünkü yay en sıkışık halindedir.



Şekil 5.4 Yaya bağlı kütlenin konumları

Aşağıdaki grafikte şekil 5.4'ün her bir durumu için yörüngedeki karşılığı görülmektedir.



Şekil 5.5 Yaya bağlı kütlenin her bir durumunun yörüngedeki karşılığı

Örnek 5.1.2

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\dot{X} = AX$$

sistemi verilsin. Buna göre verilen sistemi çözüp a değerinin $(-\infty, \infty)$ aralığındaki değişimine göre faz portresini çiziniz.

Çözüm Verilen sistem

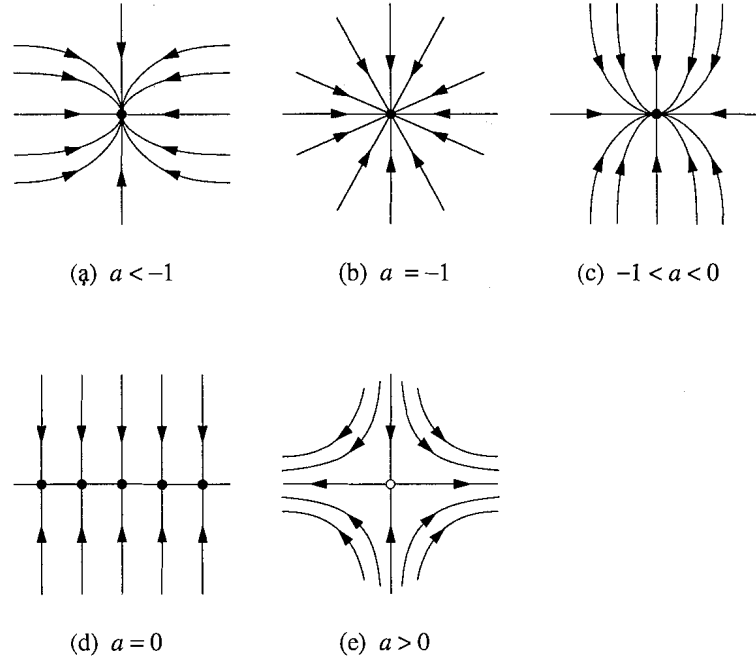
$$\begin{cases} \dot{x} = ax \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

şeklindeki iki boyutlu bağımsız bir sistem şeklinde yazılabilir. Buradan sistemin çözümü

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

$$y(t) = y_0 e^{-t}$$

şeklinde elde edilir. a parametresinin değişimine göre sistemin faz portreleri aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.6 a parametresine göre sistemin faz portreleri

$y(t)$, her bir durum için üstel olarak azalmaktadır. $a < 0$ olduğunda, $x(t)$ de üstel olarak azalır ve böylece $t \rightarrow \infty$ halinde tüm yörüngeler orijine yaklaşır. Bununla birlikte yaklaşımın yönü, a nın -1 ile karşılaştırılmasına bağlıdır:

(i) $a < -1$ ise, bu durumda $x(t)$, $y(t)$ den daha hızlı azalır ve yörüngeler y eksenine teğet olacak şekilde orijine yaklaşır. a nın negatif değeri arttıkça yörüngeler neredeyse y eksenine birleşir. $t \rightarrow -\infty$ için de yörüngeler neredeyse x - eksenine birleşir. Böylece şekil 5.6a'da görüldüğü gibi $X^* = 0$ sabit noktası *kararlı bir düğüm* noktasıdır.

(ii) $a = -1$ olsun. Bu durumda $y(t)/x(t) = y_0/x_0$ sabit olup yörüngelerin hepsi orijinden geçen doğrulardır. Bu durumda X^* sabit noktası *simetrik düğüm* veya *yıldız* olarak adlandırılır (Şekil 5.6b).

(iii) $-1 < a < 0$ olsun. Bu durumda X^* yine bir düğüm noktasıdır, ancak bu sefer yörüngeler X^* a x eksenine boyunca yaklaşır (Şekil 5.6c).

Diğer taraftan $a = 0$ olduğunda $x(t) = x_0$ olup, x ekseninin tamamı sabit noktadır, bu durumda x eksenine *sabit noktaların doğrusu* denir. Tüm yörüngeler bu sabit noktalara dikey olarak yaklaşır (Şekil 5.6d). Son olarak $a > 0$ ise, x eksenindeki üstel büyüme nedeniyle X^* kararsız olur. Çoğu yörünge X^* dan uzaklaşır ve sonsuza gider. $t \rightarrow \infty$ için yörüngeler x eksenine asimptotiksel olarak yaklaşır, $t \rightarrow -\infty$ için de yörüngeler y eksenine asimptotiksel olarak yaklaşır. Böylece $X^* = 0$ *semer noktası* olur.

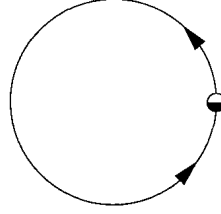
$t \rightarrow \infty$ için $X(t) \rightarrow X^*$ olacak şekildeki X_0 başlangıç koşullarının kümesine X^* semer noktasının *kararlı manifoldu* denir. Benzer şekilde $t \rightarrow -\infty$ için $X(t) \rightarrow X^*$ olacak şekildeki başlangıç koşullarının kümesine de X^* ın *kararsız manifoldu* denir. Burada y eksenini kararlı, x eksenini kararsız manifolddur. Belirtelim ki genellikle yörüngeler $t \rightarrow \infty$ için kararsız, $t \rightarrow -\infty$ için kararlı manifoldda yaklaşırlar ancak bu örnekte durum tam tersidir.

Şimdi bu örnek üzerinden literatürde iyi bilinen bazı kararlılık kavramlarını hatırlayalım:

Şekil 5.6a-c’de görülen $X^* = 0$ sabit noktası bir *atraktör*’dür, çünkü X^* etrafında başlayan tüm yörüngeler $t \rightarrow \infty$ için X^* a yaklaşır, yani $t \rightarrow \infty$ için $X(t) \rightarrow X^*$ dır. Aslında burada faz düzlemindeki tüm yörüngeler X^* a yaklaştığından X^* a *global atraktör* de denebilir. Diğer taraftan kararlılık ile ilgili önemli bir yapı vardır, bu yapı yörüngelerin sadece $t \rightarrow \infty$ durumundaki davranışları için geçerlidir: Liapunov kararlılık. Eğer verilen sistemin tüm yolları X^* sabit noktasına yeteri kadar yakın başlıyor ve zaman ilerledikçe yine bu nokta civarında kalıyorsa, bu durumda X^* sabit noktasına *Liapunov kararlıdır* denir. Şekil 5.6a-d’de görüldüğü gibi orijin Liapunov kararlıdır. Şekil 5.6d’de farklı bir durum öne çıkıyor. Burada orijin Liapunov kararlıdır fakat atraktör değildir. Böylesi sabit noktalara yani Liapunov kararlı olup atraktör olmayan sabit noktalar, *nötral kararlıdır* denir. Bu nokta yakınındaki yörüngeler, nötral kararlı nokta tarafından ne itilirler ne de çekilirler. Buna örnek olarak Örnek 5.1.1’deki basit harmonik osilatörün denge noktası verilebilir (Şekil 5.3). Nötral kararlılık genellikle sürtünmenin olmadığı mekanik modellerde görülür.

Tersine olarak bir sabit nokta Liapunov kararlı değildir ama atraktör olabilir. Bu durum için aşağıdaki örnek açıklayıcıdır:

Bir çember üzerinde $\dot{\theta} = 1 - \cos \theta$ sistemini ele alalım.



Şekil 5.7 Bir çember üzerindeki $\dot{\theta} = 1 - \cos \theta$ sistemi

Burada $t \rightarrow \infty$ için tüm yörüngeler $\theta^* = 0$ sabit noktasına yaklaştığında $\theta^* = 0$ bir atraktördür fakat Liapunov kararlı değildir, çünkü θ^* in çok yakınında başlayıp zaman ilerledikçe θ^* dan çok uzaklaşan yörüngeler vardır. Diğer taraftan pratikte genellikle Liapunov kararlılık ve atraktörlük özellikleri bir arada görülür. Bu iki özelliği aynı anda taşıyan sabit noktaya *asimptotik kararlıdır* denir. Son olarak şekil 5.6e’de görüldüğü üzere ne atraktör ne de Liapunov kararlı olan X^* sabit noktasına *kararsızdır* denir.

5.2 Lineer Sistemlerin Sınıflandırılması

Bir önceki kesimde Örnek 5.1.2 üzerinden anlatılan kararlılık kavramları bu kesimde en genel 2×2 türünde bir matris ele alınarak incelenmektedir. Bilinmektedir ki x ve y eksenleri faz diyagramında geometrik açıdan oldukça önemlidirler. Bu eksenler aynı zamanda doğrusal yörüngelerdir, yani bu koordinat eksenlerinden herhangi biri üzerinde başlayan bir yörünge o eksen üzerinde sonsuza dek kalır, sadece çok basit üstel artış veya azalma gösterirler. Şimdi ilk olarak bu kesimde, bu doğrusal yörüngelerin genel durumdaki analoglarının bulunması amaçlanmıştır (Strogatz 2014).

(5.1.1) sisteminin

$$X = e^{\lambda t} V \quad (5.2.1)$$

şeklinde bir çözümünü arayalım, burada $V \neq 0$ belirlenmesi gereken sabit vektörler ve λ da belirlenmesi gereken bir sabit değerdir. (5.2.1), (5.1.1) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\lambda e^{\lambda t} V &= A e^{\lambda t} V \\ e^{\lambda t} (\lambda V - AV) &= 0, \quad e^{\lambda t} \neq 0 \\ \lambda V &= AV\end{aligned}\tag{5.2.2}$$

elde edilir. (5.2.2) den, eğer V , A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektörü ise, bu durumda aranan doğrusal yörüngeler vardır ve (5.2.1) çözümüne *özçözüm* (*eigensolution*) denir. Şimdi özdeğer ve özvektörlerin nasıl bulunduğunu kısaca hatırlayalım. Herhangi bir A matrisinin özdeğerleri, I birim matris olmak üzere,

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

karakteristik denklemi ile bulunur. 2×2 türünde bir $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi için karakteristik denklem

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

olup,

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$$

şeklinde yazılır, burada

$$\begin{aligned}\tau &= \text{tr}(A) = a + d \\ \Delta &= \det(A) = ad - bc.\end{aligned}$$

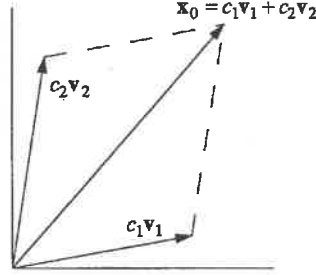
O halde λ özdeğerleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

şeklinde hesaplanır. Açıkça görülmektedir ki bir A matrisinin özdeğerleri, matrisin izine ve determinantına bağlıdır.

(5.2.2) özdeğerleri için üç farklı durum söz konusudur: özdeğerlerin reel ve birbirinden farklı olması, özdeğerlerin reel birbirine eşit olması ve özdeğerlerin eşlenik kompleks olması. Şimdi her bir duruma karşılık gelen kararlılık özelliklerini örneklerle destekleyerek inceleyelim.

Bu özelliklere geçmeden önce $\lambda_1 \neq \lambda_2$ durumundan (5.1.1) in çözümlerinin nasıl bulunduğuna bakalım. Lineer cebirden bilinmektedir ki λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen V_1 ve V_2 özvektörleri lineer bağımsızdır ve tüm düzlemi gererler (Şekil 5.8).



Şekil 5.8 λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen V_1 ve V_2 özvektörlerinin lineer kombinasyonu

Özel olarak, herhangi bir X_0 başlangıç koşulu özvektörlerin lineer kombinasyonu olarak $X_0 = c_1 V_1 + c_2 V_2$ şeklinde yazılır, burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Böylece (5.1.1) in genel çözümü

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

şeklinde elde edilir. Aşağıdaki örnek çözümlerin nasıl bulunduğunu açıklamaktadır.

Örnek 5.2.1

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, & \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \\ \dot{y} = 4x - 2y \end{cases}$$

sisteminin $(x_0, y_0) = (2, -3)$ koşulunu sağlayan çözümünü bulunuz.

Çözüm İlk olarak verilen sistemi matris formunda

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

şeklinde yazalım. Böylece $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\det(A - \lambda I) = 0$ dan karakteristik denklem

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

şeklinde bulunur. Buradan A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = -3$ olur. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler, sırasıyla,

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

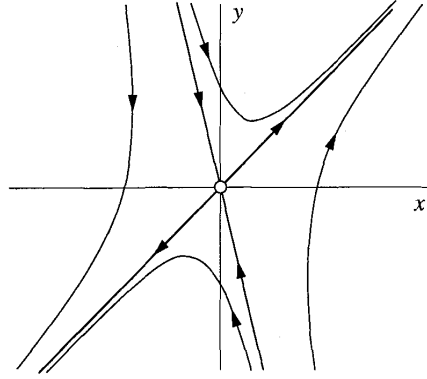
O halde verilen sistemin genel çözümü

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

olup, başlangıç koşullarından $c_1 = c_2 = 1$ bulunur. Sonuç olarak verilen başlangıç değer probleminin çözümü

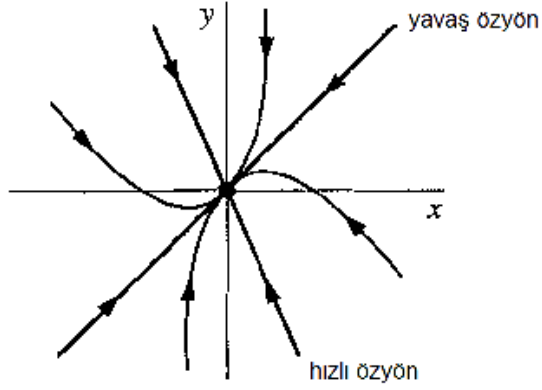
$$\begin{aligned} x(t) &= e^{2t} + e^{-3t} \\ y(t) &= e^{2t} - 4e^{-3t} \end{aligned}$$

dir. Şimdi bu örnekte verilen sistemin faz portresini çizelim. Sistemin özdeğerleri $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = -3$ olduğundan, birinci özdeğere karşılık gelen özçözüm üstel olarak artarken, ikinci özdeğere karşılık gelen özçözüm üstel olarak azalır. O halde orijin yani sistemin sabit noktası bir semer noktasıdır ve grafiği aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.9 Örnek 5.2.1’de verilen sistemin faz portresi

Bu aşamada birbirinden farklı olan özdeğerlerin $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ özelliğini sağlaması durumundaki genel faz portresini inceleyelim: $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ olduğunda, bu özdeğerlere karşılık gelen özçözümlerin ikisi de azalır. Şekil 5.6a ve şekil 5.6c’de olduğu gibi sabit nokta kararlı bir düğüm noktasıdır. Fakat burada bir farklılık söz konusudur: Yukarıdaki faz portresinde görüldüğü gibi, yörüngeler orijine yavaş özyöne (slow



Şekil 5.10 $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ için λ özdeğerlerine karşılık gelen faz portresi

eigendirection) teğet olacak şekilde yaklaşırlar, burada yavaş özyön, daha küçük $|\lambda|$ değerine karşılık gelen özvektörün gerdiği doğrunun yönü olarak tanımlanmaktadır. $t \rightarrow -\infty$ için bakıldığında ise yörüngeler hızlı özyöne paralel olurlar. Eğer şekil 5.10'da okların yönü değiştirilirse, bu durumda orijin *kararsız düğüm* olur.

Şimdi özdeğerlerin reel ve birbirine eşit olması durumunu inceleyelim, yani $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ olsun. Bu duruma karşılık gelen özvektörler açısından iki durum söz konusudur: λ ya karşılık iki tane bağımsız özvektör olabilir ya da λ ya sadece bir tane özvektör karşılık gelir.

İlk olarak iki tane özvektörün olduğunu düşünelim. Bu durumda tüm düzlem bu vektörler tarafından gerilir ve her vektör aynı özdeğere karşılık gelen bir özvektör olur. Bunu anlayabilmek adına herhangi bir X_0 vektörünü

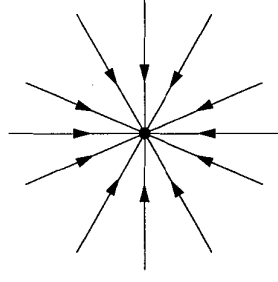
$$X_0 = c_1 V_1 + c_2 V_2$$

şeklinde iki özvektörün lineer kombinasyonu olarak yazalım. Bu durumda

$$AX_0 = A(c_1 V_1 + c_2 V_2) = c_1 \lambda V_1 + c_2 \lambda V_2 = \lambda X_0$$

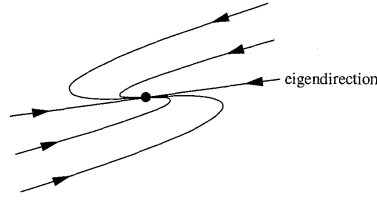
olur, yani X_0 da λ özdeğerine karşılık gelen bir özvektördür. O halde A katsayı matrisi $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ şeklinde olmalıdır. Burada $\lambda \neq 0$ ise, yörüngelerin tamamı orijine giren doğrular olup sabit nokta *yıldız düğüm*dür (Şekil 5.11).

$\lambda = 0$ ise, tüm düzlem sabit noktadır, çünkü sistem $\dot{X} = 0$ şeklindedir. Sadece bir tek özvektör olması durumunda λ ya karşılık gelen özvektörlerin gerdiği uzay



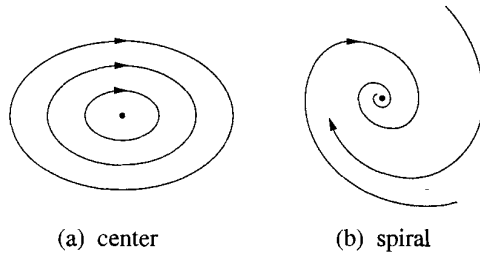
Şekil 5.11 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ve $\lambda \neq 0$ için faz portresi

tek boyutludur. Buna örnek olarak, $A = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $b \neq 0$, formundaki herhangi bir A matrisinin özvektörünün gerdiği uzay verilebilir. Bu şekilde bir tek özyön olduğunda, sabit nokta *dejenere düğüm* olup, faz diyagramı şekil 5.12 ile verilmiştir.



Şekil 5.12 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ve $\lambda = 0$ için faz portresi

$t \rightarrow \pm\infty$ durumunda tüm yörüngeler tek özyöne paraleldir. Son olarak özdeğerlerin eşlenik kompleks sayı olması durumunu inceleyelim. Özdeğerler kompleks sayı ise, bu durumda sabit nokta ya merkezdir (Şekil 5.13a) ya da spiraldir (Şekil 5.13b).



Şekil 5.13 Özdeğerler kompleks sayı ise karşılık gelen faz portreleri

Merkez noktayı, Örnek 5.1.1'deki basit harmonik osilatörün faz portresinde şekil 5.3'de elde etmiştik. Bu şekilden de anlaşıldığı gibi merkez sabit nokta (orijin) kapalı yörüngeler tarafından çevrelenir. Spiral nokta ise harmonik osilatörün sönümlü bir ortama girmesinden oluşur, çünkü bu durumda her bir döngüde osilatör enerjisi

kaybettiğinden yörüngeler kapalı döngülerini tamamlayamazlar. Bu durumları açıklamak için

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta} \right)$$

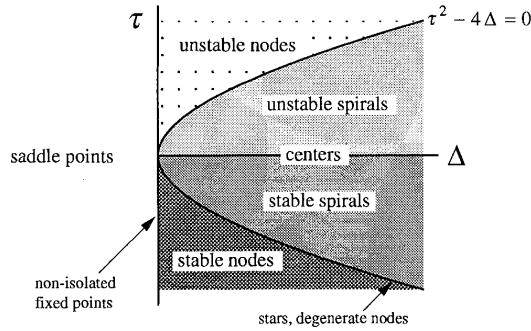
özdeğerlerini tekrar ele alalım. Burada $\tau^2 - 4\Delta < 0$ ise, kompleks özdeğerler oluşur. Notasyon kolaylığı açısından $\alpha = \frac{\tau}{2}$, $w = \frac{1}{2}\sqrt{4\Delta - \tau^2}$ alınırsa, özdeğerler

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm iw$$

şeklinde yazılır. $w \neq 0$ olmak üzere, (5.1.1) in genel çözümü

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} V_2$$

Ancak burada λ lar kompleks olduğundan, $X(t)$ çözümünün $e^{\alpha t} \cos wt$ ve $e^{\alpha t} \sin wt$ terimlerinin bir kombinasyonu olduğuna dikkat etmek gerekir. Bu terimler $\alpha = \text{Re}(\lambda) < 0$ olması durumunda *azalan salınımlara*, $\alpha > 0$ olması durumunda ise *artan salınımlara* karşılık gelirler. Bu durumlara karşılık gelen sabit noktalar da, sırasıyla, kararlı ve kararsız spiraller olur. Şekil 5.13b kararlı durumu göstermektedir. Eğer özdeğerler sıfır sanal ($\alpha = 0$) ise, bu durumda tüm çözümler $T = \frac{2\pi}{w}$ periyotlu olup, buradaki sabit nokta merkezdir. Buraya kadar anlatılanların hepsi aşağıdaki tek bir grafikte özetlenebilir (Şekil 5.14).



Şekil 5.14 Lineer sistemlerin sınıflandırılmasının grafik üzerindeki özeti

Eksenler $\tau(\text{iz } A)$ ve $\Delta(\det A)$ olmak üzere $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} (\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta})$, $\Delta = \lambda_1 \lambda_2$ ve $\tau = \lambda_1 + \lambda_2$ olduğu göz önüne alınarak şekil 5.14'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

1) $\Delta < 0$ ise özdeğerler reel olup farklı işaretlidirler, bu durumda sabit nokta bir semer noktasıdır.

2) $\Delta > 0$ ise, bu durumda özdeğerler ya aynı işaretli reel sayılardır (düğüm) ya da eşlenik komplekstirler (spiral ve merkezler). Düğümler $\tau^2 - 4\Delta > 0$, spiraller $\tau^2 - 4\Delta < 0$ olduğu durumlarda ortaya çıkar. $\tau^2 - 4\Delta = 0$ parabolü düğümler ve spiraller arasındaki sınırdır. Yıldız ve dejenere düğüm noktaları bu sınır üzerindedir. Düğümlerin ve spirallerin kararlılık durumu τ ya bağlıdır: $\tau < 0$ ise spiral ve düğümler kararsızdır. $\tau = 0$ sınır durumunda kararlı merkez nokta olup, özdeğerler sıfır sanaldır.

3) $\Delta = 0$ ise, en az bir özdeğer sıfırdır. Bu durumda orijin izole sabit nokta olamaz. Ya tüm eksen sabit noktadır (şekil 5.6d) ya da $A = 0$ olup tüm düzlem sabit nokta olur.

Şekil 5.14'e göre semer noktaları, spiraller ve düğümler sabit noktaların sınıflandırılmasındaki temel durumlardır. Merkezler, yıldız ve dejenere durumlar ise sınırdaki durumlar olarak düşünülebilir. Bu sınırdaki durumlar arasında en çok karşılaşılan ve en önemli olanı merkezdir, çünkü bu durum enerjinin korunduğu sürtünmesiz mekanik sistemlerde çok kullanılır.

Örnek 5.1.3 $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ sisteminin $X^* = 0$ sabit noktasını sınıflandırınız.

Çözüm Verilen A matrisi için $\Delta = -2$ olup, $X^* = 0$ bir semer noktasıdır.

Örnek 5.1.4 Yukarıdaki soruyu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ için çözünüz.

Çözüm Verilen A matrisi için $\Delta = 5$, $\tau = -6$ dır. Dolayısıyla, $\Delta > 0$ ve $\tau^2 - 4\Delta = 16 > 0$ olup $X^* = 0$ bir düğüm noktasıdır. Ayrıca $\tau > 0$ olduğunda bu nokta kararsızdır.

Aşağıdaki örnek lineer sistemlerin sınıflandırılmasını anlamak için oldukça açıklayıcıdır

Örnek 5.1.5 (Aşk İlişkileri)

Bu hikayenin kahramanları Romeo ve Juliet dir. Burada Juliet oldukça kararsızdır. Yani Romeo ona ne kadar çok ilgi gösterirse, Juliet o kadar çok ondan kaçmaktadır. Ancak Romeo' nun cesareti kırılıp geri çekilince de Juliet onu tekrar çekici bulmaya başlar. Diğer taraftan Romeo da onu taklit ederek kız onu sevdiğinde ona içi ısır,

kız ondan nefret ettiğinde ise üzülür ve geri çekilir. Şimdi bu hikayeyi modelleyelim:

$$R(t) = t \text{ anında Romeo'nun Juliet'e olan aşkı ya da nefreti}$$

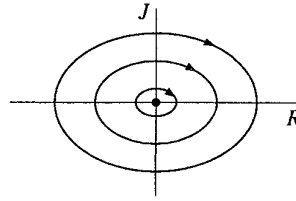
$$J(t) = t \text{ anında Juliet'in Romeo'ya olan aşkı ya da nefreti}$$

olsun. (+) sevgiyi, (−) nefreti göstermek üzere, istenen model

$$\dot{R} = aJ$$

$$\dot{J} = -bR$$

şeklinde olur, burada a ve b değerleri pozitif parametrelerdir. Bu ilişkide bitmeyen bir nefret ve sevgi döngüsü vardır. Taraflar zamanın dörtte birinde eş zamanlı aşık olurlar. O halde sistemin $(R, J) = (0, 0)$ noktası bir merkez noktadır (Şekil 5.15).



Şekil 5.15 (R, J) grafiği

Şimdi daha genel

$$\dot{R} = aR + bJ$$

$$\dot{J} = cR + dJ$$

lineer sistemini ele alalım, burada a, b, c, d parametreleri (+) ya da (−) işaretli olabilirler. Bu işaretleri iki aşığın durumunu belirler. Örneğin, $a > 0$ ve $b > 0$ olduğunda Romeo'nun Juliet'e karşı sevgi dolu olduğunu gösterir, $a < 0$ ve $b > 0$ olduğunda ise tedbirli bir aşk söz konusudur. Yani her biri diğerini koşulsuz sevmekten kaçınır. Bu duruma karşılık gelen model

$$\dot{R} = aR + bJ$$

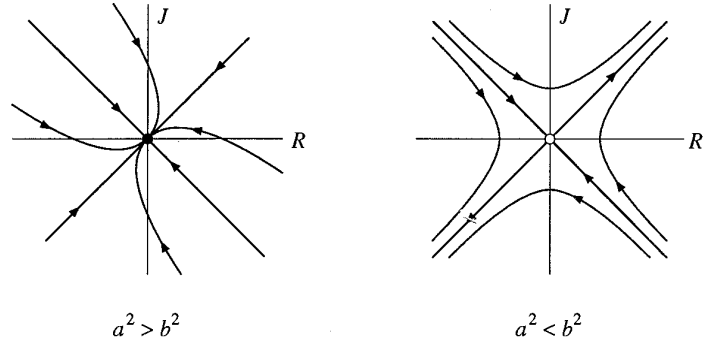
$$\dot{J} = bR + aJ$$

olup, sisteminin katsayı matrisi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ dir. $\tau = 2a < 0$, $\Delta = a^2 - b^2$ ve $\tau^2 - 4\Delta = 4b^2 > 0$ olduğundan $(R, J) = (0, 0)$ sabit noktası, $a^2 < b^2$ iken semer

noktası, $a^2 > b^2$ iken kararlı düğüm noktasıdır (Şekil 5.16). Bu matrisin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - 2a\lambda + (a^2 - b^2) = 0$$

olmak üzere, $\lambda_1 = a+b$ ve $\lambda_2 = a-b$ özdeğerlerine karşılık gelen özvektörler sırasıyla $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ve $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ olur.



Şekil 5.16 (J, R) düzlemi üzerinde faz portreleri

Bu durumun hikayedeki yorumu aşağıdaki gibidir.

$a^2 > b^2$ ise, ilişkide her zaman ortak ilgisizlik vardır. Yani aşırı önemseme soğukluğa sebep olur.

$a^2 < b^2$ ise, aşıklar birbirine daha duyarlıdır ve düşkündür. Bu durumda ilişki oldukça tehlikelidir. Başlangıçta hissettikleri duygulara göre ya birbirlerini çok severler ya da tümüyle savaş halinde olurlar. Ancak her iki durumda da tüm yörüngeler $R = J$ doğrusuna yaklaşır yani eninde sonunda aşıkların duyguları karşılıklı olacaktır.

6. FAZ DÜZLEMİ

Bu bölümde iki boyutlu lineer olmayan sistemler üzerinde durulmuştur. Önce genel özellikler ele alınıp daha sonra beşinci bölümde işlenen lineer sistemler ile ilgili bilgilere dayanarak oluşabilecek sabit nokta türleri sınıflandırılmıştır (Strogatz 2014).

6.1 Faz Portresi

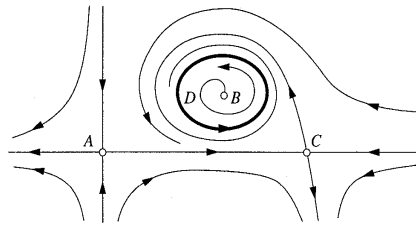
Faz düzlemi üzerindeki bir vektör alanının genel formu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$$

şeklindedir, burada f_1 ve f_2 verilen fonksiyonlardır. Bu sistem vektör fonksiyonları cinsinden $X = (x_1, x_2)$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ olmak üzere

$$\dot{X} = F(X)$$

şeklinde yazılır. X burada faz düzlemi üzerindeki bir nokta olup, $\dot{X}$ ise o noktadaki hız vektörüdür. Bir vektör alanı boyunca hareket eden bir faz noktası, faz düzlemi boyunca ilerleyen bir yörüngeye karşılık gelir ve bu yörünge $X(t)$ çözümüne karşılık gelir. Düzlem üzerindeki her bir nokta bir başlangıç noktası olabildiğinden, tüm faz düzlemi yörüngelerle doldurulabilir. Lineer olmayan sistemlerde analitik metotlarla, yörüngeleri bulmak genellikle imkansızdır. İncelenen sistemlerin tam çözümleri bulunsa bile bu çözümlerden yola çıkarak sistemi incelemek mümkün olmayabilir. Bu yüzden sistemlerin kalitatif durumu incelenir. Burada amaç sistemin faz portresini doğrudan $F(X)$ yardımıyla oluşturmaktır. Aşağıdaki grafik, bir faz portresinin incelenmesidir:



Şekil 6.1 Örnek bir faz portresi

Şekil 6.1'deki A , B ve C noktaları $F(X^*) = 0$ koşulunu sağlayan sabit noktalar olup, bu noktalar incelenen sistemin denge noktalarıdır. D kapalı yörüngeler ise periyodik çözümlere karşılık gelir, yani tüm t ler için

$$X(t + T) = X(t), \quad T > 0$$

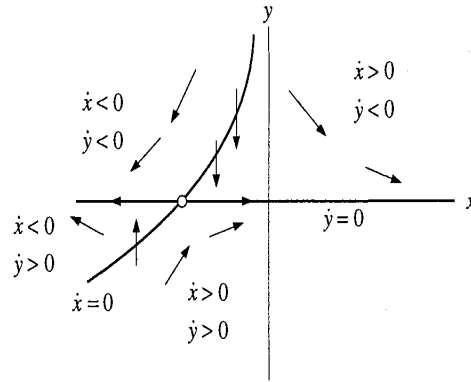
şeklinde bir $T > 0$ sayısı vardır. Görüldüğü gibi A , B ve C noktaları kararsızken D kapalı yörüngesi kararlıdır.

Örnek 6.1.1

$$\begin{cases} \dot{x} = x + e^{-y} \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

sistemin faz portresini çiziniz.

Çözüm Verilen sistemin tek sabit noktası $(x^*, y^*) = (-1, 0)$ dır. Diğer taraftan bu noktanın kararlılığını belirlemek için ilk olarak $y(t)$ çözümüne bakalım. $\dot{y} = -y$ den $y(t) = y_0 e^{-t}$ olup $t \rightarrow \infty$ için $y(t) \rightarrow 0$ dır. Dolayısıyla $e^{-y} \rightarrow 1$ olup uzun vadede $\dot{x} \approx x + 1$ olur. Bu denklemin çözümleri üstel olarak arttığından, (x^*, y^*) sabit noktası kararsızdır. Sistemin faz portresini oluşturmak için sistemin sıfır eğimlerini (nullclines) çizmek yararlı olur. Sıfır eğimliler (nullclines) $\dot{x} = 0$ ya da $\dot{y} = 0$ olacak şekildeki eğilerdir. Sıfır eğimliler, akışın nerede tam olarak dikey yönde, nerede tamamen yatay yönde olduğunu belirler (Şekil 6.2).



Şekil 6.2 (x, y) düzleminde sıfır eğimlilerin gösterimi

Örneğin, $\dot{y} = 0$ olduğu yerlerde akış yataydır, ve $\dot{y} = -y$ olduğundan bu durum $y = 0$ doğrusu üzerinde görülür. Bu doğru boyunca akış $\dot{x} = x + 1 > 0$, yani $x > -1$ olacak şekilde sağa doğrudur. Benzer şekilde, $\dot{x} = x + e^{-y} = 0$ olduğu yerlerde akış

dikeydir. Bu durum şekil 6.2’de görülen eğri üzerinde gerçekleşir. $y > 0$ olduğu eğrinin üst kısmında akış aşağı yönlüdür çünkü burada $\dot{y} < 0$ dır. Sıfır eğimliler aynı zamanda düzlemi $\dot{x}$ ve $\dot{y}$ nün farklı işaretlere sahip olduğu bölgelere de ayırırlar (Şekil 6.2).

6.2 Varlık-Teklik Teoremi ve Bazı Topolojik Sonuçlar

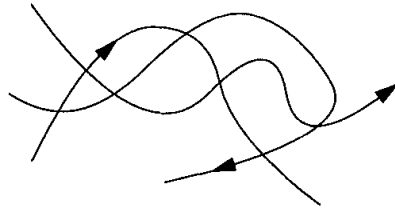
Lineer olmayan sistemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği önemli bir problemidir. Bu kesimde bu problem üzerinde durulacak ve bu sistemlerin bazı topolojik yapıları incelenecektir (Strogatz 2014).

Teorem 6.2.1 (Varlık ve Teklik Teoremi)

$$\dot{X} = F(X), X(0) = X_0$$

başlangıç değer problemi verilsin. Açık bağlantılı bir $D \subset \mathbb{R}^n$ kümesindeki X ler için F ve F nin tüm kısmi türevleri, $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}; i, j = 1, \dots, n$, sürekli olsun. Bu durumda $X_0 \in D$ için $t = 0$ etrafındaki bir $(-\tau, \tau)$ aralığında verilen bir başlangıç değer probleminin bir tek $X(t)$ çözümü vardır.

Başka bir deyişle, eğer F sürekli türevlenebilirse, çözümlerin varlığı ve tekliği garanti edilebilir. Varlık-teklik teoremi önemli bir sonuca sahiptir: *Farklı yörüngeler asla kesişmezler*. Ancak iki yörünge kesişiyorsa, bu durumda aynı noktadan başlayan iki çözümü var demektir ve bu ise teoremin teklik kısmını bozar. Yörüngeler kesişmediğinden faz portreleri her zaman güzel ve düzenli bir görüntüdedir. Varlık-teklik teoremi şekil 6.3’deki gibi karmaşık örüntülerin oluşmasını engeller.



Şekil 6.3 Varlık-tekliğin bozulduğu bir yörünge modeli

İki boyutlu faz uzayları güçlü topolojik sonuçlara sahiptir. Örneğin, faz düzlemi üzerinde kapalı bir C yörüngesinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda C nin

içinden başlatılan bir yol sonsuza kadar orada kalır. Bunun sebebini Poincaré Bendixson teoremi açıklamaktadır: Sabit noktaların bulunmadığı kapalı ve sınırlı bir bölge tarafından sınırlanan bir yol, nihai olarak kapalı yörüngeye yaklaşır.

6.3 Sabit Noktalar ve Lineerleştirme

Bu kesimde lineer olmayan sistemler, sabit noktalar etrafında lineerleştirilerek, karşılık gelen lineer sistemin faz portresi yardımıyla, lineer olmayan sistemin faz portresi hakkında bazı yorumlarda bulunulacaktır (Strogatz 2014).

$$\dot{x} = f(x, y)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

sistemi verilsin ve (x^*, y^*) , $f(x^*, y^*) = 0$, $g(x^*, y^*) = 0$ olacak şekilde bu sistemin bir sabit noktası olsun.

$$u = x - x^* \quad v = y - y^*$$

sabit noktadan çok küçük sapmaları göstermek üzere, bu sapmaların artan mı yoksa azalan mı olup olmadığını anlamak için u ve v değişkenleri için yeni diferensiyel denklemler elde edilmelidir. İlk olarak u için elde edelim:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \dot{x} \\ &= f(x^* + u, y^* + v) \\ &= f(x^*, y^*) + u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv) \\ &= u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv). \end{aligned}$$

Benzer olarak v için,

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv)$$

elde edilir. Burada f_x , f_y , g_x ve g_y kısmi türevlerinin (x^*, y^*) noktasında hesaplanmış

sayılar olduğuna dikkat edelim. Sadece notasyon tutarlılığı için bu şekilde alınmıştır ve $O(u^2, v^2, uv)$ çok küçük terimler olup ihmal edilebilir. Böylece (u, v) sapması için elde edilen sistem,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

olur, burada $A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{(x^*, y^*)}$ matrisi, (x^*, y^*) sabit noktasındaki *Jacobi matrisi*dir. Bu sisteme *lineerleştirilmiş sistem* denir. Burada ikinci dereceden terimlerin alınmaması üzerinde biraz durmakta fayda var. İkinci dereceden terimlerin ihmal edilmesi faz portresi üzerinde bazı problemlere sebep olur mu? Bu sorunun cevabı şöyle verilebilir:

Lineerleştirilmiş sistemin sabit noktası, 5.2 kesiminde bahsedilmiş olan sınır durumlarından biri değilse, lineerleştirilmiş sistemle, lineer olmayan sistemin faz portreleri özdeştir. Diğer bir ifadeyle lineerleştirilmiş sistemin sabit noktaları semer, düğüm ya da spiral ise, bu durumda lineer olmayan sistemin sabit noktaları da aynı şekilde olur. Ancak sınır durumlarında yani lineerleştirilmiş sistemin sabit noktaları merkez, dejenere düğüm, yıldız ya da izole olmayan sabit noktalar ise, bu durumda lineer olmayan sistemin sabit noktaları için doğrudan birşey söylenemez. Daha fazla inceleme gerekir (Andronov vd. 1973).

Örnek 6.3.1

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^3 \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$

tüm sabit noktalarını lineerleştirme yöntemi ile sınıflandırırız.

Çözüm Sistemin sabit noktaları

$$x^3 - x = 0 \text{ ve } -2y = 0$$

olacak şekilde $(0, 0)$, $(1, 0)$ ve $(-1, 0)$ noktalarıdır. Verilen sistemin Jacobi matrisi, genel formda

$$J = \begin{pmatrix} -1 + 3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

dir, J matrisinin her bir sabit noktadaki değerini bulalım.

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ ve } J|_{(\pm 1,0)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

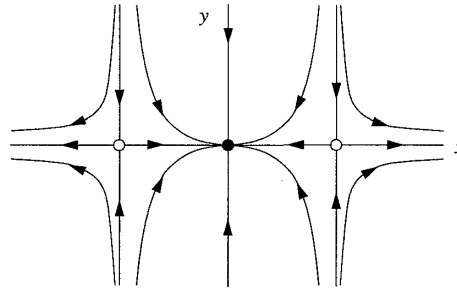
Böylece $(0, 0)$ civarında elde edilen lineer sistem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

olup, karşılık gelen karakteristik denklem

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Dolayısıyla $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -2$ olduğundan bu lineer sistemin $(0, 0)$ sabit noktası kararlı düğüm noktasıdır. Bu durum sınırdaki durumlardan biri olmadığından verilen lineer olmayan sistemin $(0, 0)$ sabit noktası da kararlı düğümdür. Benzer şekilde $(1, 0)$ ve $(-1, 0)$ in da semer noktaları olduğu kolayca görülür. Böylece sistemin faz portresi aşağıdaki gibi çizilir:

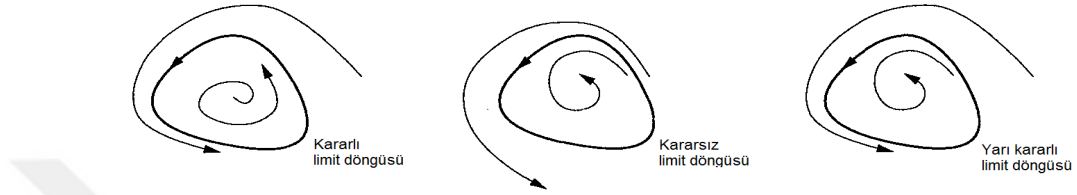


Şekil 6.4 Örnek 6.3.1 sisteminin faz portresi

7. LİMİT DÖNGÜSÜ

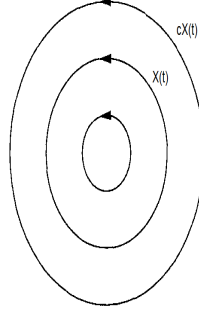
7.1 Temel Bilgiler

İzole edilmiş kapalı bir yörüngeye *limit döngüsü* denir. Buradaki "izole" kavramı komşuluğundaki diğer yörüngelerin kapalı olmaması, spiral şeklinde o yörüngeye yaklaşması veya uzaklaşması anlamındadır.



Şekil 7.1 Yörüngelerin durumuna göre limit döngüleri

Şekil 7.1'den de görüldüğü üzere, eğer bütün komşu yörüngeler limit döngüsüne yaklaşıyorsa, bu durumda limit döngüsü kararlı olur, aksi durumda kararsızdır. Eğer komşu yörüngelerin bazıları yaklaşıyor bazıları da uzaklaşıyor ise, döngü yarı kararlı olur. Kararlı limit döngüleri, kendi kendine salınımlar içerdikleri için bilimsel olarak oldukça önemlidir. Bu sistemler dışardan etki eden periyodik bir kuvvet olmasa bile salınırlar. Bu sistemlere örnek olarak kalp atışı, insan vücut sıcaklığındaki ve hormon salgısındaki günlük ritimler, köprülerde ve uçak kanatlarında kendiliğinden oluşan titreşimler verilebilir. Ayrıca sistemde küçük bir sapma meydana gelse bile sistem her zaman kendi standart döngüsüne dönme eğilimindedir. Limit döngüleri lineer olmayan sistemlerde meydana gelir, çünkü lineer bir $\dot{X} = AX$ sistemi kapalı bir yörüngeye sahip olmakla birlikte, bu yörüngeler izole edilemez. Bunun sebebi, $X(t)$ lineer bir sistemin periyodik çözümü ise, bu durumda $c \neq 0$ olmak üzere $cX(t)$ de aynı sistemin periyodik yörüngesidir. Yani kapalı bir $X(t)$ yörüngesi bir parametrelili kapalı eğriler ailesi tarafından çevrilidir (Şekil 7.2).



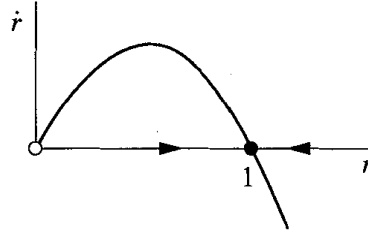
Şekil 7.2 $\dot{X} = AX$ lineer bir sistemin periyodik çözüm şematığı

Örnek 7.1.1 $r \geq 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

sistemin faz portresini inceleyiniz.

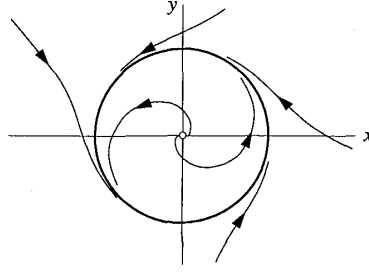
Çözüm Verilen sistemlerin denklemleri birbirinden bağımsız olduklarından, her bir denklem ayrı tek boyutlu sistem olarak incelenebilir. İlk olarak $\dot{r} = r(1 - r^2) = f(r)$ denklemini ele alalım. Bu durumda $f(r^*) = 0$ olacak şekildeki $r_1^* = 0$ ve $r_2^* = 1$ sabit noktalar olup r_1^* kararsız, r_2^* kararlıdır (Şekil 7.3).



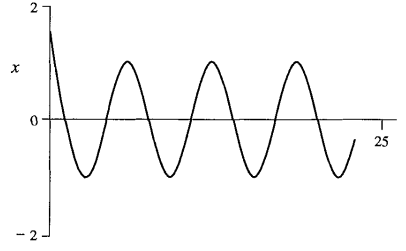
Şekil 7.3 Örnek 7.1.1 in $(r, \dot{r})$ grafiği

Verilen polar sistemin faz portresine bakılacak olursa, $r^* = 0$ hariç sistemin tüm yolları $r^* = 1$ birim çemberine monoton olarak yaklaşırlar. θ yönündeki hareket sabit açısal hızda bir dönüş olduğundan, tüm yörüngeler $r = 1$ limit döngüsüne spiral olarak, yaklaşır (Şekil 7.4).

Sistemin çözümlerine baktığımızda periyodik salımlı çözümleri aşağıdaki gibi görülür (Şekil 7.5). Burada verilen sistemin $x(t) = \cos(t + \theta_0)$ çözümünün sabit genlikli sinüsoidal bir salınım yaptığı görülmektedir.



Şekil 7.4 Örnek 7.1.1 in faz portresi



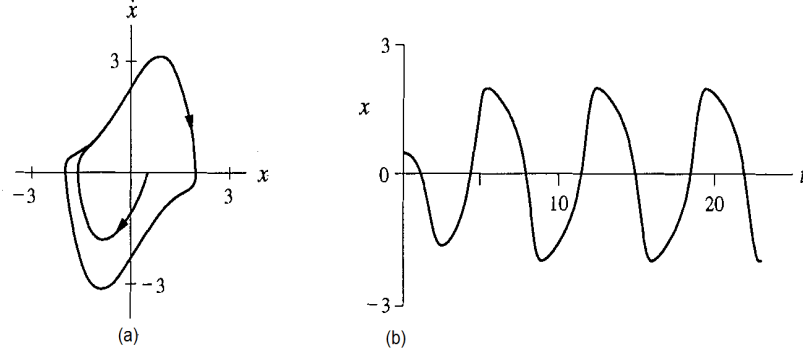
Şekil 7.5 Örnek 7.1.1 in periyodik salımlı çözümleri

Örnek 7.1.2 (Van Der Pol Osilatörü)

Lineer olmayan dinamiklerdeki gelişmelerde çok önemli bir yere sahip olan Van der Pol osilatörü, $\mu \geq 0$ bir parametre olmak üzere

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \mu \geq 0$$

denklemleri ile verilir. Bu denklem tarihte kullanılan ilk radyoların elektrik devrelerini modellemede kullanılmıştır. $\mu = 0$ için denklem, basit bir harmonik salınım denklemdir. Bu denklemde μ katsayılı $\mu(x^2 - 1)\dot{x}$ terimi büyük genlikli salınımların azalmasını sağlar, fakat bu salınımların genliği çok küçültürse, onları tekrar eski haline döndürür. Sistemin bu çalışma prensibi gereğince bir döngüde harcanan enerji geri kazanılan enerjiyi dengelediği için sistem eninde sonunda kendi kendine salınım içeren bir sistem halini alır. Van der Pol denklemi her $\mu > 0$ için kararlı bir tek limit döngüsüne sahiptir. $\mu = 1.5$ için denklemi nümerik olarak $t = 0$ anında $(x, \dot{x}) = (0.5, 0)$ noktasından itibaren integre edilirse denklemin faz portresi şekil 7.6a ile, karşılık gelen $x(t)$ çözümü şekil 7.6b ile verilir. Limit çemberinin tespit edilebilmesi için bazı testler vardır. Bunlar kapalı yörüngelerin olmaması durumunun ispatı ve kapalı yörüngelerin ispatı olmak üzere iki kısma ayrılır.



Şekil 7.6 Van der Pol osilatörünün faz portresi ve $X(t)$ periyodik çözüm grafiği

7.2 Limit Döngüsü için Bazı Testler

Bu kesimde, verilen bir sistemin periyodik bir çözüme yani kapalı bir yörüngeye sahip olup olmadığını anlamak için kullanılan bazı yöntemler incelenmiştir (Strogatz 2014).

7.2.1 Gradyan sistemler

Verilen bir sistem $\dot{X} = -\nabla V$ şeklinde yazılabiliyorsa, bu durumda bu sisteme V potansiyel fonksiyonlu bir *gradyan sistem* denir, burada $V(X)$ sürekli türevlenebilir, tek değerli skaler bir fonksiyon ve $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$ dir.

Teorem 7.2.1.1 Gradyan sistemler kapalı yörüngelere sahip değildir.

İspat Kapalı yörüngelerin olduğunu varsayalım. Bu durumda bir devir sonunda V deki değişimin göz önüne alınmasıyla çelişki elde edilmesi planmaktadır. Bir tarafta, V tek değerli bir fonksiyon olduğu için $\Delta V = 0$ dır, fakat öte yandan,

$$\begin{aligned}
 \Delta V &= \int_0^T \frac{dV}{dt} dt \\
 &= \int_0^T (\nabla V \cdot \dot{X}) dt \\
 &= - \int_0^T \|\dot{X}\|^2 dt \\
 &< 0
 \end{aligned}$$

olup çelişki elde edilir. Yani gradyan sistemlerde kapalı yörüngeler olmaz

Örnek 7.2.1.1

$$\begin{cases} \dot{x} = \sin y \\ \dot{y} = x \cos y \end{cases}$$

sisteminin kapalı yörüngelere sahip olmadığını gösteriniz.

Çözüm Verilen sistem $V(x, y) = -x \sin y$ olmak üzere bir gradyan sistemdir, çünkü $\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$ ve $\dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial y}$ dir. Dolayısıyla sistemin kapalı yörüngeleri yoktur.

Bazı durumlarda verilen sistem gradyan sistem olmamasına rağmen enerji fonksiyonu benzeri bir fonksiyon yardımıyla kapalı yörüngelerin olmadığı gösterilebilir. Aşağıdaki örnek bunu açıklamaktadır.

Örnek 7.2.1.2 $\ddot{x} + (\dot{x})^3 + x = 0$ lineer olmayan denkleminin periyodik çözümlerinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm $x(t)$ sistemin T periyotlu çözümü olsun ve $E(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(x^2 + \dot{x}^2)$ şeklindeki enerji fonksiyonunu gözönüne alalım. Çözüm periyodik olduğundan bir tam döngü sonrasında x ve $\dot{x}$ başladıkları noktaya gelirler. Yani herhangi kapalı bir yörünge için $\Delta E = 0$ olur. Öte yandan, $\Delta E = \int_0^T \dot{E} dt$ dir. Eğer bu integralin sıfıra eşit olmadığı gösterilirse, çelişki elde edilir. Bu amaçla, E nin türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \dot{E} &= x\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} \\ &= \dot{x}(x + \ddot{x}) \\ &= \dot{x}(-\dot{x}^3) \\ &= -\dot{x}^4 \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\Delta E = -\int_0^T \dot{x}^4 dt \leq 0$ elde edilir, buradan eşitlik durumu ancak $\dot{x} \equiv 0$ olmasında sağlanır. Ancak $\dot{x} \equiv 0$, sabit noktanın sistemin yörüngesi olması anlamına gelir ki bu sistemin kapalı yörüngeye sahip olması kabulüne aykırıdır. O halde ΔE kesin negatif olup $\Delta E = 0$ ile çelişir. Yani verilen denklemin periyodik çözümleri olamaz.

7.2.2 Liapunov fonksiyonları

Mekanikle hiçbir ilgisi olmayan sistemler için bile bazen yörüngeler boyunca azalan enerji fonksiyonu benzeri bir fonksiyon oluşturmak mümkün olabilir. Bu tür

fonksiyona *Liapunov fonksiyonu* denir. Eğer verilen sistemin bir Liapunov fonksiyonu varsa, o sistemin kapalı yörüngeleri yoktur. Şimdi bu fonksiyona biraz daha derinden bakalım. $\dot{X}=f(X)$ sistemini ele alalım ve bu sistemin bir sabit noktası X^* olsun. Aşağıdaki özelliklere sahip, sürekli türevlenebilir, reel değerli bir $V(X)$ fonksiyonuna sistemin Liapunov fonksiyonu denir:

(i) $\forall X \neq X^*$ için $V(X) > 0$ ve $V(X^*) = 0$,

(ii) $\forall X \neq X^*$ için $\dot{V} < 0$ dır.

Eğer verilen sistemin bir Liapunov fonksiyonu varsa, bu durumda sistemin X^* denge noktası *global asimptotik kararlıdır*: yani her başlangıç koşulu için $t \rightarrow \infty$ durumunda $X(t) \rightarrow X^*$ olur. Dolayısıyla sistemin kapalı yörüngeleri olamaz. Şunu belirtmekte fayda vardır ki bir sistem için Liapunov fonksiyonunu bulmanın sistematik bir yolu yoktur. Genellikle içgüdüsel bir yaklaşım sergilenir ve bu çoğu zaman işe yarar. Aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 7.2.2.1 Liapunov fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{cases} \dot{m} = -m + 4n \\ \dot{n} = -m - n^3 \end{cases}$$

sisteminin kapalı yörüngelere sahip olmadığını gösteriniz.

Çözüm α sonradan belirlenecek bir parametre olmak üzere aday Liapunov fonksiyonu olarak $V(m, n) = m^2 + \alpha n^2$ seçelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2m\dot{m} + 2\alpha n\dot{n} \\ &= 2m(-m + 4n) + 2\alpha n(-m - n^3) \\ &= -2m^2 + (8 - 2\alpha)mn - 2\alpha n^4. \end{aligned}$$

Burada $\alpha = 4$ seçilirse (mn) terimli katsayı sıfır olur. Böylece her $(m, n) \neq (0, 0)$ için $V = m^2 + 4n^2 > 0$ ve $\dot{V} = -2m^2 - 8n^4 < 0$ olur. Dolayısıyla verilen sistem bir $V = m^2 + 4n^2$ Liapunov fonksiyonuna sahip olup sistemin kapalı yörüngeleri yoktur. Tüm yörüngeler $t \rightarrow \infty$ için orijine yakınsar.

7.2.3 Dulac kriteri

Dulac kriterinin temeli Green teoremidir. Şimdi bu teoremi ifade edelim:

$\dot{X}=F(X)$, düzlemin basit birleşik bir R alt kümesinde tanımlanan sürekli türevlenebilir bir vektör alanı olsun. Eğer R boyunca $\nabla(g\dot{X})$ bir tek işarete sahip olacak şekilde sürekli türevlenebilir, reel değerli bir $g(x)$ fonksiyonu varsa, o zaman tamamı R de kalacak şekilde kapalı yörüngeler yoktur.

Dulac kriteri de Liapunov fonksiyonu gibidir, yani $g(X)$ fonksiyonunu bulmada belirli bir yöntem yoktur. Ancak, $g = 1, -\frac{1}{x^a y^b}, e^{ax}$ ve e^{ay} gibi fonksiyonlar bu $g(X)$ fonksiyonu olarak alınabilir.

Örnek 7.2.3.1 Dulac kriterini kullanarak, $x, y > 0$ olmak üzere

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2 - x - y) \\ \dot{y} = y(4x - x^2 - 3) \end{cases}$$

için sistemin kapalı yörüngelerinin olmadığını gösteriniz.

Çözüm g fonksiyonu $g(x, y) = \frac{1}{xy}$ seçilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \nabla(g\dot{X}) &= \frac{\partial}{\partial x}(g\dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(g\dot{y}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2 - x - y}{y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{4 - x^2 - 3}{x} \right) \\ &= -\frac{1}{y} < 0. \end{aligned}$$

Dolayısıyla x ve y nin pozitif olduğu birinci bölge basit bağlantılı bir bölgedir ve g ile F fonksiyonları gereken düzgünlük koşullarını sağlarlar, böylece Dulac kriterinden verilen sistemin birinci bölgede kapalı yörüngeleri olamaz.

Şimdiye kadar verilen bir sistem için kapalı bir yörüngenin bazı koşullar altında bulunmadığını gördük. Bundan sonra ise tam tersine olarak, sistemin hangi koşullar altında kapalı yörüngelere sahip olduğu incelenecektir.

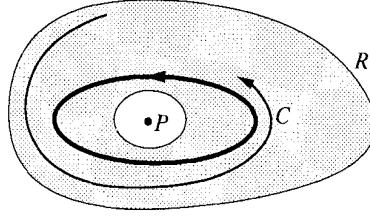
7.2.4 Poincaré-Bendixson teoremi

Teorem 7.2.4.1 Kabul edelim ki,

- (i) R düzlemin kapalı, sınırlı bir alt kümesidir;
- (ii) $\dot{X}=F(X)$, R yi içeren açık bir küme üzerinde sürekli türevlenebilen bir vektör alanıdır;
- (iii) R herhangi bir sabit nokta içermez;

(iv) R içinde "sınırlanmış" bir C yörüngesi vardır öyle ki bu yörünge R de başlar ve tüm zaman boyunca R de kalır.

Bu durumda, C ya kapalı bir yörüngedir ya da $t \rightarrow \infty$ için kapalı bir yörüngeye spiral şeklinde sarmal yapar. Her iki durumda da R bölgesi kapalı bir yörünge içerir (Şekil 7.7).



Şekil 7.7 Poincaré-Bendixson teoreminin şartını sağlayan R kapalı bölgesi

Örnek 7.2.4.1 $\mu > 0$ yeterince küçük olmak üzere

$$\begin{cases} \dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$$

sisteminin kapalı bir yörüngeye sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm Dış çember üzerinde $\dot{r} < 0$ ve iç çember üzerinde $\dot{r} > 0$ olacak şekilde $r_{\min}$ ve $r_{\max}$ yarıçaplı, eş merkezli iki çember oluşturacağız. Böylece, iki çember arasında kalan $0 < r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ yarıçaplı halka Poincaré- Bendixson teoremindeki R bölgesine karşılık gelir. Belirtelim ki $\dot{\theta} > 0$ olduğundan bu halkada sabit nokta yoktur, dolayısıyla $r_{\min}$ ve $r_{\max}$ bulunabilirse, Poincaré- Bendixson teoremi kapalı bir yörüngenin varlığını gerektirir. Şimdi bu yarıçapları bulalım:

$r_{\min}$ bulmak amacıyla, tüm θ lar için $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta$ pozitif olduğu gösterilmelidir. $\cos \theta \geq -1$ olduğundan, $r_{\min}$ için bir yeter koşul $1 - r^2 - \mu > 0$ dır. Böylece herhangi bir $r_{\min} < \sqrt{1 - \mu}$ seçimi $\mu < 1$ olduğu sürece anlamlı olacaktır. $r_{\min}$ mümkün olduğunca büyük seçmemiz gerektiğinden $r_{\min} = 0.999\sqrt{1 - \mu}$ olsun. Benzer şekilde $r_{\max} = 1.001\sqrt{1 - \mu}$ alınır. O halde tüm $\mu < 1$ için verilen sistemin kapalı bir yörüngesi vardır ve bu yörünge $0.999\sqrt{1 - \mu} < r < 1.001\sqrt{1 - \mu}$ yarıçaplı bir halkanın içinde bulur.

7.2.5 Liénard sistemleri

1920 ve 1950 yılları arasında yani lineer olmayan sistemlerin ilk incelenmeye başlandığı yıllarda, lineer olmayan salınımlar yeni bir çalışma alanıydı. Radyonun ve vakumlu tüp teknolojisinin gelişmesiyle önemli bir denklem elde edildi. Bu denklem ile salınlı pek çok devre modellenebiliyordu. Bu denklem *Liénard denklemi* olarak bilinen ikinci basamaktan

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0$$

formundaki bir diferensiyel denklem olup Van der Pol denkleminin genelleştirilmiş halidir. Liénard denklemi

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -f(x) - g(x) \end{cases}$$

şeklinde Liénard sistemine indirgenir. Aşağıdaki Liénard teoremi f ve g fonksiyonları belirli koşulları sağlarsa, Liénard sisteminin bir tek kararlı limit döngüsüne sahip olduğunu söyler.

Teorem 7.2.5.1 (Liénard teoremi) Kabul edelim ki f ve g fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

- (i) Tüm x ler için $f(x)$ ve $g(x)$ sürekli türevlenebilirdir;
- (ii) $\forall x$ için $g(-x) = -g(x)$, (yani $g(x)$ tek fonksiyondur);
- (iii) $\forall x > 0$ $g(x) > 0$;
- (iv) $\forall x$ $f(-x) = f(x)$, (yani $f(x)$ çift fonksiyondur);
- (v) $F(x) = \int_0^x f(u)du$ tek fonksiyonu $x = a$ da tam olarak pozitif bir köke sahiptir. Ayrıca $F(x)$, $0 < x < a$ için negatif, $x > a$ için pozitif azalmayan ve $x \rightarrow \infty$ için $F(x) \rightarrow \infty$ dır. Bu durumda Liénard sistemi faz düzleminde orijin etrafında bulunan kararlı bir tek limit döngüsüne sahiptir.

Örnek 7.2.5.1

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Van der Pol denkleminin kararlı bir tek limit döngüsüne sahip olduğunu gösteriniz.

Çözüm Bu denklemde $f(x) = \mu(x^2 - 1)$ ve $g(x) = x$ olup Liénard teoremin (i)-(iv)

şartlarının sağlandığı aşıkardır. Son şart için,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \mu(u^2 - 1) du \\ &= \mu\left(\frac{1}{3}x^3 - x\right) \\ &= \frac{1}{3}\mu x(x^2 - 3) \end{aligned}$$

olup $x = \sqrt{3}$, $F(x)$ in tek pozitif köküdür. O halde bu koşul da sağlanır, yani Vander Pol sistemi bit tek kararlı limit döngüsüne sahiptir.



8. İKİ BOYUTLU SİSTEMLER İÇİN ÇATALLANMA TÜRLERİ

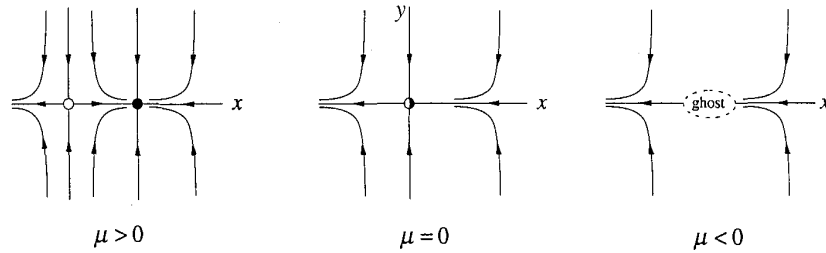
Üçüncü bölümde bir boyutlu sistemler için çatallanma türleri incelenmişti, bu bölümde ise iki boyutlu sistemler için çatallanma türleri üzerinde durulacaktır. Burada da daha önce olduğu gibi sistemdeki parametre değeri değiştikçe sistemin kritik noktaları oluşabilir, yok olabilir ya da kararlılık yapıları değişebilir, fakat iki boyutlu sistemlerde bunlara ek olarak kapalı yörüngelerin durumları da göz önüne alınmak zorundadır (Strogatz 2014).

8.1 Semer-Düğüm Çatallanması

Semer- Düğüm çatallanmasındaki temel prensip sabit noktaların oluşması ve bir süre sonra yok olmasıdır. İki boyutlu sistemlerde bu çatallanmanın normal formu

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

dir. x - yönündeki çatallanma Kesim 3.1’de bir boyutlu sistemler için incelenen yapı ile aynıken, y - yönünde üstel bir azalma söz konusudur. μ nün değişimine göre elde edilen faz portresi aşağıdadır (Şekil 8.1).



Şekil 8.1 μ değişimine göre çatallanma grafiği

Buna göre $\mu > 0$ için $(x^*, y^*) = (\sqrt{\mu}, 0)$ sabit noktası kararlı düğüm, $(x^*, y^*) = (-\sqrt{\mu}, 0)$ sabit noktası semerdir; μ azaldıkça, semer ve düğüm noktaları birbirine yaklaşır ve $\mu = 0$ olduğu anda birleşirler ve sonunda $\mu < 0$ için yok olurlar.

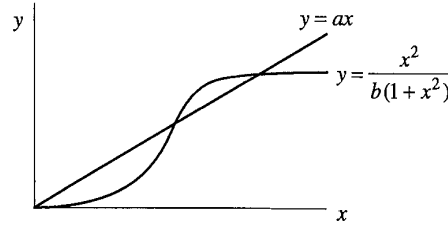
Örnek 8.1.1 Aşağıda verilen denklem sistemi Griffith (1971) tarafından oluşturulan genetik kontrol sisteminin bir modelidir. Bu modelde belirli bir genin etkinliğinin, kodladığı proteinin iki kopyası tarafından doğrudan tetiklendiği varsayılmaktadır.

Yani, kendi türünü tarafından uyarılan gen, potansiyel olarak bir otokatalitik geri besleme sürecine yol açar. Bu modele karşılık gelen matematiksel sistem

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + y \\ \dot{y} = \frac{x^2}{1+x^2} - by \end{cases}$$

dir, burada x ve y , sırasıyla, protein yoğunluğu ile ve proteinin dönüştüğü mRNA konsantrasyonu ile doğru orantılıdır, ayrıca $a, b > 0$ olup x ve y nin düşme oranını ayarlayan parametrelerdir. a_c , sistemin belirlenmesi gereken kritik parametre değeri olmak üzere a_c ye göre sistemi inceleyiniz.

Çözüm Sistemin sıfır eğimliliği $y = ax$ doğrusu ve $y = \frac{x^2}{b(1+x^2)}$ eğrisidir (Şekil 8.2).



Şekil 8.2 Örnek 8.1.1'in grafiği

Doğrunun eğimi a olduğundan, görsel olarak daha iyi kavrayabilmek adına b parametresi sabit tutularak, a parametresinin değiştiğini kabul edelim. Yeterince küçük a değerleri için şekil 8.2'de görüldüğü gibi üç tane kesişim noktası vardır. a değeri arttıkça üstteki iki kesişim noktası birbirine yaklaşır ve doğru eğriyi teğet kestiği anda çarpışırlar. a nın daha büyük değerleri için, bu sabit noktalar yok olur ve orijin tek sabit nokta olarak kalır.

a_c kritik parametre değerini bulmak için, sistemin sabit noktalarını hesaplayalım ve bu noktaların nerede birleştiğini belirleyelim. Sistemin sabit noktaları $f(x, y) = -ax + y = 0$ ve $g(x, y) = \frac{x^2}{1+x^2} - by = 0$ olacak şekildeki (x^*, y^*) noktalarıdır.

Buradan $y = ax$ olup, bu değer $y = \frac{x^2}{b(1+x^2)}$ de göz önüne alınırsa

$$abx^2 - x + ab = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla x^* değerleri $1 - 4a^2b^2 > 0$ yani $2ab < 1$ için

$$x^* = 0 \text{ ve } x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a^2b^2}}{2ab}$$

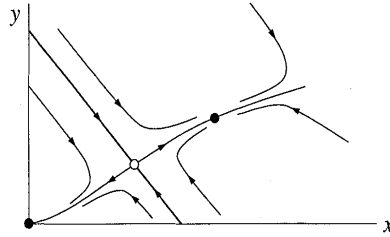
şeklinde bulunur. Bu çözümler $2ab = 1$ olduğunda birleşirler. O halde, $a_c = \frac{1}{2ab}$ şeklinde bulunur. Sabit noktaları sınıflandırmak için verilen sistemin Jacobi matrisini hesaplayalım. (x, y) noktasında Jacobi matrisi

$$J = \begin{pmatrix} -a & 1 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2} & -b \end{pmatrix}$$

dir. Bu matrisin izi $\tau = -(a + b) < 0$ olduğundan tüm sabit noktalar Δ determinantına bağlı olarak ya atraktördür ya da semerdir. $(0, 0)$ noktasında, $\Delta = ab > 0$ olduğundan orijin kararlı bir sabit noktadır. Aslında bu nokta $\tau^2 - 4\Delta = (a - b)^2 > 0$ olduğundan kararlı bir düğüm noktasıdır. Diğer iki sabit nokta için

$$\det(J) = \Delta = ab \left[\frac{(x^*)^2 - 1}{1 + (x^*)^2} \right]$$

şeklinde hesaplanır. $0 < x^* < 1$ olan sabit nokta için, $\Delta < 0$ olup bu nokta bir semer noktasıdır. $x^* > 1$ olan sabit nokta için $\Delta < ab$ yani $\tau^2 - 4\Delta > (a - b)^2 > 0$ olduğundan, bu nokta her zaman kararlı bir düğüm noktasıdır. Sistemin faz portresi aşağıda verilmiştir (Şekil 8.3).



Şekil 8.3 Örnek 8.1.1'in faz portresi

Şimdi bu sonucu biyolojik olarak yorumlayalım: mRNA ve protein yeterince yavaş ayrıştığında, yani tam olarak bunların azalma oranı $ab < 1/2$ şartını sağladığında, bu sistem sanki biyokimyasal bir anahtar gibi davranır. Bu durumda iki tane kararlı sabit davranış vardır. İlki orijinde görülür. Buradaki gen aktif değildir ve bu geni aktive etmek için etrafta herhangi bir protein bulunmaz. Diğeri ise x ve y nin büyük olduğu yerdir. Buradaki gen aktiftir ve yüksek protein seviyesiyle sürdürülür. Semerdeki kararlı manifold, bir eşik değeri olarak düşümlenebilir; x ve y nin başlangıç değerlerini göz önünde bulundurmak genin aktif mi yoksa pasif mi olduğuna karar verir.

8.2 Transkritik Çatallanma

Bu çatallanmanın normal formu

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad (8.2.1)$$

Dikkat edilirse sistemin ilk denklemi tek boyutlu sistemler için Kesim 3.2’de verilen normal formla aynıdır. Dolayısıyla x - yönünde elde edilen davranışlar Kesim 3.2’dekilerle aynıdır, y - yönündeki hareket ise semer- düğüm çatallanmasında olduğu gibi üstel olarak azalır. Şimdi bu normal formun sabit noktalarını sınıflandıralım. (8.2.1) in sabit noktaları $(0, 0)$ ve $(\mu, 0)$ dir. Karşılık gelen Jacobi matrisi

$$J = \begin{pmatrix} \mu - 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

olup $(0, 0)$ noktasında bu matrisin determinantı $\Delta = -\mu$ ve izi $\tau = \mu - 1$ dir. O halde $\mu > 0$ için $\Delta < 0$ olup $(0, 0)$ bir semer noktası olur. $\mu < 0$ ise, $\Delta > 0$ olur ve $\tau < 0$ dir. Dolayısıyla $(0, 0)$ düğüm, spiral ya da merkezdir. Bunlar ise Kesim 5.2’de verildiği gibi $\tau^2 - 4\Delta$ ya göre belirlenir.

$(\mu, 0)$ sabit noktası için Jacobi matrisinin determinantı $\Delta = \mu$, izi $\tau = -(\mu + 1)$ dir. Burada $\mu < 0$ ise $\Delta < 0$ olup, $(\mu, 0)$ bir semer noktasıdır. $\mu > 0$ için $\Delta > 0$ ve $\tau < 0$ dir. Öyleyse yukarıdaki yorum burada da geçerli olur. $\mu = 0$ için her koşulda $\Delta = 0$ olduğundan doğru ya da düzlem bir sabit noktalar kümesi olur.

8.3 Dirgen Çatallanma

Kesim 3.2’de olduğu gibi iki boyutlu sistemler için de dirgen çatallanma subkritik ve süperkritik olmak üzere iki türlüdür. Bunlara karşılık gelen normal formlar sırasıyla

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu x + x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

dir. Kesim 8.2’de sabit noktaların sınıflandırılması için yapılan inceleme bu iki çatallanma türü için de benzer şekilde yapılır.

Örnek 8.3.1

$$\dot{x} = \mu x + y + \sin x$$

$$\dot{y} = x - y$$

sisteminin orijinde bir süperkritik dirgen çatallanmasına sahip olduğunu göstererek μ_c çatallanma değerini bulunuz.

Çözüm Verilen sistem $x \rightarrow -x$ ve $y \rightarrow -y$ değişken değişimi altında invariant olduğundan, sistemin Jacobi matrisinin $(0, 0)$ daki değeri

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu + 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

dir, buradan $\tau = \mu$ ve $\Delta = -(\mu + 2)$ olur. Bu durumda $\mu < -2$ için orijin kararlı bir sabit nokta, $\mu > -2$ için ise semer noktasıdır. Böylece $\mu_c = -2$ de dirgen çatallanma meydana gelir. Henüz çatallanmanın subkritik mi süperkritik mi olduğunu bilmiyoruz. Sistemin sabit noktaları $y = x$ ve dolayısıyla $(\mu + 1)x + \sin x = 0$ denklemlerini sağlar. Buradan bir çözüm $x = 0$ olur. Şimdi x in sıfırdan farklı ve yeterince küçük olduğunu kabul edelim ve sinüs fonksiyonunu kuvvet serisine açalım. Bu durumda

$$(\mu + 1)x + x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) = 0$$

elde edilir. Burada her taraf x ile bölünür ve yüksek dereceli terimler göz ardı edilirse,

$$\mu + 2 - \frac{x^2}{6} \approx 0$$

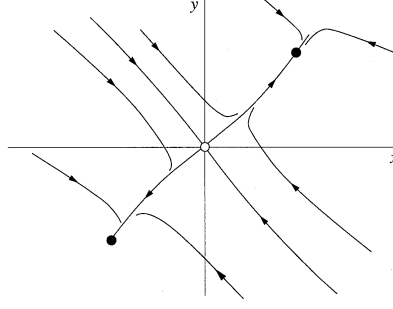
bulunur. Böylece -2 den çok az büyük μ ler için

$$x^* \approx \pm \sqrt{6(\mu + 2)}$$

şeklinde simetrik sabit noktalar elde edilir. O halde $\mu_c = -2$ kritik değerinde süperkritik çatallanma meydana gelir. Sistemin -2 den çok az büyük μ ler için, $(0, 0)$ civarındaki faz portresini çizebilmek için, orijinde hesaplanan Jacobi matrisinin özvektörlerini bulmak faydalı olacaktır. Bu hesaplama direkt yapılabilirdi gibi çatallanma değeri için Jacobi matrisine basit bir yaklaşımla da bulunabilir. Böylece Jacobi matrisi

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

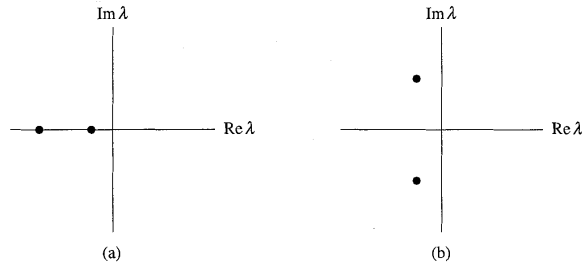
olup, bu matrisin özdeğerleri $\lambda_1 = 0$ ve $\lambda_2 = -2$ olarak bulunur, böylece özvektörler, sırasıyla, $(1, 1)$ ve $(1, -1)$ dir. O halde -2 den çok büyük μ ler için orijin semer noktası olur. Sistemin faz portresi aşağıda verilmiştir (Şekil 8.4).



Şekil 8.4 Örnek 8.3.1 in faz portresi

8.4 Hopf Çatallanması

Bu kesimde bir boyutlu sistemler için var olmayan yeni bir çatallanma türünden bahsedilecektir (Strogatz 2014). İki boyutlu bir sistemin kararlı bir sabit noktaya sahip olduğunu kabul edelim. Bu sabit noktanın μ parametresi değiştikçe kararlılığını etkileyen durumlar nelerdir? Burada Jacobi matrisinin özdeğerleri kilit rol oynar. Eğer sabit nokta kararlı ise λ_1, λ_2 özdeğerlerinin ikisi birden düzlemin sol tarafında $Re\lambda < 0$ olacak biçimde konumlanır. Bu λ lar reel katsayılı kuadratik bir denklemi sağladığından iki durum söz konusudur. Ya özdeğerlerin her ikisi de reel ve negatiftir (şekil 8.5a) ya da karmaşık eşleniklerdir (Şekil 8.5b).



Şekil 8.5 λ_1 ve λ_2 ye göre (Re, Im) grafiği

Sabit noktanın kararlılık yapısının değişmesi için bu özdeğerlerden birinin veya her ikisinin μ değiştikçe sağ yarı düzleme geçmesi gerekmektedir. Bir önceki kesimde reel özdeğerin $\lambda = 0$ ı geçtiği durumlar incelenmişti. Bunlar semer- düğüm, transkritik ve dirgen çatallanmalardı. Şimdi, iki kompleks eşlenik özdeğerin aynı anda sanal eksenenden sağ yarı düzleme geçtiği durum olan Hopf çatallanması ele alınacaktır (Strogatz 2014).

μ parametresi değiştikçe, sistemin bir denge noktasını çevreleyen periyodik bir çözüm ya da bir limit döngüsü oluşuyor veya yok oluyorsa, bu durumda bu sistemde Hopf

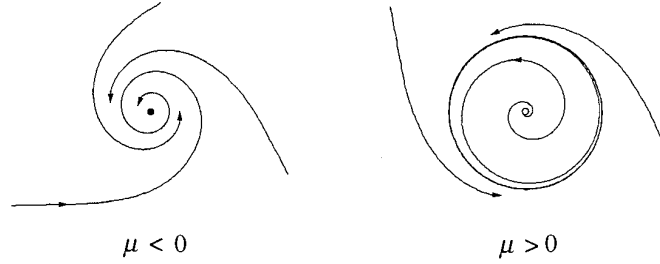
çatallanması vardır denir. İki tür Hopf çatallanması vardır:

Kararlı bir limit döngüsü kararsız bir denge noktasını çevreliyorsa, bu durumda *süperkritik Hopf çatallanması* oluşur, eğer limit çemberi kararsız ancak çevrelediği denge noktası kararlı ise, bu durumda çatallanma *subkritik Hopf çatallanması* adını alır (Lynch 2004).

Örnek 8.4.1

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r - r^3 \\ \dot{\theta} = w + br^2 \end{cases}$$

sistemini ele alalım. Bu örnek süperkritik Hopf çatallanma için temel bir örnektir. Bu sistemde üç parametre vardır: μ orijindeki sabit noktanın kararlılığını kontrol eder, w sonsuz küçük salınımların frekansını verir ve b ise daha büyük genlikli salınımlar için frekansın genliğe bağımlılığını belirler. Aşağıdaki şekil, verilen sistemin μ ye göre faz portresidir.



Şekil 8.6 Örnek 8.4.1'deki sistemin μ ye göre faz portresi

Şekil 8.6'dan, $\mu < 0$ için orijin $r = 0$ da w nın işaretine bağlı olarak dönen kararlı bir spiraldir. $\mu = 0$ olduğunda orijin çok zayıf kararlı bir spiral olup, $\mu > 0$ için orijinde kararsız bir spiral ve $r = \sqrt{\mu}$ yarıçaplı çembersel kararlı bir limit döngüsü vardır. Genel olarak süperkritik Hopf çatallanmalarında görülen iki durum vardır:

(i) Limit döngüsünün boyutu μ_c ye yakın μ ler için $\sqrt{\mu - \mu_c}$ ile orantılı bir şekilde sıfırdan başlayarak sürekli olarak artar,

(ii) Limit döngüsünün frekansı yaklaşık olarak $\mu = \mu_c$ değerinde hesaplanan

$w = \text{Im } \lambda$ ile verilir. Bu formül limit döngüsünün oluştuğu anda tam olarak doğrudur

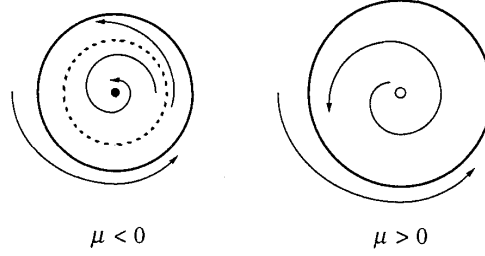
ve μ_c ye yeterince yakın μ ler için $O(\mu - \mu_c)$ ile ayarlanır. Böylece periyot $T =$

$\frac{2\pi}{\text{Im } \lambda} + O(\mu - \mu_c)$ dir.

Örnek 8.4.2

$$\begin{cases} \dot{r} = \mu r + r^3 - r^5 \\ \dot{\theta} = w + br^2 \end{cases}$$

sistemi verilsin. Bu sistemin süperkritik Hopf çatallanması için en önemli farkı pozitif katsayılı kübik terimdir. Bu terim sistemi kararsızlaştırarak yörüngelerin orijinden uzaklaşmasına sebep olur.



Şekil 8.7 Örnek 8.4.2'deki sistemin faz portresi

Şekil 8.7'de verilen faz portresine göre $\mu < 0$ için orijinde iki atraktör vardır: kararlı limit çemberi ve orijindeki kararlı bir sabit nokta. Bunların arasında ise kararsız (kesik çizgili) bir çember bulunmaktadır. Bu kararsız çember bu örnekteki en önemli oyuncudur. μ değeri arttıkça, kararsız çember sabit noktanın etrafında bir ilmek gibi sıkışarak orijini kararsız hale getirir. Böylece $\mu = 0$ olduğunda subkritik Hopf çatallanması oluşur. Bu aşamada kararsız çember sıfır genliğe düşerek orijini sarar ve onu kararsız hale getirir. $\mu > 0$ olduğunda büyük genlikli limit çemberi aniden ortamdaki tek atraktör haline gelir. Eskiden orijine yakın olan çözümler artık büyük genlikli salınımlara dönüşmek zorunda kalır.

9. SONUÇ

Dinamik sistemler hem teorik hem de uygulama açısından oldukça önemli ve kullanışlı özellikler barındıran matematiksel yapılardır. Bilindiği üzere özellikle uygulamada karşılaşılan sistemler karmaşık yapılar içerdiğinden, sistemlerin davranışı hakkında çözümleri yardımıyla yorum yapmak her zaman mümkün olmayabilir. Bu durumda sistemi çözmeden çeşitli yöntemlerle bu sistemlerin kararlılık, periyodiklik ve çatallanma gibi özellikleri incelenir. Bu tezde farklı dinamik sistemler için kararlılık analizi, periyodiklik ve özellikle çatallanma yapıları üzerinde durulmuştur. İlk olarak tek boyutlu sistemler ele alınmıştır. Bu sistemlerin varlık tekliği ve kararlılık analizi çeşitli metotlar incelenerek açıklanmış ve farklı çatallanma yapıları hakkında bilgiler verilmiştir. Daha sonra bir çember üzerinde bulunan akışlar için aynı özellikler ele alınmış ve literatürdeki çeşitli modeller ifade edilmiştir. Sonrasında benzer davranışların iki boyutlu sistemler üzerinde nasıl genişletildiği incelenmiş ve ikisi arasındaki farklar yapılan çalışmalarda verilen örneklerle desteklenerek açıklanmıştır.

KAYNAKLAR

- Andronov, A. A., Leontovich, E. A., Gordon, I. I., and Maier, A. G. 1973. Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems. Halsted press, 524, New York.
- Boitillaev, D. A. 2010. On the saddle-node bifurcation in the Hesse system. Uzbek Mathematical Journal, 1, 41–45.
- Bonyah, E., Al Basir, F., Ray, S. 2020. Hopf bifurcation in a mathematical model of tuberculosis with delay. Ind. Appl. Math., Springer, 301-303, Singapore.
- Borrelli, R. L., and Coleman, C. S. 1987. Differential Equations: A Modeling Approach. Prentice Hall, 656, Englewood Cliffs.
- Cartwright, M. L. 1952. Van der Pol's equation for relaxation oscillations. Contributions to Nonlinear Oscillations. Princeton, 2, 3.
- Chen, J. Y., Zhang, C. H. 2018. Stability and Hopf bifurcation of Degn-Harrison chemical model. Mathematics and applications, 31(3), 683–689.
- Feigenbaum, M. J. 1978. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, statistical Physics journal, 19, 25.
- Griffith, J. S. 1971. Mathematical Neurobiology. Academic Press, 161, New York.
- Haken, H. 1983. Synergetics, Springer, 395, Berlin.
- Li, P. S., Sheng, G. Q., Meng, Y. Y., and Liu, Q. 2015. Hopf bifurcation analysis and control of aerodynamic flutter for an airfoil. Journal of Jilin University, 53(4), 647–654.
- Libchaber, A., Laroche, C., and Fauve, S. 1982. Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement. J. Physique Lerr., L2 1 (1), 43.
- Linsay, P. 1981. Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator. Phys. Rev. Lett., 47, 1349.
- Lynch, S. 2004. Dynamical Systems with Applications Using Matlab, Birkhawer, Boston.
- Lorenz, E. N. 1963. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmor. Sci., 20, 130.
- Mandelbrot, B. B. 1982. The Fractal Geometry of Nature. Freeman, 468, San Francisco.
- May, R. M. 1976. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature 261, 459.
- Moon, F. C. 1992. Chaotic and Fractal Dynamics: An Introduction for Applied Scientists and Engineers. Wiley, 508, New York.
- Newton, C. M. 1980. Biomathematics in oncology: modelling of cellular systems. Ann. Rev. Biophys. Bioeng., 9, 541.

- Palmer, R. 1989. Broken Ergodicity. In D. L. Stein, ed. Lectures in the Sciences of Complexity, 31, 669-735.
- Ruelle, D. and Takens, F. 1971. On the nature of turbulence. Commun. Math. Phys. 20, 167.
- Smale, S. 1967. Differentiable dynamical systems. Bull. Am. Math. Soc. 73, 747.
- Strogatz, S. H. 2014. Nonlinear Dynamics and Chaos. CRC Press, 487, New York.
- Wang, J., Liu, N., Wang, H., and Guo, L. 2022. Research on bifurcation and chaos characteristics of planet gear transmission system with mixed elastohydrodynamic lubrication (EHL) friction. Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul., 23(1), 1–14.
- Zhang, R., Liu, X., Wei, C. 2021. 2021. Stability and Hopf bifurcation of a delayed mutualistic system. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 31 (14), 13.