

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİNİN H_N YÖNTEMİ VE
SİNGÜLER ÖZFONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ, SLAB-
ALBEDO VE MİLNE PROBLEMİ

SERDAR BULUT

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA

2008

Her hakkı saklıdır

TEZ ONAYI

Serdar BULUT tarafından hazırlanan “**Nötron Transport Denkleminin H_N Yöntemi ve Singüler Özfonksiyonlar Yöntemi ile Çözümü, Slab-Albedo ve Milne Problemi**” adlı tez çalışması 22/02/2008 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Yard. Doç Dr. Mustafa Çetin GÜLEÇYÜZ

Jüri Üyeleri :

Başkan : Prof. Dr. Cevdet TEZCAN, Başkent Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. Ramazan SEVER, ODTÜ

Üye : Prof. Dr. Satılmış ATAĞ, Ankara Üniversitesi

Üye : Doç Dr. Ayşe KAŞKAŞ, Ankara Üniversitesi

Üye : Yard. Doç Dr. Mustafa Çetin GÜLEÇYÜZ, Ankara Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr.Ülkü MEHMETOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Doktora Tezi

NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİNİN H_N YÖNTEMİ VE SİNGÜLER ÖZFONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ, SLAB- ALBEDO PROBLEMİ VE MİLNE PROBLEMİ

Serdar BULUT

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Yard. Doç. Dr. Mustafa Çetin GÜLEÇYÜZ

Bu tezde nötron transport denklemi için farklı çözüm yöntemleri incelenmiştir. İlk olarak nötron transport denklemi türetilmiştir. Daha sonra nötron transport denklemi için geliştirilen bazı analitik ve yarı-analitik yöntemler, tarihsel gelişimleri dikkate alınarak incelenmiştir. Bu yöntemler sırası ile Case, F_N , C_N ve grubumuz tarafından geliştirilen Singüler Özfonksiyonlar yöntemi ve H_N yöntemleridir. Ayrıca Singüler Özfonksiyonlar yöntemi ve H_N yöntemleri kullanılarak Slab-albedo ve Milne problemleri incelenmiştir. Yapılan analitik hesaplamalardan sonra algoritmalar geliştirilerek probleme uygun bilgisayar programları yazılmıştır ve bulunan nümerik sonuçlar literatürde bulunan ve farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Bundan başka ek olarak H_N yöntemi ile transport teorisinin başka bir uygulama alanı olan radiative transfer problemi incelenmiştir. Elde edilen nümerik sonuçlardan H_N ve Singüler özfonksiyonlar yöntemlerinin, transport denkleminin integro-differansiyel formunun çözümü için çabuk yakınsayan ve uygulanması kolay yöntemler olduğu görülmüştür.

Şubat 2008, 113 sayfa

Anahtar kelimeler: Nötron transport denklemi, Albedo, Slab-Albedo Problemi, Milne Problemi, Extrapolasyon uzaklığı, Radiative akı

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE SOLUTION OF THE NEUTRON TRANSPORT EQUATION WITH H_N METHOD AND SINGULAR EIGENFUNCTIONS METHOD, THE SLAB-ALBEDO AND THE MILNE PROBLEM

Serdar BULUT

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Asst.Prof. Dr. Mustafa Çetin GÜLEÇYÜZ

In this thesis, the different solving methods have been investigated for neutron transport equation. Firstly, the neutron transport equation has been derived. Then some analytical and semi-analytical methods improved for neutron transport equation have been investigated by considering their historical development. These methods are Case, F_N and C_N methods and H_N and Singular eigenfunctions methods developed by our research group. Also the Slab-Albedo and Milne problem are investigated with Singular eigenfunction method and H_N method. The computer programs have been written by improved algorithms for considered problem. The obtained numerical values have been compared with values obtained by different methods in literature. Moreover, the other application of transport theory, radiative transfer problem has been investigated by H_N methods. It is seen that H_N and Singular eigenfunctions methods are simple methods for solving integro-differential form of the transport equation and they have rapid convergence.

February 2008, 113 pages

Key words: Neutron transport equation, Albedo, Slab-Albedo Problem, Milne Problem, Extrapolation length, Radiative flux

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca bana her konuda büyük yardımları dokunan tez danışmanım sayın **Yard. Doç. Dr. Mustafa Çetin GÜLEÇYÜZ**'e, çok değerli hocalarım sayın **Prof. Cevdet TEZCAN** ve sayın **Doç Dr. Ayşe KAŞKAŞ**'a teşekkür etmek benim için bir görevdir.

Serdar BULUT

Ankara, Şubat 2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİ	6
2. 1 Tanımlar	6
2.2 Transport Denkleminin Yazılması	8
3. CASE YÖNTEMİ	10
3.1 Yöntemin Nötron Transport Denklemine Uygulanması	10
3.2 Kesikli ve Sürekli Çözümler.....	11
4. C_N YÖNTEMİ	13
4.1 Yöntemin Nötron Transport Denklemine Uygulanması	13
4.2 Sonsuz Ortam Green Fonksiyonu	15
5. F_N YÖNTEMİ.....	17
5.1 Yöntemin Nötron Transport Denklemine Uygulanması	17
5.2 Problemin Genel Çözümü	18
7. H_N YÖNTEMİ	21
7.1 Case'in Özfonksiyonları İle yazılan Green Fonksiyonu'nun Kullanılması.....	21
7. 2 Case Yönteminde elde Edilen Genel Çözümün Kullanılması.....	23
8. NÖTRON TRANSPORT TEORİSİNDE H_N VE SİNGÜLER.....	
ÖZFONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE UYGULAMALAR	26

8.1 H_N Yönteminin Lineer Anizotropik Saçılma Durumu İçin Slab-Albedo	
Problemine Uygulanması.....	26
8. 2 Singüler Özfonsiyonlar Yönteminin Lineer Anizotropik Saçılma Durumu	
İçin Slab-Albedo Problemine Uygulanması.....	50
8.3 H_N Yönteminin Lineer Anizotropik Saçılma Durumu İçin Milne Problemine.....	
Uygulanması	55
8.4 Singüler Özfonsiyonlar Yönteminin Lineer Anizotropik Saçılma Durumu	
İçin Milne Problemine Uygulanması.....	68
9. P_N VE H_N YÖNTEMLERİ İLE RADIATIVE TRANSFER DENKLEMİNİN	
ÇÖZÜMÜ	72
9.1 Radiative Transfer Denkleminin Yazılması	72
9.2 P_N Yöntemi ile Radiative Transfer Denkleminin Çözümü.....	76
9.3 H_N Yöntemi ile Radiative Transfer Denkleminin Çözümü	82
10. SONUÇ.....	93
EKLER.....	101
EK 2.....	106
EK 3.....	110
EK 4.....	112
ÖZGEÇMİŞ.....	113

SİMGELER DİZİNİ

$\vec{r}$	Konum Vektörü
$\vec{\Omega}$	Nötronların Hız Doğrultuları
t	Zaman
ψ	Açısal Dağılım Fonksiyonu
σ	Tesir Kesiti
c	İkincil Nötron Sayısı
s	Kaynak Terimi
μ	Nötronların Hız Doğrultusunun x Eksenine İle Yaptığı Açının Kosünüsü
$\pm v_0$	Kesikli özdeğerler.
$\phi(v_0, \mu)$	Case'in Kesikli Özfonksiyonları
$\phi(v, \mu)$	Case'in Sürekli Özfonksiyonları
N_0	Kesikli Özfonksiyonlar İçin Normalizasyon Koşulu
$N(v)$	Sürekli Özfonksiyonlar İçin Normalizasyon Koşulu
$f(\mu, \mu')$	Saçılma Fonksiyonu
f_1	Anizotropi Parametresi
A^*	Albedo Katsayısı
B^*	Geçme Katsayısı
ρ_{asimp}	Asimptotik Nötron Yoğunluğu
z_0	Extrapolasyon Uzaklığı
$I_\nu(s, \hat{\Omega}, t)$	Radyasyon yoğunluğu
W_ν	Birim hacim, katı açı ve frekans başına kazanılan radiative enerji
κ_ν	Spektral soğurma katsayısı
σ_ν	Spektral saçılma katsayısı
$\beta_\nu(s)$	Spektral yok olma katsayısı
ω_ν	Spektral albedo

ε	Emisyon katsayısı
ρ^s	Specular yansıtma katsayısı
ρ^d	Diffuse yansıtma katsayısı
$S_v(s)$	Kaynak terimi
β	Anizotropi parametresi
$q(\tau)$	Net radyasyon akısı
$Q_1(\tau)$	Boyutsuz fonksiyon
σ	Boltzmann sabiti

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 Sonlu ortam problemi.....	13
Şekil 4.2 Placzek lemması yardımıyla sonlu ortam probleminin sonsuz ortam..... problemine dönüştürülmesi.....	14
Şekil 9.1 Radiative transfer denkleminin türetilmesinde kullanılan hacim elemanı.....	74
Şekil 9.2 $c=0.5$ için anizotropi parametresinin $Q_1(\tau)$ ısı akısı fonksiyonu üzerine..... etkisi.....	87

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 8.1 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=0$, $c=0.1$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	37
Çizelge 8.2 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=0$, $c=0.5$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	38
Çizelge 8.3 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=0$, $c=0.8$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	39
Çizelge 8.4 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=1$, $c=0.1$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	40
Çizelge 8.5 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=1$, $c=0.5$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	41
Çizelge 8.6 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=1$, $c=0.8$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	42
Çizelge 8.7 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=3$, $c=0.1$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	43
Çizelge 8.8 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=3$, $c=0.5$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	44
Çizelge 8.9 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=3$, $c=0.8$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	45
Çizelge 8.10 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=5$, $c=0.1$ için.....	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	46
Çizelge 8.11 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda $\beta=5$, $c=0.5$ için	
yansımaya ve geçiş katsayıları.....	47
Çizelge 8.12 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=5$, $c=0.8$ için	
yansımaya ve geçiş Katsayıları.....	48
Çizelge 8.13 $\beta=0$, $\tau=1$, $f_1=0$, $c=0.8$ için yansımaya katsayısı.....	49
Çizelge 8.14 $\beta=0$, $\tau=1$, $f_1=0$, $c=0.8$ için geçiş katsayısı.....	49
Çizelge 8.15 $\beta=0$, $c=0.8$ yansımaya ve geçiş katsayıları	49
Çizelge 8.16 $\beta=0$, $\tau=1$, $f_1=0.5$, $c=0.8$ için yansımaya katsayıları	49

1. GİRİŞ

Geçmişte ve günümüzde en önemli yaşam gereklerinden biri enerjidir. Dünya üzerindeki nüfusun artması, doğal enerji kaynaklarının çevre üzerindeki olumsuz etkileri ve tükenme noktasına gelme durumu, ayrıca gelecek nesillere enerji konusunda sıkıntı yaşatmama kaygıları bilim adamlarını farklı kaynaklar üzerinde araştırma yapmaya itmiştir. 20. yüzyılda fosil yakıtların en önemli enerji kaynağı olduğu bilinmektedir. 20 yüzyılda, bu kaynağa alternatif olarak hidrolik, termik ve nükleer santraller de kutularak enerji ihtiyacı karşılanmıştır. Hem fosil yakıtların hızla tüketilmesinin önlenmesi hem de fosil yakıtların atıklarının çevre üzerindeki zararlı etkilerinin azaltılması açısından 20. yüzyılda kullanılan bu alternatif enerji kaynakları yaşamımızda önemli bir yere sahiptir. Ülkelerin dünya üzerindeki coğrafi konumları ve fosil yakıtların yeryüzünde homojen bir şekilde dağılmaması nükleer enerji santrallerinin kurulmasını cazip hale getirmiştir.

Nükleer enerji santrallerinde nükleer reaktör içerisinde fisyon reaksiyonları sonucunda enerji elde edilmektedir. Fisyon reaksiyonun gerçekleşmesi için ise radyoaktif elementlere ihtiyaç vardır. Uranyum, Toryum ve Plutonyum gibi radyoaktif elementler reaktörde yakıt olarak kullanılmaktadır. Bu elementlerden yapılan yakıt çubukları reaktörün kor kısmına yerleştirilir ve üzerine nötron gönderilerek yakıt çekirdeklerin daha kararlı iki çekirdeğe bölünmesi sağlanır ve ortaya gama ışını, elektron, nötrino, nötron parçacıkları yolu ile enerji çıkar. Bu enerji ise reaktörde çeşitli yöntemler yardımıyla depolanabilir elektrik enerjisine dönüştürülür. Böyle bir reaksiyon sonucu ortaya çıkan enerji 200 Mev civarındır. 1 g lık Uranyum-235' in fisyonu sonucunda reaktörden elde edilecek nükleer enerji 2 ton benzinden veya 3 ton kömürden elde edilecek enerjiye denktir. Enerji üretimi açısından daha kullanışlı bir yöntem gibi görünen nükleer enerji santralleri çok ciddi önlemlerin alınması koşulu ile çevreye de zarar vermemektedir. Reaktörün zırhllanması ve nükleer atıkların izolasyonu konusu oldukça önemlidir. Ülkemizde henüz nükleer enerji santrali kurulmasa da dünyanın birçok gelişmiş ülkesi enerji ihtiyacının büyük bir kısmını nükleer santrallerinden sağlamaktadır.

Nükleer reaksiyonu gerçekleştirebilmek için nötron kaynağına ihtiyaç vardır. Nötron kaynağı olarak Alfa-Berilyum kaynağı, fotonötron kaynağı ve hızlandırıcı tabanlı nötron kaynakları nötron üretmek için temel yöntemlerdir. Reaktör içinde fisyon olayının başlamasıyla birlikte fisyon olayının kendisinde bir nötron kaynağı olarak görülebilir. Zincirleme fisyon olayı sonucunda reaksiyon başına ortalama 2.5 nötron ortaya çıkmaktadır.

Reaktör içerisinde fisyon reaksiyonları sonucu oluşan nötronların sayısının, reaktörün verimli ve güvenli bir şekilde çalışması için belirli bir değerde tutulması gerekir. Reaktörde üretilen nötron sayısı bir bölünme dizisinden diğerine sabit kalıyorsa reaktör kritik durumdadır denir. Nötron sayısı ardışık reaksiyonlar sonucunda azalıyorsa kritikaltı, artıyorsa reaktör kritiküstü olur ve reaktörün kalbi eriyerek tehlikeli bir şekilde radyasyon yayılmasına yol açar. Reaktör içerisinde nötron sayısını belli bir değerde tutmak için nötron tutucu Kadmiyum ve Gadolinyum kontrol çubukları kullanılmaktadır.

Ele alınan ortam içerisindeki parçacıkların hareketlerinin matematiksel tanımlanmasında “transport teori” kullanılır. Göz önüne alınan ortam reaktör ise transport teori, nötronların, reaktörün yakıtı olan Uranyum elementi boyunca difüzyonunu inceler. Reaktörde gerçekleşen bu olay “Nötron transport teori” adı altında incelenir. Işığı oluşturan fotonların atmosferden difüzyonu başka bir örnek olarak gösterilebilir. Bu durumda olay “radiative transfer” adını alır. Ele alınan bir ortamdaki gaz moleküllerini hareketleride yine transport teori ile incelenebilir. Verilen örneklerin tümü matematiksel olarak taransport teori başlığı altında modellenmektedir. Transport teori, parçacık transportunun, çevremizdeki birçok olayda görülen vazgeçilmez bir süreç olmasından dolayı, fizik ve mühendislikte oldukça önemli bir konu haline gelmiştir. Öncelikle gezegen veya uydu atmosferlerindeki ışımsal enerji transportu incelenmeye başlamıştır ve daha sonra nükleer sistemlerdeki nötron ve gama ışını transportu incelenmiştir. Günümüzde bu olayların yanı sıra gazların kinetik toerisi ve plazma fiziğindeki transport problemlerini matematiksel modellemede transport teori kullanılmaktadır.

Görüldüğü gibi transport olayı "nötron, foton, gaz molekülü, ion, fonon, elektron" değişik parçacık tiplerini ve ya dalgaları da içermektedir. Bütün bu parçacıkların hepsine ve problemin türüne göre transport toerideki matematiksel modelleme farklı zorluk seviyeleri içerir. Hem problemin matematiksel çözülebilirliği hemde fizikselliği ayrı ayrı önemlidir. Bu yüzden ele alınan problemler, çok fazla fiziksellikten uzaklaşılmadan çeşitli kabullenimler ve yaklaşıklıklar altında basitleştirilerek ele alınır. Bu çalışmada ise Nötron Transport teori ve radiative transfer problemleri incelenecektir.

Reaktör içerisinde fisyon reaksiyonları sonucu oluşan nötronların sayısının, reaktörün verimli ve güvenli bir şekilde çalışması için belirli bir değerde tutulması gerekir. Reaktörde üretilen nötron sayısı bir bölünme dizisinden diğerine sabit kalıyorsa reaktör kritik durumdadır denir. Nötron sayısı ardışık reaksiyonlar sonucunda azalıyorsa kritikaltı, artıyorsa reaktör kritiküstü olur ve reaktörün kalbi eriyerek tehlikeli bir şekilde radyasyon yayılmasına yol açar. Reaktör içerisinde nötron sayısını belli bir değerde tutmak için nötron tutucu kontrol çubukları kullanılmaktadır.

Reaktör içerisindeki açısal nötron akısı hesaplanırken nötron transport denklemi ortamın özellikleri göz önünde bulundurularak çözülür. 3 Tip nötron transport denklemi vardır. 1. tip nötron transport denklemi integro-differansiyel Boltzmann denklemi olarak da adlandırılır. 1. tip transport denklemi Case, H_N , P_L , F_N , $S_N...$ gibi yöntemlerle çözülebilir. Elde edilen çözüm ortamın herhangi bir noktasındaki açısal nötron yoğunluğunu verir. Bu yöntemlerden Case yöntemi temel bir yöntem olup tamamen analitik bir yöntemdir. 2. tip nötron transport denklemi ise Varyasyon yöntem ile çözülür. 3. tip transport denklemi ise Fredholm denklemleri olarak da bilinir. Bu denklem C_N yöntemi ile çözülür ele alınan ortamın yüzeyindeki (sınırlarda) çözümü verir.

Bu denklemlerin çözümünde uygulanan Case yöntemi tamamen analitik ve zor matematiksel hesaplara sahip olduğundan yarı-analitik yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemler uygulanabilirlik bakımından problemin cinsine ve geometrisine göre farklılıklar göstermektedir. Yöntemler arasındaki uygulanabilirlik ve erken yakınsama dereceleri, yöntem seçiminde en önemli etkenlerdir. Dolayısıyla en erken yakınsayan,

kolay analitik işlemlere sahip, farklı geometrilerde ve sınır şartlarındaki problemlere kolayca uyarlanabilen yöntem en kullanışlı olanıdır denebilir.

Nötron transport teorisinde incelenen temel problemler “albedo, kritiklik slab albedo ve milne” problemleridir. Albedo problemi bir yarı uzay problemidir. Ortama bir nötron demeti gönderilir ve ortamdan çıkan nötronların ortama girenlere oranı olan “albedo” katsayısını bulmaya dayanır. Kritiklik problemi ise fiziksel olarak reaktörde üretilen ikincil nötronların sayısı ile reaktörün boyutları arasındaki ne tür bir ilişki olduğunu ortaya koyar. Slab albedo ise albedo problemine benzer bir problemdir fakat ele alınan ortam artık yarı uzay değildir. Ortamın belli bir kalınlığı vardır. Yansıma ve geçme katsayı adında iki parametre hesaplanır. Milne problemi ise temelde bir astrofizik problemi olup yine bir yarı uzay problemidir. Bu problemde extrapolasyon uzaklığı adında ve sonsuzdaki kaynaktan dolayı oluşan nötron akısının sıfır olduğu noktanın, ortam sınırına olan uzaklığı olarak tanımlı parametre hesaplanmaktadır.

Bu çalışmada 2. bölümde, bahsedilen temel problemler çözülmeden önce, 1. tip nötron transport denklemi elde edilmiştir. Transport denkleminin integro-diferansiyel formu ele alınan ortamın içerisindeki nötron dağılımına dikkate alınarak elde edilmiştir. 3. bölümde ise öncelikle Case yöntemi incelenmiştir. Case yöntemi nötron transport denkleminde uygulanmıştır ve diğer yöntemlerde de oldukça sık kullanılan singüler özfonksiyonlar, izotropik saçılma durumu için elde edilmiştir. 4. bölümde F_N yöntemi ele alınmıştır ve Placzek lemması yardımı ile F_N denklemleri elde edilmiştir. 5. bölüm C_N yönteminin incelendiği ve yine Placzek lemması ile C_N denklemlerinin yazıldığı bölümdür. 6. bölümde C_N denklemleri kullanılarak Singüler özfonksiyonlar yöntemi açıklanmıştır. 7. bölümde grubumuz tarafından geliştirilen H_N yöntemi ele alınıp bu yöntem sabit kaynak problemi yardımı ile anlatılmıştır. 8. bölüm uygulama bölümüdür. Bu bölümde lineer anizotropik saçılma durumu için slab-albedo ve milne problemleri sırası ile H_N ve singüler özfonksiyonlar yöntemi ile çözülmüştür ve nümerik sonuçlar çizelgeler halinde verilmiştir. Nötron transport denklemi foton için yazıldığında radiative transfer denklemi elde edilir. Radiative transfer problemleri, sınır koşulları ve ortamın ışığı saçma şekline bağlı olarak çözülür ve yine istenilen bölgede radyasyon yoğunluğu elde edilir. 9. bölümde transport radiative transfer denklemi elde edilmiştir.

ve sırası ile P_L ve H_N yöntemleri radiative transfer problemine uygulanmıştır. Son olarak 10. bölümde elde edilen analitik ve nümerik sonuçların fiziksel yorumlanması ve yöntemlerin karşılaştırılması yapılmıştır

2. NÖTRON TRANSPORT DENKLEMİ

2. 1 Tanımlar

Faz uzayında ele alınacak küçük bir hacim elemanı içerisindeki nötron sayısı değişimi baz alınarak nötron transport denklemi türetilebilir. Ortamda çarpışmalar, soğrulmalar ve nötron üreten kaynaklar olabilir. Nötron-nötron çarpışmaları, tesir kesitleri göz önüne alındığında nötron-çekirdek çarpışmaları yanında ihmal edilebilir. Çekirdek durgun düşünülür ve nötron belli bir hızı ve konumu olan noktasal bir parçaçacık gibi ele alınır. Ayrıca nötron sayısının, belli bir ortalama değer etrafında ihmal edilebilecek kadar az değiştiği düşünülerek ortam bir ideal gaza benzetilebilir. Ele alınan hacim elemanı içerisindeki nötron sayısının zamana göre değişimi ortamdan dışarı çıkan nötron sayısı, ortama giren nötron sayısı ve ortamda üretilen nötron sayısı dikkate alınarak hesaplanabilir.

$\vec{r}$: nötronların konumunu,

$\vec{v}$: nötronların hızı,

t : zamanı göstermek üzere

$\psi(\vec{r}, \vec{v}, t)$: nötronların açısal dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Nötron transport denklemi türetilmeden önce bazı tanımlar yapılmalıdır (Case *et al.* 1953, 1967, Davison 1958).

Tanım 1 : $\psi(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v$ ifadesi t zamanında konumu $\vec{r}$ ile $\vec{r} + d\vec{r}$ arasında hızları $\vec{v}$ ile $\vec{v} + d\vec{v}$ arasında değişen nötronların beklenen sayısını vermektedir.

Tanım 2 : $\vec{\Omega} = \frac{\vec{v}}{v}$ ifadesi, $\vec{v}$ nötronların hız vektörü olmak üzere, nötronların hızları yönündeki birim vektörü göstermektedir.

Tanım 3 : $\vec{j}(\vec{r}, \vec{v}, t) = \vec{v} \psi(\vec{r}, \vec{v}, t)$ ifadesi $\vec{v}$ hızına sahip nötron yoğunluğudur. Bu durumda

$\vec{j}(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot \vec{n} ds d^3v dt$ ifadesi dt zaman aralığında hızları $\vec{v}$ ile $\vec{v} + d\vec{v}$ arasında olan ve ds yüzey elemanından $\vec{n}$ birim vektörü yönünde geçen nötronların sayısıdır.

Tanım 4 : $\vec{r}$ konumundaki hızı $\vec{v}$ olan bir nötron için ortalama serbest yol $l(\vec{r}, \vec{v})$

olsun. $\frac{\vec{v}}{l(\vec{r}, \vec{v})}$ ifadesi nötron için saniyedeki çarpışma sayısıdır. Bundan dolayı

$\frac{\vec{v}}{l(\vec{r}, \vec{v})} \psi(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r d^3v$ ifadesi konumu $\vec{r}$ ile $\vec{r} + d\vec{r}$ arasında hızları $\vec{v}$ ile $\vec{v} + d\vec{v}$ arasında olan nötronlar için saniyedeki çarpışma sayısıdır.

S yüzeyi ile sınırlandırılmış kapalı bir V hacmi içerisinde konumu $\vec{r}$ olan ve hızı $d^3\vec{v}$ hız uzayında $\vec{v}$ civarında olan nötronların sayısının dt zamanındaki dN değişimi (Case and Zwiefel 1967, Bell and Glastone 1970)

$$dN = d^3v dt \int_V \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} d^3r \quad (2. 1)$$

ile verilir. V hacmine giren ve bu hacimden çıkan nötron sayıları da matematiksel olarak ifade edilmelidir.

- $dN =$ - (a) S yüzeyinden dt zamanında dışarı çıkan nötron sayısı
- (b) V hacmi içerisinde dt zamanında mümkün olan çarpışma sayısı
+ (c) V hacmi içerisinde üretilen ikincil nötron sayısı
+ (d) Kaynaklar tarafından V hacmi içerisinde dt zamanında üretilen nötron sayısı

Bu terimlerin herbirinin matematiksel ifadesi yazılabilir.

$$(a) = d^3v dt \int_S \vec{j}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{t}) \cdot \vec{n}_0 dS \quad (2. 2)$$

$\vec{j}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{t})$ açısıl akım yoğunluğu, $\vec{n}_0$ dS yüzeyinin normali yönündeki birim vektördür. Üsteki yüzey integrali Gauss yasası kullanılarak hacim integraline dönüştürülür.

$$(a) = d^3v dt \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{r}, \vec{v}, \vec{t}) d^3r \quad (2. 3)$$

$$(b) = d^3v dt \int_V \frac{v \psi(\vec{r}, \vec{v}, \vec{t})}{l(\vec{r}, \vec{v})} d^3r \quad (2. 4)$$

$l(\vec{r}, \vec{v})$ nötronlar için ortalama serbest yol olmak üzere, $\sigma(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{1}{l(\vec{r}, \vec{v})}$ makroskobik tesir kesitini ifade eder.

$$(c) = d^3v dt \int_V v' \psi(\vec{r}, \vec{v}', t) \sigma(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}, \vec{r}) d^3r \quad (2.5)$$

Burada $v' \psi(\vec{r}, \vec{v}', t) \sigma(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}, \vec{r}) d^3r$ ifadesi, t' zamanında d^3v' 'de, v' hızına sahip nötronların, çarpışma sonunda t civarında dt zamanında, d^3r 'de, r konumunda, d^3v 'de, v hızında olma olasılığıdır.

$$(d) = d^3v dt \int s(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3r \quad (2.6)$$

terimi ise kaynak terimidir.

2.2 Transport Denkleminin Yazılması

Elde edilen bu matematiksel ifadeler denklem 2.1'de yazılırsa nötron transport denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{v}', t)}{\partial t} &= -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, \vec{v}', t) - v \sigma(\vec{r}, \vec{v}) \psi(\vec{r}, \vec{v}, t) \\ &+ s(\vec{r}, \vec{v}, t) + \int \psi(\vec{r}, \vec{v}', t) \sigma(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}, \vec{r}) d^3\vec{v}' \end{aligned} \quad (2.7)$$

2.7 denkleminde her bir nötronun hızı farklıdır. Reaktör içerisinde fisyon reaksiyonu ile oluşacak nötronlar tek hızlı düşünülürse

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} &= -v \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) - v \sigma(\vec{r}, \vec{v}) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) \\ &+ s(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) + v \sigma(\vec{r}, \vec{v}) c(\vec{r}, v) \int \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) f(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}, \vec{r}, v) d\vec{\Omega}' \end{aligned} \quad (2.8)$$

denklemine ulaşılır. Bu denklem İntegro-Diferansiyel Boltzmann denklemi (1. tip transport denklemi) olarak isimlendirilir. Burada $f(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}, \vec{r}, v)$, $\vec{r}$ noktasında v hızıyla $\vec{\Omega}'$ doğrultusunda gelen bir nötronun ortamdaki çekirdeklerden biri ile çarpıştıktan sonra $\vec{\Omega}$ doğrultusunda saçılma olasılığıdır. Bundan sonraki bölümlerde analitik ve yarı analitik yöntemler incelenecek ve çeşitli reaktör problemlerine uygulamalar yapılacaktır.

3. CASE YÖNTEMİ

3.1 Yöntemin Nötron Transport Denklemine Uygulanması

1960'lı yıllarda geliştirilen bu yöntem elamanter çözüm yöntemi olarak da adlandırılır. Düzlem geometride, tek hızlı nötronlar için, saçılmaların izotropik olduğu, kaynakların olmadığı durumda zamandan bağımsız transport denklemi aşağıdaki gibidir (Case and Zweifel 1967).

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x, \mu') d\mu' \quad (3.1)$$

Burada μ tek hızlı nötronların x eksenine ile yaptıkları açının kosünüsü, $\psi(x, \mu)$ ise açısal nötron dağılım fonksiyonudur. Denklem homojen olduğundan değişkenlerine ayırma metodu kullanılır.

$$\psi(x, \mu) = X(x)\phi(\mu) \quad (3.2)$$

Bu çözüm denklem 3.1' de yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$X(x) = e^{-\frac{x}{\mu}} \quad (3.3)$$

$$\phi(\nu, \mu) = \frac{c\nu}{2} \frac{1}{\nu - \mu} \quad (3.4)$$

bulunur. Normalizasyon koşulu

$$\int_{-1}^{+1} \phi(\nu, \mu') d\mu' = 1 \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda bulunan çözümün bu normalizasyon koşulunu sağlaması gereklidir. $\phi(\nu, \mu')$ yerine yazılırsa

$$\Lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\nu - \mu} = 1 - c\nu \tanh^{-1} \frac{1}{\nu} \quad (3.6)$$

şeklindeki dağınım fonksiyonu elde edilir. $\Lambda(\nu) = 0$ denkleminin çözümü bizi özdeğerlere götürecektir. μ daima $-1 \leq \mu \leq 1$ aralığında değer aldığından, $\nu \in [-1, +1]$ olması durumunda integralde singülerlik olduğundan çözüm iki ayrı bölgede incelenmelidir.

3.2 Kesikli ve Sürekli Çözümler

a) $\nu \notin [-1, +1]$ olması durumunda;

$$cy = \tanh y \quad (3.7)$$

elde edilir. Bu denklemde ise c nin durumuna bakılarak çözüm aranır. $c > 1$ ise $\Lambda(\nu)$ 'nün reel kökü olmadığı görülür. Kökler imajinerdir, $c < 1$ olması durumunda $\Lambda(\nu)$ 'nün $\nu = \pm \nu_0$ değerli iki kökü olacaktır. Bu özdeğerlere karşı gelen özfunksiyonlar

$$\phi(\mp \nu_0, \mu) = \frac{c\nu_0}{2} \frac{1}{\mp \nu_0 - \mu} \quad (3.8)$$

gibidir. $c > 1$ olması durumunda $\Lambda(\nu)$ 'nün $\nu = \pm i\nu_0$ gibi iki imajiner kökü vardır.

b) $\nu \in [-1, +1]$ olması durumunda çözümler sürekli dir.

$$\phi(\nu, \mu) = \frac{c\nu}{2} P \frac{1}{\nu - \mu} + \lambda(\nu) \delta(\nu - \mu) \quad (3.9)$$

P Prensip değeri göstermektedir. $\lambda(\nu)$ ise keyfi bir fonksiyondur. Üstteki denklem, denklem 3.5'deki normalizasyon koşulunu sağlamalıdır . Bu durumda

$$\lambda(\nu) = 1 - \frac{c\nu}{2} \ln \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \right\} = 1 - \tanh^{-1}(\nu) \quad (3.10)$$

bulunur. Genel çözüm kesikli ve sürekli çözümlerin lineer kombinasyonu olarak yazılır.

$$\psi(\mu) = a_{0+} \phi(\nu_0, \mu) + a_{0-} \phi(-\nu_0, \mu) + \int_{-1}^1 \phi(\nu, \mu) d\nu \quad (3.11)$$

Genel çözümde, a_{0+}, a_{0-} ve $A(\nu)$ lineer açılım katsayılarıdır. Bu katsayılar problemin sınır şartları ve özfonksiyonların diklik bağıntıları yardımı ile bulunur. Buradaki kesikli ve sürekli özfonksiyonlar birbirlerine diktir. Sonraki bölümlerde bu bağıntılardan faydalanılacaktır.

$$\int_{-1}^{+1} \mu \phi^2(\pm \nu_0, \mu) d\mu = N(\pm \nu_0) \quad (3.12)$$

$$\int_{-1}^{+1} \mu \phi(\nu', \mu) \phi(\nu, \mu) d\mu = N(\nu) \delta(\nu - \nu') \quad (3.13)$$

$N(\pm \nu_0)$ ve $N(\nu)$ normalizasyon katsayılarıdır.

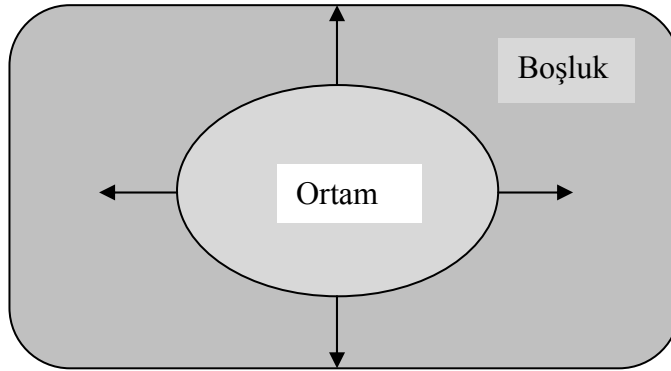
4. C_N YÖNTEMİ

C_N yöntemi (Benoist and Kavenoky 1968), belli bir yüzey ile sınırlanmış yani sonlu bir ortamda açısai nötron akısını hesaplamakta kullanılır. Bu yapılırken Placzek Lemmasından faydalanılır (Case *et al.* 1972).

4.1 Yöntemin Nötron Transport Denklemine Uygulanması

C_N yöntemi III. Tip nötron transport denklemi için geliştirilen bir çözüm yöntemidir. Placzek lemması genel problemi iki problem şeklinde inceler.

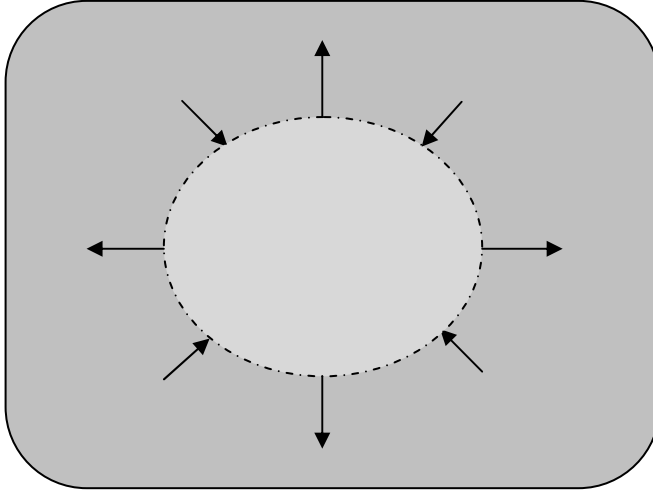
Problem 1: S yüzeyi ile sınırlanmış, dışı boşluk olan ve dışarıdan içeriye nötron akışı olmayan bir ortam ele alınsın.



Şekil 4.1 Sonlu ortam problemi

Şekil 4.1 ile gösterilen Problem 1'deki sonlu ortam problemi, Şekil 4.2 ile gösterilen şekilde Placzek lemması ile sonsuz ortam problemine dönüştürüldüğünde, S yüzeyine dışarıdan ortamın içine doğru nötron akışı olacaktır.

Problem 2: Problem 1'deki sınır şartının sağlanması için S yüzeyinden ortamın içine giren net nötron akısının sıfır olması gerekmektedir. Bunu sağlamak için S yüzeyine, ortamdaki doğru nötron yayan ve şiddeti $\vec{\Omega} \cdot \hat{n} \nu(\vec{r}_s, \vec{\Omega})$ olan bir kaynak konulur.



Şekil 4.2 Placzek lemması yardımıyla sonlu ortam probleminin sonsuz ortam problemine dönüştürülmesi.

Problem 2’de r noktasında, $\vec{\Omega}$ doğrultusunda $v(\vec{r}, \vec{\Omega})$ çözümü;

$$\begin{aligned}
 v(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= \int_M d\vec{r}' \int_{4\pi} s(\vec{r}', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \\
 &+ \int_S dS \int_{2\pi^+} v^+(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}' \\
 &+ \int_S dS \int_{2\pi^-} v^-(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}'
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. $2\pi^+$ ve $2\pi^-$ sırasıyla, $\vec{\Omega} \cdot \hat{n} \geq 0$ ve $\vec{\Omega} \cdot \hat{n} \leq 0$, durumlarını göstermektedir. Bu durumda yüzeye içerden ve dışardan yaklaşıldığında çözüm

$$\begin{aligned}
 v^+(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= \int_M d\vec{r}' \int_{4\pi} s(\vec{r}', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \\
 &+ \int_S dS \int_{2\pi^+} v^+(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}' \\
 &+ \int_S dS \int_{2\pi^-} v^-(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}'
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

şeklindedir. Burada $\vec{\Omega} \in 2\pi^+$ dır. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 v^-(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= \int_M d\vec{r}' \int_{4\pi} s(\vec{r}', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \\
 &+ \int_S dS \int_{2\pi^+} v^+(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}' \\
 &+ \int_S dS \int_{2\pi^-} v^-(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}'
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

olur. Burada ise $\vec{\Omega} \in 2\pi^-$ dir. Bu denklemler Fourier dönüşümü ile elde edilen Green fonksiyonu kullanılarak çözüldüğünde açısal nötron dağılımı bulunur. Düzlem geometrideki yarı uzay problemi için kaynakların olmadığı ortam için 4.2 ve 4.3 denklemleri tekrar yazıldığında

$$0 = \int_0^1 \nu^+(\mu') \tilde{G}(\mu, \mu') \mu' d\mu' + \int_{-1}^0 \nu^-(\mu') \tilde{G}(\mu, \mu') \mu' d\mu' \quad \mu \geq 0, \quad (4.4)$$

$$\nu^-(\mu) = \int_0^1 \nu^+(\mu') \tilde{G}(\mu, \mu') \mu' d\mu' + \int_{-1}^0 \nu^-(\mu') \tilde{G}(\mu, \mu') \mu' d\mu' \quad \mu < 0, \quad (4.5)$$

elde edilir. Bundan sonra, gerekli olan başlangıç sınır şartları seçilerek problem çözülür.

$$\nu^+(\mu) = \nu^+ \quad (4.6)$$

$$\nu^-(\mu) = \sum_{l=0}^N \nu_l^- \mu^l \quad (4.7)$$

gibi alınmıştır. Analitik işlemleri oldukça zor olan bu yöntemle Albedo, Milne ve Kritiklik problemleri çözülmüştür (Kavenoky 1978). Ayrıca ele alınan problemin çözümü için sonsuz ortam Green fonksiyonun da bilinmesi gereklidir.

4.2 Sonsuz Ortam Green Fonksiyonu

Burada kullanılan $\tilde{G}(\mu, \mu')$ sonsuz ortam Green fonksiyonudur. $x = 0$ da (sınırdaki) çözüm aradığımız için $\tilde{G}(\mu, \mu')$ nın tanımı

$$\tilde{G}(0, \mu; 0, \mu') = G(0, \mu; 0, \mu') + G_{ff}(0, \mu; 0, \mu') \quad (4.8)$$

gibidir. Eşitliğin sağındaki ilk terim birden fazla çarpışma yapan nötronları, ikinci terim ise ilk çarpışmasını yapan nötronları gösterir.

$$G_{ff}(0, \mu; 0, \mu') = \frac{1}{\mu} \delta(\mu - \mu') \quad (4.9)$$

Fourier dönüşümü ile elde edilen Green fonksiyonu ;

$$G(0, \mu; 0, \mu') = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx} dk}{(1 - ik\mu)(1 - ik\mu')(1 - \frac{c \arctan k}{k})} \quad (4.10)$$

şeklindedir. Bu fonksiyon denklem 4.2 ve 4.3'de kullanılarak ele alınan problem için çözüme ulaşılabilir.

5. F_N YÖNTEMİ

F_N yöntemi (Grandjean and Siewert 1979, Siewert and Benoist 1979) ile nötron transport denklemi çözülürken bir önceki bölümde kullanılan Placzek lemmasına bağlı olarak benzer şekilde sonlu ortam problemi sonsuz ortam problemine dönüştürülür. Elde edilen denklemlerin çözümünde Case'in özfonksiyonları cinsinden yazılan sonsuz ortam Green fonksiyonu kullanılır. Bu yöntemin çözüm yöntemi olarak diğer yöntemlerden en büyük farkı ise kök seçimindeki yoldur. Yöntemin analitik ifadeleri C_N yöntemine göre oldukça kolaydır fakat geç yakınsamaktadır.

5.1 Yöntemin Nötron Transport Denkleminin Uygulanması

Placzek Lemması'na göre sonlu ortam problemi için genel çözüm $\psi(\vec{r}, \vec{\Omega})$ olsun. Bu durumda

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{c}{4\pi} \int_{\Omega'} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + S(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (5.1)$$

yazılır. Sonsuz ortam problemi için ise genel çözüm $\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega})$ olsun. Bu durumda ise çözüm

$$\begin{aligned} \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= \frac{c}{4\pi} \int_{\Omega'} \psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' + S(\vec{r}, \vec{\Omega}) H(\vec{r}) \\ &+ \vec{\Omega} \cdot \hat{n} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned} \quad (5.2)$$

şeklinde verilir. $S(\vec{r}, \vec{\Omega}) H(\vec{r})$ terimi ortam içindeki kaynakları gösteren terim olup, $H(\vec{r})$ basamak fonksiyonudur.

$$H(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \text{ortamın içinde} \\ 0 & \text{ortamın dışında} \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\psi_1(\vec{r}, \vec{\Omega}) = H(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \quad (5.4)$$

ile tanımlıdır. Ayrıca denklem 5.2'deki $\vec{\Omega} \cdot \hat{n} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \delta(\vec{r} - \vec{r}')$ terimi ortama girecek nötronları yok edecek yönde sınıra yerleştirilen kaynağı ifade eder.

Yarı uzay problemi için;

1. Problem;

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x, \mu') d\mu' + S \quad (5.5)$$

2. Problem;

$$\mu \frac{\partial \psi_1(x, \mu)}{\partial x} + \psi_1(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \psi_1(x, \mu') d\mu' + S(x, \mu)H(x) + \mu \psi(0, \mu) \delta(x) \quad (5.6)$$

çözümleri yazılır.

5.2 Problemin Genel Çözümü

Bu durumda sınırın $x=0$ da olduğu anlaşılmaktadır.

$G(x_0 \rightarrow x; \mu_0 \rightarrow \mu)$ sonsuz ortam Green fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned} \psi_1(x, \mu) = & \int_{-1}^{+1} d\mu_0 \left\{ \int_0^{\infty} dx_0 G(x_0 \rightarrow x; \mu_0 \rightarrow \mu) H(x_0) S(x_0, \mu_0) \right. \\ & \left. + G(x_0 \rightarrow x; \mu_0 \rightarrow \mu) \mu_0 \psi(0, \mu_0) \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Bu durumda $x \geq 0$ için çözüm,

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu) = & \int_{-1}^{+1} d\mu_0 \left\{ \int_0^{\infty} dx_0 G(x_0 \rightarrow x; \mu_0 \rightarrow \mu) S(x_0, \mu_0) \right. \\ & \left. + G(0 \rightarrow x; \mu_0 \rightarrow \mu) \mu_0 \psi(0, \mu_0) \right\} \end{aligned} \quad (5.8)$$

şeklindedir. Bu yöntemde kullanılan Green fonksiyonları formu Case'in özfonksiyonları cinsinden yazılır.

$$G^{\mp}(x_0 \rightarrow x; \mu_0 \rightarrow \mu) = \mp \frac{\phi(\pm \nu_0, \mu)}{N(\mp \nu_0)} \phi(\pm \nu_0, \mu_0) e^{\frac{\mp |x-x_0|}{\nu_0}} + \int_0^1 \frac{\phi(\pm \nu, \mu)}{N(\mp \nu)} \phi(\pm \nu, \mu_0) e^{\frac{\mp |x-x_0|}{\nu}} d\nu \quad (5.9)$$

Denklem 5.9'da (+) işareti $x > x_0$ durumunu ve (-) işareti $x < x_0$ durumunu gösterir.

İncelenen probleme göre yazılan sınır koşulu kullanılarak denklem 5.8'deki çözümde

$$\psi(0, \mu) = f(\mu), \quad \mu > 0 \quad (5.9)$$

gibi alınırsa

$$\begin{aligned} f(\mu) &= S(\mu) + \int_0^1 G(0 \rightarrow 0^+; -\mu') \mu' \psi(0, \mu') d\mu' \\ &\quad - \int_0^1 G(0 \rightarrow 0^+; -\mu') \mu' \psi(0, -\mu') d\mu' \quad \mu > 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$\psi(0, -\mu) = \sum_{l=0}^N \alpha_l \mu^l, \quad \mu > 0 \quad (5.11)$$

formunda seçilir ve yerine yazılırsa ve denklem 5.8'den elde edilen ifadenin her iki tarafı μ^β ile çarpılarak α_l katsayılarının hesaplanması için bir denklem elde edilir.

Bu yöntem için kök seçimi de diğer yöntemlere göre farklı bir şekildedir. F_N yönteminde N yaklışıklık mertebesine bağlı olarak kökler seçilirken ilk kök ν_0 , ikinci kök 0, üçüncü kök 1 ve kalan diğer kökler (0,1) aralığının eşit parçalara bölünmesi ile belirlenir.

6. SİNGÜLER ÖZFONKSİYONLAR YÖNTEMİ

Bu yöntem bundan önce incelenen yöntemlerin bir karışımı olarak düşünülebilir. Bu yöntemle, nötron transport teoride çeşitli problemler incelenmiştir (Tezcan et. al 1996, Erdoğan *et al.* 1996, Kaşkaş *et al.* 1996, 1998, Güleçyüz *et al.* 1997). C_N yöntemine benzer şekilde 3. Tip nötron transport denklemi kullanılır.

$$\begin{aligned} \nu^+(\vec{r}, \vec{\Omega}) = & \int_M d\vec{r}' \int_{4\pi} s(\vec{r}', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \\ & + \int_S dS \int_{2\pi^+} \nu^+(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}' \\ & + \int_S dS \int_{2\pi^+} \nu^-(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}' \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} \nu^-(\vec{r}, \vec{\Omega}) = & \int_M d\vec{r}' \int_{4\pi} s(\vec{r}', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') d\vec{\Omega}' \\ & + \int_S dS \int_{2\pi^+} \nu^+(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}' \\ & + \int_S dS \int_{2\pi^-} \nu^-(\vec{r}_s', \vec{\Omega}') \tilde{G}(\vec{r}, \vec{\Omega}, \vec{r}', \vec{\Omega}') \vec{\Omega}' \cdot \hat{n} d\vec{\Omega}' \end{aligned} \quad (6.2)$$

Denklem 6.1 ve 6.2, ele alınan ortamın yüzeyine sırası ile içerden ve dışarıdan yaklaşıldığındaki çözüm ifadeleridir. Bu yöntemin, C_N yönteminden en büyük farkı ise kullanılan Green fonksiyonunun şeklidir. Burada denklem 5.9 ile verilen Case'in özfonksiyonları cinsinden yazılan sonsuz ortam Green fonksiyonları kullanılır. Green fonksiyonunun bu formu sayesinde C_N denklemlerinin analitik ifadeleri hem daha sade bir hal alır hemde nümerik olarak C_N yöntemiyle eşdeğer sonuçlar elde edilir. İlgilinenilen problemin geometrisine ve kullanılan sınır şartlarına bağlı olarak problem çözülür. Verilen sınır koşulları yardımı ile yazılan çözümde ortamdan çıkan nötron akısı ifadesi μ 'nün kuvvetleri cinsinden seriye açılır ve elde edilen denklemin her tarafı μ^{m+1} ile çarpılarak bu seri açılımındaki bilinmeyen açılım katsayıları hesaplanır. Bu çalışma içerisinde bu yöntem ile sırası ile slab albedo ve milne problemleri incelenecektir.

7. H_N YÖNTEMİ

Bu yöntem (Hybrid), hem erken yakınsayan hem de analitik işlemleri oldukça kolay bir yöntemdir (Tezcan *et al.* 2003). H_N yöntemi iki değişik yolla uygulanmaktadır. İlki Case'in özfonksiyonları cinsinden yazılmış Green fonksiyonunun kullanılması ile, diğeri ise Case yönteminde ele alınan genel çözüm ifadesinden yola çıkılarak uygulanan olanıdır.

7.1 Case'in Özfonksiyonları İle yazılan Green Fonksiyonu'nun Kullanılması

F_N yönteminde yarı uzay problemi için Placzek lemması kullanılarak, çözümü denklem 5.7'deki gibi yazılabilir. Ortamda kaynağın olmadığı durumda integral aralığı parçalanırsa

$$\psi(0, \mu) = F(\mu) - \int_0^{+1} d\mu' G(0 \rightarrow 0^+; -\mu' \rightarrow \mu) \mu' \psi(0, -\mu') \quad (7.1)$$

denklemine ulaşılır. Burada,

$$F(\mu) = \int_0^{+1} d\mu' G(0 \rightarrow 0^+; \mu' \rightarrow \mu) \mu' \psi(0, \mu') \quad (7.2)$$

şeklindedir. Denklem 7.1, $\mu > 0$ için ortama giren akıyıyı, $\mu < 0$ için ise ortamdan çıkan akıyı ifade eder. Green fonksiyonu

$$G(0 \rightarrow 0^+; \mu' \rightarrow \mu) = \frac{\phi_{0^+}(\mu) \phi_{0^+}(\mu')}{N_{0^+}} + \int_0^1 \frac{\phi_v(\mu) \phi_v(\mu')}{N(v)} dv \quad (7.3)$$

şeklinde verilir. Bu Green fonksiyonunu denklem 7.1'de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \psi(0, \mu) = & \int_0^1 d\mu' \left(\frac{\phi_{0^+}(\mu)\phi_{0^+}(\mu')}{N_{0^+}} + \int_0^1 \frac{\phi_\nu(\mu)\phi_\nu(\mu')}{N(\nu)} d\nu \right) \mu' f(\mu') \\ & - \int_0^1 d\mu' \left(\frac{\phi_{0^+}(\mu)\phi_{0^+}(-\mu')}{N_{0^+}} + \int_0^1 \frac{\phi_\nu(\mu)\phi_\nu(-\mu')}{N(\nu)} d\nu \right) \mu' \psi(0, -\mu') \end{aligned} \quad (7.4)$$

denklemini elde edilir.

$$\psi(0, \mu) = \sum_l a_l \mu^l, \mu < 0 \quad (7.5)$$

şeklinde alınarak denklem 7.5'in her iki tarafı $\mu^{\beta+1}$ ile çarpılıp $[-1,0]$ aralığında μ üzerinden integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_l a_l (-1)^l \frac{1}{m+l+2} &= \frac{1}{N_{0^+}} \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 B_\gamma(\nu_0) A_\beta(\nu_0) \\ &+ \int_0^1 d\nu \frac{1}{N(\nu)} \left(\frac{c\nu}{2} \right)^2 B_\gamma(\nu) A_\beta(\nu) - \frac{1}{N_{0^+}} \sum_l a_l (-1)^l A_l(\nu_0) \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 A_\beta(\nu_0) \\ &- \sum_l a_l (-1)^l \int_0^1 d\nu \frac{1}{N(\nu)} \left(\frac{c\nu}{2} \right)^2 A_l(\nu) A_\beta(\nu) \end{aligned} \quad (7.6)$$

bulunur. Yukarıdaki denklemde

$$\begin{aligned} A_n(\zeta) &= \frac{2}{c\zeta} \int_0^1 \phi_{0^+}(-\mu) \mu^{n+1} d\mu \\ B_n(\zeta) &= \frac{2}{c\zeta} \int_0^1 \phi_{0^+}(\mu) \mu^{n+1} d\mu \end{aligned} \quad (7.7)$$

ile tanımlıdır. $\zeta = \nu, \nu_0$ olabilir.

$$I_{lm}^{XY} = \int_0^1 \frac{\nu^2 X_l(\nu) Y_m(\nu)}{N(\nu)} d\nu, \quad X = A, B, \quad Y = A, B \leq \quad (7.8)$$

tanımı kullanılırsa 7.6 denklemi

$$\begin{aligned}
& \sum_l a_l (-1)^l \left[\frac{1}{\beta + l + 2} + \frac{1}{N_{0^+}} \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 A_l(\nu_0) A_\beta(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{l\beta}^{AA} \right] \\
& = \left[\left(\frac{c\nu}{2} \right)^2 \frac{1}{N_{0^+}} B_\gamma(\nu_0) A_\beta(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{\gamma\beta}^{BA} \right]
\end{aligned} \tag{7.9}$$

denklemine dönüşür. Amaç denklem 7.9'deki a_l katsayılarını bulmak ve dolayısıyla genel çözüme ulaşmaktır.

7.2 Case Yönteminde elde Edilen Genel Çözümün Kullanılması

H_N yönteminin bu uygulanma şeklini sabit kaynak problemi üzerinde görmek mümkündür. Nötron transport denklemi

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') f(\mu, \mu') d\mu' \tag{7.10}$$

gibidir. Yukarıdaki denklemde $f(\mu, \mu')$ saçılma fonksiyonudur. μ doğrultusunda gelen nötronların μ' doğrultusunda saçılma olasılığını verir. İzotropik saçılma durumu için saçılma fonksiyonu $f(\mu, \mu') = 1/4\pi$ 'dir. Yarı uzay probleminin çözümünde,

$$\psi(0, \mu) = 1 - a, \quad \mu > 0 \tag{7.11}$$

sınır şartında eğer $a=0$ ise, albedo problemi, $a=1$ ise sabit kaynak problemi olur. Bu kısımda sabit kaynak problemi incelenmiştir.

Case yönteminde elde edilen genel çözüm kesikli ve sürekli olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır.

$$\psi(x, \mu) = A(\nu_0) \phi(\nu_0, \mu) e^{-\frac{x}{\nu_0}} + \int_0^1 A(\nu) \phi(\nu, \mu) e^{-\frac{x}{\nu}} d\nu + K \tag{7.12}$$

$+\infty$ 'da ıraksayan terimin alınmadığı görülmektedir. Denklem 7.12'de $K = a/(1-c)$ terimi aşağıdaki şekildedir.

$x=0$ daki çözüm yazılırsa,

$$\psi(0, \mu) = A(\nu_0) \phi(\nu_0, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \phi(\nu, \mu) d\nu + K \quad (7.13)$$

ve denklem 7.13'ün her iki tarafı $\mu \phi(\nu_0, \mu)$ ile çarpılıp $[-1, 1]$ aralığında μ üzerinden integrali alınır ve düzenlenirse,

$$\int_{-1}^{+1} \mu \phi(\nu_0, \mu) \psi(0, \mu) d\mu = A(\nu_0) N_{0^+} - \frac{c\nu_0}{2} K [A_0(\nu_0) - B_0(\nu_0)] \quad (7.14)$$

elde edilir. $A_0(\nu_0)$ ve $B_0(\nu_0)$ tanımları denklem 7.7'de verilmiştir. Bu ifadeler ve K yerine yazılıp denklem yeniden düzenlenirse,

$$\int_{-1}^{+1} \mu \phi(\nu_0, \mu) \psi(0, \mu) d\mu = A(\nu_0) N_{0^+} + a\nu_0 \quad (7.15)$$

Denklem 7.15'den $A(\nu_0)$ çekilebilir. Bu durumda

$$A(\nu_0) = \frac{1}{N_{0^+}} \left[- \int_0^1 \mu \phi(\nu_0, -\mu) \psi(0, -\mu) d\mu + (1-a) \int_0^1 \mu \phi(\nu_0, \mu) d\mu - a\nu_0 \right] \quad (7.16)$$

gibi yazılabilir. Denklem 7.16'da $\psi(0, \mu) = 1 - a$ alınmıştır. Yine bu denklemde,

$$\psi(0, -\mu) = \sum_{l=0}^N a_l \mu^l, \quad \mu > 0 \quad (7.17)$$

alınır ve denklemde yerine yazılırsa,

$$A(\nu_0) = \frac{1}{N_{0^+}} \left[\frac{c\nu_0}{2} (1-a) B_0(\nu_0) - \frac{c\nu_0}{2} \sum_l a_l A_l(\nu_0) - a\nu_0 \right] \quad (7.18)$$

denklemini elde edilir. Burada aşağıdaki diklik bağıntıları kullanılmıştır.

$$\int_{-1}^{+1} \mu \phi^2(\pm\nu_0, \mu) d\mu = N(\pm\nu_0) \quad (7.19)$$

$$\int_{-1}^{+1} \mu \phi(\nu', \mu) \phi(\nu, \mu) d\mu = N(\nu) \delta(\nu - \nu') \quad (7.20)$$

Ayrıca $A_m(\xi)$ ve $B_m(\xi)$ ifadeleri denklem 7.7'deki gibi tanımlıdır. Denklem 7.13'den sırasıyla ortama giren ve çıkan akı ifadeleri yazılırsa,

$$\psi(0, \mu) = A(\nu_0) \phi(\nu_0, \mu) + \int_0^1 A(\nu) \phi(\nu, \mu) d\nu + \frac{a}{1-c}, \quad \mu > 0 \quad (7.21)$$

$$\psi(0, -\mu) = A(\nu_0) \phi(\nu_0, -\mu) + \int_0^1 A(\nu) \phi(\nu, -\mu) d\nu + \frac{a}{1-c}, \quad \mu > 0 \quad (7.22)$$

elde edilir. Denklem 7.22'nin her iki tarafı $\mu^{\beta+1}$ ile çarpılıp $[-1, 0]$ aralığında μ üzerinden integral alınır ve denklem 7.8, $A(\nu_0)$ ve $A(\nu)$ açılım katsayıları yerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \sum_l a_l \left[\frac{1}{\beta + l + 2} + \frac{1}{N_{0^+}} \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 A_l(\nu_0) A_\beta(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{l\beta}^{AA} \right] \\ & = \left[\frac{1}{N_{0^+}} \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 B_0(\nu_0) A_\beta(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{l0}^{AB} \right] \end{aligned} \quad (7.23)$$

denkleminde ulaşılır. I_{lm}^{AA} ve I_{lm}^{AB} denklem 7.8'deki gibi tanımlıdır. Bundan sonra gelen işlemler nümerik işlemler olup bilgisayar hesabına dayanmaktadır. Sonraki bölümlerde bu yöntemle ilgili iki uygulama daha ele alınacaktır.

8. NÖTRON TRANSPORT TEORİSİNDE H_N VE SİNGÜLER ÖZFONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE UYGULAMALAR

8.1 H_N Yönteminin Lineer Anizotropik Saçılma Durumu İçin Slab-Albedo Problemine Uygulanması

Daha önceki çalışmalarda slab problemi izotropik saçılma durumu için H_N incelenmiştir (Tezcan 2003) . Bu kısımda kalınlığı $\tau=2a$ olan slab için H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda yansıma ve geçiş katsayıları hesaplanmaktadır (Bulut and Güleçyüz 2005). Lineer anizotropik saçılma durumunda nötron transport denklemi

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x, \mu') f(\mu, \mu') d\mu' \quad (8.1)$$

şeklindedir. Yukarıdaki denklemde

$$f(\mu, \mu') = 1 + b\mu\mu' \quad (8.2)$$

gibidir. Denklem 8.1, $b=0$ olması durumunda izotropik saçılma için nötron transport denkleminde indirgenir. Case'in özfonksiyonları cinsinden nötron transport denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi yazılır.

$$\begin{aligned} \psi(x, \mu) = & A(v_0)\phi(v_0, \mu)e^{-\frac{x}{v_0}} + A(-v_0)\phi(-v_0, \mu)e^{\frac{x}{v_0}} \\ & + \int_0^1 A(v)\phi(v, \mu)e^{-\frac{x}{v}} dv + \int_0^1 A(-v)\phi(-v, \mu)e^{\frac{x}{v}} dv \end{aligned} \quad (8.3)$$

Bu kısımda incelenen problem lineer anizotropik saçılma durumu için olduğundan kullanılan özfonksiyonlar

$$\phi(\nu_0, \mu) = \frac{c\nu_0}{2} \frac{d(\pm\nu_0\mu)}{\nu_0 \mp \mu}$$

(8.4)

ve

$$\phi(\nu, \mu) = \frac{c\nu}{2} P \frac{d(\nu\mu)}{\nu - \mu} + \lambda(\mu)\delta(\mu - \nu) \quad (8.5)$$

gibidir. Burada $d(\nu\mu) = 1 + 3f_1(1-c)\nu\mu$, $r = f_1(1-c)$ olmak üzere normalizasyon sabitleri aşağıdaki gibidir.

$$N(\nu_0) = \frac{c\nu_0^2}{2} (1 + r\nu_0^2) \left\{ \frac{c(1 + r\nu_0^2)}{\nu_0(\nu_0^2 - 1)} - \frac{(1-c)(1 + 3r\nu_0^2)}{\nu_0(1 + r\nu_0^2)} \right\} , \quad (8.6)$$

$$N(\nu) = \nu \left\{ (1 + r\nu^2)(1 - c\nu \tanh^{-1} \nu) - r(1-c)\nu^2 \right\}^2 + \frac{1}{4} r^2 \nu^3 \pi^2 (1 + r\nu^2)^2 . \quad (8.7)$$

İlgilenilen problem slab- albedo problemi olduğu için sınır şartları

$$\psi(-a, \mu) = \mu^\beta ; \quad \mu > 0 \text{ için } -a' \text{ dan giren akı} \quad (8.8a)$$

$$\psi(a, -\mu) = 0 ; \quad \mu > 0 \text{ için } a' \text{ dan giren akı} \quad (8.8b)$$

$$\psi(a, \mu) = \sum_{l=0}^N b_l \mu^l ; \quad \mu > 0 \text{ için } a' \text{ dan çıkan akı} \quad (8.8c)$$

$$\psi(-a, -\mu) = \sum_{l=0}^N a_l \mu^l ; \quad \mu > 0 \text{ için } -a' \text{ dan çıkan akı} \quad (8.8d)$$

gibi alınır. Yukarıdaki sınır şartları ayrı ayrı uygulanarak çözüme gitmek için iki ayrı denklem çifti elde edilir. Burada çıkan akı ifadelerinden faydalanarak oluşturulacak denklem takımları kullanılacaktır. Genel çözümdeki $A(\pm\nu_0)$ ve $A(\pm\nu)$ katsayıları hesaplandığı takdirde genel çözüm elde edilmiş olur. $x=a'$ daki çözüm

$$\begin{aligned}\psi(a, \mu) &= A(v_0)\phi(v_0, \mu)e^{-\frac{a}{v_0}} + A(-v_0)\phi(-v_0, \mu)e^{\frac{a}{v_0}} \\ &+ \int_0^1 A(v)\phi(v, \mu)e^{-\frac{a}{v}} dv + \int_0^1 A(-v)\phi(-v, \mu)e^{\frac{a}{v}} dv\end{aligned}\quad (8.9)$$

gibidir. . Bu denklem $\mu\phi(v_0, \mu)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında μ üzerinden integrali alınır ve tam bölge diklik bağıntıları kullanılırsa

$$\int_{-1}^{+1} \mu\phi(v_0, \mu)\psi(a, \mu)d\mu = \int_{-1}^{+1} \mu A(v_0)\phi^2(v_0, \mu)e^{-\frac{a}{v_0}} d\mu \quad (8.10)$$

elde edilir. Burada

$$\int_{-1}^{+1} \mu\phi^2(\pm v_0, \mu)d\mu = N(\pm v_0) \quad (8.11)$$

$$\int_{-1}^{+1} \mu\phi(v', \mu)\phi(v, \mu)d\mu = N(v)\delta(v - v') \quad (8.12)$$

gibidir. Bu durumda 8.10 denkleminde

$$A(v_0) = \frac{e^{-\frac{a}{v_0}}}{N(v_0)} \left(\int_0^1 \mu\phi(v_0, \mu)\psi(a, \mu)d\mu - \int_0^1 \mu\phi(v_0, -\mu)\psi(a, -\mu)d\mu \right) \quad (8.13)$$

ifadesi bulunur. Benzer şekilde denklem 8.9 $\mu\phi(v_0, \mu)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında μ üzerinden integral alınır

$$A(-v_0) = \frac{e^{\frac{a}{v_0}}}{N(v_0)} \left(\int_0^1 \mu\phi(-v_0, \mu)\psi(a, \mu)d\mu - \int_0^1 \mu\phi(-v_0, -\mu)\psi(a, -\mu)d\mu \right) \quad (8.14)$$

elde edilir. Aynı şekilde denklem 8.9 $\mu\phi(\pm v, \mu)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında μ üzerinden integral alınır

$$A(v) = \frac{e^{\frac{a}{v}}}{N(v)} \left(\int_0^1 \mu\phi(v, \mu)\psi(a, \mu)d\mu - \int_0^1 \mu\phi(v, -\mu)\psi(a, -\mu)d\mu \right) \quad (8.15)$$

$$A(-\nu) = \frac{e^{-\frac{a}{\nu}}}{N(\nu)} \left(\int_0^1 \mu \phi(-\nu, \mu) \psi(a, \mu) d\mu - \int_0^1 \mu \phi(-\nu, -\mu) \psi(a, -\mu) d\mu \right) \quad (8.16)$$

denklemlerine ulaşılır. Sonuçta bulunan bu ifadelerden genel bir ifade yazılabilir.

$$A(\pm\xi) = \frac{e^{\pm\frac{a}{\nu}}}{N(\pm\xi)} \int_{-1}^{+1} \mu \phi(\pm\xi, \mu) \psi(a, \mu) d\mu \quad (8.17)$$

Genel çözümden $x=-a$ 'daki çözüm yazılırsa

$$\begin{aligned} \psi(-a, -\mu) &= A(\nu_0) \phi(\nu_0, -\mu) e^{\frac{a}{\nu_0}} + A(-\nu_0) \phi(-\nu_0, -\mu) e^{-\frac{a}{\nu_0}} \\ &+ \int_0^1 A(\nu) \phi(\nu, -\mu) e^{\frac{a}{\nu}} d\nu + \int_0^1 A(-\nu) \phi(-\nu, -\mu) e^{-\frac{a}{\nu}} d\nu \end{aligned} \quad (8.18)$$

elde edilir. Denklem 8.9 için yapılan işlemler denklem 8.18 için tekrar yapılırsa $A(\pm\nu_0)$ ve $A(\pm\nu)$ için yeniden açık ifadeler elde edilir. Bunun yapılmasındaki amaç $A(\pm\nu_0)$ ve $A(\pm\nu)$ katsayılarını ıraksamayacak bir şekilde elde etmektir. Benzer işlemler yapıldığında

$$A(\pm\xi) = \frac{e^{\pm\frac{a}{\nu}}}{N(\pm\xi)} \int_{-1}^{+1} \mu \phi(\mp\xi, \mu) \psi(-a, -\mu) d\mu \quad \xi = \nu_0, \nu \quad (8.19)$$

ifadesine ulaşılır. Yukarıda belirtildiği gibi $\psi(a, \mu)$ ve $\psi(-a, -\mu)$ ifadelerinden elde edilen $A(\pm\xi)$ 'den ıraksamayanlar kullanılacaktır. Denklem 8.4 ve 8.5'deki özfonksiyonlar için bazı kısaltmalar aşağıdaki gibidir.

$$A_m(\xi) = \frac{2}{c\xi} \int_0^1 \mu^{m+1} \phi(-\xi, \mu) d\mu \quad (8.20)$$

$$B_m(\xi) = \frac{2}{c\xi} \int_0^1 \mu^{m+1} \phi(\xi, \mu) d\mu \quad (8.21)$$

Genel çözümden $x=a$ yüzeyinden çıkan akı yazılırsa

$$\begin{aligned}\psi(a, \mu) &= A(v_0)\phi(v_0, \mu)e^{-\frac{a}{v_0}} + A(-v_0)\phi(-v_0, \mu)e^{\frac{a}{v_0}} \\ &+ \int_0^1 A(v)\phi(v, \mu)e^{-\frac{a}{v}} dv + \int_0^1 A(-v)\phi(-v, \mu)e^{\frac{a}{v}} dv, \quad \mu > 0\end{aligned}\quad (8.22)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade μ^{m+1} ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında μ üzerinden integral alınırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mu^{m+1} \psi(a, \mu) d\mu &= \int_0^1 \mu^{m+1} A(v_0)\phi(v_0, \mu)e^{-\frac{a}{v_0}} d\mu + \\ &\int_0^1 \mu^{m+1} A(-v_0)\phi(-v_0, \mu)e^{\frac{a}{v_0}} d\mu + \int_0^1 A(v)e^{-\frac{a}{v}} dv \int_0^1 \mu^{m+1} \phi(v, \mu) d\mu \\ &+ \int_0^1 A(-v)e^{\frac{a}{v}} dv \int_0^1 \mu^{m+1} \phi(-v, \mu) d\mu\end{aligned}\quad (8.23)$$

denklemine ulaşılır. Gerekli kısaltmalar yapılarak denklem yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mu^{m+1} \psi(a, \mu) d\mu &= \frac{c v_0}{2} e^{-\frac{a}{v_0}} A(v_0) B_m(v_0) + \frac{c v_0}{2} e^{\frac{a}{v_0}} A(-v_0) A_m(v_0) \\ &+ \frac{c}{2} \int_0^1 v A(v) B_m(v) e^{-\frac{a}{v}} dv + \frac{c}{2} \int_0^1 v A(-v) A_m(v) e^{\frac{a}{v}} dv\end{aligned}\quad (8.24)$$

bulunur. Denklem 8.24'de $A(\pm v_0)$, $A(\pm v)$ yerine yazılır ve 8.8c, 8.8d bağıntıları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^N b_l \frac{1}{m+l+2} &= \frac{c\nu_0}{2} e^{-\frac{a}{\nu_0}} B_m(\nu_0) \left(\frac{c\nu_0}{2} \frac{e^{-\frac{a}{\nu_0}}}{N(-\nu_0)} \left(\sum_{l=0}^N a_l A_l(\nu_0) - B_\beta(\nu_0) \right) \right) \\
&+ \frac{c\nu_0}{2} e^{\frac{a}{\nu_0}} A_m(\nu_0) \left(\frac{c\nu_0}{2} \frac{e^{-\frac{a}{\nu_0}}}{N(-\nu_0)} \sum_{l=0}^N b_l A_l(\nu_0) \right) \\
&+ \frac{c}{2} \int_0^1 \nu B_m(\nu) e^{-\frac{a}{\nu}} d\nu \left(\frac{c\nu}{2} \frac{e^{-\frac{a}{\nu}}}{N(-\nu)} \left(\sum_{l=0}^N a_l A_l(\nu) - B_\beta(\nu) \right) \right) \\
&+ \frac{c}{2} \int_0^1 \nu A_m(\nu) e^{-\frac{a}{\nu}} d\nu \left(\frac{c\nu}{2} \frac{e^{-\frac{a}{\nu}}}{N(-\nu)} \left(\sum_{l=0}^N b_l A_l(\nu) \right) \right)
\end{aligned} \tag{8.25}$$

bulunur.

$$N(-\nu_0) = -N(\nu_0), \tag{8.26a}$$

$$N(-\nu) = -N(\nu), \tag{8.26b}$$

$$I_{xy}^{AA} = \int_0^1 \frac{\nu^2 A_x(\nu) A_y(\nu)}{N(\nu)} d\nu, \tag{8.27}$$

$$I_{xy}^{AAE} = \int_0^1 \frac{\nu^2 A_x(\nu) A_y(\nu)}{N(\nu)} e^{-\frac{2a}{\nu}} d\nu, \tag{8.28}$$

8.25 denklemi düzenlenir ve yukarıdaki ifadelerden faydalanılarak yeniden yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^N b_l \left(\frac{1}{m+l+2} + \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{A_m(\nu_0) A_l(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{ml}^{AA} \right) + \\
&+ \sum_{l=0}^N a_l \left(\left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{e^{-\frac{2a}{\nu_0}}}{N(\nu_0)} B_m(\nu_0) A_l(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{lm}^{ABE} \right) \\
&= \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{e^{-\frac{2a}{\nu_0}}}{N(\nu_0)} B_m(\nu_0) B_\beta(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{m\beta}^{BBE}
\end{aligned} \tag{8.29}$$

elde edilir. Buraya kadar yapılan işlemler çözüme gitmek için ilk basamaktır. Yukarıdaki denklemde görüldüğü gibi çözüme ulaşmak için gerekli olan iki tane katsayı

vardır. Diğer bilinmeyenler ise bunlar türünden yazılabilmektedir. Bu katsayılar a_l ve b_l 'dir. Bu yüzden denklem 8.29'a benzer bir denkleme ihtiyaç vardır. Bu denklem de $x = -a$ 'dan çıkan akı ifadesi ile ulaşılabilir.

$$\begin{aligned} \psi(-a, -\mu) &= A(v_0)\phi(v_0, -\mu)e^{\frac{a}{v_0}} + A(-v_0)\phi(-v_0, -\mu)e^{-\frac{a}{v_0}} \\ &+ \int_0^1 A(v)\phi(v, -\mu)e^{\frac{a}{v}} dv + \int_0^1 A(-v)\phi(-v, -\mu)e^{-\frac{a}{v}} dv, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Denklem 8.30 μ^{m+1} ile çarpılıp $[0,1]$ aralığında μ üzerinden integre edilirse

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu^{m+1} \psi(-a, -\mu) d\mu &= \int_0^1 \mu^{m+1} A(v_0)\phi(v_0, -\mu)e^{\frac{a}{v_0}} d\mu \\ &+ \int_0^1 \mu^{m+1} A(-v_0)\phi(-v_0, -\mu)e^{-\frac{a}{v_0}} d\mu \\ &+ \int_0^1 A(-v)e^{-\frac{a}{v}} dv \int_0^1 \mu^{m+1} \phi(-v, -\mu) d\mu \\ &+ \int_0^1 A(v)e^{\frac{a}{v}} dv \int_0^1 \mu^{m+1} \phi(v, -\mu) d\mu \end{aligned} \quad (8.31)$$

denkleme ulaşılır. Gerekli düzenlemeler ve kısaltmalar yapılarak denklem yeniden yazılabilir.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mu^{m+1} \psi(-a, -\mu) d\mu &= \frac{cv_0}{2} e^{\frac{a}{v_0}} A_m(v_0) \left(\frac{cv_0}{2} \frac{e^{-\frac{a}{v_0}}}{N(-v_0)} \sum_{l=0}^N a_l A_l(v_0) - B_\beta(v_0) \right) \\ &+ \frac{cv_0}{2} e^{-\frac{a}{v_0}} B_m(v_0) \left(\frac{cv_0}{2} \frac{e^{\frac{a}{v_0}}}{N(-v_0)} \left(\sum_{l=0}^N b_l A_l(v_0) \right) \right. \\ &+ \frac{c}{2} \int_0^1 v B_m(v) e^{-\frac{a}{v}} dv \left(\frac{cv}{2} \frac{e^{\frac{a}{v}}}{N(-v)} \left(\sum_{l=0}^N b_l A_l(v) \right) \right. \\ &\left. \left. + \frac{c}{2} \int_0^1 v A_m(v) e^{\frac{a}{v}} dv \left(\frac{cv}{2} \frac{e^{-\frac{a}{v}}}{N(-v)} \left(\sum_{l=0}^N a_l A_l(v) - B_\beta(v) \right) \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (8.32)$$

Eşitlik 8.8d ile verilen sınır şartı kullanılır ve denklem yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \sum_{l=0}^N a_l \left(\frac{1}{m+l+2} + \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{A_m(\nu_0)A_l(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{ml}^{AA} \right) + \\
& + \sum_{l=0}^N b_l \left(\left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{e^{\frac{2a}{\nu}}}{N(\nu_0)} B_m(\nu_0)A_l(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{lm}^{ABE} \right) \\
& = \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{A_m(\nu_0)B_\beta(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{m\beta}^{AB}
\end{aligned} \tag{8.33}$$

eşitliği bulunur. 8.29 ve 8.33 denklem çiftini bazı kısaltmalar yapılarak daha düzenli yazmak mümkündür.

$$\sum_{l=0}^N a_l T_{ml} + \sum_{l=0}^N b_l H_{ml} = S_{m\beta} \tag{8.34}$$

$$\sum_{l=0}^N a_l H_{ml} + \sum_{l=0}^N b_l T_{ml} = R_{m\beta} \tag{8.35}$$

Yukarıda yazılan denklem takımındaki kısaltmalar aşağıdaki gibidir.

$$T_{ml} = \frac{1}{m+l+2} + \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{A_m(\nu_0)A_l(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{ml}^{AA} \tag{8.36}$$

$$H_{ml} = \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{e^{\frac{2a}{\nu}}}{N(\nu_0)} B_m(\nu_0)A_l(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{lm}^{ABE} \tag{8.37}$$

$$R_{m\beta} = \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{A_m(\nu_0)B_\beta(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{m\beta}^{AB} \tag{8.38}$$

$$S_{m\beta} = \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{e^{\frac{2a}{\nu}}}{N(\nu_0)} B_m(\nu_0)B_\beta(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{m\beta}^{BBE} \tag{8.39}$$

8.34 ve 8.35 numaralı denklem çifti kullanılarak çözüme ulaşmak mümkündür. Buraya kadar yapılan işlemler çözümün analitik kısmını oluşturmaktadır. Bundan sonrası bilgisayara dayanan nümerik işlemlerdir. Ayrıca nümerik işlemlerde kolaylık sağlayacak birkaç analitik ifade daha göstermek yerinde olacaktır. 8.20 ve 8.21

ifadelerinden yola çıkarak bir türetme bağıntısı elde edilir. 8.20 denkleminde $m=0$ alınarak $A_0(\nu_0)$ ifadesine ulaşılır.

$$A_0(\nu_0) = (1 - \nu_0 \ln(\frac{\nu_0 + 1}{\nu_0}))(1 + q\nu_0) - \frac{q}{2} \quad (8.40)$$

$$q = 3f_1(1 - c)\nu_0$$

Yine aynı bağıntıdan tekrarlama bağıntısına ulaşılır.

$$A_m(\nu_0) = \frac{1}{m+1} - \frac{q}{m+2} - \nu_0 A_{m-1}(\nu_0) \quad (8.41)$$

Benzer işlemler 8.21 için tekrar edildiğinde

$$B_0(\nu_0) = (-1 - \nu_0 \ln(\frac{\nu_0 + 1}{\nu_0}))(1 + q\nu_0) + \frac{2}{c} + \frac{4q\nu_0 - q}{2} \quad (8.42)$$

$$B_m(\nu_0) = -\frac{1}{m+1} - \frac{q}{m+2} + \nu_0 B_{m-1}(\nu_0) \quad (8.43)$$

ifadelerine ulaşılır. Burada hesaplamaya çalışılan katsayılar ise yansıma ve geçiş katsayılarıdır.

$$A^* = \frac{\int_0^1 \psi(-a, -\mu) \mu d\mu}{\int_0^1 \psi(-a, \mu) \mu d\mu} \quad (8.44)$$

$$B^* = \frac{\int_0^1 \psi(a, \mu) \mu d\mu}{\int_0^1 \psi(-a, \mu) \mu d\mu} \quad (8.45)$$

Denklem (8.8.a,b,c,d) ile verilen sınır şartları kullanılır ve katsayı ifadeleri yeniden yazılırsa;

$$A^* = (\beta + 2) \sum_{l=0}^N \frac{a_l}{l+2} \quad (8.46)$$

$$B^* = (\beta + 2) \sum_{l=0}^N \frac{b_l}{l+2} \quad (8.47)$$

elde edilir. Bu katsayılarla ilgili çeşitli nümerik değerler hesaplanmıştır. Bu hesaplamalar Çizelge 8.1-8.17'de verilmektedir. $c = 0.1, 0.5, 0.8$ değerleri için hesaplanan katsayıların, H_N yöntemi ile üçüncü yaklaşıklktan sonra yakınsadığı görülmektedir. Ayrıca çizelgelerde $b = 3f_1$ olarak gösterilmiştir. Bu katsayılar anizotropi parametreleridir ve saçılmanın şiddetini belirlemektedir. Çizelgelerde aynı zamanda farklı saçılma parametreleri için de yansıma ve geçme katsayıları değerleri verilmektedir. H_0 yaklaşıklığı basit olduğundan analitik ifadesi aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$N = 0 \Rightarrow$ 8.34 ve 8.35 denklem çiftinden

$$a_0 T_{00} + b_0 H_{00} = S_{0\beta} \quad (8.48)$$

$$a_0 H_{00} + b_0 T_{00} = R_{0\beta}$$

elde edilir. Burada hesaplanmak istenen katsayılar a_0 ve b_0 dır. Bu denklem çiftinden

$$\begin{pmatrix} T_{00} & H_{00} \\ H_{00} & T_{00} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{0\beta} \\ R_{0\beta} \end{pmatrix} \quad (8.49)$$

ifadesi yazılabilir. Buradan

$$a_0 = \frac{R_{0\beta} H_{00} - S_{0\beta} T_{00}}{H_{00}^2 - T_{00}^2} \quad (8.50)$$

$$b_0 = \frac{S_{0\beta}H_{00} - R_{0\beta}T_{00}}{H_{00}^2 - T_{00}^2} \quad (8.51)$$

denklemlerine ulaşılır. Bu denklemlerdeki T_{00} , H_{00} değerleri ve β 'nın istenilen değeri için $S_{0\beta}$ ve $R_{0\beta}$ değerleri sırasıyla 8.36-39 denklemlerinden elde edilir. İlk yaklaşıklık için yansıma ve geçiş katsayılarının ifadeleri denklem 8.46 ve 8.47'dan basit bir şekilde bulunur. $\beta=0$ için $A^* = a_0$ ve $B^* = b_0$ elde edilir. Sonuçta yansıma geçiş katsayıları lineer anizotropik saçılma durumunda ilk yaklaşım için hesaplanmıştır. Örnek bir program Ek 1'de verilmektedir.

Çizelge 8.1 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=0$, $c=0.1$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.006809	0.839548	0.017492	0.457029	0.020654	0.231800	0.021615	0.065836
1	0.007129	0.839538	0.017739	0.437934	0.020747	0.231808	0.021624	0.065840
2	0.007174	0.839536	0.017770	0.437934	0.020747	0.231808	0.021624	0.065840
3	0.007180	0.839537	0.017770	0.437934	0.020747	0.231808	0.021624	0.065840
4	0.007182	0.839537	0.017770	0.437934	0.020747	0.231808	0.021624	0.065840
5	0.007182	0.839537	0.017770	0.437934	0.020747	0.231808	0.021624	0.065840
6	0.007182	0.839537	0.017770	0.437934	0.020747	0.231808	0.021624	0.065840
7	0.007182	0.839537	0.017770	0.437934	0.020747	0.231808	0.021624	0.065840
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.006142	0.840041	0.015654	0.459477	0.018011	0.268283	0.019286	0.066653
1	0.006499	0.840029	0.015960	0.459480	0.018075	0.268281	0.019297	0.066656
2	0.006548	0.840028	0.015973	0.459480	0.018057	0.268279	0.019297	0.066656
3	0.006555	0.840028	0.015973	0.459480	0.018055	0.268279	0.019297	0.066656
4	0.006556	0.840028	0.015973	0.459480	0.018056	0.268279	0.019297	0.066656
5	0.006556	0.840028	0.015973	0.459480	0.018056	0.268279	0.019297	0.066656
6	0.006556	0.840028	0.015973	0.459480	0.018056	0.268279	0.019297	0.066656
7	0.006556	0.840028	0.015973	0.459480	0.018056	0.268279	0.019297	0.066656
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.003450	0.843001	0.008196	0.466426	0.009750	0.240031	0.009751	0.070218
1	0.003966	0.842980	0.008671	0.466415	0.009596	0.240039	0.009770	0.070219
2	0.004030	0.842978	0.008691	0.466414	0.009595	0.240028	0.009770	0.070218
3	0.004040	0.842978	0.008691	0.466414	0.009595	0.240028	0.009769	0.070218
4	0.004041	0.842978	0.008691	0.466414	0.009595	0.240028	0.009769	0.070218
5	0.004041	0.842978	0.008691	0.466414	0.009595	0.240028	0.009769	0.070218
6	0.004041	0.842978	0.008691	0.466414	0.009595	0.240028	0.009769	0.070218
7	0.004041	0.842978	0.008691	0.466414	0.009595	0.240028	0.009769	0.070218

Çizelge 8.2 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=0$, $c=0.5$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.036703	0.870830	0.106087	0.534960	0.133567	0.306477	0.145116	0.106908
1	0.038228	0.870482	0.107618	0.534993	0.134173	0.306719	0.145098	0.107070
2	0.038406	0.870444	0.107677	0.534996	0.134168	0.306713	0.145086	0.107056
3	0.038429	0.870440	0.107677	0.534995	0.134155	0.306710	0.145086	0.107055
4	0.038432	0.870440	0.107676	0.534994	0.134165	0.306709	0.145086	0.107055
5	0.038432	0.870440	0.107676	0.534994	0.134165	0.306709	0.145086	0.107055
6	0.038432	0.870440	0.107676	0.534994	0.134165	0.306709	0.145086	0.107055
7	0.038432	0.870440	0.107676	0.534994	0.134165	0.306709	0.145086	0.107055
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.033385	0.874024	0.096684	0.543815	0.122179	0.315975	0.133211	0.113112
1	0.350689	0.873626	0.098447	0.543775	0.122911	0.316174	0.133208	0.113264
2	0.035259	0.873583	0.098512	0.543774	0.123905	0.316166	0.133196	0.113250
3	0.035284	0.873580	0.098512	0.543773	0.122903	0.316163	0.133195	0.113249
4	0.035287	0.873579	0.098511	0.543772	0.122903	0.316163	0.133195	0.113249
5	0.035288	0.873579	0.098511	0.543772	0.122903	0.316163	0.133195	0.113249
6	0.035288	0.873579	0.098511	0.543772	0.122903	0.316163	0.133195	0.113249
7	0.035288	0.873579	0.098511	0.543772	0.122903	0.316163	0.133195	0.113249
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.019740	0.887090	0.056083	0.582090	0.071178	0.359195	0.078391	0.143790
1	0.022204	0.886429	0.059086	0.581560	0.072672	0.359027	0.078558	0.143796
2	0.022453	0.886366	0.059190	0.581537	0.072672	0.359027	0.078541	0.143779
3	0.022482	0.886360	0.059191	0.581535	0.072668	0.359006	0.078540	0.143778
4	0.022485	0.886360	0.059190	0.581535	0.072667	0.359006	0.078540	0.143778
5	0.022486	0.886360	0.059190	0.581535	0.072667	0.359006	0.078540	0.143778
6	0.022486	0.886360	0.059190	0.581535	0.072667	0.359006	0.078540	0.143778
7	0.022486	0.886360	0.059190	0.581535	0.072667	0.359006	0.078540	0.143778

Çizelge 8.3 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=0$, $c=0.8$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.111991	0.819841	0.203407	0.622345	0.279396	0.415749	0.328431	0.196682
1	0.118872	0.818339	0.205571	0.621971	0.280192	0.416252	0.327985	0.197297
2	0.118748	0.818258	0.205618	0.621976	0.280154	0.416250	0.327952	0.197271
3	0.118749	0.818263	0.205616	0.621976	0.280152	0.416246	0.327951	0.197270
4	0.118749	0.818261	0.205616	0.621975	0.280152	0.416245	0.327951	0.197270
5	0.118749	0.818261	0.205616	0.621975	0.280152	0.416245	0.327951	0.197270
6	0.118749	0.818261	0.205616	0.621975	0.280152	0.416245	0.327951	0.197270
7	0.118749	0.818261	0.205616	0.621975	0.280152	0.416245	0.327951	0.197270
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.057432	0.902970	0.188104	0.637398	0.260708	0.416245	0.309526	0.211449
1	0.059679	0.901722	0.190600	0.636794	0.261731	0.433801	0.309116	0.212033
2	0.059858	0.901629	0.190656	0.636791	0.261713	0.433796	0.309082	0.212006
3	0.059873	0.901623	0.190654	0.636791	0.261711	0.433792	0.309080	0.212004
4	0.059874	0.901623	0.190654	0.636791	0.261711	0.433792	0.309080	0.212005
5	0.059874	0.901623	0.190654	0.636790	0.261711	0.433792	0.309080	0.212005
6	0.059874	0.901624	0.190654	0.636790	0.261711	0.433792	0.309080	0.212005
7	0.059874	0.901624	0.190654	0.636790	0.261711	0.433792	0.309080	0.212005
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.039096	0.922396	0.118670	0.705492	0.173187	0.519792	0.211427	0.293906
1	0.038850	0.922531	0.123516	0.703278	0.173112	0.518784	0.211516	0.293713
2	0.039077	0.922403	0.123622	0.703343	0.173109	0.518760	0.211459	0.293652
3	0.039094	0.922396	0.123621	0.703233	0.173106	0.518756	0.211457	0.293647
4	0.039096	0.922396	0.123621	0.703233	0.173106	0.518755	0.211456	0.293647
5	0.039096	0.922396	0.123621	0.703233	0.173106	0.518755	0.211456	0.293647
6	0.039096	0.922396	0.123621	0.703233	0.173106	0.518755	0.211456	0.293647
7	0.039096	0.922396	0.123621	0.703233	0.173106	0.518755	0.211456	0.293647

Çizelge 8.4 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=1$, $c=0.1$ için yansıma ve geçiş katsayıları.

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.004530	0.868831	0.015261	0.509301	0.018721	0.270500	0.019837	0.081031
1	0.005855	0.868838	0.015741	0.509320	0.018862	0.270516	0.019850	0.081038
2	0.005850	0.868837	0.015728	0.509319	0.018855	0.270514	0.019848	0.081037
3	0.005850	0.838837	0.015728	0.509319	0.018855	0.270514	0.019849	0.081037
4	0.005848	0.868836	0.015727	0.509319	0.018855	0.270514	0.019849	0.081037
5	0.005848	0.868836	0.015727	0.509319	0.018855	0.270514	0.019849	0.081037
6	0.005848	0.868836	0.015727	0.509319	0.018855	0.270514	0.019849	0.081037
7	0.005848	0.868836	0.015727	0.509319	0.018855	0.270514	0.019849	0.081037
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.003740	0.869277	0.013298	0.510919	0.015988	0.284326	0.017328	0.081967
1	0.005218	0.869283	0.013848	0.510936	0.016196	0.284337	0.017343	0.081974
2	0.005212	0.869281	0.013834	0.510935	0.016178	0.284335	0.017342	0.081973
3	0.005211	0.869280	0.013833	0.510934	0.016179	0.284335	0.017342	0.081973
4	0.005211	0.869280	0.013833	0.510934	0.016179	0.284335	0.017342	0.081973
5	0.005211	0.869280	0.013833	0.510934	0.016179	0.284335	0.017342	0.081973
6	0.005211	0.869280	0.013833	0.510934	0.016179	0.284335	0.017342	0.081973
7	0.005211	0.869280	0.013833	0.510934	0.016179	0.284335	0.017342	0.081973
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.000537	0.872483	0.005329	0.518447	0.006664	0.279632	0.007053	0.086094
1	0.002661	0.872478	0.006180	0.518448	0.006937	0.279636	0.007081	0.086096
2	0.002651	0.872476	0.006159	0.518446	0.006924	0.279635	0.007079	0.086095
3	0.002651	0.872475	0.006159	0.518446	0.006924	0.279635	0.007079	0.086095
4	0.002650	0.872475	0.006158	0.518446	0.006924	0.279635	0.007079	0.086095
5	0.002650	0.872475	0.006158	0.518446	0.006924	0.279635	0.007079	0.086095
6	0.002650	0.872475	0.006158	0.518446	0.006924	0.279635	0.007079	0.086095
7	0.002650	0.872475	0.006158	0.518446	0.006924	0.279635	0.007079	0.086095

Çizelge 8.5 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=1$, $c=0.5$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.023762	0.894112	0.092666	0.580026	0.121196	0.343997	0.134859	0.124366
1	0.031384	0.894297	0.095723	0.580553	0.122945	0.344516	0.134904	0.124618
2	0.031347	0.894246	0.095634	0.580501	0.122926	0.344471	0.134891	0.124591
3	0.031305	0.894238	0.095630	0.580497	0.122925	0.344470	0.134891	0.124592
4	0.031303	0.894237	0.095630	0.580497	0.122925	0.344470	0.134891	0.124592
5	0.031303	0.894237	0.095630	0.580497	0.122925	0.344470	0.134891	0.124592
6	0.031303	0.894237	0.095630	0.580497	0.122925	0.344470	0.134891	0.124592
7	0.031303	0.894237	0.095630	0.580497	0.122925	0.344470	0.134891	0.124592
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.019801	0.897236	0.082614	0.589375	0.109773	0.354279	0.122079	0.131279
1	0.028187	0.897497	0.086096	0.589833	0.110974	0.354760	0.122148	0.131524
2	0.028113	0.897442	0.085100	0.589779	0.110919	0.354714	0.122133	0.131497
3	0.028103	0.897435	0.085995	0.589776	0.110918	0.354713	0.122133	0.131498
4	0.028101	0.897434	0.085995	0.589776	0.110918	0.354714	0.122133	0.131498
5	0.028101	0.897433	0.085995	0.589776	0.110918	0.354714	0.122133	0.131498
6	0.028101	0.897433	0.085995	0.589776	0.110918	0.354714	0.122133	0.131498
7	0.028101	0.897433	0.085995	0.589776	0.110918	0.354714	0.122133	0.131498
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.003072	0.910665	0.039072	0.629822	0.055111	0.401057	0.062070	0.190088
1	0.015172	0.910528	0.044784	0.629755	0.057401	0.401153	0.062355	0.190042
2	0.015082	0.910458	0.044658	0.629690	0.057401	0.401153	0.062355	0.190042
3	0.015071	0.910450	0.044652	0.629687	0.055111	0.401057	0.062366	0.190045
4	0.015069	0.910450	0.044652	0.629687	0.057320	0.401105	0.062366	0.190045
5	0.015069	0.910450	0.044652	0.629687	0.057320	0.401105	0.062366	0.190045
6	0.015069	0.910450	0.044652	0.629687	0.057320	0.401105	0.062366	0.190045
7	0.015069	0.910450	0.044652	0.629687	0.057320	0.401105	0.062366	0.190045

Çizelge 8.6 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=1$, $c=0.8$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.071303	0.903237	0.177938	0.659369	0.256927	0.450230	0.309728	0.217126
1	0.080566	0.902502	0.183311	0.660658	0.258778	0.451730	0.309802	0.218101
2	0.080288	0.902343	0.183149	0.660517	0.258690	0.451620	0.309550	0.218039
3	0.080288	0.902352	0.183144	0.660511	0.258691	0.451620	0.309551	0.218042
4	0.080289	0.902352	0.183144	0.660511	0.258691	0.451620	0.309551	0.218042
5	0.080289	0.902352	0.183145	0.660511	0.258691	0.451620	0.309551	0.218042
6	0.080289	0.902352	0.183145	0.660511	0.258691	0.451620	0.309551	0.218042
7	0.080289	0.902352	0.183145	0.660511	0.258691	0.451620	0.309551	0.218042
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.033764	0.920556	0.161545	0.675132	0.236970	0.469073	0.289489	0.233100
1	0.047915	0.920932	0.167636	0.676211	0.239197	0.470451	0.289400	0.234063
2	0.047769	0.920806	0.167465	0.676066	0.239102	0.470340	0.289368	0.234001
3	0.047753	0.920792	0.167460	0.676060	0.239102	0.470340	0.289368	0.234003
4	0.047751	0.920789	0.167460	0.676060	0.239103	0.470340	0.289368	0.234004
5	0.047750	0.920789	0.167461	0.676060	0.239103	0.470341	0.289368	0.234003
6	0.047750	0.920789	0.167461	0.676060	0.239103	0.470341	0.289368	0.234003
7	0.047750	0.920789	0.167461	0.676060	0.239103	0.470341	0.289368	0.234003
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.006444	0.942442	0.086905	0.746498	0.140140	0.561013	0.184521	0.319219
1	0.026794	0.942093	0.097401	0.745958	0.145074	0.561071	0.185301	0.319676
2	0.026628	0.941944	0.097195	0.745794	0.144946	0.560959	0.185258	0.319625
3	0.026611	0.941929	0.097190	0.745789	0.144947	0.560959	0.185259	0.319629
4	0.026609	0.941926	0.097190	0.745789	0.144947	0.560959	0.185259	0.319629
5	0.026608	0.941926	0.097190	0.745789	0.144947	0.560960	0.185259	0.319629
6	0.026608	0.941926	0.097190	0.745789	0.144947	0.560960	0.185259	0.319629
7	0.026608	0.941926	0.097190	0.745789	0.144947	0.560960	0.185259	0.319629

Çizelge 8.7 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=3$, $c=0.1$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.002755	0.887615	0.013414	0.553475	0.017104	0.309436	0.018373	0.098981
1	0.005215	0.887639	0.014184	0.553512	0.017316	0.309462	0.018392	0.098991
2	0.004988	0.887634	0.014112	0.553506	0.017295	0.309458	0.018389	0.098989
3	0.004988	0.887634	0.014112	0.553506	0.017296	0.309458	0.018390	0.098990
4	0.004998	0.887634	0.014115	0.553506	0.017296	0.309458	0.018390	0.098890
5	0.004988	0.887634	0.014115	0.553506	0.017296	0.309458	0.018390	0.098890
6	0.004988	0.887634	0.014115	0.553506	0.017296	0.309458	0.018390	0.098890
7	0.004988	0.887634	0.014115	0.553506	0.017296	0.309458	0.018390	0.098890
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.001846	0.887955	0.011341	0.555103	0.014251	0.311685	0.015708	0.100033
1	0.004590	0.887978	0.012224	0.555138	0.014603	0.311708	0.015718	0.100042
2	0.004343	0.887972	0.012143	0.555131	0.014559	0.311704	0.015728	0.100041
3	0.004353	0.887972	0.012147	0.555132	0.014563	0.311705	0.015728	0.100041
4	0.004353	0.887972	0.012147	0.555132	0.014563	0.311705	0.015728	0.100041
5	0.004353	0.887972	0.012147	0.555132	0.014563	0.311705	0.015728	0.100041
6	0.004353	0.887972	0.012147	0.555132	0.014563	0.311705	0.015728	0.100041
7	0.004353	0.887972	0.012147	0.555132	0.014563	0.311705	0.015728	0.100041
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	-0.001854	0.891565	0.002929	0.563230	0.004358	0.319430	0.004798	0.104764
1	0.002086	0.891576	0.004292	0.563245	0.004792	0.319443	0.004838	0.104770
2	0.001752	0.891570	0.004173	0.563239	0.004250	0.319439	0.004834	0.104768
3	0.001765	0.891570	0.004178	0.563239	0.004727	0.319439	0.004835	0.104768
4	0.017653	0.891570	0.004178	0.563239	0.004727	0.319439	0.004835	0.104768
5	0.017653	0.891570	0.004178	0.563240	0.004727	0.319439	0.004835	0.104768
6	0.017653	0.891570	0.004178	0.563240	0.004727	0.319439	0.004835	0.104768
7	0.017653	0.891570	0.004178	0.563240	0.004727	0.319439	0.004835	0.104768

Çizelge 8.8 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=3$, $c=0.5$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.013430	0.908947	0.081314	0.618168	0.111928	0.380770	0.126111	0.144105
1	0.027901	0.909675	0.086427	0.619321	0.113528	0.381668	0.126233	0.144483
2	0.026720	0.909523	0.085985	0.619128	0.113380	0.381534	0.126212	0.144428
3	0.026757	0.909524	0.086003	0.619140	0.113388	0.381545	0.126213	0.144434
4	0.026756	0.909523	0.086003	0.619140	0.113387	0.381545	0.126213	0.144433
5	0.026756	0.909523	0.086003	0.619140	0.113387	0.381545	0.126213	0.144433
6	0.026756	0.909523	0.086003	0.619140	0.113387	0.381545	0.126213	0.144433
7	0.026756	0.909523	0.086003	0.619140	0.113387	0.381545	0.126213	0.144433
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.008829	0.912224	0.070667	0.627908	0.099903	0.391751	0.112546	0.151735
1	0.024744	0.912908	0.076470	0.628994	0.100905	0.392616	0.112703	0.152109
2	0.023482	0.912756	0.075984	0.628802	0.100739	0.392482	0.112678	0.152054
3	0.023520	0.912756	0.076003	0.628813	0.100747	0.392493	0.112679	0.152060
4	0.023519	0.912756	0.076003	0.628813	0.100747	0.392493	0.112679	0.152060
5	0.023519	0.912755	0.076704	0.628813	0.100747	0.392493	0.112679	0.152060
6	0.023519	0.912755	0.076704	0.628813	0.100747	0.392493	0.112679	0.152060
7	0.023519	0.912755	0.076704	0.628813	0.100747	0.392493	0.112679	0.152060
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	-0.011013	0.925707	0.024371	0.670099	0.041080	0.441718	0.049070	0.185039
1	0.011915	0.926072	0.033746	0.670590	0.044524	0.442153	0.049781	0.185235
2	0.010299	0.925917	0.033064	0.670041	0.044267	0.442032	0.049714	0.185178
3	0.010344	0.925916	0.033088	0.670417	0.044280	0.442042	0.049715	0.185180
4	0.010343	0.925915	0.033089	0.670417	0.044280	0.442042	0.049715	0.185181
5	0.010343	0.925915	0.033089	0.670417	0.044280	0.442042	0.049715	0.185181
6	0.010343	0.925915	0.033089	0.670417	0.044280	0.442042	0.049715	0.185181
7	0.010343	0.925915	0.033089	0.670417	0.044280	0.442042	0.049715	0.185181

Çizelge 8.9 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=3$, $c=0.8$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.030609	0.993832	0.155943	0.689753	0.236796	0.482623	0.292958	0.238757
1	0.043207	0.994019	0.165641	0.693139	0.240136	0.485485	0.293129	0.240221
2	0.042584	0.993673	0.164963	0.692625	0.239879	0.485128	0.293084	0.240077
3	0.042603	0.993710	0.164980	0.692654	0.239889	0.485158	0.293087	0.240093
4	0.042604	0.993708	0.164980	0.692654	0.239889	0.485158	0.293087	0.240092
5	0.042604	0.993709	0.164980	0.692655	0.239889	0.485157	0.293087	0.240092
6	0.042604	0.993709	0.164980	0.692655	0.239889	0.485157	0.293087	0.240092
7	0.042604	0.993709	0.164980	0.692655	0.239889	0.485157	0.293087	0.240092
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.014180	0.931424	0.138534	0.706087	0.215653	0.502491	0.271461	0.255916
1	0.041637	0.933432	0.149430	0.709274	0.219561	0.505252	0.271673	0.257244
2	0.039985	0.933060	0.148701	0.708763	0.219278	0.504897	0.271676	0.257260
3	0.040016	0.933064	0.148719	0.708791	0.219288	0.504927	0.271676	0.257259
4	0.040014	0.933062	0.148719	0.708792	0.219289	0.504927	0.271676	0.257259
5	0.040014	0.933062	0.148720	0.708792	0.219289	0.504927	0.271676	0.257259
6	0.040014	0.933062	0.148720	0.708792	0.219289	0.504927	0.271676	0.257259
7	0.040014	0.933062	0.148720	0.708792	0.219289	0.504927	0.271676	0.257259
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	-0.018756	0.953579	0.058721	0.780149	0.112828	0.599476	0.159840	0.347456
1	0.020596	0.954796	0.076804	0.781612	0.120634	0.600892	0.161282	0.348527
2	0.018611	0.954429	0.075839	0.781127	0.120220	0.600564	0.161202	0.348413
3	0.018645	0.954431	0.075861	0.781154	0.120234	0.600592	0.161206	0.348428
4	0.018643	0.954429	0.075861	0.781154	0.120234	0.600592	0.161206	0.348426
5	0.018643	0.954429	0.075862	0.781154	0.120234	0.600592	0.161206	0.348426
6	0.018643	0.954429	0.075862	0.781155	0.120234	0.600592	0.161206	0.348426
7	0.018643	0.954429	0.075862	0.781155	0.120234	0.600592	0.161206	0.348426

Çizelge 8.10 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=5$, $c=0.1$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.002020	0.894325	0.012624	0.572374	0.016403	0.328269	0.017744	0.108997
1	0.005079	0.894359	0.013569	0.572421	0.016661	0.328302	0.017767	0.109001
2	0.004653	0.894350	0.013445	0.572411	0.016627	0.328295	0.017764	0.109007
3	0.004695	0.894351	0.013456	0.572412	0.016630	0.328296	0.017764	0.109007
4	0.004692	0.894351	0.013456	0.572412	0.016630	0.328296	0.017764	0.017764
5	0.004692	0.894351	0.013456	0.572412	0.016630	0.328296	0.017764	0.017764
6	0.004692	0.894351	0.013456	0.572412	0.016630	0.328296	0.017764	0.017764
7	0.004692	0.894351	0.013456	0.572412	0.016630	0.328296	0.017764	0.017764
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.001055	0.894560	0.010502	0.573963	0.013476	0.328734	0.015010	0.110099
1	0.004467	0.894592	0.011584	0.574009	0.013909	0.328764	0.015037	0.110111
2	0.004002	0.894582	0.011445	0.573998	0.013839	0.328758	0.015034	0.110109
3	0.004047	0.894583	0.011458	0.573100	0.013849	0.328759	0.015034	0.110109
4	0.004044	0.894583	0.011457	0.573100	0.013848	0.328759	0.015034	0.110109
5	0.004044	0.894583	0.011457	0.573100	0.013848	0.328759	0.015034	0.110109
6	0.004044	0.894583	0.011457	0.573100	0.013848	0.328759	0.015034	0.110109
7	0.004044	0.894583	0.011457	0.573100	0.013848	0.328759	0.015034	0.110109
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	-0.002879	0.898536	0.001891	0.582470	0.003355	0.338701	0.003822	0.115161
1	0.002021	0.898554	0.003561	0.582493	0.003848	0.338719	0.003870	0.115168
2	0.001394	0.898545	0.003357	0.582484	0.003788	0.338713	0.003864	0.115166
3	0.001451	0.898546	0.003375	0.582485	0.003793	0.338714	0.003865	0.115166
4	0.001448	0.898546	0.003374	0.582485	0.003793	0.338714	0.003865	0.115166
5	0.001448	0.898546	0.003374	0.582485	0.003793	0.338714	0.003865	0.115166
6	0.001448	0.898546	0.003374	0.582485	0.003793	0.338714	0.003865	0.115166
7	0.001448	0.898546	0.003374	0.582485	0.003793	0.338714	0.003865	0.115166

Çizelge 8.11 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda $\beta=5$, $c=0.5$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.009061	0.914257	0.076388	0.634343	0.107481	0.398261	0.122257	0.154785
1	0.027145	0.915257	0.082734	0.635862	0.109458	0.399400	0.122427	0.155249
2	0.024954	0.915011	0.081986	0.635546	0.109225	0.399188	0.122398	0.155168
3	0.025133	0.915033	0.082043	0.635585	0.109243	0.399217	0.122400	0.155180
4	0.025121	0.915030	0.082041	0.635581	0.109243	0.399214	0.122400	0.155179
5	0.025122	0.915030	0.082041	0.635581	0.109243	0.399215	0.122400	0.155179
6	0.025122	0.915030	0.082041	0.635581	0.109243	0.399215	0.122400	0.155179
7	0.025122	0.915030	0.082041	0.635581	0.109243	0.399215	0.122400	0.155179
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.004153	0.917546	0.065464	0.644242	0.094261	0.409555	0.108333	0.162771
1	0.024039	0.918502	0.072658	0.645695	0.096571	0.410661	0.108546	0.163232
2	0.021698	0.918256	0.071834	0.645381	0.096307	0.410451	0.108512	0.163151
3	0.021884	0.918278	0.071897	0.645418	0.096328	0.410480	0.108515	0.163164
4	0.021872	0.918274	0.071894	0.645415	0.096327	0.410477	0.108514	0.163462
5	0.021873	0.918274	0.071894	0.645415	0.096327	0.410477	0.108514	0.163162
6	0.021873	0.918274	0.071894	0.645415	0.096327	0.410477	0.108514	0.163162
7	0.021873	0.918274	0.071894	0.645415	0.096327	0.410477	0.108514	0.163162
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	-0.017196	0.931100	0.017860	0.687155	0.034805	0.460951	0.043397	0.174088
1	0.011441	0.931708	0.029431	0.687964	0.038997	0.461596	0.044380	0.174434
2	0.008442	0.931471	0.028266	0.687678	0.038588	0.461409	0.044237	0.174317
3	0.008658	0.931489	0.028348	0.687711	0.038618	0.461434	0.044248	0.174333
4	0.008646	0.931486	0.028344	0.678708	0.038617	0.461432	0.044248	0.174332
5	0.008646	0.931486	0.028344	0.678708	0.038617	0.461431	0.044248	0.174332
6	0.008646	0.931486	0.028344	0.678708	0.038617	0.461432	0.044248	0.174332
7	0.008646	0.931486	0.028344	0.678708	0.038617	0.461432	0.044248	0.174332

Çizelge 8.12 H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $\beta=5$, $c=0.8$ için yansıma ve geçiş Katsayıları

$f_1=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.009840	1.043224	0.146259	0.702343	0.227652	0.497573	0.285280	0.249902
1	0.024569	1.043965	0.158533	0.706948	0.231938	0.501295	0.285636	0.251694
2	0.032653	1.043453	0.157405	0.706108	0.231532	0.500722	0.285572	0.251476
3	0.023694	1.043530	0.157461	0.706201	0.231554	0.500795	0.285577	0.251508
4	0.023695	1.043522	0.157460	0.706193	0.231554	0.500788	0.285577	0.251504
5	0.023695	1.043523	0.157460	0.706194	0.231554	0.500788	0.285577	0.251504
6	0.023695	1.043523	0.157460	0.706194	0.231554	0.500788	0.285577	0.251504
7	0.023695	1.043523	0.157460	0.706194	0.231554	0.500788	0.285577	0.251504
$f_1=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.005635	0.935215	0.128360	0.718912	0.205949	0.517898	0.263185	0.267638
1	0.040093	0.938035	0.142119	0.723321	0.210929	0.521529	0.263658	0.269446
2	0.037071	0.937431	0.140904	0.722488	0.210480	0.520961	0.263585	0.269230
3	0.037243	0.937486	0.140963	0.722580	0.210504	0.521033	0.263589	0.269261
4	0.037224	0.937478	0.140962	0.722573	0.210504	0.521026	0.263590	0.269257
5	0.037224	0.937478	0.140963	0.722573	0.210504	0.521027	0.263590	0.269257
6	0.037224	0.937478	0.140963	0.722573	0.210504	0.521027	0.263590	0.269257
7	0.037224	0.937478	0.140963	0.722573	0.210504	0.521027	0.263590	0.269257
$f_1=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	-0.030107	0.957485	0.045981	0.794110	0.100250	0.617157	0.148352	0.362282
1	0.019245	0.959460	0.068596	0.796710	0.109907	0.619405	0.150170	0.363699
2	0.015605	0.95885	0.066971	0.795941	0.109242	0.618888	0.150049	0.363518
3	0.015791	0.958935	0.067042	0.796026	0.109274	0.618955	0.150057	0.363547
4	0.015780	0.958928	0.067041	0.796019	0.109274	0.618949	0.150057	0.363543
5	0.015780	0.958928	0.067041	0.796019	0.109274	0.618949	0.150057	0.363543
6	0.015780	0.958928	0.067041	0.796020	0.109274	0.618949	0.150057	0.363543
7	0.015780	0.958928	0.067041	0.796020	0.109274	0.618949	0.150057	0.363543

Çizelge 8.13 $\beta=0$, $\tau=1$, $f_1=0$, $c=0.8$ için yansıma katsayısı

N	H_N	C_N				F_N
		Sistem1	Sistem2	Sistem3	Sistem4	
0	0.279396	0.289271	0.279396	0.287369	0.281354	0.2557
1	0.280192	0.279629	0.280173	0.280615	0.280187	0.2896
2	0.280154	0.280175	0.280154	0.280176	0.280153	0.2813
3	0.280152	0.280148	0.280152	0.280148	0.280152	0.2803
4	0.280152	0.280154	0.280152	0.280154	0.280152	0.2803
5	0.280152	-	-	-	-	0.2802

Çizelge 8.14 $\beta=0$, $\tau=1$, $f_1=0$, $c=0.8$ için geçiş katsayısı

N	H_N	C_N				F_N
		Sistem1	Sistem2	Sistem3	Sistem4	
0	0.415749	0.401728	0.415749	0.414533	0.402903	0.4502
1	0.416252	0.416439	0.416252	0.416227	0.416463	0.4142
2	0.416250	0.416331	0.416249	0.416249	0.416331	0.4189
3	0.416246	0.416238	0.416246	0.416246	0.416238	0.4161
4	0.416245	0.416243	0.416245	0.416245	0.416243	0.4161
5	0.416245	-	-	-	-	0.4162

Çizelge 8.15 $\beta=0$, $c=0.8$ yansıma ve geçiş katsayıları

f_1	H_4		C_4		F_4	
	A^*	B^*	A^*	B^*	A^*	B^*
0.1	0.064925	0.896574	0.064926	0.896573	0.06563	0.8958
0.5	0.205616	0.621975	0.205616	0.621975	0.2055	0.6223
1	0.280152	0.416245	0.260152	0.416245	0.2803	0.4161
2	0.327951	0.197270	0.327951	0.197270	0.3281	0.1972

Çizelge 8.16 $\beta=0$, $\tau=1$, $f_1=0.5$, $c=0.8$ için yansıma katsayıları

N	H_N	C_N			
		Sistem1	Sistem2	Sistem3	Sistem4
0	0.173187	0.198494	0.170187	0.194558	0.174342
1	0.173112	0.152353	0.173112	0.152347	0.173144
2	0.173109	0.173042	0.173109	0.173044	0.173107
3	0.173106	0.173110	0.173106	0.173110	0.173106
4	0.173106	0.173104	0.173106	0.173104	0.173106
5	0.173106	-	-	-	-

Çizelge 8.17 $\beta=0$, $c=0.8$ yansıma ve geçiş katsayıları

f_1	H_4		C_4	
	A^*	B^*	A^*	B^*
0.1	0.039096	0.922396	0.039096	0.922396
0.5	0.123621	0.703233	0.123621	0.703233
1	0.173106	0.518755	0.173106	0.518755
2	0.211456	0.293647	0.211763	0.291780

8. 2 Singüler Özfonksiyonlar Yönteminin Lineer Anizotropik Saçılma Durumu İçin Slab-Albedo Problemine Uygulanması

Bir önceki bölümde H_N yöntemi ile incelenen slab-albedo problemi bu kısımda Singüler özfonksiyonlar yöntemi ile ele alınacaktır. Singüler özfonksiyonlar yöntemi ile izotropik ve lineer anizotropik saçılma durumları için slab-albedo problemi daha önce yapılan bazı çalışmalarda incelenmiştir (Kaşkaş *et al.* 1996, 1998, Güleçyüz *et al.* 1997,) . İki yöntemin, uygulanabilirliğinin ve nümerik yakınsaklığının kıyaslanması için böyle bir yol seçilmiştir. Yarı kalınlığı τ olan bir slab için C_N denklemleri (Benoist and Kavenoky 1968)

$$\begin{aligned} v^-(\mu) = & \int_0^1 G^-(\mu, \mu') v^+(\mu') \mu' d\mu' + \int_{-1}^0 G^+(\mu, \mu') v^-(\mu') \mu' d\mu' \\ & - \int_0^1 G^-(-\tau, \mu, \mu') v^T(\mu') \mu' d\mu', \end{aligned} \quad \mu < 0, \quad (8.52)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^1 G^+(\tau, \mu, \mu') v^+(\mu') \mu' d\mu' + \int_{-1}^0 G^+(\tau, \mu, \mu') v^-(\mu') \mu' d\mu' \\ & - \int_0^1 G^+(\mu, \mu') v^T(\mu') \mu' d\mu', \end{aligned} \quad \mu < 0, \quad (8.53)$$

$$\begin{aligned} 0 = & \int_0^1 G^-(\mu, \mu') v^+(\mu') \mu' d\mu' + \int_{-1}^0 G^-(\mu, \mu') v^-(\mu') \mu' d\mu' \\ & - \int_0^1 G^-(-\tau, \mu, \mu') v^T(\mu') \mu' d\mu', \end{aligned} \quad \mu > 0, \quad (8.54)$$

$$\begin{aligned} v^T(\mu) = & \int_0^1 G^+(\tau, \mu, \mu') v^+(\mu') \mu' d\mu' + \int_{-1}^0 G^+(\tau, \mu, \mu') v^-(\mu') \mu' d\mu' \\ & - \int_0^1 G^-(\mu, \mu') v^T(\mu') \mu' d\mu', \end{aligned} \quad \mu > 0, \quad (8.55)$$

gibi yazılır. Burada Green fonksiyonları

$$G^{\mp}(x_0 \rightarrow x; \mu_0 \rightarrow \mu) = \mp \frac{\phi(\pm \nu_0, \mu)}{N(\mp \nu_0)} \phi(\pm \nu_0, \mu_0) e^{\frac{-|x-x_0|}{\nu_0}} + \int_0^1 \frac{\phi(\pm \nu, \mu)}{N(\mp \nu)} \phi(\pm \nu, \mu_0) e^{\frac{-|x-x_0|}{\nu}} d\nu \quad (8.56)$$

şeklinde alınacaktır.

(8.52-55) denklemlerinden dört ayrı ikili denklem takımı içim çözüm yapmak mümkündür. Bu denklemlerden 8.52 ve 8.55 (sistem 2)'de deklemler (8.56) ile verilen Green fonksiyonu yazılır ve sırası ile μ^{m+1} ile çarpılıp $[-1,0]$ aralığında μ üzerinden integral alınırsa denklem 8.52'den

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^N \nu_l (-1)^{m+l+1} \left(\frac{1}{m+l+2} + \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{A_m(\nu_0)A_l(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{ml}^{AA} \right) + \\ & + \sum_{l=0}^N \nu_l^T (-1)^{m+1} \left(\left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{e^{\frac{-\tau}{\nu}}}{N(\nu_0)} B_m(\nu_0)A_k(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{km}^{ABE} \right) \\ & = (-1)^{m+1} \left(\left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{B_m(\nu_0)A_s(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{sm}^{AB} \right) \end{aligned} \quad (8.57)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$\nu^+(\mu) = \mu^s, \quad \mu > 0, \quad (8.58)$$

$$\nu^-(\mu) = \sum_{l=0}^N \nu_l^- \mu^s, \quad \mu < 0, \quad (8.59)$$

$$\nu^T(\mu) = \sum_{k=0}^N \nu_k^T \mu^k, \quad \mu > 0, \quad (8.60)$$

gibidir. Denklem 8.57 daha basit olarak

$$\sum_{l=0}^N \nu_l^- Q_{lm} + \sum_{k=0}^N \nu_k^T R_{km} = T_{sm} \quad (8.61)$$

formunda yazılabilir. Burada

$$Q_{lm} = (-1)^{m+l+1} \left(\frac{1}{m+l+2} + \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{A_m(\nu_0)A_l(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{ml}^{AA} \right) \quad (8.62)$$

$$R_{km} = (-1)^{m+1} \left(\left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{e^{\frac{\tau}{\nu}}}{N(\nu_0)} B_m(\nu_0)A_k(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{km}^{ABE} \right) \quad (8.63)$$

ve

$$T_{sm} = (-1)^{m+1} \left(\left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{B_m(\nu_0)A_s(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{sm}^{AB} \right) \quad (8.64)$$

şeklinde tanımlıdır. Denklem (8.55) için benzer hesaplamalar yapıldığında

$$\sum_{l=0}^N \nu_l^- K_{lm} + \sum_{k=0}^N \nu_k^T P_{km} = S_{sm} \quad (8.65)$$

denkleminde ulaşılır. Burada

$$K_{lm} = (-1)^l \left(\left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{e^{\frac{\tau}{\nu}}}{N(\nu_0)} B_m(\nu_0)A_l(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{lm}^{ABE} \right) \quad (8.66)$$

$$P_{km} = \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{A_m(\nu_0)A_k(\nu_0)}{N(\nu_0)} + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{km}^{AA} + \frac{1}{k+m+2} \quad (8.67)$$

$$S_{sm} = \left(\left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{e^{\frac{\tau}{\nu_0}}}{N(\nu_0)} B_m(\nu_0)B_s(\nu_0) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{sm}^{BBE} \right) \quad (8.68)$$

ile verilir. Eşitlik 8.61 ve 8.65 ile verilen ifadeler ortak çözülerek ν_l^- ve ν_k^T açılım katsayıları hesaplanır. Slab-albedo problemi için yansıma (albedo) ve geçiş katsayılarının ifadeleri

$$A^* = \frac{\int_0^1 \nu^-(\mu) \mu d\mu}{\int_0^1 \nu^+(\mu) \mu d\mu} \quad (8.69)$$

$$B^* = \frac{\int_0^1 v^T(\mu) \mu d\mu}{\int_0^1 v^+(\mu) \mu d\mu} \quad (8.70)$$

gibidir. Bu ifadelerde, 8.57-59 ile tanımlı ifadeler yerlerine yazılırsa

$$A^* = (s+2) \sum_{l=0}^N (-1)^l \frac{v_l^-}{l+2} \quad (8.71)$$

$$B^* = (s+2) \sum_{l=0}^N \frac{v_k^T}{l+2} \quad (8.72)$$

denklemleri elde edilir. Bu bağıntılar vardımı ile istenilen ikincil nötron sayısı (c), anizotropi parametresi (f_1) ve slab kalınlığı τ için A^* ve B^* değerleri hesaplanabilir. Çizelge 8.18’ de $\beta=0$, $\tau=1$, $f_1=0.5$, $c=0.8$. için geçiş katsayıları H_N , C_N , ve singüler özfonksiyonlar yöntemleri için ayrı ayrı verilmiştir. H_N yöntemi ile kıyaslanması bakımından singüler özfonksiyonla yöntemi ile, lineer anizotropik saçılma durumu için hesaplanan bazı yansıma ve geçiş katsayısı değerleri Çizelge 8.19’da verilmiştir. Yapılan nümerik hesaplamalarda Reduce 3.2 paket programı kullanılmıştır ve örnek bir program Ek.2’ de verilmiştir.

Çizelge 8.18 $\beta=0, \tau=1, f_1=0.5, c=0.8$. için geçiş katsayıları

N	H_N	C_N				Singüler Ö. F. Y.
		Sistem1	Sistem2	Sitem3	Sistem4	
0	0.519792	0.481297	0.519792	0.516966	0.483963	0.519792
1	0.518784	0.529137	0.518784	0.518736	0.589130	0.518784
2	0.518760	0.518514	0.518760	0.518759	0.518515	0.518760
3	0.518756	0.518767	0.518756	0.518756	0.518767	0.518756
4	0.518755	0.518758	0.518755	0.518755	0.518758	0.518755
5	0.518755	-	-	-	-	0.518755

Çizelge 8.19 Singüler özfonksiyonlar yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda, $s=0$, $c=0.8$ için yansıma ve geçiş katsayıları

$f_i=0$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.111991	0.819841	0.203440	0.622345	0.279396	0.415749	0.328431	0.196682
1	0.118872	0.818339	0.205571	0.621971	0.280173	0.416252	0.327985	0.197297
2	0.118748	0.818258	0.205618	0.621976	0.280154	0.416249	0.327952	0.197271
3	0.118749	0.818263	0.205616	0.621976	0.280152	0.416246	0.327951	0.197270
4	0.118749	0.818261	0.205616	0.621975	0.280152	0.416245	0.327951	0.197270
5	0.118749	0.818261	0.205616	0.621975	0.280152	0.416245	0.327951	0.197270
6	0.118749	0.818261	0.205616	0.621975	0.280152	0.416245	0.327951	0.197270
7	0.118749	0.818261	0.205616	0.621975	0.280152	0.416245	0.327951	0.197270
$f_i=0.1$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.057432	0.902970	0.188104	0.637398	0.260708	0.433445	0.309526	0.211449
1	0.059679	0.901722	0.190600	0.636794	0.261731	0.433801	0.309116	0.212033
2	0.059858	0.901629	0.190656	0.636791	0.261713	0.433796	0.309082	0.212006
3	0.059873	0.901623	0.190654	0.636791	0.261711	0.433792	0.309080	0.212004
4	0.059874	0.901623	0.190654	0.636790	0.261711	0.433792	0.309080	0.212005
5	0.059874	0.901623	0.190654	0.636790	0.261711	0.433792	0.309080	0.212005
6	0.059874	0.901624	0.190654	0.636790	0.261711	0.433792	0.309080	0.212005
7	0.059874	0.901624	0.190654	0.636790	0.261711	0.433792	0.309080	0.212005
$f_i=0.5$	$\tau=0.1$		$\tau=0.5$		$\tau=1$		$\tau=2$	
N	A*	B*	A*	B*	A*	B*	A*	B*
0	0.035491	0.924514	0.118669	0.705492	0.170186	0.519792	0.211427	0.293906
1	0.038850	0.922531	0.123516	0.703278	0.173112	0.518784	0.211516	0.293713
2	0.039077	0.922403	0.123622	0.703234	0.173109	0.518760	0.211459	0.293652
3	0.039094	0.922396	0.123621	0.703234	0.173106	0.518756	0.211457	0.293647
4	0.039096	0.922396	0.123621	0.703233	0.173106	0.518755	0.211456	0.293647
5	0.039096	0.922396	0.123621	0.703233	0.173106	0.518755	0.211456	0.293648
6	0.039096	0.922396	0.123621	0.703233	0.173106	0.518755	0.211456	0.293648
7	0.039096	0.922396	0.123621	0.703233	0.173106	0.518755	0.211456	0.293647

8.3 H_N Yönteminin Lineer Anizotropik Saçılma Durumu İçin Milne Problemine

Uygulanması

Milne problemi (Case 1967, Atalay 1999), dışardan ortama bir nötron akışının olmadığı durum için sonsuzdaki bir kaynaktan dolayı sınır yüzeyi yakınlarındaki nötron akısı ile ilgilenir. Sonsuza yerleştirilen kaynaktan dolayı sınır yüzeyi civarındaki nötron akısı asimptotik bir dağılım sergileyecektir. Bu durumda nötron akısının sıfır olduğu nokta extrapolasyon uzaklığı olacaktır. Bu kısımda H_N yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumunda Milne problemi incelenmiştir (Bulut *et al.* 2007). Hesaplamaya çalışılan değer ise bu extrapolasyon uzaklığıdır. Aynı zamanda ortamdan dışarı çıkan nötron akısı için seçilen farklı analitik ifadelerin, extrapolasyon uzaklığı değerlerinin, isetenen sonuçlara yakınsama derecesi üzerindeki etkisi incelenecektir

a) c<1 durumu için

Nötron transport denklemi aşağıdaki gibi yazılır.

$$\mu \frac{\partial \psi(x, \mu)}{\partial x} + \psi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^{+1} \psi(x, \mu') (1 + b\mu\mu') d\mu' \quad (8.73)$$

Yukarıdaki denklem, $b=0$ olması durumunda izotropik saçılma için olan nötron transport denkleminde indirgenir. $x = 0$ 'daki sınır koşulu

$$\psi(0, \mu) = 0, \quad \mu > 0 \quad (8.74)$$

gibi seçilmiştir. Şimdi ortamdan çıkan akı ifadesinin ne şekilde değiştiği seçilecektir. Farklı dört tip çıkan akı ifadesi için Milne problemi çözülecek ve extrapolasyon uzaklığı değeri hesaplanacaktır. İlk olarak

$$\psi(0, -\mu) = \sum_{l=0}^N a_l \mu^l, \quad \mu > 0 \quad (8.75)$$

şeklinde bir çıkan akı ifadesi ele alınacaktır. Eşitlik 8.74'deki sınır koşulu sınırdan içeri nötron girmediğini ifade eder. Milne problemi bir yarı uzay problemi olduğundan dolayı genel çözüm, Case'in özfonksiyonları cinsinden

$$\psi(x, \mu) = \phi_{0-}(x, \mu)e^{\frac{x}{\nu}} + a_{0+}\phi_{0+}(x, \mu)e^{-\frac{x}{\nu}} + \int_0^1 A(\nu)\phi_{\nu}(x, \mu)e^{-\frac{x}{\nu}} d\nu \quad (8.76)$$

gibi yazılır. Buradaki özfonksiyonlar denklem 8.4 ve 8.5'deki gibidir. Benzer şekilde bu kısımda da lineer anizotropik saçılma durumu ile ilgilenildiğinden bir önceki kısımda kullanılan özfonksiyonlar ve dolayısıyla aynı normalizasyon katsayısı değerleri kullanılacaktır.

Çözüme ulaşabilmek için genel çözümde verilen a_{0+} ve $A(\nu)$ katsayıları hesaplanmalıdır. $x = 0$ ' da çözüm denklem 8.76' dan

$$\psi(0, \mu) = \phi(-\nu_0, \mu) + a_{0+}\phi(\nu_0, \mu) + \int_0^1 A(\nu)\phi_{\nu}(\nu, \mu)d\nu \quad (8.77)$$

8.77 denkleminin her tarafı $\mu\phi(\nu_0, \mu)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında μ üzerinden integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \phi(\nu_0, \mu)\psi(0, \mu)d\mu &= \int_{-1}^1 \phi(\nu_0, \mu)\phi(-\nu_0, \mu)d\mu + a_{0+} \int_{-1}^1 \phi(\nu_0, \mu)\phi(\nu_0, \mu)d\mu \\ &+ \int_0^1 A(\nu)d\nu \int_{-1}^1 \phi(\nu_0, \mu)\phi_{\nu}(x, \mu)d\mu \end{aligned} \quad (8.78)$$

elde edilir. Burada 8.11 ve 8.12 ile verilen diklik bağıntıları kullanılırsa

$$\int_{-1}^1 \phi(\nu_0, \mu)\psi(0, \mu)d\mu = a_{0+} \int_{-1}^1 \phi(\nu_0, \mu)\phi(\nu_0, \mu)d\mu, \quad (8.79)$$

$$a_{0+} N(\nu_0) = \int_{-1}^1 \phi(\nu_0, \mu)\psi(0, \mu)d\mu \quad (8.80)$$

bulunur. Yukardaki integral $[-1,0]$ ve $[0,1]$ aralıklarına parçalanır, 8.74 bağıntısı ile verilen sınır koşulu ve 8.75' deki çıkan akı ifadesi kullanılırsa

$$a_{0^+} = -\frac{1}{N(\nu_0)} \frac{c\nu_0}{2} \sum_{l=0}^N a_l A_l(\nu_0) \quad (8.81)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $A_l(\nu_0)$ ifadesi denklem 8.20' deki gibidir. Benzer yolla $A(\nu)$ katsayısına ulaşmak mümkündür. Bunun için denklem 8.77'nin her iki tarafını $\mu\phi(\nu, \mu)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında μ üzerinden integrali almak yeterlidir.

$$A(\nu) = -\frac{1}{N(\nu)} \frac{c\nu}{2} \sum_{l=0}^N a_l A_l(\nu) \quad (8.82)$$

Son durumda (8.75) denklemi ile verilen genel çözüm ifadesi a_l cinsinden bulunmuş oldu . a_l katsayılarının bulunabilmesi için $x=0$ ' dan çıkan akı ifadesi kullanılır.

$$\psi(0, -\mu) = \phi(-\nu_0, -\mu) + a_{0^+} \phi(\nu_0, -\mu) + \int_0^1 A(\nu) \phi_\nu(\nu, -\mu) d\nu, \quad \mu > 0 \quad (8.83)$$

Bu denklemin her iki tarafı μ^{m+1} ile çarpılır, $[0,1]$ aralığında μ üzerinden integrali alınır, denklem 8.20, 8.21 ile verilen kısaltmalar yapılır ve bulunan a_{0^+} ve $A(\nu)$ katsayıları yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{m+l+1} &= \frac{c\nu_0}{2} B_{m-1}(\nu_0) - \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} \left(\sum_{l=0}^N b_l A_l(\nu_0) A_{m-1}(\nu_0) \right) \\ &+ \left(\frac{c}{2}\right)^2 \sum_{l=0}^N b_l \int_0^1 \frac{\nu^2 A_l(\nu) A_{m-1}(\nu)}{N(\nu)} d\nu \end{aligned} \quad (8.84)$$

ifadesi elde edilir. Bu denklem düzenlenirse

$$\sum_{l=0}^N a_l \left(\frac{1}{m+l+1} + \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} \left(\sum_{l=0}^N A_l(\nu_0) A_{m-1}(\nu_0) \right) + \left(\frac{c}{2}\right)^2 I_{l,m-1}^{AA} \right) = \frac{c\nu_0}{2} B_{m-1}(\nu_0) \quad (8.85)$$

denkleminde ulaşılır. Bu ifade yardımı ile a_l açılım katsayıları hesaplanabilir.

a_l açılım katsayılarının hesaplanması için başlangıçta çıkan akı ifadesinden faydalanılmıştı. Benzer şekilde 8.74 ile verilen sınır koşulu yardımıyla da benzer bir ifade elde etmek mümkündür. Bu ifade

$$\sum_{l=0}^N b_l \left(\left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} \left(\sum_{l=0}^N A_l(\nu_0) B_{m-1}(\nu_0) \right) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{l,m-1}^{AB} \right) = \frac{c\nu_0}{2} A_{m-1}(\nu_0) \quad (8.86)$$

biçimindedir.

Burada hesaplamaya çalışılan değer başlangıçta da belirtildiği gibi extrapolasyon uzaklığıdır. Kaynaktan uzakta, sınır yüzeyi civarında inceleme yapıldığından nötron dağılımı, ortamda asimptotik bir dağılım sergileyecektir. Bu durumda

$$\rho_{asip} = 2\pi \int_{-1}^{+1} (\psi_{0^-}(x, \mu) + \psi_{0^+}(x, \mu)) d\mu \quad (8.87)$$

Burada

$$\psi_{0^\pm}(x, \mu) = \phi_{0^\pm}(\mu) e^{\mp \frac{x}{\nu_0}} \quad (8.88)$$

gibidir. Asimptotik nötron yoğunluğu ifadesi tekrar yazılırsa

$$\rho_{asimp} = 2\pi \left[e^{\frac{x}{\nu_0}} + a_{0^+} e^{-\frac{x}{\nu_0}} \right] \quad (8.89)$$

gibi olur. z_0 (pozitif) extrapolasyon uzaklığı olmak üzere $x = -z_0$ noktası ρ_{asimp} değerini sıfır yapan noktadır.

$$0 = 2\pi \left[e^{-\frac{z_0}{\nu_0}} + a_{0^+} e^{\frac{z_0}{\nu_0}} \right] \quad (8.90)$$

Burada z_0 değeri yalnız bırakılırsa

$$z_0 = \frac{(i\pi - \ln(a_{0^+}))v_0}{2} \quad (8.91)$$

Denklem 8.85 ve 8.86'dan herhangi birisi kullanılarak çözüme ulaşmak mümkündür. Bundan sonraki işlemler yine bilgisayara dayanan nümerik işlemlerdir.

İkinci olarak ortamdan çıkan akı ifadesi

$$\psi(0, -\mu) = \sum_{l=0}^N a_l P_l(\mu) \quad , \quad \mu > 0 \quad (8.92)$$

gibi seçilir. Benzer işlemler yapıldığında aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$a_{0^+} = -\frac{cv_0}{2} \frac{1}{N(v_0)} \sum_{l=0}^N a_l M_l(v_0) \quad (8.93)$$

$$A(v) = -\frac{cv}{2} \frac{1}{N(v)} \sum_{l=0}^N a_l M_l(v) \quad (8.94)$$

Burada

$$M_l(\xi) = \frac{2}{c\xi} \int_0^1 \mu P_l(\mu) \phi(-\xi, \mu) d\mu \quad (8.95)$$

$$S_l(\xi) = \frac{2}{c\xi} \int_0^1 \mu P_l(\mu) \phi(\xi, \mu) d\mu \quad (8.96)$$

şekline kısaltma ifadeleridir. Bu ifadeler için türetme bağıntıları aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$M_0(\xi) = A_0(\xi) = \left\{ 1 - \xi \ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \right\} (1 + q\xi) - \frac{q}{2} \quad (8.97)$$

$$M_1(\xi) = A_1(\xi) = \frac{1}{2} - \frac{q}{3} - \xi A_0(\xi) \quad (8.98)$$

$$M_m(\xi) = \frac{2m-1}{m}(K_{m-1} - \xi M_{m-1}(\xi) - q(\frac{m}{2m-1}K_m + \frac{m-1}{2m-1}K_{m-2})) - \frac{m-1}{m}M_{m-2}(\xi) \quad (8.99)$$

$$S_0(\xi) = B_0(\xi) = \left\{ -1 - \xi \ln(1 - \frac{1}{\xi}) \right\} (1 + q\xi) + \frac{q}{2}, \quad (8.100)$$

$$S_1(\xi) = B_1(\xi) = -\frac{1}{2} - \frac{q}{3} + \xi B_0(\xi), \quad (8.101)$$

$$S_m(\xi) = \frac{2m-1}{m}(-K_{m-1} + \xi S_{m-1}(\xi) - q(\frac{m}{2m-1}K_m + \frac{m-1}{2m-1}K_{m-2})) - \frac{m-1}{m}S_{m-2}(\xi). \quad (8.102)$$

Yukarıdaki denklemlerde

$$K_m = \int_0^1 \mu P_m(\mu) d\mu \quad (8.103)$$

kısaltması kullanılmıştır. Burada $\xi = \nu, \nu_0$ şeklindedir ve $q = 3f_1(1-c)\nu_0$ gibi tanımlıdır. Çıkan akı ifadesindeki a_l açılım katsayılarının hesaplanması için denklem 8.74' deki sınır koşulu kullanılır.

$$\psi(0, \mu) = \phi(\nu_0, -\mu) + a_{0+}\phi(\nu_0, \mu) + \int_{-1}^1 A(\nu)\phi(\nu, \mu)d\nu, \quad \mu > 0. \quad (8.104)$$

Denklem 8.104' ün her iki tarafı μ^{m+1} ile çarpılıp $\mu \in [0, 1]$ aralığında integrali alınır ve denklem 8.93-94 ile verilen a_{0+} ve $A(\nu)$ açılım katsayıları kullanılırsa

$$\sum_{l=0}^N a_l \left\{ \left(\frac{c\nu_0}{2} \right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} M_l(\nu_0) S_m(\nu_0) + \frac{c^2}{2} I_{l,m}^{MS} \right\} = \frac{c\nu_0}{2} M_m(\nu_0) \quad (8.105)$$

ifadesi elde edilir. Burada işlemlerde kolaylık olması açısından

$$I_{l,m}^{MS} = \int_0^1 \frac{\nu^2 M_l(\nu) S_m(\nu)}{N(\nu)} d\nu \quad (8.106)$$

gibi tanımlı olan kısaltma ifadesi kullanılmıştır. Denklem (8.105) ifadesinden bulunacak a_l ifadesi ile denklem (8.91)' den extrapolasyon ifadesi hesaplanabilir.

Ortamdan çıkan nötron akısı ifadesinin üçüncü tipi

$$\psi(0, -\mu) = \sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^l} \quad , \quad \mu > 0 \quad (8.107)$$

gibi seçilmiştir. Benzer yollar takip edilerek aşağıdaki ifadelere ulaşılır.

$$a_{0^+} = -\frac{1}{N(\nu_0)} \sum_{l=0}^N a_l I_l^-(\nu_0) \quad (8.108)$$

$$A(\nu) = -\frac{1}{N(\nu)} \sum_{l=0}^N a_l I_l^-(\nu) \quad (8.109)$$

burada

$$I_l^-(\xi) = \int_0^1 \mu \frac{\phi(\xi, -\mu)}{(1+\mu)^l} d\mu \quad (8.110)$$

şeklinde tanımlıdır ve $\xi = \nu, \nu_0$ gibidir. Benzer matematiksel yolla a_l katsayılarını hesaplamak için

$$\sum_{l=0}^N a_l \left\{ \left(\frac{c\nu_0}{2} \right) \frac{1}{N(\nu_0)} I_l^-(\nu_0) B_m(\nu_0) + \frac{c}{2} I_{l,m}^A \right\} = \frac{c\nu_0}{2} A_m(\nu_0) \quad (8.111)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$I_{l,m}^A = \int_0^1 \nu \frac{I_l^-(\nu) A_m(\nu)}{N(\nu)} d\nu \quad (8.112)$$

gibi tanımlıdır. Son olarak ortamdan çıkan akı ifadesinin dördüncü tipi

$$\psi(0, -\mu) = \sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^l} \quad , \quad \mu > 0 \quad (8.113)$$

gibi alınır. Benzer işlemler yapıldığında

$$a_{0^+} = -\frac{1}{N(\nu_0)} \sum_{l=0}^N a_l I_{l+1}^-(\nu_0) \quad , \quad (8.114)$$

$$A(\nu) = -\frac{1}{N(\nu)} \sum_{l=0}^N a_l I_{l+1}^-(\nu) \quad (8.115)$$

ve

$$\sum_{l=0}^N a_l \left\{ \left(\frac{c\nu_0}{2} \right) \frac{1}{N(\nu_0)} I_{l+1}^-(\nu_0) B_m(\nu_0) + \frac{c}{2} I_{l+1,m}^A \right\} = \frac{c\nu_0}{2} A_m(\nu_0) \quad (8.116)$$

ifadeleri elde edilir. Burada

$$I_{l+1}^-(\nu_0) = \int_0^1 \mu \frac{\phi(\xi, -\mu)}{(1+\mu)^{l+1}} d\mu, \quad (8.117)$$

$$I_{l+1,m}^A = \int_0^1 \nu \frac{I_{l+1}^-(\nu) A_m(\nu)}{N(\nu)} d\nu \quad (8.118)$$

kısaltmaları kullanılmıştır.

Şimdi herbir çıkan akı ifadesi için extrapolasyon katsayısını hesaplamak mümkündür. $c < 1$ değeri için hesaplanan nümerik değerler Çizelge 8.20-23'de verilmiştir.

b) $c > 1$ durumunda;

Bu kısımdaki analitik işlemler için $c < 1$ için bulunan ifadelerde $\nu_0 \rightarrow -i\nu_0$ almak yeterlidir. Bu durumda temel denklemler yazılırsa

$$a_{0^+} = \frac{1}{N(-iv_0)} \frac{civ_0}{2} \sum_{l=0}^N b_l A_l(-iv_0) \quad (8.119)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^N b_l \left(\frac{1}{m+l+1} - \left(\frac{cv_0}{2} \right)^2 \frac{1}{N(-iv_0)} \left(\sum_{l=0}^N A_l(-iv_0) A_{m-1}(-iv_0) \right) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{l,m-1}^{AA} \right) \\ &= -\frac{civ_0}{2} B_{m-1}(-iv_0) \end{aligned} \quad (8.120)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^N b_l \left(-\left(\frac{cv_0}{2} \right)^2 \frac{1}{N(-iv_0)} \left(\sum_{l=0}^N A_l(-iv_0) B_{m-1}(-iv_0) \right) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{l,m-1}^{AB} \right) \\ &= -\frac{civ_0}{2} A_{m-1}(-iv_0) \end{aligned} \quad (8.121)$$

Aşağıdaki kısaltmalar yapılır ve denklem 8.120 ve 8.121 yeniden yazılırsa

$$T_{ml} = \frac{1}{m+l+1} - \left(\frac{cv_0}{2} \right)^2 \frac{1}{N(-iv_0)} \left(\sum_{l=0}^N A_l(-iv_0) A_{m-1}(-iv_0) \right) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{l,m-1}^{AA} \quad (8.122)$$

$$Q_m = -\frac{civ_0}{2} B_{m-1}(-iv_0) \quad , \quad (8.123)$$

$$W_m = -\frac{civ_0}{2} A_{m-1}(-iv_0) \quad , \quad (8.124)$$

$$H_{ml} = -\left(\frac{cv_0}{2} \right)^2 \frac{1}{N(-iv_0)} \left(\sum_{l=0}^N A_l(-iv_0) B_{m-1}(-iv_0) \right) + \left(\frac{c}{2} \right)^2 I_{l,m-1}^{AB} \quad , \quad (8.125)$$

$$\sum_{l=0}^N b_l T_{ml} = Q_m \quad , \quad (8.126)$$

$$\sum_{l=0}^N b_l H_{ml} = W_m \quad (8.127)$$

ifadeleri elde edilir. Bu durumda extrapolasyon uzaklığı ifadesi tekrar incelenmelidir. Eşitlik 8.90'da $\nu_0 \rightarrow -i\nu_0$ alınır

$$0 = 2\pi \left[e^{\frac{iz_0}{\nu_0}} + a_{0^+} e^{\frac{iz_0}{\nu_0}} \right] \quad (8.128)$$

elde edilir. Bu durumda

$$-a_{0^+} = e^{\frac{2iz_0}{\nu_0}}, \quad (8.129)$$

$$z_0 = \frac{\nu_0}{2} A \cos(a_{0^+}) \quad (8.130)$$

biçiminde elde edilir. Çeşitli $c > 1$ değerleri için hesaplanan extrapolasyon değerleri Çizelge 8.24-25'de verilmiştir. H_0 yaklaşıklığı için aşağıdaki gibi bir yol izlenir.

$N = 0 \Rightarrow$ 8.126 ve ya 8.127 denklemlerinden biri kullanılarak

$$b_0 T_{00} = Q_0 \quad (8.131)$$

ve ya

$$b_0 H_{00} = W_0 \quad (8.132)$$

denklemleri bulunur. Buradaki her iki denklemden b_0 'a ulaşmak mümkündür.

T_{00} , H_{00} , Q_0 ve W_0 değerleri denklem 8.122-125'deki gibidir. Denklem 8.119'dan

$$a_{0^+} = \frac{1}{N(-i\nu_0)} \frac{ic\nu_0}{2} b_0 A_0(-i\nu_0) \quad (8.133)$$

ifadesi yazılır. Bu ifadedeki bütün terimler bilinmektedir. Buradan bulunacak sonuç denklem 8.130'de yazılırsa extrapolasyon uzaklığı ifadesine ulaşılır. Bu kısımdaki nümerik hesaplar Reduce 3.6 ve Mathematica 5.0 paket programları kullanılarak yapılmıştır. Örnek programlar Ek 3 ve Ek 4'de verilmiştir.

Çizelge 8.20 $c=0.5$ için extrapolasyon uzaklığı

N	$f_1=0$	$f_1=0.1$	$f_1=0.2$	$f_1=0.3$	$f_1=0.5$
0	1.452859	1.492238	1.562842	1.667518	2.029827
1	1.441221	1.483529	1.558213	1.667513	2.082620
2	1.440865	1.483382	1.558597	1.670690	2.080531
3	1.440852	1.483381	1.558524	1.670667	2.080515
4	1.440851	1.483383	1.558523	1.670667	2.080514
5	1.440851	1.483383	1.558523	1.670667	2.080514
6	1.440851	1.483383	1.558523	1.670667	2.080514
7	1.440851	1.483383	1.558523	1.670667	2.080514
8	1.440851	1.483383	1.558523	1.670667	2.080514
9	1.440851	1.483383	1.558523	1.670667	2.080514
10	1.440851	1.483383	1.558523	1.670667	2.080514

Çizelge 8.21 $c=0.8$ için extrapolasyon uzaklığı

N	$f_1=0$	$f_1=0.1$	$f_1=0.2$	$f_1=0.3$	$f_1=0.5$
0	0.893331	0.972802	1.071004	1.194946	1.573273
1	0.889080	0.968750	1.067280	1.191804	1.573215
2	0.889055	0.968731	1.067268	1.191804	1.573570
3	0.889055	0.968730	1.067268	1.191805	1.573570
4	0.889055	0.968730	1.067268	1.191805	1.573570
5	0.889055	0.968730	1.067268	1.191805	1.573569
6	0.889055	0.968730	1.067268	1.191805	1.573569
7	0.889055	0.968730	1.067268	1.191805	1.573569
8	0.889055	0.968730	1.067268	1.191805	1.573569
9	0.889055	0.968730	1.067268	1.191805	1.573569
10	0.889055	0.968730	1.067268	1.191805	1.573569

Çizelge 8.22 $c=0.9999$ için extrapolasyon uzaklığı

N	$f_1=0$	$f_1=0.1$	$f_1=0.2$	$f_1=0.3$	$f_1=0.5$
0	0.712851	0.792048	0.891043	1.018319	0.425584
1	0.710517	0.789457	0.888132	1.014996	1.420948
2	0.710517	0.789457	0.888131	1.014996	1.420948
3	0.710517	0.789457	0.888131	1.014996	1.420948
4	0.710517	0.789457	0.888131	1.014996	1.420948
5	0.710517	0.789457	0.888131	1.014996	1.420948
6	0.710517	0.789457	0.888131	1.014996	1.420948
7	0.710517	0.789457	0.888131	1.014996	1.420948
8	0.710517	0.789457	0.888131	1.014996	1.420948
9	0.710517	0.789457	0.888131	1.014996	1.420948
10	0.710517	0.789457	0.888131	1.014996	1.420948

Çizelge 8.23 $c=1.2$ için extrapolasyon uzaklığı

N	$f_1=0$	$f_1=0.1$	$f_1=0.2$	$f_1=0.3$	f_1
0	0.592737	0.666915	0.762404	0.890004	1.341032
1	0.592407	0.666514	0.761911	0.889390	1.340021
2	0.592392	0.666498	0.761893	0.889371	1.334000
3	0.592392	0.666498	0.761893	0.889371	1.334000
4	0.592392	0.666498	0.761893	0.889371	1.334000
5	0.592392	0.666498	0.761893	0.889371	1.334000
6	0.592392	0.666498	0.761893	0.889371	1.334000
7	0.592392	0.666498	0.761893	0.889371	1.334000
8	0.592392	0.666498	0.761893	0.889371	1.334000
9	0.592392	0.666498	0.761893	0.889371	1.334000
10	0.592392	0.666498	0.761893	0.889371	1.334000

Çizelge 8.24 $c=1.5$ için extrapolasyon uzaklığı

N	$f_1=0$	$f_1=0.1$	$f_1=0.2$	$f_1=0.3$	$f_1=0.5$
0	0.474938	0.540390	0.628672	0.755258	1.329732
1	0.474888	0.540366	0.628680	0.755308	1.329921
2	0.474870	0.540344	0.628654	0.755276	1.329921
3	0.474869	0.540344	0.628654	0.755276	1.329872
4	0.474869	0.540344	0.628654	0.755276	1.329872
5	0.474869	0.540344	0.628654	0.755276	1.329872
6	0.474869	0.540344	0.628654	0.755276	1.329872
7	0.474869	0.540344	0.628654	0.755276	1.329872
8	0.474869	0.540344	0.628654	0.755276	1.329872
9	0.474869	0.540344	0.628654	0.755276	1.329872
10	0.474869	0.540344	0.628654	0.755276	1.329872

Çizelge 8.25 Farklı çıkan akı ifadeleri için extrapolasyon uzaklığı değerleri

$I(0, -\mu)$	$f_1 = 0$						
$N \rightarrow 0$	1	2	3	4	5	6	
$\sum_{l=0}^N a_l \mu^l$	1.452859	1.441221	1.440865	1.440852	1.440850	1.440850	1.440850
$\sum_{l=0}^N a_l P_l(\mu)$	1.452859	1.441219	1.440863	1.440850	1.440850	1.440850	1.440850
$\sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^l}$	1.452859	1.441339	1.440873	1.440851	1.440850	1.440850	1.440850
$\sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^{l+1}}$	1.456316	1.441497	1.440881	1.440851	1.440850	1.440850	1.440850
Ref. [11]							1.44085
$I(0, -\mu)$	$f_1 = 0.1$						
$N \rightarrow 0$	1	2	3	4	5	6	
$\sum_{l=0}^N a_l \mu^l$	1.492237	1.483529	1.483382	1.483381	1.483383	1.483383	1.483383
$\sum_{l=0}^N a_l P_l(\mu)$	1.492237	1.483528	1.483381	1.483382	1.483383	1.483383	1.483383
$\sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^l}$	1.492237	1.483589	1.483381	1.483380	1.483383	1.483383	1.483383
$\sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^{l+1}}$	1.495071	1.483672	1.483382	1.483380	1.483383	1.483383	1.483383
Ref. [11]							1.48338
$I(0, -\mu)$	$f_1 = 0.2$						
$N \rightarrow 0$	1	2	3	4	5	6	
$\sum_{l=0}^N a_l \mu^l$	1.562847	1.558213	1.558597	1.558524	1.558523	1.558523	1.558523
$\sum_{l=0}^N a_l P_l(\mu)$	1.562847	1.558212	1.558597	1.558523	1.558522	1.558522	1.558522
$\sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^l}$	1.562847	1.558163	1.558866	1.558524	1.558522	1.558522	1.558522
$\sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^{l+1}}$	1.564716	1.558110	1.559428	1.558525	1.558523	1.558523	1.558523
Ref. [11]							1.55852
$I(0, -\mu)$	$f_1 = 0.3$						
$N \rightarrow 0$	1	2	3	4	5	6	
$\sum_{l=0}^N a_l \mu^l$	1.667517	1.667513	1.670690	1.670667	1.670667	1.670667	1.670667
$\sum_{l=0}^N a_l P_l(\mu)$	1.667517	1.667513	1.670690	1.670667	1.670667	1.670667	1.670667
$\sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^l}$	1.667517	1.667544	1.670718	1.670667	1.670667	1.670667	1.670667
$\sum_{l=0}^N a_l \frac{1}{(1+\mu)^{l+1}}$	1.667765	1.667393	1.670743	1.670668	1.670667	1.670667	1.670667
Ref. [11]							1.67067

8.4 Singüler Özfonksiyonlar Yönteminin Lineer Anizotropik Saçılma Durumu İçin Milne Problemine Uygulanması

Daha önce yapılmış bazı çalışmalarda Singüler özfonksiyonlar yöntemi ile, izotropik ve anizotropik saçılma durumu için Milne problemi incelenmiştir (Tezcan *et al.* 1999). Bu kesimde, Milne problemi, Singüler özfonksiyonlar yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumu için incelenecektir (Bulut *et al.* 2007). Milne problemi bir yarı uzay problemi olduğundan denklem denklem 8.52-55 ile verilen ifadeler yarı uzay için daha sade bir hal alacaktır. Yarı uzay problemi için C_N denklemleri (Benoist and Kavenoky 1968)

$$\nu^+(\mu) = \int_0^1 G(\mu, \mu') \nu^+(\mu') d\mu' + \int_{-1}^0 G(\mu, \mu') \nu^-(\mu') d\mu', \quad \mu > 0 \quad (8.134)$$

$$\nu^-(\mu) = \int_0^1 G(\mu, \mu') \nu^+(\mu') d\mu' + \int_{-1}^0 G(\mu, \mu') \nu^-(\mu') d\mu', \quad \mu < 0 \quad (8.135)$$

gibidir. Burada $\nu^+(\mu)$ ve $\nu^-(\mu)$ sırası ile ortamın yüzeyinden içeri giren ve dışarı çıkan net nötron akılarını gösterir. Sonsuzdaki bir kaynaktan dolayı $x = 0$ 'daki nötron akısı

$$\nu_0 \frac{1 - q\mu}{\nu_0 + \mu} \quad (8.136)$$

ifadesi ile verilir. Milne problemi için $x = 0$ 'da ortamdan içeri nötron girmemektedir. Bu durumda düzlem geometride net açısal akılar

$$\int_{-1}^0 G(\mu, \mu') \nu^-(\mu') d\mu' + \nu_0 \frac{1 - q\mu}{\nu_0 + \mu} = 0, \quad \mu > 0, \quad (8.137)$$

$$\int_{-1}^0 G(\mu, \mu') \nu^-(\mu') d\mu' + \nu_0 \frac{1 - q\mu}{\nu_0 + \mu} = \nu^-(\mu), \quad \mu < 0 \quad (8.138)$$

şeklinde yazılabilir. $G(\mu, \mu')$ ifadesi sonsuz ortam Green fonksiyonudur. Burada ortamın yüzeyine sağdan ve soldan yaklaşıldığını belirlemek için G yerine $G^\mp$ kullanıldığında

$$\int_{-1}^0 G^-(\mu, \mu') v^-(\mu') d\mu' + v_0 \frac{1-q\mu}{v_0 + \mu} = 0, \quad \mu > 0 \quad (8.139)$$

$$\int_{-1}^0 G^+(\mu, \mu') v^-(\mu') d\mu' + v_0 \frac{1-q\mu}{v_0 + \mu} = v^-(\mu), \quad \mu < 0 \quad (8.140)$$

ifadelerine ulaşılır. Ortamdan dışarı çıkan akı ifadesi

$$v^-(\mu) = \sum_{l=0}^N v_l^- \mu^l \quad (8.141)$$

gibi alınır ve denklem 8.139 ve 8.140'de yerine yazıldığında v_l^- katsayısı için bir denklem elde edilir. Extrapolasyon uzaklığını bulmak için sonsuzdaki kaynaktan dolayı sınırdaki asimptotik çözüm

$$\phi_{as}(x) = v_0 \ln\left(\frac{v_0 + 1}{v_0 - 1}\right) (1 + r v_0^2) e^{x/v_0} - 2q v_0 + \int_{-1}^1 d\mu \int_{-1}^0 G^-(x, \mu, \mu') \mu' v^-(\mu') d\mu' \quad (8.142)$$

ile verilir. Burada $r = f_1(1-c)$ gibi tanımlıdır. Case'in özfonksiyonları cinsinden verilen Green fonksiyonu

$$G^\mp(x_0 \rightarrow x; \mu_0 \rightarrow \mu) = \mp \frac{\phi(\pm v_0, \mu)}{N(\mp v_0)} \phi(\pm v_0, \mu_0) e^{\frac{\mp|x-x_0|}{v_0}} + \int_0^1 \frac{\phi(\pm v, \mu)}{N(\mp v)} \phi(\pm v, \mu_0) e^{\frac{\mp|x-x_0|}{v}} dv \quad (8.143)$$

şeklindedir. Burada denklem 8.143'de verilen singüler özfonksiyonlar lineer anizotropik saçılma durumu için yazılmıştır. Green fonksiyonu denklem 8.142' de yerine yazılırsa

$$\phi_{as}(x) = e^{\frac{x}{v_0}} v_0 \ln\left(\frac{v_0+1}{v_0-1}\right)(1+qv_0) - 2qv_0 + \frac{cv_0}{2} \frac{e^{-\frac{x}{v_0}}}{N(v_0)} \sum_{l=0}^N v_l^- (-1)^{l+1} A_l(v_0) \quad (8.144)$$

elde edilir. Denklem (8.139-140)'da Green fonksiyonları yerine yazılır, denklemlerin her iki tarafı μ^{m+1} ile çarpılır ve $\mu \in [0,1]$ aralığında integral alınır

$$\sum_{l=0}^N v_l^- (-1)^l \left\{ \left(\frac{cv_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(v_0)} B_l(v_0) A_m(v_0) + \frac{c^2}{2} I_{ml}^{AB} \right\} = v_0 A_m(v_0) \quad (8.145)$$

$$\sum_{l=0}^N v_l^- (-1)^l \left\{ \frac{1}{l+m+2} \left(\frac{cv_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(v_0)} A_l(v_0) A_m(v_0) + \frac{c^2}{2} I_{ml}^{AA} \right\} = v_0 B_m(v_0) \quad (8.146)$$

ifadeleri elde edilir. Extrapolasyon uzaklığı

$$z_0 = -\frac{v_0}{2} \ln\left[-\frac{\phi_N(v_0)}{\phi_\infty(v_0)}\right] \quad (8.147)$$

denklemleri ile tanımlıdır. Burada

$$\phi_\infty(v_0) = v_0 \ln\left(\frac{v_0+1}{v_0-1}\right)(1+qv_0) - 2qv_0 = \frac{2}{c} \quad (8.148)$$

ve

$$\phi_N(v_0) = \frac{cv_0}{2} \frac{e^{-\frac{x}{v_0}}}{N(v_0)} \sum_{l=0}^N v_l^- (-1)^{l+1} A_l(v_0) \quad (8.149)$$

gibidir. Denklem 8.148 ve 8.149 ile verilen ifadeler denklem 8.147'de yerlerine yazılırsa z_0 extrapolasyon uzaklığı hesaplanmış olur. Çizelge 8.26'da singüler özfonksiyonlar yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumu için hesaplanan extrapolasyon uzaklık değerleri verilmiştir.

<

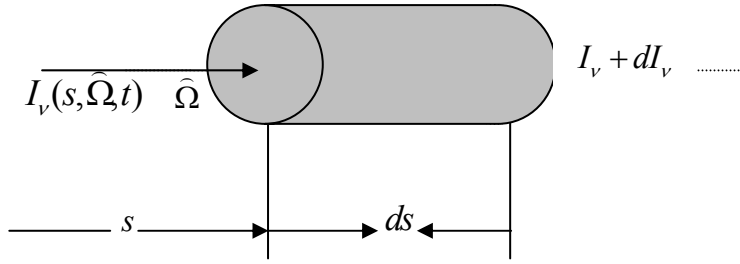
Çizelge 8.26 Singüler özfonksiyonlar yöntemi ile lineer anizotropik saçılma durumu için çeşitli extrapolasyon uzaklığı değerleri

f_1	$c = 0.5$						
	$N \rightarrow 0$	1	2	3	4	5	6
0	1.389304	1.446580	1.440253	1.440907	1.440846	1.440849	1.440850
0.1	1.417859	1.490118	1.482738	1.483441	1.483378	1.483382	1.483383
0.2	1.474067	1.566586	1.557815	1.558582	1.558518	1.558522	1.558522
0.3	1.558860	1.680653	1.669865	1.670729	1.670663	1.670667	1.670667
f_1	$c = 0.8$						
	$N \rightarrow 0$	1	2	3	4	5	6
0	0.863169	0.889903	0.889028	0.889054	0.889055	0.889055	0.889055
0.1	0.937519	0.969658	0.968704	0.968730	0.968730	0.968730	0.968730
0.2	1.029002	1.068292	1.067241	1.067268	1.067268	1.067268	1.067268
0.3	1.143835	1.192952	1.191777	1.191805	1.191805	1.191805	1.191805
f_1	$c = 1.2$						
	$N \rightarrow 0$	1	2	3	4	5	6
0	0.585978	0.593258	0.592439	0.592392	0.592392	0.592392	0.592392
0.1	0.658222	0.667338	0.666540	0.666498	0.666498	0.666498	0.666498
0.2	0.751034	0.762688	0.761930	0.761894	0.761894	0.761894	0.761894
0.3	0.874786	0.890089	0.889403	0.889371	0.889371	0.889371	0.889371
f_1	$c = 1.5$						
	$N \rightarrow 0$	1	2	3	4	5	6
0	0.489429	0.473432	0.474970	0.474885	0.474869	0.474869	0.474869
0.1	0.555814	0.538655	0.540431	0.540356	0.540344	0.540344	0.540344
0.2	0.645232	0.626640	0.628723	0.628662	0.628654	0.628654	0.628654
0.3	0.773245	0.752829	0.755324	0.755280	0.755275	0.755276	0.755276

9. P_N VE H_N YÖNTEMLERİ İLE RADIATIVE TRANSFER DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

9.1 Radiative Transfer Denkleminin Yazılması

Spektral soğurma katsayısı κ_ν ve spektral saçılma katsayısı σ_ν ile karakterize edilen, ışığı saçan soğuran ve yayan bir ortam ele alınsın. $I_\nu(s, \hat{\Omega}, t)$ ifadesi, ele alınan ortama doğru, s yolu boyunca $\hat{\Omega}$ doğrultusunda gelen tek renkli radyasyon yoğunluğudur. Silindir biçiminde seçilecek olan bir hacim elemanı yardımı ile radiative transfer denklemi türetilebilir (Özışık 1973).



Şekil 9.1 Radiative transfer denkleminin türetilmesinde kullanılan hacim elemanı

Şekil 9.1’de $I_\nu(s, \hat{\Omega}, t)$ radyasyon yoğunluğu s ’deki, $I_\nu(s, \hat{\Omega}, t) + dI_\nu$ ise $s + ds$ ’deki radyasyon yoğunluğudur. Burada dI_ν , ds yolu boyunca spektral radyasyon yoğunluğundaki net artışı göstermektedir. t ile $t + dt$ zaman aralığında, s ile $s + ds$ yolu arasında, dA yüzeyindenden geçen, doğrultusu $\hat{\Omega}$ ile $\hat{\Omega} + d\hat{\Omega}$ arasında ve frekansı ν ile $\nu + d\nu$ arasında olan radyasyon akısından kaynaklanan radiative enerjideki değişim

$$dI_\nu(s, \hat{\Omega}, t) dA d\Omega d\nu dt \quad (9.1)$$

ifadesi ile verilir. W_ν ifadesi, birim zamanda, birim hacim, birim katı açı ve birim frekans başına net radiative enerji kazancı olmak üzere denklem 9.1 yerine

$$W_\nu dA ds d\Omega dv dt \quad (9.2)$$

ifadesi yazılabilir. Denklem 9.1 ve 9.2'den

$$\frac{dI_\nu(s, \hat{\Omega}, t)}{ds} = W_\nu \quad (9.3)$$

yazılır. c ışık hızı olmak üzere ds yolu için aşağıdaki bağıntı yazılabilir.

$$ds = c dt \quad (9.4)$$

Denklem 9.3 yeniden yazılırsa

$$\frac{1}{c} \frac{DI_\nu(s, \hat{\Omega}, t)}{Dt} = W_\nu. \quad (9.5)$$

Denklem 9.5' deki D/Dt ifadesi özel bir türev olup ışık hızında ilerleyen tanecikler için yazılır. Zamana göre kısmi turevi ve uzay bağımlılığı içerir.

$$\frac{DI_\nu}{Dt} \equiv \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + c \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} I_\nu. \quad (9.6)$$

Yukardaki ifade aynı zamanda

$$\frac{DI_\nu}{Dt} \equiv \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + c \vec{\nabla} \cdot (\hat{\Omega} I_\nu) \quad (9.7)$$

gibi yazılabilir. Burada

$$\vec{\nabla} \cdot (\hat{\Omega} I_\nu) = I_\nu \vec{\nabla} \cdot \hat{\Omega} + \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} I_\nu = \hat{\Omega} \cdot \vec{\nabla} I_\nu \quad (9.8)$$

tanımı kullanılmıştır. Işığın yayılma doğrultusu s yolu boyunca seçilirse $\nabla \cdot (\hat{\Omega} I_\nu) = \partial I_\nu / \partial s$ ifadesi yazılabilir ve denklem 9.8

$$\frac{DI_\nu}{Dt} \equiv \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + c \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \quad (9.9)$$

şekline dönüşür. Bu durumda denklem 9.5 yeniden yazılırsa

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = W_\nu \quad (9.10)$$

elde edilir. Denklem 9.10'daki W_ν ifadesinin türetilmesi gereklidir. Işığın saçıldığı soğurulduğu ve yayıldığı bir ortam için net radiative enerji kazancı hesaplanırken birim hacim için, kazanılan ve kaybedilen enerjileri ifade eden terimlerin yazılması gereklidir.

$$W_\nu = W_{emission} - W_{absorption} + W_{in-scattering} - W_{out-scattering} \quad (9.11)$$

Denklem 9.11'de sağdaki ilk terim madde tarafından birim zamanda, birim hacim başına, birim katı açı ve frekans için dışarı salınan radyasyondan dolayı kazanılan radiative enerji olup

$$W_{emission} = j_\nu^e(s, t) \quad (9.12)$$

ile gösterilir.

Denklem 9.11' de sağdaki ikinci terim madde tarafından birim zaman, hacim, katı açı ve frekans başına soğurulan radyasyondan dolayı kaybedilen radiative enerjiyi göstermektedir ve aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$W_{absorption} = \kappa_\nu(s) I_\nu(s, \hat{\Omega}, t) \quad (9.13)$$

Üçüncü terim ise madde yüzeyine gelen radyasyonun $\hat{\Omega}$ doğrultusunda saçılması ile birim zamanda, birim hacim, katı açı ve frekans başına kazanılan radiative enerjiyi gösterir ve

$$W_{in-scattering} = \frac{1}{4\pi} \sigma_v(s) \int_{\Omega'=4\pi} p(\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) I_v(s, \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}' \quad (9.14)$$

gibi tanımlıdır. $\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega} = \cos \theta_0$ olup θ_0 gelen ışık ışını ile saçılan arasındaki açıdır.

Denklem 9.11'de sağdaki son terim madde üzerine gelen radyasyonun $\hat{\Omega}$ doğrultusu dışında herhangi bir yönde saçılması ile birim zamanda, birim hacim, katı açı ve frekans başına kayıbedilen radiative enerjiyi göstermektedir. Bu terimde aşağıdaki gibi yazılır.

$$W_{out-scattering} = \sigma_v(s) I_v(s, \hat{\Omega}, t) \quad (9.15)$$

Elde edilen bu ifadeler denklem 9.11'da yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{\partial I_v(s, \hat{\Omega}, t)}{\partial t} + \frac{\partial I_v(s, \hat{\Omega}, t)}{\partial s} + [\kappa_v(s) + \sigma_v(s)] I_v(s, \hat{\Omega}, t) \\ & = j_v^e(s, t) + \frac{1}{4\pi} \sigma_v(s) \int_{\Omega'=4\pi} p(\hat{\Omega}' \cdot \hat{\Omega}) I_v(s, \hat{\Omega}', t) d\hat{\Omega}' \end{aligned} \quad (9.16)$$

denkleminde ulaşılır. Denklem 9.16'daki ilk terim c ışık hızının sahip olduğu büyük değerden dolayı bir çok mühendislik uygulamasında ihmal edilir. Kalan ifade için zaman bağımlılığı sadece madde tarafında dışarı yayılan radyasyon yoğunluğu ifadesi içerisinde bulunmaktadır. Bu durumda zaman değişkeni bir parametre olarak kabul edilebilir. Termodinamik denge hali için yayıcılık terimi planck fonksiyonuna

$$j_v^e(s) = \kappa_v(s) I_{vb}(T) \quad (9.18)$$

gibi bağlıdır. Denklem 9.16

$$\frac{1}{\beta_\nu(s)} \frac{\partial I_\nu(s, \hat{\Omega})}{\partial s} + I_\nu(s, \hat{\Omega}) = S_\nu(s) \quad (9.18)$$

şeklinde yazılabilir. Denklem 9.18 radiative transfer denklemdir. Burada

$$S_\nu(s) = (1 - \omega_\nu) I_{b\nu}(T) + \frac{1}{4\pi} \omega_\nu \int_{\Omega'=4\pi} p(\hat{\Omega}, \hat{\Omega}') I_\nu(s, \hat{\Omega}') d\hat{\Omega}', \quad (9.19)$$

$$\beta_\nu(s) = \kappa_\nu(s) + \sigma_\nu(s), \quad (9.20)$$

$$\omega_\nu \equiv \frac{\sigma_\nu(s)}{\beta_\nu(s)}, \quad (1 - \omega_\nu) \equiv \frac{\kappa_\nu(s)}{\beta_\nu(s)} \quad (9.21)$$

ve

$$I_{b\nu}(T) \equiv \frac{2h\nu^3}{c^2 [\exp(h\nu / kT) - 1]} \quad (9.22)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $S_\nu(s)$ kaynak terimi, $\beta_\nu(s)$ spektral yok olma katsayısı ve ω_ν spektral albedo olarak adlandırılır.

9.2 P_N Yöntemi ile Radiative Transfer Denkleminin Çözümü

Radiative transfer denklemi çözümünde yaygın olarak kullanılan P_N yöntemi ortamdaki açısal radyasyon yoğunluğunu Legendre polinomları cinsinden seriye açmaya dayanan bir yöntemdir. Bu bölümde P_N yönteminin düzlem geometride, saçılmaların lineer anizotropik olduğu durumda radiative transfer denkleminin uygulanması (Atalay 2006) incelenmektedir. Radiative transfer denklemi (Chandrasekhar 1950)

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu) + I(\tau, \mu) = S(\tau) + \frac{c}{2} \int_{-1}^1 P(\mu, \mu') I(\tau, \mu') d\mu' \quad (9.23)$$

şeklinde yazılır. Burada $S(\tau) = (1-c)I_b(T)$ kaynak terimi, $P(\mu, \mu')$ saçılma fonksiyonu olup, μ doğrultusunda gelen ışık ışınının μ' doğrultusunda saçılma olasılığıdır. Lineer anizotropik saçılma durumunda

$$P(\mu, \mu') = 1 + \beta\mu\mu' \quad (9.24)$$

gibi tanımlıdır. Problemin çözümü için sınır koşullarına ihtiyaç vardır. Radiative transfer problemi için sınır koşulları

$$I(0, \mu) = \varepsilon_1 \frac{\sigma}{\pi} T_1^4 + \rho_1^s I(0, -\mu) + 2\rho_1^d \int_0^1 \mu' I(0, -\mu') d\mu', \quad \mu \in (0, 1) \quad (9.25)$$

$$I(\tau_0, -\mu) = \varepsilon_2 \frac{\sigma}{\pi} T_2^4 + \rho_2^s I(\tau_0, \mu) + 2\rho_2^d \int_0^1 \mu' I(\tau_0, \mu') d\mu', \quad \mu \in (0, 1) \quad (9.26)$$

denklemleri ile verilir. Problem çözülürken denklem 9.23'ün homojen kısmının çözümü, ve homojen olmayan kısımdan genel çözüme gelen katkı olan özel çözüm, ayrı ayrı hesaplanır ve genel çözüm elde edilen iki çözümün süperpozisyonu olarak verilir.

$$I(\tau, \mu) = I_h(\tau, \mu) + I_p(\tau, \mu) \quad (9.27)$$

Denklem 9.23'ün homojen kısmı (Atalay 2006)

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I_h(\tau, \mu) + I_h(\tau, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 (1 + \beta\mu\mu') I_h(\tau, \mu') d\mu' \quad (9.28)$$

ile verilir. Denklem 9.28 için çözüm Legendre polinomları cinsinden seri açılımı olarak verilir.

$$I_h(\tau, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \phi_n(\tau) P_n(\mu). \quad (9.29)$$

Denklem 9.29, denklem 9.28' de yerine yazılıp denklemin her iki tarafı $P_m(\mu)$ ile çarpılır ve Legendre polinomları arasındaki türetme ve diklik bağıntıları kullanılırsa P_N denklemi elde edilir.

$$(n+1)\frac{\partial\phi_{n+1}(\tau)}{\partial\tau} + n\frac{\partial\phi_{n-1}(\tau)}{\partial\tau} + (2n+1)\phi_n(\tau) = c\delta_{m0}\phi_0(\tau) + c\beta\phi_1(\tau)\delta_{m1}. \quad (9.30)$$

N. yaklaşıklık için denklem sisteminin sonlandırılması gereklidir. Bundan dolayı $\phi_{N+1} = 0$ alınır. Denklem 9.30 için aşağıdaki çözüm önerilir.

$$\phi_n(\tau) = g_n(\nu) e^{\frac{\tau}{\nu}}. \quad (9.31)$$

Denklem 9.31, denklem 9.30 de yerine yazıldığında

$$(n+1)g_{n+1}(\nu) + ng_{n-1}(\nu) - (2n+1)\nu g_n(\nu) - c\nu g_0(\nu)\delta_{0n} - c\nu\beta g_1(\nu)\delta_{1n} = 0 \quad (9.32)$$

özdeğer denklemi elde edilir. Bu denklemden elde edilecek katsayılar determinantı yardımı ile $\pm\nu_j$ kökleri elde edilir. Bu işlem yapılırken $g_{-1}(\nu) = 0$, $g_0(\nu) = 1$, $g_{N+1}(\nu) = 0$ alınır. Denklem 9.29 ile verilen homojen kısmın çözümü

$$I_h(\tau, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \sum_{j=1}^{(N+1)/2} g_n(\nu_j) [A_j e^{\frac{\tau}{\nu_j}} + (-1)^n B_j e^{\frac{\tau}{\nu_j}}] \quad (9.33)$$

gibi yazılabilir. Homojen kısmın çözümüne ulaşabilmek için A_j ve B_j katsayılarının hesaplanması gereklidir.

Denklem 9.23' de homojenliği bozan terimden kaynaklanan özel çözüm için seçilecek kaynak terimine göre özel çözüm yazmak mümkündür. Burada iki tür kaynak göz önüne alınacaktır. Sırası ile (Siewert and McCormick 1967, Özlüoğlu and Siewert 1969, 1970)

$$S(\tau) = \frac{1-c}{\pi}, \quad (9.34)$$

$$S(\tau) = \frac{1}{1-c} \frac{1}{\pi} \left[\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right]. \quad (9.35)$$

Bu kaynak terimlerine uygun özel çözümler sırası ile

$$I_p(\tau, \mu) = \frac{1}{\pi} \quad (9.36)$$

ve

$$I_p(\tau, \mu) = \frac{1}{\pi} \left[1 - \frac{\tau - \mu \tau_0 (1 - c\beta/3)^{-1}}{\tau_0} \right] \quad (9.37)$$

gibidir. Denklem 9.34 ile verilen ifade sabit kaynak terimi olup denklem 9.35 ile verilen kaynak terimi ise τ optik yol değişkeni ile lineer olarak değişmektedir. Bu durumda P_N yöntemi için radiative transfer denkleminin genel çözümü

$$I(\tau, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \sum_{j=1}^{(N+1)/2} g_n(\nu_j) \left[A_j e^{-\frac{\tau}{\nu_j}} + (-1)^n B_j e^{\frac{\tau}{\nu_j}} \right] + I_p(\tau, \mu) \quad (9.38)$$

gibi yazılır. Denklem (9.38) ile verilen genel çözüm ifadesi denklem (9.25-26)' da verilen sınır kosullarında yerine yazılır ve $P_{2i-1}(\mu)$ ile çarpılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{(N+1)/2} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} [\theta_{in} - b_1(-1)^n \theta_{in} - d_1(-1)^n \theta_{1n} \theta_{i0}] g_n(\nu_j) A_j \\ & + \sum_{j=1}^{(N+1)/2} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} [(-1)^n \theta_{in} - b_1 \theta_{in} - d_1 \theta_{1n} \theta_{i0}] g_n(\nu_j) B_j \\ & = a_1 \theta_{i0} - \gamma_0 \theta_{i0} (1 - b_1 - d_1 \theta_{i0}) - \gamma_\mu \theta_{i0} (\theta_{i1} + b_1 \theta_{i1} + d_1 \theta_{i0} \theta_{11}) \end{aligned} \quad (9.39)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{(N+1)/2} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} [(-1)^n \theta_{in} - b_2 \theta_{in} - d_2 \theta_{1n} \theta_{i0}] g_n(\nu_j) e^{-\frac{\tau_0}{\nu_j}} A_j \\ & + \sum_{j=1}^{(N+1)/2} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} [\theta_{in} - b_2(-1)^n \theta_{in} - (-1)^n d_2 \theta_{1n} \theta_{i0}] g_n(\nu_j) e^{\frac{\tau_0}{\nu_j}} B_j \\ & = a_2 \theta_{i0} + \gamma_0 \theta_{i0} (-1 + b_2 + d_2 \theta_{i0}) + \gamma_\mu (\theta_{i1} + b_2 \theta_{i1} + d_2 \theta_{i0} \theta_{11}) \\ & - \gamma_\tau \tau_0 (1 - b_2 \theta_{i1} - d_2 \theta_{i0}) \theta_{i0} \end{aligned} \quad (9.40)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$\theta_{ij} = \int_0^1 d\mu P_{2i-1}(\mu)P_j(\mu), \quad (9.41)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{\pi}, \gamma_\tau = \frac{1}{\pi\tau_0}, \gamma_\mu = \frac{(1-c\beta/3)^{-1}}{\pi\tau_0} \quad (9.42)$$

ve

$$a_k = \varepsilon_k (\sigma / \pi) T_k^4, \quad b_k = \rho_k^s, \quad d_k = 2\rho_k^d, \quad k=1,2 \quad (9.43)$$

gibi tanımlıdır. Denklem 9.39 ve 9.40'dan A_j ve B_j katsayıları yaklaşıklık mertebesine bağlı olarak hesaplanır. Buradan da genel çözüme ulaşılmış olur. Buraya kadar yapılan işlemlerde radiative transfer problemi genel olarak incelenmiştir. Fakat yapılacak hesaplarda problem daha spesifik incelenecektir ve bunun için temel çözümlerin süperpozisyonu ilkesinden faydalanılacaktır.

Temel çözümlerin süperpozisyonu;

Net radiative akı ifadesi

$$q(\tau) = \int_{-1}^{+1} \mu I(\tau, \mu) d\mu \quad (9.44)$$

ile verilir. Kaynak terimi $S(\tau)$ nun sabit olması durumunda net radiative akı (Özışık 1973)

$$q(\tau) = \sigma[T_0^4 Q_0(\tau) + T_1^4 Q_1(\tau) - T_2^4 Q_1^*(\tau_0)] \quad (9.45)$$

ile verilir. Burada σ Boltzman sabitidir. Ele alınan ortamın sıcaklığı her yerde $T(\tau) = T_0$ 'dır ve T_1 ve T_2 sıcaklıkları $\tau = 0$ ve $\tau = \tau_0$ 'daki sıcaklıklardır. Denklem 9.45'deki boyutsuz fonksiyon

$$Q_i(\tau) = 2\pi \int_{-1}^{+1} \mu \psi_i(\tau, \mu) d\mu, \quad i = 0,1 \quad (9.46)$$

olarak tanımlıdır. Denklem 9.46' deki $\psi_i(\tau, \mu)$ fonksiyonu (Özişik *et al.* 1970)

$$B\psi_i(\tau, \mu) = \frac{1-c}{\pi} \delta_{0i}, \quad i = 0, 1 \quad (9.47)$$

denklemini sağlar. Yukardaki ifadedeki B operatörü

$$B = \left[\mu \frac{\partial}{\partial \tau} + 1 - \frac{c}{2} \int_{-1}^1 (1 + \beta \mu \mu') d\mu' \right] \quad (9.48)$$

gibidir. Denklem (9.45)' deki $Q_1^*(\tau_0)$ ifadesi $Q_1(\tau_0)$ için elde edilen çözümde yüzeylerin radiative özelliklerinin karşılıklı yer değiştirmesi ile elde edilen çözümden faydalanılarak bulunur.

Kaynak terimi $S(\tau)$ 'nin τ ile lineer değişmesi halinde ise net radiative akı

$$q(\tau) = \sigma [T_1^4 Q_1(\tau) - T_2^4 Q_1^*(\tau_0)] \quad (9.49)$$

ifadesi ile verilir. Bu durumda ortamın sıcaklığının dördüncü kuvveti sınırlardaki sıcaklıkların dördüncü kuvveti ile lineer değişmektedir. Boyutsuz fonksiyon ifadesi denklem 9.46'daki gibidir. Lineer değişen kaynak terimi için $\psi_i(\tau, \mu)$ fonksiyonunun sağladığı denklem

$$B\psi_i(\tau, \mu) = \frac{1-c}{\pi} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) \quad (9.50)$$

gibidir. Radiative transfer denkleminin çözümünde, temel çözümlerin süperpozisyonu yapılırken sınır koşulları aşağıdaki gibi seçilir.

$$\psi_i(0, \mu) = \frac{\varepsilon_1}{\pi} \delta_{i1} + b_1 \psi_i(0, -\mu) + d_1 \int_0^1 \mu' \psi_i(0, -\mu') d\mu', \quad \mu \in (0, 1) \quad (9.51)$$

$$\psi_i(\tau_0, -\mu) = b_1 \psi_i(\tau_0, \mu) + d_1 \int_0^1 \mu' \psi_i(\tau_0, \mu') d\mu', \mu \in (0,1) \quad (9.52)$$

P_N yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçlar Çizelge 9.1-9.5’de görülebilir. Bu değerler Atalay (2006) tarafından hesaplanmıştır.

9.3 H_N Yöntemi ile Radiative Transfer Denkleminin Çözümü

Radiative transfer problemine H_N yöntemi (Tezcan vd. 2003) uygulanırken bir önceki bölümde P_N yöntemi ile incelenen fiziksel problem benze şekilde ele alınacaktır (Bulut and Güleçyüz 2008). Denklem 9.23 ile verilen ifade Denklem 9.25 ve 9.26 ile verilen sınır şartları altında çözülürken genel çözüm (Case 1967)

$$\begin{aligned} I(\tau, \mu) = & A(v_0) \phi(v_0, \mu) e^{\frac{\tau}{v_0}} + A(-v_0) \phi(-v_0, \mu) e^{\frac{\tau}{v_0}} \\ & + \int_0^1 A(v) \phi(v, \mu) e^{\frac{\tau}{v}} dv + \int_0^1 A(-v) \phi(-v, \mu) e^{\frac{\tau}{v}} dv + I_p(\tau, \mu) \end{aligned} \quad (9.53)$$

gibi alınır. Denklem 9.55 ile verilen ifadedeki $A(\pm v_0)$ ve $A(\pm v)$ katsayılarının hesaplanması halinde radiative transfer denklemini için genel çözüm bulunmuş olur. Denklem 9.55’ deki genel çözüm Cese’in özfonksiyonları cinsinden yazılmıştır. Önceki bölümlerde, denklem 9.55’de bulunan kesikli ve sürekli öz fonksiyonlar için açık ifadeleri ve bunlar için normalizasyon katsayıları ve tam bölge diklik bağıntılarını bulmak mümkündür. Denklem 9.55 ile verilen genel çözüm ifadesinden, $\tau = 0$ ’daki çözüm

$$\begin{aligned} I(0, \mu) = & A(v_0) \phi(v_0, \mu) + A(-v_0) \phi(-v_0, \mu) \\ & + \int_0^1 A(v) \phi(v, \mu) dv + \int_0^1 A(-v) \phi(-v, \mu) dv + I_p(0, \mu) \end{aligned} \quad (9.54)$$

biçimde yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafı $\mu \phi(\pm v_0, \mu)$ ile çarpılıp $[-1,1]$ aralığında μ üzerinden integrali alınıp düzenlenirse

$$A(\pm v_0) = \frac{1}{N(\pm v_0)} \left[-\int_{-1}^1 I(0, \mu) \phi(\pm v_0, \mu) d\mu + \int_0^1 I_p(0, \mu) \phi(\pm v_0, \mu) d\mu \right] \quad (9.55)$$

katsayıları elde edilir. H_N yönteminde ortamın sınırlarından dışarı çıkan radyasyon akıları için aşağıdaki seri açılımları kullanılır.

$$I(0, -\mu) = \sum_{l=0}^N \alpha_l \mu^l, \quad \mu > 0, \quad (9.56)$$

$$I(\tau_0, \mu) = \sum_{l=0}^N \beta_l \mu^l, \quad \mu > 0. \quad (9.57)$$

Denklem 9.56, 9.57 ile denklem 9.25 ve 9.26 ile verilen sınır koşulları kullanılarak denklem 9.55 ile verilen açılım katsayısı ifadesi

$$A(\nu_0) = \frac{c\nu_0}{2N(\nu_0)} \left[a_1 B_0(\nu_0) + \sum_{l=0}^N \alpha_l \left[b_1 B_l(\nu_0) + \frac{d_1}{l+2} B_0(\nu_0) - A_l(\nu_0) \right] - \gamma_0 [B_0(\nu_0) - A_0(\nu_0)] \right], \quad (9.58)$$

$$A(-\nu_0) = \frac{c\nu_0}{2N(-\nu_0)} \left[a_1 A_0(\nu_0) + \sum_{l=0}^N \alpha_l \left[b_1 A_l(\nu_0) + \frac{d_1}{l+2} A_0(\nu_0) - B_l(\nu_0) \right] - \gamma_0 [A_0(\nu_0) - B_0(\nu_0)] \right] \quad (9.59)$$

olarak elde edilir. Benzer yolla denklem 9.54'ün her iki tarafı $\mu\phi(\pm\nu, \mu)$ ile çarpılıp $[-1, 1]$ aralığında μ üzerinden ve düzenlenirse $A(\pm\nu)$ katsayıları elde edilir.

$$A(\nu) = \frac{c\nu}{2N(\nu)} \left[a_1 B_0(\nu) + \sum_{l=0}^N \alpha_l \left[b_1 B_l(\nu) + \frac{d_1}{l+2} B_0(\nu) - A_l(\nu) \right] - \gamma_0 [B_0(\nu) - A_0(\nu)] \right], \quad (9.60)$$

$$A(-\nu) = \frac{c\nu}{2N(-\nu)} \left[a_1 A_0(\nu) + \sum_{l=0}^N \alpha_l \left[b_1 A_l(\nu) + \frac{d_1}{l+2} A_0(\nu) - B_l(\nu) \right] - \gamma_0 [A_0(\nu) - B_0(\nu)] \right]. \quad (9.61)$$

Aynı katsayılar genel çözümün $\tau = \tau_0$ yazılması ile ve benzer yolun uygulanması ile

$$A(\nu_0) = \frac{c\nu_0 e^{\frac{\tau_0}{\nu_0}}}{2N(-\nu_0)} \left[a_2 A_0(\nu_0) + \sum_{l=0}^N \beta_l \left[b_2 A_l(\nu_0) + \frac{d_2}{l+2} A_0(\nu_0) - B_l(\nu_0) \right] - \gamma_0 [A_0(\nu_0) - B_0(\nu_0)] \right], \quad (9.62)$$

$$A(-\nu_0) = \frac{c\nu_0 e^{\frac{\tau_0}{\nu_0}}}{2N(\nu_0)} \left[a_2 B_0(\nu_0) + \sum_{l=0}^N \beta_l \left[b_2 B_l(\nu_0) + \frac{d_2}{l+2} B_0(\nu_0) - A_l(\nu_0) \right] - \gamma_0 [B_0(\nu_0) - A_0(\nu_0)] \right] \quad (9.63)$$

$$A(\nu) = \frac{c\nu}{2N(-\nu)} \left[a_1 A_0(\nu) + \sum_{l=0}^N \alpha_l \left[b_1 A_l(\nu) + \frac{d_1}{l+2} A_0(\nu) - B_l(\nu) \right] - \gamma_0 [A_0(\nu) - B_0(\nu)] \right], \quad (9.64)$$

$$A(-\nu) = \frac{c\nu e^{-\frac{\tau_0}{\nu}}}{2N(\nu)} \left[a_2 B_0(\nu) + \sum_{l=0}^N \beta_l \left[b_2 B_l(\nu) + \frac{d_2}{l+2} B_0(\nu) - A_l(\nu) \right] - \gamma_0 [B_0(\nu) - A_0(\nu)] \right] \quad (6.65)$$

olarak bulunur. Bu durumda açılım katsayıları genel bir gösterimle aşağıdaki gibi yazılır.

$$A(\xi) = \frac{c\xi}{2N(\xi)} \left[a_1 B_0(\xi) + \sum_{l=0}^N \alpha_l \left[b_1 B_l(\xi) + \frac{d_1}{l+2} B_0(\xi) - A_l(\xi) \right] - \gamma_0 [B_0(\xi) - A_0(\xi)] \right], \quad (9.66)$$

$$A(-\xi) = \frac{c\xi e^{-\frac{\tau_0}{\xi}}}{2N(\xi)} \left[a_2 B_0(\xi) + \sum_{l=0}^N \beta_l \left[b_2 B_l(\xi) + \frac{d_2}{l+2} B_0(\xi) - A_l(\xi) \right] - \gamma_0 [B_0(\xi) - A_0(\xi)] \right], \quad \xi = \nu, \nu_0. \quad (9.67)$$

Açılım katsayılarının tanımları içerisinde bazı kısaltmalar görülmektedir. Bu kısaltmalar denklem 8.20 ve 8.21' deki gibi tanımlıdır.

Genel çözümün elde edilmesi problemi, ortamın sınırlarından dışarı çıkan akı ifadelerindeki açılım katsayıları olan α_l ve β_l bilinmeyenlerinin hesabına dönüşmüştür.

$\tau = 0$ ' dan dışarı çıkan radyasyon akısı

$$I(0, -\mu) = A(\nu_0)\phi(\nu_0, -\mu) + A(-\nu_0)\phi(-\nu_0, -\mu) + \int_0^1 A(\nu)\phi(\nu, \mu)d\nu \\ + \int_0^1 A(-\nu)\phi(-\nu, -\mu)d\nu + \frac{1}{\pi}, \quad \mu \in (0, 1) \quad (9.68)$$

biçimindedir. Yukarıdaki denklemin her iki tarafı μ^{m+1} ile çarpılıp $[0, 1]$ aralığında μ üzerinden ile çarpılır ve $A(\pm\xi)$, $\xi = \nu, \nu_0$ katsayıları yerlerine yazıldığında

$$\sum_{l=0}^N \alpha_l T_{ml}(\nu_0) + \sum_{l=0}^N \beta_l H_{ml}(\nu_0) = R_{m0} \quad (9.69)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$T_{ml} = \frac{1}{l+m+2} - \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} \left(b_1 B_l(\nu_0) + \frac{d_1}{l+2} B_0(\nu_0) - A_l(\nu_0) \right) A_m(\nu_0) \\ - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left(b_1 I_{ml}^{AB} + \frac{d_1}{(l+2)} I_{m0}^{AB} - I_{ml}^{AA} \right), \quad (9.70)$$

$$H_{ml} = -\left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} \left(b_2 B_l(\nu_0) + \frac{d_2}{l+2} B_0(\nu_0) - A_l(\nu_0) \right) e^{-\frac{\tau_0}{\nu_0}} B_m(\nu_0) \\ - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left(b_2 I_{ml}^{BBE} + \frac{d_2}{(l+2)} I_{m0}^{BBE} - I_{ml}^{BAE} \right), \quad (9.71)$$

$$R_{m0} = \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} \left[B_0(\nu_0)(a_1 A_m(\nu_0) + a_2 e^{-\frac{\tau_0}{\nu_0}} B_m(\nu_0)) - \gamma_0 (B_0(\nu_0) - A_0(\nu_0))(A_m(\nu_0) \right. \\ \left. + e^{-\frac{\tau_0}{\nu_0}} B_m(\nu_0)) \right] + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left(a_1 I_{m0}^{AB} + a_2 I_{m0}^{BBE} - \gamma_0 (I_{m0}^{AB} - I_{m0}^{AA} + I_{m0}^{BBE} - I_{m0}^{BAE}) \right) + \frac{\gamma_0}{m+2} \quad (9.72)$$

şeklinde tanımlıdır. Denklem 9.53, $\tau = \tau_0$ ' dan dışarı çıkan radyasyon akısı için yazılır ve elde edilen denklemin her iki tarafı μ^{m+1} ile çarpılıp $[0, 1]$ aralığında μ üzerinden integral alınır ve düzenlenirse

$$\sum_{l=0}^N \alpha_l K_{ml}(\nu_0) + \sum_{l=0}^N \beta_l F_{ml}(\nu_0) = S_{m0} \quad (9.73)$$

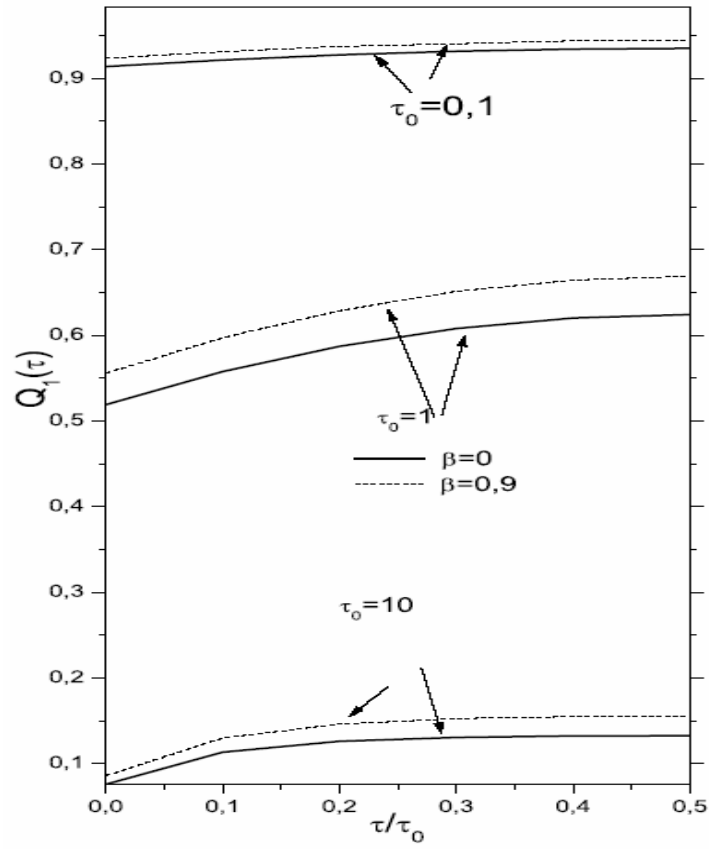
denklemini elde edilir.

$$K_{ml} = -\left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} \left(b_1 B_l(\nu_0) + \frac{d_1}{l+2} B_0(\nu_0) - A_l(\nu_0) \right) B_m(\nu_0) e^{-\frac{\tau_0}{\nu_0}} - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left(b_1 I_{ml}^{BBE} + \frac{d_1}{(l+2)} I_{m0}^{BBE} - I_{ml}^{BAE} \right), \quad (9.74)$$

$$F_{ml} = \frac{1}{l+m+2} - \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} \left(b_2 B_l(\nu_0) + \frac{d_2}{l+2} B_0(\nu_0) - A_l(\nu_0) \right) A_m(\nu_0) - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left(b_2 I_{ml}^{AB} + \frac{d_2}{(l+2)} I_{m0}^{AB} - I_{ml}^{AA} \right), \quad (9.75)$$

$$S_{m0} = \left(\frac{c\nu_0}{2}\right)^2 \frac{1}{N(\nu_0)} \left[B_0(\nu_0) (a_2 A_m(\nu_0) + a_1 e^{-\frac{\tau_0}{\nu_0}} B_m(\nu_0)) - \gamma_0 (B_0(\nu_0) - A_0(\nu_0)) (A_m(\nu_0) + e^{-\frac{\tau_0}{\nu_0}} B_m(\nu_0)) \right] + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \left(a_1 I_{m0}^{BBE} + a_2 I_{m0}^{AB} - \gamma_0 (I_{m0}^{AB} - I_{m0}^{AA} + I_{m0}^{BBE} - I_{m0}^{BAE}) \right) + \frac{\gamma_0}{m+2} \quad (6.76)$$

gibi tanımlıdır. Denklem 9.69 ve denklem 9.73'ün ortak çözümü ile α_l ve β_l katsayıları elde edilir. Bu katsayılar denklem 9.56 ve 9.57' de yerlerine yazılırsa ortamın sınırlarından dışarı çıkan radyasyon akısı bulunmuş olur. Nümerik hesaplamalar kısmında denklem 9.46 yardımı ile radiative ısı akısı (boyutsuz fonksiyon) değerleri hesaplanmıştır.



Şekil 9.2 $c=0.5$ için anizotropi parametresinin $Q_1(\tau)$ ısı akısı fonksiyonu üzerine etkisi

Çizelge 9.1 Sabit sıcaklıkta, $\tau_0 = 0.1$ 'de $Q_0(0)$, $Q_1(0)$ ve $Q_1^*(\tau_0)$ değerleri

$-Q_0(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.3068	0.3072	0.3068	0.1736	0.1737	0.1736
1.0	0.0	0.5	0.5	0.2371	0.2376	0.2371	0.1316	0.1317	0.1316
1.0	0.0	1	0.0	0.1674	0.1676	0.1674	0.0911	0.0912	0.0911
$Q_1(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.3068	0.3072	0.3068	0.1736	0.1737	0.1736
1.0	0.0	0.5	0.5	0.6534	0.6538	0.6534	0.5753	0.5754	0.5753
1.0	0.0	1	0.0	0.1674	0.1676	0.1676	1.0000	1.0002	1.0000
$Q_1^*(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	0.0	0.5	0.5	0.4163	0.4163	0.4263	0.4437	0.4438	0.4437
1.0	0.0	1	0.0	0.8326	0.8325	0.8326	0.8074	0.8704	0.8704

Çizelge 9.2 Sabit sıcaklıkta, $\tau_0 = 1$ 'de $Q_0(0)$, $Q_1(0)$ ve $Q_0^*(\tau_0)$ değerleri

$-Q_0(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.9519	0.9521	0.9519	0.7272	0.7573	0.7572
1.0	0.0	0.5	0.5	0.8662	0.8665	0.8662	0.6510	0.6512	0.6510
1.0	0.0	1	0.0	0.7806	0.7808	0.7806	0.5591	0.5590	0.5591

$Q_1(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.9519	0.9521	0.9519	0.7572	0.7573	0.7572
1.0	0.0	0.5	0.5	0.9759	0.9762	0.9759	0.8154	0.8155	0.8154
1.0	0.0	1	0.0	1.0000	1.0002	1.0000	0.8658	0.8660	0.8668

$Q_1^*(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	0.0	0.5	0.5	0.1097	0.1097	0.1097	0.1644	0.1644	0.1644
1.0	0.0	1	0.0	0.2194	0.2194	0.2194	0.3067	0.3067	0.3067

Kaynak teriminin optik yol değeri ile lineer değişmesi durumunda net radiative akı ortamın sıcaklığının dördüncü kuvveti ile lineer değişir. Bu durumda elde edilen $Q_1(0)$ ve $Q_0^*(\tau_0)$ değerleri Çizelge 9.4 'de verilmiştir. Buradaki değerler yardımı ile net radiative akıyı hesaplamak mümkündür.

Çizelge 9.3 Sabit sıcaklıkta, $\tau_0 = 10$ ’de $Q_0(0)$, $Q_1(0)$ ve $Q_1^*(\tau_0)$ değerleri

$-Q_0(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	1.0000	1.0002	1.0000	0.8535	0.8536	0.8535
1.0	0.0	0.5	0.5	1.0000	1.0000	1.0000	0.8534	0.8536	0.8534
1.0	0.0	1	0.0	1.0000	1.0002	1.0000	0.8534	0.8536	0.8534

$Q_1(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	1.0000	1.0002	1.0000	0.8535	0.8536	0.8535
1.0	0.0	0.5	0.5	1.0000	1.0002	1.0000	0.8535	0.8536	0.8535
1.0	0.0	1	0.0	1.0000	1.0002	1.0000	0.8535	0.8536	0.8535

$Q_1^*(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Atalay 2006)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	0.0	0.5	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	0.0	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Çizelge 9.4 Lineer kaynak terimi için, $\tau_0 = 1$ 'de $Q_1(0)$ ve $Q_1^*(\tau_0)$ değerleri

$Q_1(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.3860	0.3861	0.3860	0.3351	0.3352	0.3351
1.0	0.0	0.5	0.5	0.4403	0.4403	0.4403	0.4437	0.4437	0.4437
1.0	0.0	1	0.0	0.4945	0.4945	0.4945	0.5190	0.5190	0.5190

$Q_1^*(\tau_0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$c = 0$			$c = 0.5$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	0.0	0.5	0.5	0.2473	0.2473	0.2473	0.2781	0.2781	0.2781
1.0	0.0	1	0.0	0.4945	0.4945	0.4945	0.5190	0.5190	0.5190

Çizelge 9.5 Lineer kaynak terimi için, specularly reflecting boundary için $Q_1(0)$ değerleri

$Q_1(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$\tau_0 = 0.1$			$\tau_0 = 1$		
ε_1	ρ_1^s	ε_2	ρ_2^s	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)	H_N	(Atalay 2006)	(Siewert 1967)
1.0	0.0	0.0	1	0.0845	0.0845	0.0845	0.3263	0.3263	0.3263
1.0	0.0	0.5	0.5	0.5066	0.5066	0.5066	0.4285	0.4285	0.4285

Çizelge 9.6 Lineer kaynak terimi için farklı anizotropi katsayıları değerlerinde $Q_1(0)$ değerleri

$Q_1(0)$									
Boundary at $\tau = 0$		Boundary at $\tau = \tau_0$		$\tau_0 = 0.1$			$\tau_0 = 1$		
ε_1	ρ_1^d	ε_2	ρ_2^d	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.3$	$\beta = 0$	$\beta = 0.1$	$\beta = 0.3$
1.0	0.0	0.0	1	0.0866	0.0866	0.0867	0.3351	0.3394	0.3482
1.0	0.0	0.5	0.5	0.5083	0.5093	0.5112	0.4337	0.4413	0.4574

10. SONUÇ

Nötron transport teorisinde geliştirilen yöntemler transport denkleminin tipine, problemin geometrisine ve ele alınan problemin türüne göre farklılıklar göstermektedir. Amaç, temel olarak transport denklemini çözmek olmuştur. Nötron transport teoride problemin geometrisi ve ele alınan problemin fizikselliği gerçek fiziksel olaylara ne kadar yaklaşırsa problemin çözülmesindeki zorluk da o kadar artmaktadır. Yöntemlerin kronolojik gelişimine bakıldığında ilk geliştirilen yöntemin tamamen analitik, hiç bir yaklaşım yapılmadan, daha basitleştirilmiş problemler ile nötron transport denklemine uygulandığını görüyoruz. Problemler daha karışık hale getirilerek ele alındığında, içerisinde bazı yaklaşımlar içeren yöntemler geliştirilmiştir. Böyle olmasındaki sebep ise analitik ifadelerin giderek zorlaşması ve denklemlerin analitik olarak çözülemez hale gelmesidir. Yarı-analitik yöntemler olarak adlandırılan bu yöntemler zamanla geliştirilerek daha fiziksel nötron transport problemleri incelenmiştir.

Bu tarihsel gelişime uyularak 2. bölümde genel olarak tek hızlı nötronlar için nötron transport denklemi elde edilmiştir. Transport denkleminin çözümü ele alınacak ortamın herhangi bir konumunda ve herhangi bir doğrultudaki nötron dağılımını verecektir. Transport denklemini çözmek için geliştirilen yöntemlerden ilki olan Case yöntemi 3. bölümde incelenmiştir. Tamamen analitik bir yöntemdir. Bu yöntem ile düzlem geometride izotropik saçılma durumunda Albedo ve Milne problemleri çözülmüştür (Case). Case yönteminde elde edilen singüler özfonksiyonlar nötron transport denkleminin çözümünde daha sonra geliştirilen bazı yöntemlerin de temel dayanağı olmuştur. 4. bölümde 3. tip nötron denkleminin (integral formu) uygulanan C_N yöntemi incelenmiştir. Placzek lemması yardımı ile sonlu bir ortam problemi sonsuz ortam problemine dönüştürülerek, sonsuz ortam green fonksiyonu yardımı ile çözülmektedir. Bu yöntem yarı analitik bir yöntem olup farklı geometrilerde uygulanabilmekte ve oldukça çabuk yakınsamaktadır. C_N yönteminde kullanılan sonsuz ortam Green fonksiyonu Fourier dönüşümü ile elde edilmektedir. Bu Green fonksiyonunun formundan dolayı C_N yöntemi zor analitik hesaplamalar içermektedir. Başka bir yarı analitik yöntem olan ve 5. bölümde incelenen F_N yöntemi de Placzek lemmasından faydalanılarak geliştirilmiştir. Bu yöntem integro-diferansiyel nötron transport denkleminin uygulanmaktadır. Oldukça kolay analitik ifadelerle sahip ve farklı

geometrideki problemler kolayca uygulanabilmektedir. Bu avantajlarının yanında incelenen diğer yöntemlere göre geç yakınsamak gibi kötü bir tarafı vardır. Bunun kök seçimindeki keyfilikten kaynaklandığı düşünülmektedir.

Bundan sonraki bölümlerde bu tezin amacı doğrultusunda sırası ile singüler özfonksiyonlar ve H_N yöntemi incelenerek bu yöntemlerle çeşitli problemler çözülmüştür. 6. bölümde verilen Singüler özfonksiyonlar yöntemi C_N yöntemi gibi 3. tip transport denkleminde uygulanmaktadır. Farklı olarak Singüler Özfonksiyonlar yönteminde analitik hesaplarda kolaylık getirmesi açısından Case'in özfonksiyonları cinsinden elde edilen Green fonksiyonları kullanılmaktadır. Bu yöntemin transport denkleminde uygulanması ve sonuç olarak elde edilen nümerik sonuçların yakınsama hızı 8. bölümde ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Grubumuz tarafından geliştirilen ve oldukça iyi sonuçlar veren H_N yöntemi temel olarak Cese' in özfonksiyonları cinsinden yazılan temel çözüme dayanmaktadır. Diğer yöntemlere göre daha sade analitik işlemlere sahip ve nümerik olarak da oldukça çabuk yakınsamaktadır. 7. bölümde sabit kaynak problemi üzerinde H_N yönteminin transport denkleminde ne şekilde uygulandığı gösterilmiştir.

8. bölüm uygulama bölümü olarak verilmiştir. Bu bölümde hem Singüler Özfonksiyonlar yöntemi hem de H_N yöntemi sırayla transport denklemini çözmekte kullanılmıştır. Bu bölümde slab-albedo ve milne problemleri incelenmiştir. Önce düzlem geometride ve lineer anizotropik saçılma durumunda H_N yöntemi ile slab-albedo problemi incelenmiştir. Analitik olarak problem çözülmüştür ve problemin çözümünden elde edilen yansıma ve geçme katsayıları Çizelge 8.1-8.17 de vermiştir. Ortama gelen nötron akısı değeri μ^β şeklinde seçilmiştir. Çizelge 8.1-8.12'de β 'nın 0,1,3 ve 5 değerleri için ortamda üretilen ikincil nötron sayısı $c = 0.1, 0.5$ ve 0.8 olarak alınmıştır. Her bir c değerinde farklı anizotropi parametresi (f_1) ve slab kalınlığı (τ) için yansıma ve geçme katsayıları (A^* ve B^*) hesaplanmıştır. Elde edilen nümerik sonuçlar H_N yönteminde çok düşük yakınsaklık derecelerinde ($N=1,2$ ' den itibaren) virgülden sonra 6 haneye kadar sabit değerler elde edildiğini göstermektedir. Bu da oldukça iyi denebilecek bir yakınsaklık derecesidir.

Çizelge 8.13-8.15’de H_N yöntemi ile elde edilen çeşitli yansıma ve geçiş katsayısı değerleri C_N ve F_N yöntemi ile kıyaslanmıştır. Sonuçlardan H_N yönteminin C_N yöntemi kadar çabuk yakınsadığı görülmektedir. Ancak F_N yöntemi bu yöntemler göre çok geç yakınsamaktadır. H_N yöntemi çabuk yakınsaması yanında bölüm 8.1’ da görüldüğü analitik olarak da kolaylıklara sahiptir. Çizelge 8.16 ve 8.17’de H_N yöntemi ile elde edilen bazı yansıma ve geçme katsayısı değerleri C_N yöntemi ile kıyaslanmıştır.

Bölüm 8.2’de aynı problem Singüler özfonsiyonlar yöntemi ile incelenmiştir. Bu yöntemle yine oldukça güzel sonuçlar elde edilmiştir. Çizelge 8.18’de Singüler Özfonsiyonlar yöntemi ile $c = 0.8$ ve $s = 0$ için elde edilen yansıma ve geçme katsayıları değerleri çeşitli anizotropi parametresi ve slab kalınlığı değerleri için verilmiştir. Bu değerlerden anlaşıldığı gibi singüler Özfonsiyonlar yöntemi de hem analitik ifadeleri hemde yakınsaklığı anlamında oldukça kullanışlı bir yöntemdir. Bu yöntemin nümerik sonuçlarının diğer yöntemlerle kıyaslanması ise Çizelge 8.19’da yapılmıştır. Singüler özfonsiyonlar yöntemi de H_N ve C_N yöntemi kadar güzel sonuçlar vermektedir.

Bölüm 8.3 v 8.4’de bir başka temel problem olan Milne problemi, sırası ile H_N ve Singüler özfonsiyonlar yöntemi ile incelenmiştir. Yine düzlem geometride, lineer anizotropik saçılma durumu dikkate alınmıştır ve extrapolasyon değeri hesaplanmıştır. Çizelge 8.20-8.24’de $c < 1$ ve $c > 1$ için hesaplanan extrapolasyon uzaklığı değerleri birinci tip çıkan akı ifadesi için verilmiştir. Herbir $c = 0.5, 0.8, 0.9999$ değeri ve $c = 1.2, 1.5$, $f_1 = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ ve 0.5 olacak şekilde farklı anizotropi parametreleri için H_N yöntemi ile hesaplanan extrapolasyon uzaklığı değerleri $N=1$. ve ya 2 . yaklaşıklıkta sonra virgülden sonra altı haneye kadar sabit kalmaktadır. Çizelge 8.25’de ise farklı çıkan akı ifadelerinin yakınsama derecesi üzerindeki etkisine bakılmıştır. Farklı 4 tip çıkan akı ifadesi de hemen hemen aynı yakınsama derecelerine sahiptir. Benzer şekilde Çizelge 8.26’de Singüler Özfonsiyonlar yöntemi ile $c = 0.5, 0.8, 1.2$ ve $c = 1.5$ için hesaplanan extrapolasyon uzaklığı değerleri verilmiştir. Singüler Özfonsiyonlar yöntemi de H_N yöntemi kadar çabuk yakınsamaktadır. Bu çizelgede herbir c değeri için $f_1 = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ değerlerini almıştır ve farklı anizotropi parametresi ve ikincil nötron sayısının extrapolasyon değerleri üzerindeki etkisi görülmüştür. Ortamda artan ikincil

nötron sayısı ve artan anizotropi katsayısı değerleri ile extrapolasyon uzaklığı değeri de artmaktadır. H_N ve Singüler Özfonksiyonlar yöntemi diğer yöntemlerle kıyaslandığında hem F_N yöntemi kadar basit analitik hesaplara sahip hemde C_N yöntemi kadar çabuk yakınsamaktadır. Bu yüzden uygulanabilirlik açısından her iki yöntemde oldukça iyi sonuçlar vermiştir.

9. bölümde ise H_N yöntemi ile, transport teorisinin başka bir uygulama alanı olan radiative transfer problemi incelenmiştir. Öncelikle radiative transfer denklemi türetilmiştir. Transport denkleminin başka bir çözüm yöntemi olan P_N yöntemi ile istenilen sınır koşulları altında radiative transfer denklemi çözülmüştür. Daha sonra H_N yöntemi ile radiative transfer problemi aynı sınır koşulları altında incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar bölüm 9.3’de verilmiştir. Çizelge 9.1-9.3’de görüldüğü gibi ortamda alınan optik yol değerleri $\tau_0 = 0.1, 1, 10$ gibi değerleri alırken diffusely reflecting sınır koşullarını belirleyen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho_1^d, \rho_2^d$ katsayılarının farklı değerlerinde $c = 0$ ve $c = 0.5$ değerlerinde, sabit kaynak terimi için H_N yöntemi ile $Q_0(0)$, $Q_1(0)$ ve $Q_0^*(\tau_0)$ radiative akı değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca bu çizelgelerde aynı problemin P_N (Atalay 2006) ve normal mode expansion tekniği (Özışık 1971) ile elde edilen sonuçları da kıyaslama yapılması açısından verilmiştir. P_N yöntemi oldukça geç yakınsamakta ($N=35-45$ yaklaşıklarında) ve normal mode expansion tekniği ile elde edilen sonuçlar ise hemen hemen kesin sonuçlar olmasına rağmen oldukça zor analitik işlemlerle elde edilmiştir. H_N yöntemi ile bulunan sonuçlar ise önceki problemlerde olduğu gibi çok çabuk yakınsamakla beraber analitik hesaplarda da basit ifadelerle sahiptir. $N=2$ yaklaşımında istenilen değere ulaşılmıştır. Çizelge 9.4’ de aynı kıyaslama optik yol ile lineer değişen kaynak terimi için yapılmıştır ve benzer sonuçlar görülmüştür.

Çizelge 9.5’de ise farklı bir sınır şartı olan specularly reflecting boundary için $Q_1(0)$ radiative akı değeri hesaplanmıştır. Çizelge 9.6’da farklı anizotropi katsayısı değerlerinin radiative akı üzerindeki etkisi incelenmiştir. Ortamdaki optik kalınlığın aynı olması şartı ile artan anizotropi parametresi değerlerinin radiative akı değerini artırdığı görülmüştür. aynı etkiyi Şekil 9.1’de görmek mümkündür.

H_N ve Singüler özfonksiyonlar yöntemleri bu avantajlarından dolayı transport teorisinin uygulama alanları olan nötron transport teorisini, radiative transfer, radiative ısı transfer ve benzeri birçok alanda farklı problemlere uygulanabilir görülmektedir. Özellikle daha fiziksel geometriler ve sınır koşullarında ele alınacak problemlere uygulanması yöntemlerin yaygın kullanılması açısından iyi sonuçlar verecektir.

KAYNAKLAR

- Atalay, M. A. 2000. Milne problem for linearly anisotropic scattering and a specular and diffuse reflecting boundary. *Ann Nuc Energy*, 27; 1483.
- Atalay, M.A. 2006. P_N solutions of radiative heat transfer in a slab with reflective boundaries. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* 101; 100-108 .
- Beach, H. L., Özışık, M.N. and Siewert, C. E. 1971. Radiative transfer in linearly anisotropic scattering conservative and non-conservative slab with reflective boundaries. In. *Heat. Mass Transfer*, 14; 1551-1565.
- Bell, G. I. and Glasstone, S. 1972. *Nuclear Reactor Theory*, NY Van Nostrand-Reinhold, New York.
- Benoist, K. and Kavenoky, A. 1968. A new method of approximation of the Boltzman equation. *Nuclear Science and Engineering*, 32 ; 225-232.
- Bulut, S. and Güleçyüz, M. Ç. 2007. The H_N Method For Slab Albedo Problem for Linearly Anisotropic Scattering . *KERNTECHNIK*,70 (5-6); 301-308 .
- Bulut, S., Güleçyüz, M. Ç., Kaşkaş, A. and Tezcan, C. 2007. The effect of different expansion of the exit distribution on the extrapolation length for linearly anisotropic scattering., *KERNTECHNIK*. 72(1-2); 77-85 .
- Bulut, S., and Güleçyüz, M. Ç. 2008. Application of the H_N method to radiative heat transfer for a non-conservative slab, (Hakemde).
- Case, K. M., Hoffmann, F. De and Placzek, G. 1953. *Introduction to Theory of Neutron Diffusion*, Vol. I, Los Alamos.
- Case, K.M., and Zweifel, P.F. 1967. *Linear Transport Theory*, 1st Ed, Addison-Wesley Publishing Company Inc., Reading Massachusetts.
- Chandrasekhar, S. 1950. *Radiative transfer*, Oxford University Press, London.
- Davison B. 1958. *Neutron Transport Theory*, Oxford University Press, London.
- Erdoğan, F., Güleçyüz, M. Ç., Kaşkaş, A. and Tezcan, C. 1996. Solution of the C_N

- equations using singüler eigenfunctions and applications. *Annals of Nuclear Energy*. 23(6); 533-541.
- Grandjean, P. and Siewert, C.E. 1979. The F_N method in Neutron Transport Theory. Part 2: Applications and Numerical Results. *Nucl. Sci. Eng.*, 69, 161.
- Güleçyüz, M. Ç., Kaşkaş, A. and Tezcan, C. 1997. Slab albedo problem for anisotropic scattering using singular eigenfunction solution of the C_N equations and Green function solution of the F_N equation. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*.
- Güleçyüz, M. Ç. 1999. Elemanter çözüm yönteminin özfonksiyonlarının ve diklik bağıntılarının Boltzmann denkleminin üçüncü formunda kullanılması. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kaşkaş, A., Güleçyüz M. Ç. and Tezcan C. 1996. The slab albedo problem using singular eigenfunctions and the third form of the transport equation. *Annals of Nuclear Energy*, 23(17); 1371-1379.
- Kaşkaş, A. 1998. İzotropik ve Anizotropik saçılma için F_N ve yeni geliştirilen bir yöntemle uygulamalar. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kavenoky, A. 1978. The C_N Methods of Solving the Transport Equation Application the Plane Geometry. *Nucl. Sci. Eng.*, 65, 209.
- Özişik, M.N. and Siewert, C. E. 1969. On the normal mode expansion technique for radiative transfer in a scattering, absorbing and emitting slab with specularly reflecting boundaries., In. *Heat Mass Transfer*, 12 ; 611-620.
- Özişik, MN. 1973. Radiative transfer and interactions with conduction and convection, Wiley, New York.
- Özişik, M.N. and Siewert, C. E. 1970. Several Particular Solution of the One-Speed Transport Equation. *Nuclear Science and Engineering*, 40, 491-494.
- Siewert, C.E. and McCormick, N.J. 1967. On an exact solution in the theory of line formation in stellar atmospheres., *The Astrophysical Journal*. 149; 649-653.
- Siewert, C.E. and Benoist, P. 1978. The F_N method in Neutron Transport Theory. Part 1: Theory and Applications. *Nucl. Sci. Eng.*, 65, 209.

- Tezcan, C. 1996. The third form of the transport equation for extremely anisotropic scattering kernel. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 55(1); 33-40.
- Tezcan, C., Kaşkaş, A. and Güleçyüz, M.Ç. 1999. The singular eigenfunction method: the Milne problem for isotropic and extremely anisotropic scattering. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer, 62;49-57.
- Tezcan, C., Kaşkaş, A. and Güleçyüz, M.Ç. 2003. The H_N Method for Solving Linear Transport Equation: Theory And Applications. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer. 78, 243-254.

EKLER

EK 1 Reduce 3.6 paket programında hazırlanan ve H_N Yöntemi ile Lineer anizotropik saçılma durumu için yansıma ve geçiş katsayılarını hesaplayan program.

EK 2 Reduce 3.6 paket programında hazırlanan ve Singüler Özfonksiyonlar yöntemi ile Yöntemi ile Lineer anizotropik saçılma durumu için yansıma ve geçiş katsayılarını hesaplayan program.

EK 3 Reduce 3.6 paket programında hazırlanan ve H_N Yöntemi ile extarspolasyon uzaklığı hesaplayan program.

EK 4 Mathematica 5.0 paket programında hazırlanan ve H_N Yöntemi ile extarspolasyon uzaklığı hesaplayan program.

EK 1

```

ON NUMVAL;
on rounded;
%Hn Yöntemi ile Lineer ANISOTROPIK- SLAB MAKALE HESAPLARI
%ALBEDO ve TRANSMISSION (yansıma ve geçiş) KATSAYILARININ
%BULUNMASI C=0.8 TTO=1 SİSTEM 2 (A+D);
PRECISION 40;
%BURADA TT (Vi), TTT (Vk) VE ES DENK.(A)' YA ;
%MTT ,NTT VE P DENK(D)' YE AITTIR!!;
c:=0.8;
vo:=1.465646464380304935994912048769736070029897893114165917856;
n:=2;
f:=0.1;
ff:=3*f;
r:=ff*(1-c);
q:=r*vo;
w:=r*v1;
ga:=8;
tto:=1;
xc:=1;
no:=c/2*vo^2*(1+r*vo^2)*(c*(1+r*vo^2)/(vo*(vo^2-1))-(1-c)*(1+3*r*vo^2)/(vo*(1+r*vo^2)));
nv=v1*((1+r*v1^2)*(1-c*v1*Atanh(v1))-r*(1-c)*v1^2)+1/4*c^2*v1^3*PI^2*(1
r*v1^2)^2;
a(0,0):=(1-vo*ln(1+1/vo))*(1+q*vo)-q/2;
for p:=1 step 1 until 2*n+4 do write A(p,0):=1/(p+1)-q/(p+2)-vo*A(p-1,0);
rvo:=(c*vo/2)^2*a(0,0)/no;
b(0,0):=(1+q*vo)*(-1-vo*ln(1+1/vo))+2/c+(4*q*vo-q)/2;
for p:=1 step 1 until 2*n+4 do write B(p,0):=-1/(p+1)-q/(p+2)+vo*B(p-1,0);
bv(0):=(1+w*v1)*(-1-v1*ln(1+1/v1))+2/c+(4*w*v1-w)/2;
av(0):=(1-vo*ln(1+1/vo))*(1+w*vo)-w/2;
for p:=1 step 1 until 2*n+4 do write bv(p):=-1/(p+1)-w/(p+2)+v1*bv(p-1);
for p:=1 step 1 until 2*n+4 do write av(p):=1/(p+1)-w/(p+2)-v1*av(p-1);

IAA(1,1):=0.07668171675299623116740817930414745349996;
IAA(2,1):=0.04614334203687998818427729908314363095279;
IAA(3,1):=0.03275447312768009122050312081330308094696;
IAA(4,1):=0.02532746282329136505925630422040343760151;
IAA(5,1):=0.02062624949904603033249943352550343647868;
IAA(6,1):=0.01738920789757393755303807056241834752966;
IAA(7,1):=0.01502679154766031075800980790140615286091;
IAA(8,1):=0.01322768252195451992482063850303682259424;
IAA(9,1):=0.01181231955501746821199872290343497696822;
IAA(10,1):=0.01066998774620414832486288659295877617735;
IAA(11,1):=0.009728759014878512607609448527702275455193;
IAA(1,2):=0.04614334203687998818427729908314363095279;
IAA(2,2):=0.02779891981875831073594821048186045650455;
IAA(3,2):=0.01974277541876846523111636158902221734736;
IAA(4,2):=0.01527028255145215847503528047995179710185;
IAA(5,2):=0.01243792929303810789467028726277386506726;
IAA(6,2):=0.01048712081661325018197417686530822377757;
IAA(7,2):=0.009063115698107999061233831719378627299148;
IAA(8,2):=0.007978496829779079290498514603229486712615;
IAA(9,2):=0.007125128647203099875050032903296668966685;
IAA(10,2):=0.006436319020839533314398907294514917491172;
IAA(11,2):=0.005868731426640065710439526864004337315448;
IAA(1,3):=0.03275447312768009122050312081330308094696;
IAA(2,3):=0.01974277541876846523111636158902221734736;
IAA(3,3):=0.01402441931333441304443242077813649371654;
IAA(4,3):=0.01084865672333061949155458337447099156195;
IAA(5,3):=0.008837088104249586850295111915397746521866;
IAA(6,3):=0.007451420150286442466541174819345782042734;
IAA(7,3):=0.006439851136052333006050861654753520516904;
IAA(8,3):=0.005669320597869550513039434266172128432283;
IAA(9,3):=0.005063043785246922230584455893961541026227;
IAA(10,3):=0.004573658604289101848716074189349754907462;
IAA(11,3):=0.004170386442742014992086392855764012786786;

```

IAB(1,1):=0.1636834759117591085288793916488993165483;
 IAB(2,1):=0.09891805178348800941988742944333420192487;
 IAB(3,1):=0.07035175311692451969756410066784576152064;
 IAB(4,1):=0.05445729901739153662494050695305685187527;
 IAB(5,1):=0.04437832312341032842225876005322931546531;
 IAB(6,1):=0.03743037144262444471162099062473346643964;
 IAB(7,1):=0.03235562845723985600565048210584178202521;
 IAB(8,1):=0.02848865859892569059515792803815246572063;
 IAB(9,1):=0.02544513996583000302287963209782617842032;
 IAB(10,1):=0.0229878662388684862689147534810652064111;
 IAB(11,1):=0.02096261071408516551615117444012161639331;
 IAB(1,2):=-0.0004491513410769760128833899030773988074567;
 IAB(2,2):=0.0002407997125819350805012346912241453972904;
 IAB(3,2):=0.0003387587295888034344222591306208159244306;
 IAB(4,2):=0.000334100794793874617538703437080412890145;
 IAB(5,2):=0.0003089096717316805191903813912942643809967;
 IAB(6,2):=0.0002815431441151717602858189323473313774491;
 IAB(7,2):=0.0002564519064059807256700630844782001210102;
 IAB(8,2):=0.000234474907215877347884800823335951365702;
 IAB(9,2):=0.0002154599561463553048827300568161962944335;
 IAB(10,2):=0.0001990155470063926738780688031146145283072;
 IAB(11,2):=0.0001847359272685201332744485821862642245662;
 IAB(1,3):=-0.05239421698378335729578206883080780399499;
 IAB(2,3):=-0.03158664017664088449758984816182201637256;
 IAB(3,3):=-0.0224356053165953781176855294693486776634;
 IAB(4,3):=-0.01735323596141998115489360264639536431012;
 IAB(5,3):=-0.01413428438048070730762640559163118770423;
 IAB(6,3):=-0.01191714717355568452666850341493576059735;
 IAB(7,3):=-0.01029874450066255634298210347949425646349;
 IAB(8,3):=-0.00906608109331323497261276218376937350451;
 IAB(9,3):=-0.008096253026198016985127173230255555974369;
 IAB(10,3):=-0.007313457278361177908554047251264155713796;
 IAB(11,3):=-0.006668436645779104907775482157945612290434;

IABE(1,1):=0.02651298096273309403618254389575603821024;
 IABE(2,1):=0.01633718617796183227304294772364072404002;
 IABE(3,1):=0.01172303378166470584646652465737317378835;
 IABE(4,1):=0.009119214475276632510865032766969628707195;
 IABE(5,1):=0.0074542950357467507608546799571540781757;
 IABE(6,1):=0.006300359839146245160574263517935007190896;
 IABE(7,1):=0.005454351329661602760465870215430495313359;
 IABE(8,1):=0.004807906439314692105198035775461918045229;
 IABE(9,1):=0.00429804514993078232288917659817203693273;
 IABE(10,1):=0.003885710729808224050472289252273553607793;
 IABE(11,1):=0.00354541513924083528464220331109069276769;
 IABE(1,2):=0.003268003363358663680431683326651523643702;
 IABE(2,2):=0.002040738012189573142112827764783252815243;
 IABE(3,2):=0.001474050416155559314145743378760364431571;
 IABE(4,2):=0.001151024681288605494011229054500997811221;
 IABE(5,2):=0.0009431837066468586327092135780271860258105;
 IABE(6,2):=0.0007985264941035430122245455350704851275462;
 IABE(7,2):=0.0006921537352291349768041035549521903407074;
 IABE(8,2):=0.0006106919981033026388303299855887286066224;
 IABE(9,2):=0.0005463313994932810661130433927657163747776;
 IABE(10,2):=0.0004942107773432573779006230258922963754901;
 IABE(11,2):=0.0004511485038339112175477731235318821604162;
 IABE(1,3):=-0.007545333039952514697700273909685138094057;
 IABE(2,3):=-0.00463506928539410567328892201474345733872;
 IABE(3,3):=-0.003320762212648086886427627554505478070443;
 IABE(4,3):=-0.002580805652288806517135300168554981250369;
 IABE(5,3):=-0.002108362199327853668238502069782214287788;
 IABE(6,3):=-0.001781245094649273253531645848019064791979;
 IABE(7,3):=-0.001541591542844032898228942824405123041903;
 IABE(8,3):=-0.001358568403338858811293554299447800947865;
 IABE(9,3):=-0.001214275664908054178093015394405015642347;
 IABE(10,3):=-0.001097622392000443412017000903722937503601;
 IABE(11,3):=-0.001001375778786025597937099487468438344705;

IBBE(1,1):=0.06289316539442440100255290566006937765079;
 IBBE(2,1):=0.008449696261208985850514324790918196261955;

```

IBBE(3,1):=-0.01749351022512977392781349493712853344247;
IBBE(4,1):=-0.03076219858621600927209466495399726374217;
IBBE(5,1):=-0.03768615634175430192615665072415240797812;
IBBE(6,1):=-0.04119441629151598793219788075580079323857;
IBBE(7,1):=-0.04277248845935580554185972466376116408847;
IBBE(8,1):=-0.0432246720600968621483295027597901610831;
IBBE(9,1):=-0.04300840856920179997726769587712492677458;
IBBE(10,1):=-0.04239390481369148054757372844205004044791;
IBBE(11,1):=-0.04154548370766074363018268919738500196658;
IBBE(1,2):=0.008449696261208985850514324790918196261955;
IBBE(2,2):=0.002202051941996376542359286240632669559856;
IBBE(3,2):=-0.001701798854606026012703781854069031665417;
IBBE(4,2):=-0.004232935585659649726794302203475377753172;
IBBE(5,2):=-0.005894425310469011656917567700774795936255;
IBBE(6,2):=-0.006985716876089838139192619790038320688015;
IBBE(7,2):=-0.007694571755304548578750232405655397364328;
IBBE(8,2):=-0.008142372244454680699276080198701306677578;
IBBE(9,2):=-0.008409457481525698241873416341440043726591;
IBBE(10,2):=-0.008550078893298488147046230987002768006172;
IBBE(11,2):=-0.008601520566619732103225905602826286090965;
IBBE(1,3):=-0.01749351022512977392781349493712853344247;
IBBE(2,3):=-0.001701798854606026012703781854069031665417;
IBBE(3,3):=0.005307347468347959623620084560208291114815;
IBBE(4,3):=0.008556244744245535981120447391915588317582;
IBBE(5,3):=0.01001788429865083086828389385155923663337;
IBBE(6,3):=0.01057727528504743012840137934306290953334;
IBBE(7,3):=0.01066554827306507308313408948039487530377;
IBBE(8,3):=0.01050518064051984795529078910301013182617;
IBBE(9,3):=0.01021583291435883330446526326106126839531;
IBBE(10,3):=0.009863748757595726882871300967139447449494;
IBBE(11,3):=0.00948624725488360032158422411311763307713;
matrix tt(n+1,n+1);
j:=1;
begin scaler qq;
s:for m:=0 step 1 until n do write tt(m+1,j):=
((c^2*vo^2/4)*a(m,0)*a(j-1,0)/no+c^2/4*iaa(m+1,j)+1/(j+m+1));
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return qq;
go to s;
end;
matrix ttt(n+1,n+1);
j:=1;
begin scaler qq;
sa:for m:=0 step 1 until n do write ttt(m+1,j):=
exp(-tto/vo)/no*(c*vo/2)^2*b(m,0)*a(j-1,0)+c^2/4*iabe(j,m+1);
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return qq;
go to sa;
end;
matrix mtt(n+1,n+1);
j:=1;
begin scaler qq;
sa:for m:=0 step 1 until n do write mtt(m+1,j):=
(exp(-tto/vo)*1/no*(c*vo/2)^2*b(m,0)*a(j-1,0)+c^2/4*iabe(j,m+1));
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return qq;
go to sa;
end;
matrix ntt(n+1,n+1);
j:=1;
begin scaler qq;
sa:for m:=0 step 1 until n do write ntt(m+1,j):=
1/no*(c*vo/2)^2*a(j-1,0)*a(m,0)+(c/2)^2*iaa(m+1,j)+1/(m+j+1);
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return qq;
go to sa;
end;
matrix t(2*n+2,2*n+2);
j:=1;

```

```

begin scaler qqq;
sa:for m:=0 step 1 until n do write t(m+1,j):=tt(m+1,j);
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return qqq;
go to sa;
end;
j:=n+2;
begin scaler qqqq;
k:=1;
ssa:for m:=0 step 1 until n do write t(m+1,j):=ttt(m+1,k);
k:=k+1;
j:=j+1;
o:=2*n+3;
if j=o then return qqqq;
go to ssa;
end;
j:=1;
begin scaler aqqq;
saa:for m:=0 step 1 until n do write t(n+m+2,j):=mtt(m+1,j);
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return aqqq;
go to saa;
end;
j:=n+2;
begin scaler aaqq;
k:=1;
ssaa:for m:=0 step 1 until n do write t(m+n+2,j):=ntt(m+1,k);
k:=k+1;
j:=j+1;
o:=2*n+3;
if j=o then return aaqq;
go to ssaa;
end;
matrix es(n+1,1);
for j:=0 step 1 until n do write es(j+1,1):=
(c*vo/2)^2*1/no*a(j,0)*b(ga,0)+c^2/4*iab(j+1,ga+1);
matrix p(n+1,1);
for j:=0 step 1 until n do write p(j+1,1):=
(c*vo/2)^2*1/no*exp(-tto/vo)*b(j,0)*b(ga,0)+(c/2)^2*ibbe(j+1,ga+1);
matrix s(2*n+2,1);
j:=1;
begin scaler sqqq;
sas:for m:=0 step 1 until n do write s(m+1,1):=es(m+1,1);
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return sqqq;
go to sas;
end;
j:=n+2;
begin scaler sqqqq;
k:=1;
ssas:for m:=0 step 1 until n do write s(m+n+2,1):=p(m+1,1);
k:=k+1;
j:=j+1;
o:=2*n+3;
if j=o then return sqqqq;
go to ssas;
end;
qvv:=t*(-1);
MATRIX yy(2*n+2,1);
yy:=qvv*s;
top:=1/2*yy(1,1);
for xx:=1 step 1 until n do write top:=top+yy(xx+1,1)*1/(xx+2);
ae:=(ga+2)*top;
top1:=1/2*yy(n+2,1);
for xx:=1 step 1 until n do write top1:=top1+yy(xx+n+2,1)/(xx+2);
be:=(ga+2)*top1;
ae;
be;
end;

```

EK 2

```
ON NUMVAL;
on rounded;
%Singüler Özfonskiyonlar yöntemi ile ANISOTROPIK- SLAB MAKALE HESAPLARI
%ALBEDO ve TRANSMISSION (yansıma ve geçiş) KATSAYILARININ
%BULUNMASI C=0.8 TTO=1 SISTEM 2 (A+D);
PRECISION 40;
%BURADA TT (VI), TTT (Vk) VE ES DENK.(A) ' YA ;
%MTT ,NTT VE P DENK(D)' YE AITTIR!!;
c:=0.8;
vo:=1.465646464380304935994912048769736070029897893114165917856;
n:=7;
f:=0.1;
ff:=3*f;
r:=ff*(1-c);
q:=r*vo;
w:=r*v1;
ga:=0;
tto:=1;
xc:=1;
no:=c/2*vo^2*(1+r*vo^2)*(c*(1+r*vo^2)/(vo*(vo^2-1))-(1-c)*(1+3*r*vo^2)/(vo*(1+r*vo^2)));
nv:=v1*((1+r*v1^2)*(1-c*v1*Atanh(v1))-r*(1-c)*v1^2)^2+1/4*c^2*v1^3*PI^2*(1
r*v1^2)^2;
a(0,0):=(1-vo*ln(1+1/vo))*(1+q*vo)-q/2;
for p:=1 step 1 until 2*n+4 do write A(p,0):=1/(p+1)-q/(p+2)-vo*A(p-1,0);
rvo:=(c*vo/2)^2*a(0,0)/no;
b(0,0):=(1+q*vo)*(-1-vo*ln(1+1/vo))+2/c+(4*q*vo-q)/2;
for p:=1 step 1 until 2*n+4 do write B(p,0):=-1/(p+1)-q/(p+2)+vo*B(p-1,0);
bv(0):=(1+w*v1)*(-1-v1*ln(1+1/v1))+2/c+(4*w*v1-w)/2;
av(0):=(1-vo*ln(1+1/vo))*(1+w*vo)-w/2;
for p:=1 step 1 until 2*n+4 do write bv(p):=-1/(p+1)-w/(p+2)+v1*bv(p-1);
for p:=1 step 1 until 2*n+4 do write av(p):=1/(p+1)-w/(p+2)-v1*av(p-1);

IAA(1,1):=0.07668171675299623116740817930414745349996;
IAA(2,1):=0.04614334203687998818427729908314363095279;
IAA(3,1):=0.03275447312768009122050312081330308094696;
IAA(4,1):=0.02532746282329136505925630422040343760151;
IAA(5,1):=0.02062624949904603033249943352550343647868;
IAA(6,1):=0.01738920789757393755303807056241834752966;
IAA(7,1):=0.01502679154766031075800980790140615286091;
IAA(8,1):=0.01322768252195451992482063850303682259424;
IAA(9,1):=0.01181231955501746821199872290343497696822;
IAA(10,1):=0.01066998774620414832486288659295877617735;
IAA(11,1):=0.009728759014878512607609448527702275455193;
IAA(1,2):=0.04614334203687998818427729908314363095279;
IAA(2,2):=0.02779891981875831073594821048186045650455;
IAA(3,2):=0.01974277541876846523111636158902221734736;
IAA(4,2):=0.01527028255145215847503528047995179710185;
IAA(5,2):=0.01243792929303810789467028726277386506726;
IAA(6,2):=0.01048712081661325018197417686530822377757;
IAA(7,2):=0.009063115698107999061233831719378627299148;
IAA(8,2):=0.007978496829779079290498514603229486712615;
IAA(9,2):=0.007125128647203099875050032903296668966685;
IAA(10,2):=0.006436319020839533314398907294514917491172;
IAA(11,2):=0.005868731426640065710439526864004337315448;
IAA(1,3):=0.03275447312768009122050312081330308094696;
IAA(2,3):=0.01974277541876846523111636158902221734736;
IAA(3,3):=0.01402441931333441304443242077813649371654;
IAA(4,3):=0.0108486567233061949155458337447099156195;
IAA(5,3):=0.008837088104249586850295111915397746521866;
IAA(6,3):=0.007451420150286442466541174819345782042734;
IAA(7,3):=0.006439851136052333006050861654753520516904;
IAA(8,3):=0.005669320597869550513039434266172128432283;
IAA(9,3):=0.005063043785246922230584455893961541026227;
IAA(10,3):=0.004573658604289101848716074189349754907462;
IAA(11,3):=0.004170386442742014992086392855764012786786;

IAB(1,1):=0.1636834759117591085288793916488993165483;
IAB(2,1):=0.09891805178348800941988742944333420192487;
```

IAB(3,1):=0.07035175311692451969756410066784576152064;
IAB(4,1):=0.05445729901739153662494050695305685187527;
IAB(5,1):=0.04437832312341032842225876005322931546531;
IAB(6,1):=0.03743037144262444471162099062473346643964;
IAB(7,1):=0.03235562845723985600565048210584178202521;
IAB(8,1):=0.02848865859892569059515792803815246572063;
IAB(9,1):=0.02544513996583000302287963209782617842032;
IAB(10,1):=0.0229878662388684862689147534810652064111;
IAB(11,1):=0.02096261071408516551615117444012161639331;
IAB(1,2):=0.0004491513410769760128833899030773988074567;
IAB(2,2):=0.0002407997125819350805012346912241453972904;
IAB(3,2):=0.0003387587295888034344222591306208159244306;
IAB(4,2):=0.000334100794793874617538703437080412890145;
IAB(5,2):=0.0003089096717316805191903813912942643809967;
IAB(6,2):=0.0002815431441151717602858189323473313774491;
IAB(7,2):=0.0002564519064059807256700630844782001210102;
IAB(8,2):=0.0002344749072158773478848008233335951365702;
IAB(9,2):=0.0002154599561463553048827300568161962944335;
IAB(10,2):=0.0001990155470063926738780688031146145283072;
IAB(11,2):=0.0001847359272685201332744485821862642245662;
IAB(1,3):=0.05239421698378335729578206883080780399499;
IAB(2,3):=0.03158664017664088449758984816182201637256;
IAB(3,3):=0.0224356053165953781176855294693486776634;
IAB(4,3):=0.01735323596141998115489360264639536431012;
IAB(5,3):=0.01413428438048070730762640559163118770423;
IAB(6,3):=0.01191714717355568452666850341493576059735;
IAB(7,3):=0.01029874450066255634298210347949425646349;
IAB(8,3):=0.00906608109331323497261276218376937350451;
IAB(9,3):=0.00809625302619801698512717323025555974369;
IAB(10,3):=0.007313457278361177908554047251264155713796;
IAB(11,3):=0.006668436645779104907775482157945612290434;

IABE(1,1):=0.02651298096273309403618254389575603821024;
IABE(2,1):=0.01633718617796183227304294772364072404002;
IABE(3,1):=0.01172303378166470584646652465737317378835;
IABE(4,1):=0.009119214475276632510865032766969628707195;
IABE(5,1):=0.0074542950357467507608546799571540781757;
IABE(6,1):=0.006300359839146245160574263517935007190896;
IABE(7,1):=0.005454351329661602760465870215430495313359;
IABE(8,1):=0.004807906439314692105198035775461918045229;
IABE(9,1):=0.00429804514993078232288917659817203693273;
IABE(10,1):=0.003885710729808224050472289252273553607793;
IABE(11,1):=0.00354541513924083528464220331109069276769;
IABE(1,2):=0.003268003363358663680431683326651523643702;
IABE(2,2):=0.002040738012189573142112827764783252815243;
IABE(3,2):=0.001474050416155559314145743378760364431571;
IABE(4,2):=0.001151024681288605494011229054500997811221;
IABE(5,2):=0.0009431837066468586327092135780271860258105;
IABE(6,2):=0.0007985264941035430122245455350704851275462;
IABE(7,2):=0.0006921537352291349768041035549521903407074;
IABE(8,2):=0.0006106919981033026388303299855887286066224;
IABE(9,2):=0.0005463313994932810661130433927657163747776;
IABE(10,2):=0.0004942107773432573779006230258922963754901;
IABE(11,2):=0.0004511485038339112175477731235318821604162;
IABE(1,3):=0.007545333039952514697700273909685138094057;
IABE(2,3):=0.00463506928539410567328892201474345733872;
IABE(3,3):=0.003320762212648086886427627554505478070443;
IABE(4,3):=0.002580805652288806517135300168554981250369;
IABE(5,3):=0.002108362199327853668238502069782214287788;
IABE(6,3):=0.001781245094649273253531645848019064791979;
IABE(7,3):=0.001541591542844032898228942824405123041903;
IABE(8,3):=0.001358568403338858811293554299447800947865;
IABE(9,3):=0.001214275664908054178093015394405015642347;
IABE(10,3):=0.001097622392000443412017000903722937503601;
IABE(11,3):=0.001001375778786025597937099487468438344705;

IBBE(1,1):=0.06289316539442440100255290566006937765079;
IBBE(2,1):=0.008449696261208985850514324790918196261955;
IBBE(3,1):=0.01749351022512977392781349493712853344247;
IBBE(4,1):=0.03076219858621600927209466495399726374217;
IBBE(5,1):=0.03768615634175430192615665072415240797812;
IBBE(6,1):=0.04119441629151598793219788075580079323857;

```

IBBE(7,1):=-0.04277248845935580554185972466376116408847;
IBBE(8,1):=-0.0432246720600968621483295027597901610831;
IBBE(9,1):=-0.04300840856920179997726769587712492677458;
IBBE(10,1):=-0.04239390481369148054757372844205004044791;
IBBE(11,1):=-0.04154548370766074363018268919738500196658;
IBBE(1,2):=0.008449696261208985850514324790918196261955;
IBBE(2,2):=0.002202051941996376542359286240632669559856;
IBBE(3,2):=-0.001701798854606026012703781854069031665417;
IBBE(4,2):=-0.004232935585659649726794302203475377753172;
IBBE(5,2):=-0.005894425310469011656917567700774795936255;
IBBE(6,2):=-0.006985716876089838139192619790038320688015;
IBBE(7,2):=-0.007694571755304548578750232405655397364328;
IBBE(8,2):=-0.008142372244454680699276080198701306677578;
IBBE(9,2):=-0.008409457481525698241873416341440043726591;
IBBE(10,2):=-0.008550078893298488147046230987002768006172;
IBBE(11,2):=-0.008601520566619732103225905602826286090965;
IBBE(1,3):=-0.01749351022512977392781349493712853344247;
IBBE(2,3):=-0.001701798854606026012703781854069031665417;
IBBE(3,3):=0.005307347468347959623620084560208291114815;
IBBE(4,3):=0.008556244744245535981120447391915588317582;
IBBE(5,3):=0.01001788429865083086828389385155923663337;
IBBE(6,3):=0.01057727528504743012840137934306290953334;
IBBE(7,3):=0.01066554827306507308313408948039487530377;
IBBE(8,3):=0.01050518064051984795529078910301013182617;
IBBE(9,3):=0.01021583291435883330446526326106126839531;
IBBE(10,3):=0.009863748757595726882871300967139447449494;
IBBE(11,3):=0.00948624725488360032158422411311763307713;
matrix tt(n+1,n+1);
j:=1;
begin scaler qq;
s:for m:=0 step 1 until n do write tt(m+1,j):=
((-1)^(j-1))*((c^2*vo^2/4)*a(m,0)*a(j-1,0)/no+(c^2/4)*iaa(j,m+1)+1/(j+m+1));
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return qq;
go to s;
end;
matrix ttt(n+1,n+1);
j:=1;
begin scaler qq;
sa:for m:=0 step 1 until n do write ttt(m+1,j):=
((exp(-tto/vo)/no)*((c*vo/2)^2)*b(m,0)*a(j-1,0)+(c^2/4)*iabe(j,m+1));
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return qq;
go to sa;
end;
matrix mtt(n+1,n+1);
j:=1;
begin scaler qq;
sa:for m:=0 step 1 until n do write mtt(m+1,j):=
((-1)^(j-1))*((exp(-tto/vo)*(1/no)*((c*vo/2)^2)*b(m,0)*a(j-1,0)+(c^2/4)*iabe(j,m+1));
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return qq;
go to sa;
end;
matrix ntt(n+1,n+1);
j:=1;
begin scaler qq;
sa:for m:=0 step 1 until n do write ntt(m+1,j):=
((1/no)*((c*vo/2)^2)*a(j-1,0)*a(m,0)+((c/2)^2)*iaa(j,m+1)+1/(m+j+1));
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=o then return qq;
go to sa;
end;
matrix t(2*n+2,2*n+2);
j:=1;
begin scaler qq;
sa:for m:=0 step 1 until n do write t(m+1,j):=tt(m+1,j);
j:=j+1;
o:=n+2;

```

```

if j=0 then return qq;
go to sa;
end;
j:=n+2;
begin scaler qq;
k:=1;
ssa:for m:=0 step 1 until n do write t(m+1,j):=ttt(m+1,k);
k:=k+1;
j:=j+1;
o:=2*n+3;
if j=0 then return qq;
go to ssa;
end;
j:=1;
begin scaler aqq;
saa:for m:=0 step 1 until n do write t(n+m+2,j):=mtt(m+1,j);
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=0 then return aqq;
go to saa;
end;
j:=n+2;
begin scaler aaq;
k:=1;
ssaa:for m:=0 step 1 until n do write t(m+n+2,j):=ntt(m+1,k);
k:=k+1;
j:=j+1;
o:=2*n+3;
if j=0 then return aaq;
go to ssaa;
end;
matrix es(n+1,1);
for j:=0 step 1 until n do write es(j+1,1):=
((c*vo/2)^2)*(1/no)*b(j,0)*a(ga,0)+c^2/4*iab(ga+1,j+1));
matrix p(n+1,1);
for j:=0 step 1 until n do write p(j+1,1):=
((c*vo/2)^2)*(1/no)*exp(-tto/vo)*b(j,0)*b(ga,0)+(c/2)^2*ibbe(j+1,ga+1);
matrix s(2*n+2,1);
j:=1;
begin scaler sq;
sas:for m:=0 step 1 until n do write s(m+1,1):=es(m+1,1);
j:=j+1;
o:=n+2;
if j=0 then return sq;
go to sas;
end;
j:=n+2;
begin scaler sq;
k:=1;
ssas:for m:=0 step 1 until n do write s(m+n+2,1):=p(m+1,1);
k:=k+1;
j:=j+1;
o:=2*n+3;
if j=0 then return sq;
go to ssas;
end;
qvv:=t*(-1);
MATRIX yy(2*n+2,1);
yy:=qvv*s;
top:=1/2*yy(1,1);
for xx:=1 step 1 until n do write top:=top+((-1)^(xx))*yy(xx+1,1)*1/(xx+2);
ae:=(ga+2)*top;
top1:=1/2*yy(n+2,1);
for xx:=1 step 1 until n do write top1:=top1+yy(xx+n+2,1)/(xx+2);
be:=(ga+2)*top1;
ae;
be;
end;

```

EK 3

```
%Hn yöntemi ile Lineer anisotropik saçılma için
% EKSTRAPOLASYON uzaklığı;
%HALF SPACE;
precision 32;
On Numval;
on rounded;
n:=10;
f:=0.1;
ff:=3*f;
r:=ff*(1-c);
w:=r*v;
v:= 1.4656464643803049359949120487697360700298978931141659178565586 ;
c:=0.8;
no:=c/2*v^2*(1+r*v^2)*(c*(1+r*v^2)/(v*(v^2-1))-(1-c)*(1+3*r*v^2)/(v*(1+r*v^2)));
A(0,1):=(1-v*log(1+1/v))*(1+w*v)-w/2;
A(0,1);
for p:=1 step 1 until n+1 do write A(p,1):=1/(p+1)-v*A(p-1,1)-w/(p+2);
B(0,1):=(1+w*v)*(-1-v*log(1+1/v))+2/c+(4*w*v-w)/2;
B(0,1);
for p:=1 step 1 until n+1 do write B(p,1):=v*B(p-1,1)-1/(p+1)-w/(p+2);

IAB(1,1):=0.1636834759117591085288793916488993165483;
IAB(2,1):=0.09891805178348800941988742944333420192487;
IAB(3,1):=0.07035175311692451969756410066784576152064;
IAB(4,1):=0.05445729901739153662494050695305685187527;
IAB(5,1):=0.04437832312341032842225876005322931546531;
IAB(6,1):=0.03743037144262444471162099062473346643964;
IAB(7,1):=0.03235562845723985600565048210584178202521;
IAB(8,1):=0.02848865859892569059515792803815246572063;
IAB(9,1):=0.02544513996583000302287963209782617842032;
IAB(10,1):=0.0229878662388684862689147534810652064111;
IAB(11,1):=0.02096261071408516551615117444012161639331;
IAB(1,2):=-0.0004491513410769760128833899030773988074567;
IAB(2,2):=0.0002407997125819350805012346912241453972904;
IAB(3,2):=0.0003387587295888034344222591306208159244306;
IAB(4,2):=0.000334100794793874617538703437080412890145;
IAB(5,2):=0.0003089096717316805191903813912942643809967;
IAB(6,2):=0.0002815431441151717602858189323473313774491;
IAB(7,2):=0.0002564519064059807256700630844782001210102;
IAB(8,2):=0.0002344749072158773478848008233335951365702;
IAB(9,2):=0.0002154599561463553048827300568161962944335;
IAB(10,2):=0.0001990155470063926738780688031146145283072;
IAB(11,2):=0.0001847359272685201332744485821862642245662;
IAB(1,3):=-0.05239421698378335729578206883080780399499;
IAB(2,3):=-0.03158664017664088449758984816182201637256;
IAB(3,3):=-0.0224356053165953781176855294693486776634;
IAB(4,3):=-0.01735323596141998115489360264639536431012;
IAB(5,3):=-0.01413428438048070730762640559163118770423;
IAB(6,3):=-0.01191714717355568452666850341493576059735;
IAB(7,3):=-0.01029874450066255634298210347949425646349;
IAB(8,3):=-0.00906608109331323497261276218376937350451;
IAB(9,3):=-0.00809625302619801698512717323025555974369;
IAB(10,3):=-0.007313457278361177908554047251264155713796;
IAB(11,3):=-0.006668436645779104907775482157945612290434;
IAB(1,4):=-0.07113583568457246240906569946506254077536;
IAB(2,4):=-0.04325947464769154393105395135679825085901;
IAB(3,4):=-0.03085190294268841200264874603541913508017;
IAB(4,4):=-0.02391737999615416828409229309984161945028;
IAB(5,4):=-0.01950874607619478370474049541757815046779;
IAB(6,4):=-0.01646464241934483538624531465214904893365;
IAB(7,4):=-0.01423872153145796529634728222251916662644;
IAB(8,4):=-0.01254116075280432642044211643509888656859;
IAB(9,4):=-0.01120424921202166929247207024164770610296;
IAB(10,4):=-0.01012432479918310407509604751243073946418;
IAB(11,4):=-0.009233913116466046748474208481686394395788;
matrix tt(n+1,n+1);
matrix ttt(n+1,1);

m:=1;
begin scalar qq;
```

```

s:for l:=0 step 1 until n do write tt(m,l+1):=
(-1)^(l+1)*(B(l,1)*A(m-1,1)*(c^2*v^2/(4*no))+(c^2/4)*lab(m,l+1));
ttt(m,1):=-v*A(m-1,1);
m:=m+1;
o:=n+2;
if m=o then return qq;
go to s;
end;
tt;
ttt;
yy:=tt*(-1);
zz:=yy*ttt;
Z;
Fs:=v*log((v+1)/(v-1))*(1+w*v)-2*v*w;
matrix Fi(1,n+1);
for l:=0 step 1 until n do write Fi(1,l+1):=
(-1)^(l+1)*zz(l+1,1)*A(l,1)*(c*v/(2*no));
Fii:= for l:=0 step 1 until n sum Fi(1,l+1);

lbd:=v*(Fs+Fii)/(Fs-Fii);
lbd;

zo:=-v/2*log(-fii/fs);
zo;
end;

```

EK 4

"HN Yöntemi ile Linear Anizotropik saçılma durumu için Milne Problemi"

"Extrapolasyon uzaklığı"

ClearAll[K, f, L, L, IMM, IID, H, T]; ClearAll[K, f, L, L, IMM, IID, H, T];

NNN=3; $\beta=0$; c=1.5; f1=0;

h=3*f1;

r=h*(1-c);

qu=r*(-i)*voo;

FindRoot[$1 - \frac{c*(-i)*voo}{2} * \text{Log}\left[\frac{1 + \frac{1}{(-i)*voo}}{1 - \frac{1}{(-i)*voo}}\right] * (1 + qu*(-i)*voo) + qu*c*(-i)*voo = 0, \{voo, 1.04\}$];

mm=voo/.%;

x=SetPrecision[mm, 60];

qqq=(-i)*x*r;

q=SetPrecision[qqq, 40];

p=r*v;

bbb[0]:=(1+q*(-i)*x)*(-1-(-i)*x*Log[(1+1/((-i)*x))]+2/c+(4*q*(-i)*x-q)/2;

bb[0]=SetPrecision[bbb[0], 40];

bb[m]:=(-i)*x*bb[m-1]-1/(m+1)-q/(m+2);

b[0]:=(1+p*v)*(-1-v*Log[(1+1/v)]+2/c+(4*p*v-p)/2;

b[m]:=v*b[m-1]-1/(m+1)-p/(m+2);

aaa[0]=(1+q*(-i)*x)*(1-(-i)*x*Log[(1+1/((-i)*x))]-q/2;

aa[0]=SetPrecision[aaa[0], 40];

aa[m]:=1/(m+1)-(-i)*x*aa[m-1]-q/(m+2);

a[0]=(1+p*v)*(1-v*Log[(1+1/v)]-p/2;

a[m]:=1/(m+1)-v*a[m-1]-p/(m+2);

LL[x]:=((-c*x^2)/2)*(1-r*x^2)*((c*(1-r*x^2))/((-i)*x*(-x^2-1)))-((1-c)*(1-3*r*x^2)/((-i)*x*(1-r*x^2))));

L[x]=SetPrecision[LL[x], 40];

L[v]:=v*((1+r*(v^2))*(1-c*v*(ArcTanh[v]))-r*(1-c)*v^2^2+(1/4)*(c^2)*(v^3)*(pi^2)*(1+r*v^2)^2;

IAB[m, 1]:=NIntegrate[(v^2)*a[1]*b[m]/L[v], {v, 0, 1}];

IAA[m, 1]:=NIntegrate[(v^2)*a[1]*a[m]/L[v], {v, 0, 1}];

T[m, 1]:=1/(m+1+2)+((c*(-i)*x/2)^2)*aa[m]*aa[1]/L[x]+(c^2/4)*IAA[1, m];

H[m]:=(c*(-i)*x/2)*bb[m];

www=Table[{H[m]}, {m, 0, NNN}];

ww=SetPrecision[www, 40];

uu=Table[T[m, 1], {m, 0, NNN}, {1, 0, NNN}];

u=SetPrecision[uu, 40];

zz=PseudoInverse[u].ww;

z=SetPrecision[zz, 40];

AAA=-((c*(-i)*x/2)*1/L[x]*Sum[z[[n+1]]*aa[n], {n, 0, NNN}];

AA=SetPrecision[AAA, 40];

A=x/2*ArcCos[-Re[AA]];

SetPrecision[A, 30]

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyad : Serdar BULUT

Doğum Yeri : Yozgat

Doğum Tarihi : 03.03.1978

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Alparslan Lisesi (1992-1995)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fak. Fizik Bölümü (1995-1999)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik
Anabilim Dalı (2000-2003)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Ankara Üniversitesi 2002-2007(Kasım)

Türkiye Atom Enerjisi Kurumu 2007(Kasım)-devam ediyor.

Yayınları (SCI ve diğer)

- 1- S. Bulut, M. Ç. Güleçyüz, The H_N method for slab albedo problem for linearly anisotropic scattering , KERNTECHNIK, 2005, Vol 70/5-6, page: 301-308.
- 2- S. Bulut, M. Ç. Güleçyüz, A. Kaşkaş and C. Tezcan, The effects of different expansions of the exit distribution on the extrapolation length for linearly anisotropic scattering, KERNTECHNIK, 2007, Vol 72/1-2, page: 77-85.