

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BENZER EĞRİLER VE BENZER YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Seher KAYA

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ANKARA
2014**

Her Hakkı Saklıdır

ETİK

Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

18/07/2014

Seher KAYA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BENZER EĞRİLER VE BENZER YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Seher KAYA

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan ön bilgiler, bazı kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, benzerlik dönüşümleri altında eğriler incelenmiş ve bunlarla ilgili önermeler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, benzerlik dönüşümleri altında bazı özel yüzeyler incelenmiş ve bunlarla ilgili karakterizasyonlar verilmiştir. Ayrıca, rasyonel yüzeylerden bahsedilmiştir.

Beşinci bölümde ise benzerlik dönüşümlerinin, benzer eğrilerin ve benzer yüzeylerin öneminden bahsedilmiştir.

Temmuz 2014, 58 sayfa

Anahtar Kelimeler: Benzerlik dönüşümleri, benzerlik oranı, benzer eğriler, benzer yüzeyler, temel formlar.

ABSTRACT

Master Thesis

GEOMETRY OF SIMILAR CURVES AND SIMILAR SURFACES

Seher KAYA

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Yusuf YAYLI

This thesis consists of five chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

The second chapter preliminaries, some definitions and theorems that will be needed for other section of the thesis are given.

In the third chapter, images of the curves up to direct similarity transformations are investigated and some propositions are given.

In the fourth chapter, images of some special surfaces up to direct similarity transformation are investigated and some characterizations are given. Also, rational surfaces have been mentioned.

In the fifth chapter, the importance of similarity transformations, similar curves and similar surfaces has been mentioned.

July 2014, 58 pages

Key Words: Similarity transformations, similarity ratio, similar curves, similar surfaces, fundamental forms.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında beni yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam Sayın Prof. Dr. Yusuf YAYLI (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'ya, desteklerini her zaman hissettiğim Prof. Dr. F. Nejat EKMEKÇİ (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'ye ve Doç. Dr. İsmail GÖK (Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı)'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, hayatım boyunca yanımda olan, çalışmam esnasında sabır ve anlayışla beni destekleyen sevgili aileme teşekkür ederim.

Seher KAYA

Ankara, Temmuz 2014

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı.....	2
2.2 Eğriler Teorisi.....	4
2.3 n-Boyulu Öklid Uzayında Hareketler.....	8
3. BENZER EĞRİLERİN GEOMETRİSİ	11
3.1 Benzer Eğrilere Giriş.....	11
3.2 Eğrinin V_i Gösterge Eğrisinin Parametresi ile Yeniden Parametrelendirilmesi.....	15
3.3 E^3 Öklid Uzayında α Eğrisinin Fokal ve Evolüt Eğrisi.....	20
3.4 Şekil Eğrilikleri Sabit Olan Eğriler Eğriler.....	24
4. BENZER YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ.....	32
4.1 Yüzeyler Teorisi.....	32
4.2 E^3 Öklid Uzayında Uzayında Sabit Açılı Benzer Yüzeyler.....	37
4.3 E^3 Öklid Uzayında Uzayında Paralel Weingarten Yüzeyleri ve Benzerlik Dönüşümleri.....	41
4.4 E^3 Öklid Uzayında Uzayında Rasyonel Yüzeyler.....	50
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	56
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ.....	58

SİMGELER DİZİNİ

A^T	A matrisinin transpozu
k_i	Eğrinin i -yinci eğrilği
E^n	n -boyutlu Öklid uzayı
$ $	Norm
$O(n)$	Ortogonal matrislerin cümlesi
$\overline{M}$	M yüzeyinin benzer yüzeyi
$r(u, v)$	Yüzeyin parametrik denklemi
Δ	Yüzeyin diskriminantı
E, F, G	Birinci temel formun elemanları
L, M, N	İkinci temel formun elemanları

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 α eğrisi.....	31
Şekil 4.1 Sabit açılı M yüzeyi.....	40
Şekil 4.2 Sabit açılı M yüzeyinin $\overline{M}$ benzer yüzeyi.....	41
Şekil 4.3 M yüzeyi.....	54
Şekil 4.4 M yüzeyinin M_{d0} paralel yüzeyi.....	54
Şekil 4.5 M yüzeyinin M_{d1} paralel yüzeyi.....	55

1. GİRİŞ

Geometri, belli dönüşümler altında değişmezlerin teorisidir. Benzerlik geometrisi ise benzerlik dönüşümleri altında değişmezlerin teorisidir.

Bu tez çalışmasında benzerlik dönüşümleri altında eğriler ve yüzeyler incelenmiştir. Bir eğri ile bu eğrinin benzerlik dönüşümü altında görüntüsü olan eğri benzer eğriler olarak adlandırılmış ve benzer eğriler arasındaki bazı ilişkiler verilmiştir. Georgiev ve Encheva eğriyi teğetler göstergesinin yay parametresi ile yeniden parametrelendirmiştir. Yeniden parametrelendirilmiş bu eğri için şekil eğrilikleri tanımlamışlar ve benzerlik dönüşümleri altında şekil eğriliklerinin değişmez kaldıklarını göstermişlerdir. Bu tez çalışmasında eğriler teğetler göstergesinin yay parametresi yerine V_i gösterge eğrilerinin yay parametresi ile yeniden parametrelendirilerek Georgiev ve Encheva'nın çalışması genelleştirilmiştir. Fokal eğrilikler ile Öklidiyen eğrilikler arasındaki ilişki kullanılarak şekil eğrilikleri fokal eğrilikler cinsinden ifade edilmiştir. Benzer şekilde eğrinin şekil eğrilikleri ile evolüt eğrisinin eğrilikleri arasında ilişki verilmiştir.

Daha sonra benzerlik dönüşümleri altında yüzeyler incelenmiş ve bir yüzey ile benzer yüzeyinin arasında elde edilen bazı ilişkiler verilmiştir. Sabit açılı yüzeyler, paralel lineer Weingarten yüzeyleri benzerlik dönüşümleri altında ele alınmış ve konu örneklerle desteklenmiştir. Son olarak rasyonel yüzeylerden bahsedilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 n-Boyutlu Öklid Uzayı

Tanım 2.1.1 (Afin Uzay): A boş olmayan bir cümle, V de $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir

$$\psi : A \times A \rightarrow V$$

dönüşümü $\forall P, Q, R \in A$ için

$$(P, Q) \rightarrow \psi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer, aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyor ise A cümlesine V ile birleştirilmiş bir *afin uzay* denir.

(i) $\forall P, Q, R \in A$ için $\psi(P, R) = \psi(P, Q) + \psi(Q, R)$ dir.

(ii) $\forall P \in A$ ve $\forall \vec{\alpha} \in V$ için $\psi(P, Q) = \vec{\alpha}$ olacak şekilde bir tek $Q \in A$ vardır (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.2 (Afin Çatı): Bir V vektör uzayı ile birleşen afin uzay A olsun. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$ vektör sistemi V nin bir bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta cümlesine A *afin uzayının bir afin çatısı* denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.3 (Reel İç Çarpım Uzayı): $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve V de bir vektör uzayı olmak üzere, V de bir

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$\forall v, w \in V$ için

$$(v, w) \rightarrow \langle, \rangle (v, w) = \langle v, w \rangle \in \mathbb{R}$$

iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, V vektör uzayına *iç çarpım uzayı* denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.4 (Öklid Uzayı): n boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleştirilmiş bir A afin uzayına, *Öklid uzayı* denir ve E^n ile gösterilir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.5 (Standart İç Çarpım): n boyutlu Öklid uzayı E^n de

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in E^n$ için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *standart iç çarpım* veya *Öklid iç çarpımı* denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.6 (Öklid Çatısı): n boyutlu bir reel iç çarpım uzayı V olsun. V ile birleşen E^n Öklid uzayında $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ noktaları için $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0 P_n}\}$ vektör sistemi V nin bir ortonormal bazı ise $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ çatısına *dik çatı* (*Öklid çatısı*) denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.7 (Norm): n boyutlu Öklid uzayı E^n de,

$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ için

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona x vektörünün normu denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.1.8 (Vektörel Çarpım): E^3 , 3 boyutlu Öklid uzayında

$\forall x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in E^3$ için vektörel çarpım

$$x \times y = (x_2y_3 - y_2x_3, x_3y_1 - y_3x_1, x_1y_2 - y_1x_2)$$

şeklinde tanımlanır (Hacısalihoglu 2000).

2.2 Eğriler Teorisi

Tanım 2.2.1 (Eğri): E^n , n boyutlu Öklid uzayı ve $I, \mathbb{R}$ nin bir açık aralığı olmak üzere, $\alpha : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine E^n uzayı içinde bir *eğri* denir (Sabuncuoğlu 2001).

Tanım 2.2.2 (Eğrinin Hız Vektörü): E^n , n -boyutlu Öklid uzayında bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha : I \rightarrow E^n$ dönüşümünün Öklidiyen koordinat fonksiyonları $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ olmak üzere

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha(t) \in M$$

ve

$$\alpha'(t) = \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}, \frac{\partial \alpha_2}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \alpha_n}{\partial t} \right)$$

dir. $\alpha'(t)$ tanjant vektörüne, $t \in I$ olmak üzere M eğrisinin $\alpha(t)$ noktasında, (I, α) koordinat komşuluğuna göre *hız vektörü* denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.2.3 (Regüler Eğri): E^n , n boyutlu Öklid uzayında bir $\alpha : I \longrightarrow E^n$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için, $\alpha'(t) \neq 0$ ise bu eğriye *regüler eğri* denir (Sabuncuoğlu 2001).

Tanım 2.2.4 (Birim Hızlı Eğri): E^{n+1} de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\alpha'(s)\| = 1$$

ise M eğrisine (I, α) ya göre *birim hızlı eğri* denir. Bu durumda, eğrinin $s \in I$ parametresine yay-parametresi adı verilir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.2.5: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$, için;

$$\alpha^{(k)} \in Sp\{\Psi\}$$

olmak üzere, Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Serret-Frenet r -ayaklı alanı ve $m \in M$ için $\{V_1(m), V_2(m), \dots, V_r(m)\}$ ye ise $m \in M$ noktasındaki *Serret-Frenet r -ayaklısı* denir. Herbir V_i , $1 \leq i \leq r$, vektörüne ise *Serret-Frenet vektörü* adı verilir (Hacısalihoglu 2000).

Özel Hal: $n = 3$ özel halinde, E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında Frenet 2-ayaklısı ve Frenet 3-ayaklısı elde edilebilir. Bu özel halde; M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilmiş ise $s \in I$ yay-parametresi olmak üzere;

$$\begin{aligned} \vec{T}(s) &= \alpha'(s) \quad , \quad \alpha'(s) = \frac{d\alpha}{ds} \\ \vec{N}(s) &= \frac{1}{\|\alpha''(s)\|} \alpha''(s) \\ \vec{B}(s) &= \vec{T}(s) \wedge \vec{N}(s) \end{aligned} \tag{2.1}$$

dir. Böylece, $\{\vec{T}(s), \vec{N}(s), \vec{B}(s)\}$ sistemi $\alpha(s)$ noktasında, M eğrisinin Frenet 3-ayaklısıdır (Hacısalihoglu 2000).

Teorem 2.2.1: $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $t \in I$ için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı, $\{\vec{T}(t), \vec{N}(t), \vec{B}(t)\}$ ise

$$\begin{aligned}\vec{T}(t) &= \frac{\dot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t)\|}, \quad \dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt} \\ \vec{N}(t) &= \vec{B}(t) \wedge \vec{T}(t) \\ \vec{B}(t) &= \frac{\dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}(t) \wedge \ddot{\alpha}(t)\|}\end{aligned}\tag{2.2}$$

dir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.6 : $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned}k_i : I &\rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i < r \\ s &\rightarrow k_i(s) = \langle V'_i(s), V_{i+1}(s) \rangle\end{aligned}\tag{2.3}$$

şeklinde tanımlı k_i fonksiyonuna M eğrisinin i -yinci eğrilik fonksiyonu ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da M nin i -yinci eğriliği denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.7: $\alpha : I \rightarrow E^n$ bir eğri olsun. Eğer α eğrisinin $\frac{k_{i+1}}{k_i}$ eğrilikleri oranı sabit ise α eğrisi *sabit eğrilik oranına sahip eğri (ccr-eğri)* olarak adlandırılır (Monterde 2007).

Teorem 2.2.2: $M \subset E^n$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere, $\alpha(s)$ noktasındaki i -yinci eğriliği $k_i(s)$ ve Frenet r -ayaklısı $\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\}$ ise;

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= k_1(s)V_2(s) \\ V_i'(s) &= -k_{i-1}(s)V_{i-1}(s) + k_i(s)V_{i+1}(s), \quad 1 \leq i < r \\ V_r'(s) &= -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

dir (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.2.3: $M \subset E^n$ eğrisi herhangi bir (J, β) koordinat komşuluğu ile verilsin. Bu durumda, $t \in J$ ye karşılık gelen $\beta(t)$ noktasındaki Frenet r -ayaklısı $\{V_1(t), V_2(t), \dots, V_r(t)\}$ ve

$$F_i(t) = \beta^{(i)}(t) - \sum_{j \neq i} \langle \beta^{(i)}(t), V_j(t) \rangle V_j(t)$$

olmak üzere, i -yinci $k_i(t)$ eğriliği için,

$$k_i(t) = \frac{\|F_{i+1}(t)\|}{\|F_1(t)\| \|F_i(t)\|}, \quad 1 \leq i < r$$

dir.

Tanım 2.2.8 (Teğetler Göstergesi): 3-boyutlu Öklid uzayı, E^3 de bir α eğrisi $s \in I$ yay parametresi ile verilsin. α eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere, $\overrightarrow{PQ} = T$ alındığında, P noktası α eğrisini çizerken, Q noktasının birim küre yüzeyi üzerinde çizdiği eğriye α eğrisinin *birinci küresel göstergesi veya teğetler göstergesi* adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

2.3 n-Boyutlu Öklid Uzayında Hareketler

Tanım 2.3.1 (E^n de İzometri): E^n , n -boyutlu Öklid uzayında uzaklık fonksiyonu d olmak üzere;

$$\begin{aligned} f &: E^n \rightarrow E^n \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

fonksiyonu $\forall x, y \in E^n$

$$d : E^n \times E^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise f fonksiyonuna E^n Öklid uzayında bir *izometri* denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.3.2 (Dönme): E^n Öklid uzayında bir f izometrisi için eğer, $f(O) = O$, $O \in E^n$ ise f fonksiyonuna O etrafında bir *dönme* denir (Hacısalihoglu 2000).

E^n Öklid uzayında O etrafında dönmelerin cümlesi $R_o(n)$ ile gösterilirse, bu cümle bileşke işlemine göre bir gruptur.

Teorem 2.3.1: E^n ile eşleşen $\mathbb{R}^n$ n -boyutlu standart reel vektör uzayında

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Öklid iç çarpımını koruyan ortogonal grup $O(n)$ ile $O = (0, \dots, 0)$ noktasını sabit bırakan dönme grubu eşlenebilir.

Yani, herhangi bir dönme altında E^n Öklid uzayında bir X noktasının görüntüsü Y olmak üzere;

$$Y = AX, \quad A \in O(n)$$

biçiminde yazılabilir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.3.3 (Öteleme): E^n Öklid uzayının bir f izometrisi ve $\forall X \in E^n$ için

$$f(X) = X + h$$

olacak şekilde bir tek $h \in E^n$ noktası varsa f izometrisine E^n Öklid uzayında bir *öteleme* denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3.4 (Hareket): E^n n -boyutlu Öklid uzayının izometrilерinden biri f olsun. E^n deki bir $\{x_1, \dots, x_n\}$ dik koordinat sistemine göre f nin matrisel ifadesi, $A \in O(n)$, yani $\det A = \pm 1$ ve $C \in \mathbb{R}_1^n$ olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

şeklindedir. f ye E^n de bir *hareket* denir. Eğer $\det A = 1$ ise f hareketine direkt hareket, $\det A = -1$ ise f hareketine karşıt hareket adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3.5: Bir $F : E^n \rightarrow E^m$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\forall P \in E^n$ için,

$$F(P) = (f_1(P), f_2(P), \dots, f_m(P))$$

olacak şekildeki $f_1, f_2, \dots, f_m$ reel değerli fonksiyonlarına F nin *Öklid koordinat fonksiyonları* denir ve $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ yazılır.

F fonksiyonunun koordinat fonksiyonları olan f_i ler diferensiyellenebilir iseler F fonksiyonuna diferensiyellenebilirdir denir. Eğer $F : E^n \rightarrow E^m$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise F ye *dönüşüm* denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3.6: $\alpha(I) \subset E^n$ eğrisi, $\alpha : I \rightarrow E^n$ dönüşümü yardımıyla verilsin. $F : E^n \rightarrow E^m$ bir dönüşüm ise,

$$\beta = F \circ \alpha : I \rightarrow E^m$$

bileşke fonksiyonu da E^m de bir eğri tanımlar. Bu eğriye F dönüşümü altında $\alpha(I)$ eğrisinin resmi denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 2.3.7 (Benzerlik Dönüşümü): $\mathbb{R}^n$, n -boyutlu standart reel vektör uzayı olmak üzere;

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow F(x) = \lambda Ax + b \end{aligned}, \quad A \in O(n), \det A = 1, \lambda > 0 \text{ ve } b \text{ öteleme vektörü} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanan F dönüşümüne direkt benzerlik dönüşümü denir (Georgiev 2009).

3. BENZER EĞRİLERİN GEOMETRİSİ

3.1 Benzer Eğrilere Giriş

Bu bölümde n -boyutlu Öklid uzayında eğriler ve bu eğrilerin benzerlik dönüşümleri altında görüntüleri incelenecektir. Bir eğri ile benzerlik dönüşümü altında bu eğrinin resmi olan eğri benzer eğriler olarak adlandırılacak ve bu tip eğriler için bazı temel kavramlar ve önermeler verilecektir.

Tanım 3.1.1: $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi ve F benzerlik dönüşümü

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longrightarrow F(x) = \lambda Ax + b \end{aligned}, \quad A \in O(n), \det A = 1, \lambda > 0$$

verilsin. α eğrisinin F benzerlik dönüşümü altında resmi β eğrisi olsun. Bu durumda α ile β eğrileri benzer eğriler olarak adlandırılır ve β eğrisi

$$\beta = F \circ \alpha = \lambda A \alpha(s) + b \quad (3.1)$$

şeklindedir.

Önerme 3.1.1: $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin F benzerlik dönüşümü altında resmi β eğrisi olsun. α eğrisinin yay parametresi s ve β eğrisinin yay parametresi $\bar{s}$ olmak üzere;

$$\bar{s} = \lambda s$$

dir.

İspat. n -boyutlu Öklid uzayında bir eğri $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \dots, \alpha_n(s))$ ve bu eğrisinin yay parametresi s olsun. Bu durumda

$$\|\alpha'(s)\| = ((\alpha'_1(s))^2 + (\alpha'_2(s))^2 + \dots + (\alpha'_n(s))^2)^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{dir.}$$

β eğrisi α eğrisinin (2.6) da verilen benzerlik dönüşümü altında görüntüsü olduğundan $\beta(s) = \lambda A\alpha(s) + b$ dir.

$$\begin{aligned}\langle \beta', \beta' \rangle &= \langle \lambda A\alpha'(s), \lambda A\alpha'(s) \rangle \\ &= \lambda^2 \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle \quad \|A\alpha'(s)\| = |A| \|\alpha'(s)\|, \det(A) = 1 \\ &= \lambda^2 \\ \|\beta'(s)\| &= \lambda \quad \text{olduğundan} \\ \bar{s} &= \int_0^s \|\beta'(s)\| ds = \lambda s\end{aligned}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.1.2: $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin F benzerlik dönüşümü altında resmi β eğrisi olsun. α eğrisinin Frenet vektörleri $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve β eğrisinin eğrisinin Frenet vektörleri $\{\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n\}$ olmak üzere;

$$\bar{V}_i = AV_i \quad , i = 1, 2, \dots, n$$

dir.

İspat. n -boyutlu Öklid uzayında $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ ortogonol sistemi

$$\begin{aligned}E_1 &= \alpha' \\ E_i &= \alpha^{(i)} - \sum_{j < i} \frac{\langle \alpha^{(i)}, E^{(j)} \rangle}{\langle E^{(j)}, E^{(j)} \rangle} E^{(j)} \quad , i = 2, 3, \dots, n\end{aligned}$$

şeklindedir ve buradan

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{E_1}{\|E_1\|} \\ &\vdots \\ V_n &= \frac{E_n}{\|E_n\|}\end{aligned}$$

$\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ Frenet vektörleri elde edilir.

Şimdi bundan yararlanarak $\overline{E}_i = \lambda AE_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olduğunu gösterelim.

$i = 1$ için

$$\begin{aligned}\overline{E}_1 &= \lambda A\alpha' \\ &= \lambda AE_1\end{aligned}$$

$1 < i \leq n - 1$ için

$$\overline{E}_i = \lambda AE_i$$

olsun.

$i = n$ için

$$\begin{aligned}\overline{E}_n &= \lambda A\alpha^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \lambda A\alpha^{(n)}, \overline{E}_j \rangle}{\langle \overline{E}_j, \overline{E}_j \rangle} \overline{E}_j \quad , \quad \overline{E}_j = \lambda AE_j \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \\ &= \lambda A\alpha^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \lambda A\alpha^{(n)}, \lambda AE_j \rangle}{\langle \lambda AE_j, \lambda AE_j \rangle} \lambda AE_j \\ &= \lambda A \left(\alpha^{(n)} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle \alpha^{(n)}, E_j \rangle}{\langle E_j, E_j \rangle} E_j \right) \\ &= \lambda AE_n\end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned}\overline{V}_i &= \frac{\overline{E}_i}{\|\overline{E}_i\|} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ &= \frac{\lambda AE_i}{\|\lambda AE_i\|} \quad \det(A) = 1 \\ &= AV_i\end{aligned}$$

dir.

Önerme 3.1.3: $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisinin F benzerlik dönüşümü altında resmi β eğrisi olsun. α eğrisinin eğrilikleri k_i ve β eğrisinin eğrilikleri $\overline{k_i}$ olmak üzere;

$$\overline{k_i} = \frac{1}{\lambda} k_i \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

dir.

İspat. $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bir eğri olsun. α eğrisinin Frenet n-ayaklısı $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve $F_i = \alpha^{(i)} - \sum_{j \leq i} \langle \alpha^{(i)}, V_j \rangle V_j$ olmak üzere, eğrinin k_i i -yinci eğriliği için

$$k_i = \frac{\| F_{i+1} \|}{\| F_1 \| \| F_i \|}$$

dir.

Bir önceki ispata benzer olarak

$$\overline{F_n} = \lambda A F_n$$

olduğu gösterilebilir. Buradan;

$$\begin{aligned} \overline{k_i} &= \frac{\| \overline{F_{i+1}} \|}{\| \overline{F_1} \| \| \overline{F_i} \|}, i = 1, 2, \dots, n-1 \\ &= \frac{\| \lambda A F_{i+1} \|}{\| \lambda A F_1 \| \| \lambda A F_i \|} \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{\| F_{i+1} \|}{\| F_1 \| \| F_i \|} \\ &= \frac{1}{\lambda} k_i \end{aligned}$$

olduğu görülür.

3.2 Eğrinin V_i Gösterge Eğrisinin Parametresi ile Yeniden Parametrelendirilmesi

Bir eğrinin teğetinin yay parametresi ile yeniden parametrelendirilmesi ile ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmaların bir genellemesi olarak, eğri V_i gösterge eğrisinin yay parametresi ile parametrelendirilmiş ve bundan yararlanılarak bazı karakterizasyonlar verilmiştir (Gökçelik vd. 2014).

$\gamma(\sigma_i) = V_i(s)$, α eğrisinin V_i gösterge eğrisi ve σ_i , $\gamma(\sigma_i)$ eğrisinin yay parametresi olsun. α eğrisini σ_i parametresi ile yeniden parametrelendirelim.

σ_i , γ eğrisinin yay parametresi olduğundan $\| \frac{d\gamma}{d\sigma_i} \| = 1$ dir.

$$\frac{d\gamma}{d\sigma_i} = \frac{d\gamma}{ds} \frac{ds}{d\sigma_i} = (-k_{i-1}V_{i-1} + k_iV_{i+1}) \frac{ds}{d\sigma_i}$$

eşitliğinde her iki tarafın normu alınırsa;

$$\begin{aligned} 1 &= \sqrt{(k_{i-1}(s))^2 + (k_i(s))^2} \frac{ds}{d\sigma_i} \\ d\sigma_i &= \sqrt{(k_{i-1}(s))^2 + (k_i(s))^2} ds \end{aligned}$$

ve

$$\frac{d}{d\sigma_i} = \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1}(s))^2 + (k_i(s))^2}} \frac{d}{ds}$$

olur. Buradan

$$\frac{d\alpha}{d\sigma_i} = \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1}(s))^2 + (k_i(s))^2}} \alpha' = \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1}(s))^2 + (k_i(s))^2}} V_1(s) \quad (3.2)$$

elde edilir. Bu eşitlik yardımıyla

$$\frac{d}{d\sigma_i}(V_1, \dots, V_n)^T = \frac{1}{\sqrt{k_{i-1}^2 + k_i^2}} \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & k_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & 0 \end{pmatrix} (V_1, \dots, V_n)^T$$

yazılabilir.

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{k_1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{k_{n-1}}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{k_{n-1}}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

olmak üzere;

$$\frac{d}{d\sigma_i}(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)^T = K(V_1, V_2, \dots, V_{n-1}, V_n)^T \quad (3.3)$$

dir. Ayrıca

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_1, \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_n \right\}$$

vektörleri α eğrisinin ortogonal vektörleridir. Bu ortogonal vektörlere göre çatı yeniden yazılabilir:

$$\tilde{k} = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} \right) \quad \text{ve} \quad \tilde{k}_j = \frac{k_j}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} \quad j = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.4)$$

olarak alınır;

$$\tilde{K} = \begin{pmatrix} \tilde{k} & \tilde{k}_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{k}_1 & \tilde{k} & \tilde{k}_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_2 & \tilde{k} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{k}_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\tilde{k}_{n-2} & \tilde{k} & \tilde{k}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\tilde{k}_{n-1} & \tilde{k} \end{pmatrix}$$

matrisi elde edilir.

$\tilde{K}$ matrisi yardımıyla aşağıdaki eşitlik yazılabilir;

$$\frac{d}{d\sigma_i} \left(\frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_n \right)^T = \tilde{K} \left(\frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_1, \dots, \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_n \right)^T$$

Yapılan bu işlemlerde $i = 1$ alınır eğer teğetler göstergesinin yay parametresi ile parametrelendirilmiş olunur. (3.4) eşitliği yardımıyla

$$\tilde{k}_1 = \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1} \right) = -\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{d\sigma} \quad \text{ve} \quad \tilde{k}_j = \frac{k_j}{k_1} \quad j = 2, 3, \dots, n-1 \quad (3.5)$$

elde edilir. Burada $\tilde{k}$ notasyonu yerine $\tilde{k}_1$ notasyonu kullanılmıştır.

Tanım 3.2.1 (Şekil Eğrilikleri): $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \dots, \tilde{k}_{n-1}$ fonksiyonları α eğrisinin şekil eğrilikleri olarak adlandırılır (Encheva ve Georgiev 2009).

Önerme 3.2.1: n -boyutlu Öklid uzayında, α ve β benzer eğriler olmak üzere; α ve β eğrilerinin gösterge eğrilerinin yay parametreleri aynıdır. Yani, benzerlik dönüşümleri altında gösterge eğrilerinin yay parametreleri değişmez kalır.

İspat. Bir α eğrisinin F benzerlik dönüşümü altında resmi β eğrisi olsun. α eğrisinin gösterge eğrilerinin yay parametresi σ_i ve β eğrisinin gösterge eğrilerinin yay parametresi $\bar{\sigma}_i$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_i &= \int \|\overline{V'_i(\bar{s})}\| d\bar{s} \\ &= \int \sqrt{(\bar{k}_{i-1})^2 + (\bar{k}_i)^2} d\bar{s} \quad , \bar{k}_i = \frac{1}{\lambda} k_i, \quad \bar{s} = \lambda s \\ &= \int \sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2} ds \\ &= \sigma_i\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Önerme 3.2.2: Bir $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ eğrisinin Frenet vektörleri

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_1, \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_2, \dots, \frac{1}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} V_n \right\} \text{ olmak üzere;}$$

$$\tilde{k}(\sigma_i) = -\frac{d\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2} d\sigma_i} \quad \text{ve} \quad \tilde{k}_j(\sigma_i) = \frac{k_j}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

fonksiyonları benzerlik dönüşümleri altında invarianttır.

İspat. n -boyutlu Öklid uzayında α bir eğri ve bu eğrinin

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow F(x) = \lambda Ax + b \end{aligned}$$

benzerlik dönüşümü altındaki resmi olan eğri $\beta = F \circ \alpha$ olsun.

α eğrisinin eğrilikleri $\{k_1, k_2, \dots, k_{n-1}\}$ ve β eğrisinin eğrilikleri $\{\overline{k}_1, \overline{k}_2, \dots, \overline{k}_{n-1}\}$ olmak üzere;

$$\overline{k}_i = \frac{1}{\lambda} k_i \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

olduğu biliniyor. α eğrisinin şekil eğrilikleri $\widetilde{k}_i$ ve β eğrisinin şekil eğrilikleri $\widetilde{\overline{k}}_i$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} \widetilde{\overline{k}} &= -\frac{d\sqrt{(k_{i-1})^2 + (\overline{k}_i)^2}}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (\overline{k}_i)^2} d\sigma_i} \\ &= -\frac{d\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2} d\sigma_i} \\ &= \widetilde{k} \end{aligned}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} \widetilde{\overline{k}}_j &= \frac{\overline{k}_j}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (\overline{k}_i)^2}} \\ &= \frac{\frac{1}{\lambda} k_j(s)}{\frac{1}{\lambda} \sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}} \quad , \quad \overline{k}_j = \frac{1}{\lambda} k_j \\ &= \widetilde{k}_j \end{aligned}$$

dır ve böylece ispat tamamlanır.

3.3 E^3 Öklid Uzayında α Eğrisinin Fokal ve Evolüt Eğrisi

Bu bölümde eğrinin şekil eğrilikleri eğrinin fokal ve evolüt eğrilerinin eğrilikleri cinsinden ifade edilecektir. Eğri teğetler göstergesinin yay parametresi ile yeniden parametrelendirildiği zaman şekil eğrilikleri (3.5) eşitliği ile

$$\tilde{k}_1 = -\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{d\sigma} \quad \text{ve} \quad \tilde{k}_j = \frac{k_j}{k_1} \quad j = 2, 3, \dots, n-1$$

şeklinde ifade edilmişti. Bu bölümde bu şekil eğriliklerinden yararlanılacaktır.

Tanım 3.3.1. $M \subset E^3$ eğrisiyle $m \in M$ noktasında sonsuz yakın dört noktası ortak olan küreye, M nin $m \in M$ noktasındaki oskülatör küresi veya eğrilik küresi adı verilir (Hacısalıhoğlu 2000).

α eğrisinin oskülatör kürelerinin merkezleri α eğrisinin fokal eğrisini oluşturur.

Teorem 3.3.1. $M \subset E^3$ eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha(s)$ noktasında oskülatör küre merkezi a ise

$$a = \alpha(s) + \frac{1}{k_1} N(s) + \left(\frac{1}{k_1} \right)' \frac{1}{k_2} B(s) \quad (3.6)$$

dir. Burada $\{T(s), N(s), B(s)\}$ cümlesi $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3–ayaklısını ifade etmektedir (Hacısalıhoğlu 2000).

Önerme 3.3.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olmak üzere; $C_\alpha(s)$ α eğrisinin fokal eğrisi ve $f_1 = \frac{1}{k_1}$, $f_2 = \left(\frac{1}{k_1} \right)' \frac{1}{k_2}$ α eğrisinin fokal eğrilikleri olsun. α eğrisinin $\tilde{k}_1$ ve $\tilde{k}_2$ şekil eğrilikleri

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= f_1' \\ \tilde{k}_2 &= \frac{1}{f_2} f_1 f_1' \end{aligned}$$

dir (Encheva ve Georgiev 2009).

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı, κ ve τ eğriliklerine sahip bir eğri ve $\{V_1(s), V_2(s), V_3(s)\}$ α eğrisinin Frenet vektörleri olsun. α eğrisinin evolüt eğrisi olan β eğrisi

$$\beta(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa}V_2 + \frac{1}{\kappa} \cot(\int \tau(s)ds)V_3 \quad (3.7)$$

şeklindedir (Millman ve Parker 1977).

Önerme 3.3.2: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri olsun. β eğrisi α eğrisinin evolüt eğrisi ve $e_1 = \frac{1}{\kappa}, e_2 = \frac{1}{\kappa} \cot(\int \tau(s)ds)$ olmak üzere; α eğrisinin $\tilde{k}_1$ ve $\tilde{k}_2$ şekil eğrilikleri

$$\tilde{k}_1 = e'_1 \quad \text{ve} \quad \tilde{k}_2 = \frac{e_1(e'_1 e_2 - e_1 e'_2)}{e_1^2 + e_2^2}.$$

dir.

İspat. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ birim hızlı bir eğri, $\tilde{k}_1$ ve $\tilde{k}_2$ α eğrisinin şekil eğrilikleri olmak üzere;

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= -\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{d\sigma} \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{k_1} \right) \\ &= e'_1(s) \end{aligned}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} e'_2(s) &= \left(\frac{1}{\kappa} \cot(\int \tau(s)ds) \right)' \\ &= \left(\frac{1}{\kappa} \right)' \cot(\int \tau(s)ds) - \frac{\tau}{\kappa \sin^2(\int \tau(s)ds)} \quad , \quad \frac{e_2}{e_1} = \cot(\int \tau(s)ds) \\ &= e'_1 \frac{e_2}{e_1} - \frac{\tau}{\kappa \sin^2(\int \tau(s)ds)} \end{aligned}$$

olup buradan

$$\frac{\tau}{\kappa} = \left(e'_2 - \frac{e'_1 e_2}{e_1} \right) (-\sin^2(\int \tau(s)ds))$$

bulunur. $\sin^2(\int \tau(s)ds)$ değeri e_1 ve e_2 cinsinden

$$\begin{aligned}\cot(\int \tau(s)ds) &= \frac{e_2}{e_1} \\ \cot^2(\int \tau(s)ds) &= \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^2 \\ \frac{1 - \sin^2(\int \tau(s)ds)}{\sin^2(\int \tau(s)ds)} &= \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^2 \\ \sin^2(\int \tau(s)ds) &= \frac{e_1^2}{e_1^2 + e_2^2}\end{aligned}$$

dır ve $\tilde{k}_2 = \frac{\tau}{\kappa}$ olduğundan

$$\tilde{k}_2 = \frac{e_1(e_1'e_2 - e_1e_2')}{e_1^2 + e_2^2}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.3.3: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ bir eğri olmak üzere bu eğrinin fokal eğrisi ile evolüt eğrisinin çakışması için gerek ve yeter şart $\tau(s) = (\arcsin(\frac{c}{k}))'$, $c \in \mathbb{R}^+$ olmasıdır.

İspat. α eğrisinin fokal eğrisi ve evolüt eğrisinin çakışması durumunda (3.6) ve (3.7) eşitliklerinden

$$\alpha(s) + \frac{1}{\kappa}V_2 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)'\frac{1}{\tau}V_3 = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa}V_2 + \frac{1}{\kappa}\cot(\int \tau(s)ds)V_3$$

yazılabilir.

Yazılan bu eşitlikten;

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau} &= \frac{1}{\kappa} \cot\left(\int \tau(s) ds\right) \\
\frac{\left(\frac{1}{\kappa}\right)'}{\frac{1}{\kappa}} &= \tau \cot\left(\int \tau(s) ds\right) \\
\ln\left(\frac{1}{\kappa}\right) + \ln(c) &= \ln\left(\sin\left(\int \tau(s) ds\right)\right), \quad c > 0 \\
\frac{c}{\kappa} &= \sin\left(\int \tau(s) ds\right) \\
\tau(s) &= \left(\arcsin\left(\frac{c}{\kappa}\right)\right)'
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

Önerme 3.3.4: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ bir eğri, α eğrisinin evolüt eğrisi

$$\beta = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)} V_2 + \frac{1}{\kappa(s)} \cot\left(\int \tau(s) ds\right) V_3$$

ve $\tau(s) = \left(\arcsin\left(\frac{c}{\kappa}\right)\right)', c \in \mathbb{R}^+$ olsun. Bu durumda α nın şekil eğrilikleri

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_1 &= \frac{1}{c} \tau(s) \cos\left(\int \tau(s) ds\right) \\
\tilde{k}_2 &= \frac{1}{c} \tau(s) \sin\left(\int \tau(s) ds\right)
\end{aligned}$$

dir.

İspat. α eğrisinin evolüt eğrisi β ve evolüt eğrilikleri $e_1 = \frac{1}{\kappa}, e_2 = \frac{1}{\kappa} \cot\left(\int \tau(s) ds\right)$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{\kappa}, \quad \tau(s) = \left(\arcsin\left(\frac{c}{\kappa}\right)\right)' \\
&= \frac{1}{c} \sin\left(\int \tau(s) ds\right) \\
e_2 &= \frac{1}{\kappa} \cot\left(\int \tau(s) ds\right) \\
&= \frac{1}{c} \cos\left(\int \tau(s) ds\right)
\end{aligned}$$

dir. e'_1 ve e'_2 değerleri ve önerme 3.3.2 göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= e'_1 \\ &= \frac{1}{c}\tau(s)\cos(\int\tau(s)ds) \\ \tilde{k}_2 &= \frac{e_1(e'_1e_2 - e_1e'_2)}{e_1^2 + e_2^2} \\ &= \frac{1}{c}\tau(s)\sin(\int\tau(s)ds)\end{aligned}$$

olur.

Sonuç 3.3.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$ bir eğri ve α eğrisinin fokal eğrisi ile evolüt eğrisi çakışır ise şekil eğrilikleri

$$\begin{aligned}\tilde{k}_1 &= \frac{1}{c}\tau(s)\cos(\int\tau(s)ds) \\ \tilde{k}_2 &= \frac{1}{c}\tau(s)\sin(\int\tau(s)ds)\end{aligned}$$

olur.

3.4 Şekil Eğrilikleri Sabit Olan Eğriler

Bu bölümde sabit şekil eğriliklerine sahip olan eğriler araştırılmıştır. Sabit şekil eğriliklerine sahip bir eğrinin bu eğriliklere bağlı olarak yazılabileceği gösterilmiştir.

Burada $\tilde{k}, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{n-1}$ şekil eğrilikleri sabit olarak alınacaktır.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{k}_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{k}_1 & 0 & \tilde{k}_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tilde{k}_2 & 0 & \tilde{k}_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\tilde{k}_{n-2} & 0 & \tilde{k}_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\tilde{k}_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

M^2 simetrik matrisinin $m = \frac{n}{2}$ tane negatif karakteristik değeri vardır. M matrisinin normal formu

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\lambda_m & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. n sayısının tek olması durumunda, n sayısının çift olması durumunda elde edilen matrise sadece sıfırlardan oluşan bir satır(kolon) eklenmelidir. Burada $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ (Greub 1967).

Teorem 3.4.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ eğrisi $\tilde{k}, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_{2m-1}$ sabit şekil eğriliklerine sahip bir eğri ve M^2 matrisi $-\lambda_1^2, -\lambda_2^2, \dots, -\lambda_m^2$ negatif karakteristik değerlere sahip olsun. V_i -gösterge eğrilerinin σ_i yay parametresi ile parametrelendirilmiş α eğrisi

$$\alpha(\sigma_i) = \left(\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}\sigma_i} \sin \theta_1, -\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}\sigma_i} \cos \theta_1, \dots, \frac{a_m}{b_m} e^{\tilde{k}\sigma_i} \sin \theta_m, -\frac{a_m}{b_m} e^{\tilde{k}\sigma_i} \cos \theta_m \right) \quad (3.8)$$

şeklindedir.

Burada $b_j = \sqrt{\tilde{k}^2 + \lambda_j^2}$ ve $\theta_j = \sqrt{\lambda_j^2 \sigma_i} + \arccos \left(\frac{\sqrt{\lambda_j^2}}{\sqrt{\tilde{k}^2 + \lambda_j^2}} \right)$ $j = 1, 2, \dots, m$.

Ayrıca $a_1, a_2, \dots, a_m$ sayıları

$$\langle V_j, V_j \rangle = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

sisteminin çözümünden elde edilir.

İspat. $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ bir eğri ve $\{V_1(\sigma_i), V_2(\sigma_i), \dots, V_{2m-1}(\sigma_i), V_{2m}(\sigma_i)\}$ bu eğrinin Frenet vektörleri olsun. $\varepsilon(\sigma_i) = (V_1(\sigma_i), V_2(\sigma_i), \dots, V_{2m-1}(\sigma_i), V_{2m}(\sigma_i))^T$ olarak ifade edilebilir.

$\frac{d}{d\sigma_i}\varepsilon = M\varepsilon$ diferensiyel denklemin çözümünden $\{V_1(\sigma_i), V_2(\sigma_i), \dots, V_{2m-1}(\sigma_i), V_{2m}(\sigma_i)\}$ vektörleri bulunabilir. $V_1(\sigma_i)$ vektörü

$$V_1(\sigma_i) = (a_1 \cos(\lambda_1 \sigma_i), a_1 \sin(\lambda_1 \sigma_i), \dots, a_m \cos(\lambda_m \sigma_i), a_m \sin(\lambda_m \sigma_i)).$$

şeklinde hesaplanır. Burada M matrisinin normal formu olan matris kullanılır.

$$\langle V_1, V_1 \rangle = 1 \quad \text{olduğundan} \quad \sum_{j=1}^m (a_j)^2 = 1 \quad \text{dir.}$$

α eğrisinin parametrik denklemini $X = (x_1(\sigma_i), x_2(\sigma_i), \dots, x_{2m-1}(\sigma_i), x_{2m}(\sigma_i))$ alalım. (3.2) ifadesinden

$$\frac{d}{d\sigma_i}X = \frac{1}{\sqrt{k_{i-1}^2 + k_i^2}}V_1 \text{ yazılabilir. Ayrıca;}$$

$$\tilde{k} = -\frac{d\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}}{\sqrt{(k_{i-1})^2 + (k_i)^2}d\sigma_i}$$

eşitliğinde $\tilde{k}$ sabit olduğundan bu eşitlikte her iki tarafın integrali alınırsa $\sqrt{k_{i-1}^2 + k_i^2} = e^{-\tilde{k}\sigma_i}$ elde edilir. Böylece

$$\frac{d}{d\sigma_i}x_{2j-1} = a_j e^{\tilde{k}\sigma_i} \cos(\lambda_j \sigma_i) \quad \text{ve} \quad \frac{d}{d\sigma_i}x_{2j} = a_j e^{\tilde{k}\sigma_i} \sin(\lambda_j \sigma_i) \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

denklemleri yazılabilir. Bu iki denklemin integral yardımıyla çözülmesiyle

$$x_{2j-1} = \frac{a_j}{\tilde{k}} e^{\tilde{k}\sigma_i} \cos(\lambda_j \sigma_i) + \frac{\lambda_j}{\tilde{k}} x_{2j} \quad (3.9)$$

$$x_{2j} = \frac{a_j}{\tilde{k}} e^{\tilde{k}\sigma_i} \sin(\lambda_j \sigma_i) - \frac{\lambda_j}{\tilde{k}} x_{2j-1}. \quad (3.10)$$

elde edilir. Bu denklemler yardımıyla

$$\begin{aligned} x_{2j-1} &= \frac{a_j}{\tilde{k}^2 + \lambda_j^2} e^{\tilde{k}\sigma_i} (\tilde{k} \cos(\lambda_j \sigma_i) + \lambda_j \sin(\lambda_j \sigma_i)) = \frac{a_j}{b_j} e^{\tilde{k}\sigma_i} \sin \theta_j, \\ x_{2j} &= \frac{a_j}{\tilde{k}^2 + \lambda_j^2} e^{\tilde{k}\sigma_i} (\tilde{k} \sin(\lambda_j \sigma_i) - \lambda_j \cos(\lambda_j \sigma_i)) = -\frac{a_j}{b_j} e^{\tilde{k}\sigma_i} \cos \theta_j \end{aligned}$$

bulunur. Elde edilen denklemler yardımıyla şu eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}\sin \theta_j &= \frac{b_j}{\widetilde{k}} (\cos(\lambda_j \sigma_i) - \frac{\lambda_j}{b_j} \cos \theta_j), \\ \cos \theta_j &= -\frac{b_j}{\widetilde{k}} (\sin(\lambda_j \sigma_i) - \frac{\lambda_j}{b_j} \sin \theta_j).\end{aligned}$$

Buradan θ_j açısı şu şekilde bulunur:

$$\theta_j = \lambda_j \sigma_i + \arccos \frac{\lambda_j}{\sqrt{\widetilde{k}^2 + \lambda_j^2}}.$$

$\frac{d}{d\sigma_i} \varepsilon = M \varepsilon$ denklemi yardımıyla $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ Frenet vektörleri bulunabilir:

$$\begin{aligned}V_1(\sigma_i) &= e^{-\widetilde{k}\sigma_i} \frac{d}{d\sigma_i} \alpha(\sigma_i) \\ V_2(\sigma_i) &= \frac{1}{\widetilde{k}_1} \frac{d}{d\sigma_i} V_1(\sigma_i) \\ V_3(\sigma_i) &= \frac{1}{\widetilde{k}_2} (\widetilde{k}_1 V_1(\sigma_i) + \frac{d}{d\sigma_i} V_2(\sigma_i)) \\ V_4(\sigma_i) &= \frac{1}{\widetilde{k}_3} (\widetilde{k}_2 V_2(\sigma_i) + \frac{d}{d\sigma_i} V_3(\sigma_i)) \\ &\vdots \\ V_m(\sigma_i) &= \frac{1}{\widetilde{k}_{m-1}} (\widetilde{k}_{m-2} V_{m-2}(\sigma_i) + \frac{d}{d\sigma_i} V_{m-1}(\sigma_i)).\end{aligned}$$

$\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ Frenet vektörleri birim vektörler olduğundan

$$\begin{aligned}\langle V_1, V_1 \rangle &= 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^m a_j^2 = 1 \\ \langle V_2, V_2 \rangle &= 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^m a_j^2 \lambda_j^2 = \widetilde{k}_1^2 \\ \langle V_3, V_3 \rangle &= 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^m a_j^2 (1 - \lambda_j^2)^2 = \widetilde{k}_2^2 \\ \langle V_4, V_4 \rangle &= 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^m a_j^2 \lambda_j^2 (\widetilde{k}_2^2 - \lambda_j^2)^2 = \widetilde{k}_2^2 \widetilde{k}_3^2\end{aligned} \tag{3.11}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.2: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2m+1}$ eğrisi V_i -gösterge eğrisinin σ_i yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğri olsun. α eğrisini

$$\alpha(\sigma_i) = \left(\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}\sigma_i} \sin \theta_1, -\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}\sigma_i} \cos \theta_1, \dots, \frac{a_m}{b_m} e^{\tilde{k}\sigma_i} \sin \theta_m, -\frac{a_m}{b_m} e^{\tilde{k}\sigma_i} \cos \theta_m, a_{m+1} e^{\tilde{k}\sigma_i} \right)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $b_j = \sqrt{\tilde{k}^2 + \lambda_j^2}$ ve $\theta_j = \sqrt{\lambda_j^2} \sigma_i + \arccos \left(\frac{\sqrt{\lambda_j^2}}{\sqrt{\tilde{k}^2 + \lambda_j^2}} \right)$
 $j = 1, 2, \dots, m$.

Ayrıca $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ sayılarını aşağıdaki denklemlerden hesaplayabiliriz:

$$\begin{aligned} V_1(\sigma_i) &= e^{-\tilde{k}\sigma_i} \frac{d}{d\sigma_i} \alpha(\sigma_i) \\ V_2(\sigma_i) &= \frac{1}{\tilde{k}_1} \frac{d}{d\sigma_i} V_1(\sigma_i) \\ V_3(\sigma_i) &= \frac{1}{\tilde{k}_2} (\tilde{k}_1 V_1(\sigma_i) + \frac{d}{d\sigma_i} V_2(\sigma_i)) \\ V_4(\sigma_i) &= \frac{1}{\tilde{k}_3} (\tilde{k}_2 V_2(\sigma_i) + \frac{d}{d\sigma_i} V_3(\sigma_i)) \\ &\vdots \\ V_{m+1}(\sigma_i) &= \frac{1}{\tilde{k}_m} (\tilde{k}_{m-1} V_{m-1}(\sigma_i) + \frac{d}{d\sigma_i} V_m(\sigma_i)). \end{aligned}$$

$$\langle V_j, V_j \rangle = 1, \quad j = 1, 2, \dots, m+1.$$

olduğundan;

$$\begin{aligned} \langle V_1, V_1 \rangle &= 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^m a_i^2 + \tilde{k}^2 a_{m+1}^2 = 1 \\ \langle V_2, V_2 \rangle &= 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{m+1} a_i^2 \lambda_i^2 = \tilde{k}_1^2 \\ &\dots \\ \langle V_i, V_i \rangle &= 1, i = 3, \dots, m+1 \end{aligned}$$

İspat. Teoremin ispatı Teorem (3.4.1) in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Bu konunun bir uygulaması olarak eğriyi teğetler göstergesinin yay parametresi ile yeniden parametrelendirilmesi durumunu inceleyelim.

n=3, i=1 durumu:

Eğri teğetler göstergesinin yay parametresi ile yeniden parametrelendirildiği zaman şekil eğrilikleri

$$\tilde{k}_1 = -\frac{1}{k_1} \frac{dk_1}{d\sigma_1} \quad \text{ve} \quad \tilde{k}_2 = \frac{k_2}{k_1} \quad j = 2, 3, \dots, n-1$$

şeklindedir. Bu şekil eğrilikleri yardımıyla eğri şu şekilde ifade edilebilir:

$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow E^3$, sıfırdan farklı sabit şekil eğriliklerine sahip bir eğri olsun. α eğrisi teğetler göstergesinin yay parametresi ile yeniden parametrelendirilsin. Bu durumda

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \tilde{k}_2 \\ 0 & -\tilde{k}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi ile

$$M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \tilde{k}_2 \\ 0 & -1 - \tilde{k}_2^2 & 0 \\ \tilde{k}_2 & 0 & -\tilde{k}_2^2 \end{pmatrix}$$

matrisi bulunur ve bu matrisin karakteristik değeri $-\lambda_1^2 = -1 - \tilde{k}_2^2$ dir. Buradan $b_1 = \sqrt{\tilde{k}_1^2 + 1 + \tilde{k}_2^2}$ elde edilir. (3.11) denklemlerinden

$$a_1^2 + a_2^2 \tilde{k}_1^2 = 1 \quad \text{ve} \quad a_1^2 \lambda_1^2 = 1$$

denklemleri elde edilir ve bu denklemlerin çözülmesiyle

$$a_1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \tilde{k}_1^2}} \quad \text{ve} \quad a_2 = \sqrt{\frac{\tilde{k}_2^2}{\tilde{k}_1^2(1 + \tilde{k}_2^2)}}$$

elde edilir.

Ayrıca

$$\theta = \sigma_1 \sqrt{1 + \tilde{k}_2^2} + \arccos \left(\sqrt{\frac{1 + \tilde{k}_2^2}{1 + \tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2}} \right)$$

olup eğriyi

$$\alpha(\sigma_1) = \left(\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma_1} \sin \theta, -\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma_1} \cos \theta, a_2 e^{\tilde{k}_1 \sigma_1} \right) \quad (3.12)$$

şeklinde yazabiliriz.

Sonuç 3.4.1: $\alpha(\sigma_i) : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi, $\tilde{k}_i$ sabit şekil eğriliklerine sahip bir eğri olsun. Bu durumda α eğrisi bir ccr-eğri olur.

Örnek 3.4.1: $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ şekil eğrilikleri $\tilde{k}_1 = \frac{1}{2}$ ve $\tilde{k}_2 = \frac{1}{3}$ olan bir eğri olsun. Teğetler göstergesinin yay parametresi ile parametrelendirilmiş bir eğrinin ifadesi (3.12) ile verilmiştir. Verilen denklemler yardımıyla eğriyi şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\alpha(\sigma_1) = \left(\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma_1} \sin \theta_1, -\frac{a_1}{b_1} e^{\tilde{k}_1 \sigma_1} \cos \theta_1, a_2 e^{\tilde{k}_1 \sigma_1} \right)$$

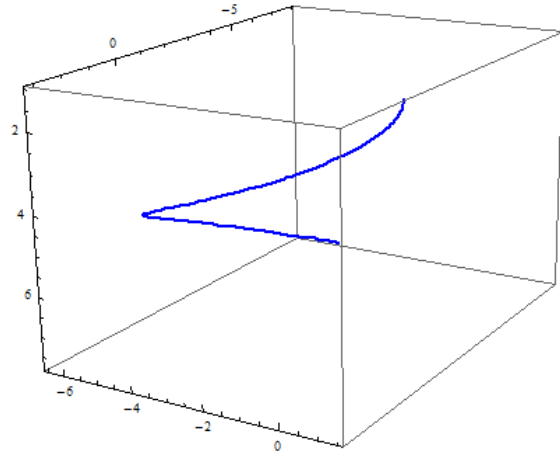
Tek boyutta elde edilen denklemlerin kullanılmasıyla a_1, a_2, b_1 katsayıları ve θ_1 açısı elde edilir.

$$\lambda_1^2 = \frac{10}{9}, \quad a_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ve } a_2 = \frac{2}{\sqrt{10}}, \quad b_1 = \frac{7}{6}, \quad \theta_1 = \frac{\sqrt{10}}{3} \sigma_1 + \arccos \left(\frac{2\sqrt{10}}{7} \right).$$

Burada σ_1 , α eğrisinin teğetler göstergesinin yay parametresidir. Eğri teğetler göstergesinin yay parametresi ile parametrelendirildiğinden

$$\tilde{k}_2 = \frac{k_2}{k_1} = \frac{1}{3}$$

dir. Burada $\frac{\kappa}{\tau}$ oranı sabit olduğundan α eğrisi bir helistir.



Şekil 3.1 α eğrisi

4. BENZER YÜZEYLERİN GEOMETRİSİ

Bu bölümde öncelikle yüzeylerle ilgili temel tanım ve kavramlar verilecektir. Sonra yüzeylerin direkt benzerlik dönüşümleri altında görüntüsü olan yüzeyler incelenerek bazı karakterizasyonlar verilecektir. Özel olarak sabit açılı yüzeylerin ve paralel lineer Weingarten yüzeylerinin benzerlik dönüşümü altındaki resmi olan yüzeyler incelenecektir. Daha sonra rasyonel yüzeylerden bahsedilecektir.

4.1 Yüzeyler Teorisi

Tanım 4.1.1: E^n n -boyutlu Öklid uzayında

$$M = \left\{ \begin{array}{l} x \in U \subset E^n \mid f : U \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow f(x) = c \end{array} , \quad U \text{ bir açık alt cümle} \right\}$$

$\nabla f|_p \neq 0, \forall p \in M$ biçiminde tanımlanan M cümlesine n -boyutlu Öklid uzayında $(n - 1)$ boyutlu bir *yüzey* denir. E^n de bir $(n - 1)$ -yüzey, $n \geq 3$ olması halinde hiperyüzey olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 4.1.2: U, E^2 de bir açık alt cümle olmak üzere $X : U \rightarrow E^3$

$$X(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$$

biçiminde tanımlanan diferensiyellenebilir dönüşümüne E^3 de bir *yama*, *lokal yüzey* veya *iki parametrelili yüzey* denir (Gray 1993).

Tanım 4.1.3: $X : U \rightarrow X(U) \subset E^3$ bir lokal yüzey ve $(u_0, v_0) \in U$ sabit olsun.

$u \rightarrow X(u, v_0)$ ve $v \rightarrow X(u_0, v)$ eğrilerine, sırasıyla, X in u -parametre ve v -parametre eğrileri denir (Gray 1993).

Tanım 4.1.4: $M \subset E^n$ bir alt cümle olsun. Eğer M nin $\forall P \in M$ noktası için, P yi içeren bir V komşuluğu var ve bir $X : U \subset E^2 \rightarrow V \cap M \subset E^3$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa, M ye bir *regüler yüzey* denir.

i) X diferensiyellenebilirdir,

ii) $X : U \rightarrow V \cap M$ bir homeomorfizimdir,

iii) $X : U \rightarrow M$ dönüşümü bir regüler lokal yüzeydir (Gray 1993).

Tanım 4.1.5: E^n de bir regüler yüzey M ve $P \in M$ olsun, eğer $\alpha(0) = P, \alpha'(0) = \vec{v}_P$ ve $\alpha(t) \in M$ ($a < t < b$) olacak şekilde bir $\alpha : U \rightarrow E^n$ eğrisi varsa, $\vec{v}_P \in T_{E^n}(P)$ ye M nin P noktasındaki *tanjant vektörü* denir (Gray 1993).

Tanım 4.1.6: Bir $X : U \rightarrow E^3$ injektif yaması için $X_u \times X_v$ sıfırdan farklı olacak biçimde $(u, v) \in U$ noktalarında birim normal vektör alanı veya yüzeyin normali;

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}(u, v) \quad (4.1)$$

eşitliği ile tanımlanır (Gray 1993). Burada $\times$ vektörel çarpımı ifade etmektedir.

Tanım 4.1.7: $X : U \rightarrow E^n$ bir lokal yüzey olsun.

$$\begin{cases} E = \langle X_u, X_u \rangle \\ F = \langle X_u, X_v \rangle \\ G = \langle X_v, X_v \rangle \end{cases} \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ifadesine X in *birinci temel formu* denir. E, F, G fonksiyonlarına ise X in birinci temel formunun elemanları denir (Gray 1993).

Tanım 4.1.8 (Şekil Operatörü): M bir regüler yüzey ve M nin $P \in M$ noktasındaki yüzey normali U olsun. $\vec{v}_P$ ile M nin P noktasındaki tanjant vektörü gösterilmek üzere

$$S(\vec{v}_P) = -D_{\vec{v}_P}(U) \quad (4.3)$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne M yüzeyinin *şekil operatörü* denir (Gray 1993).

Tanım 4.1.9 (İkinci Temel Form): $X : U \rightarrow E^n$ bir lokal yüzey olsun.

$$\begin{aligned} L &= \langle X_{uu}, \vec{N}(u, v) \rangle, \\ M &= \langle X_{uv}, \vec{N}(u, v) \rangle, \\ N &= \langle X_{vv}, \vec{N}(u, v) \rangle \end{aligned} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre $Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ ifadesine X in *ikinci temel formu* denir. L, M, N fonksiyonlarına ise X in ikinci temel formunun elemanları denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 4.1.10 (Asli Eğrilik Doğrultusu): E^n de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M yüzeyinin bir P noktaya karşılık gelen $S|_P$ nin karakteristik değerleri M yüzeyinin bu noktadaki *asli eğrilikleri* olarak adlandırılır. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu P noktasındaki *asli eğrilik doğrultuları* denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 4.1.11 (Gauss Eğriliği): E^n de bir hiperyüzey M ve M nin P noktasındaki şekil operatörü $S|_P$ olmak üzere,

$$K : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.5)$$

$$P \rightarrow K(P) = \det S(P)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M yüzeyinin Gauss eğrilik fonksiyonu ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki *Gauss eğriliği* denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 4.1.12 (Ortalama Eğrilik): E^n de bir hiperyüzey M ve M nin P noktasındaki şekil operatörü $S|_P$ olmak üzere,

$$H : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.6)$$

$$P \rightarrow H(P) = \dot{I}z(S(P))$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M yüzeyinin ortalama eğrilik fonksiyonu ve $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki *ortalama eğriliği* denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 4.1.13 (Minimal Yüzey): Öklid uzayında her noktada ortalama eğrilik fonksiyonu sıfır ($H = 0$) olan yüzeylere *minimal yüzey* denir. Bir başka ifadeyle aynı sınırlara sahip olan yüzeyler arasında en küçük alanlı yüzeye minimal yüzey denir (Gray 1998).

Tanım 4.1.14 (Umbilik ve Flat Nokta): E^n in bir hiperyüzeyi M olsun. $P \in M$ noktasındaki M nin şekil operatörü matris S olmak üzere,

- i) $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ için, $S = \lambda I_{n-1}$ ise P noktasına M nin bir *umbilik (göbek) noktası* denir.
- ii) $S = 0$ şeklinde S bir sıfır dönüşümü ise P noktasına M nin bir *düzlemsel (flat) noktasıdır* denir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 4.1.15 (Eğrilik Çizgisi): E^n de bir hiperyüzey M ve M üzerinde bir eğri α olsun. α eğrisinin teğete vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olmak üzere, eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir *eğrilik çizgisi* denir (Hacısalihoglu 2000).

Teorem 4.1.1: $X : U \rightarrow E^3$ regüler bir yama olsun. X in Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla;

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \text{ve} \quad H = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \quad (4.7)$$

dır (Gray 1993).

Teorem 4.1.2: $X : U \rightarrow E^3$ regüler bir yama olsun. X in asli eğrilikleri k_1 ve k_2 olmak üzere

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \text{ ve } k_2 = H - \sqrt{H^2 - K} \quad (4.8)$$

dir (Hacısalihoglu 2000).

Tanım 4.1.16: M regüler bir yüzey ve M yüzeyinin bir benzerlik dönüşümü altında resmi olan yüzey $\overline{M}$ olsun. M ile $\overline{M}$ yüzeyleri benzer yüzeyler olarak adlandırılırlar. $M = r(u, v)$ yüzeyini ve (2.6) da verilen

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow F(x) = \lambda Ax + b \end{aligned}$$

F direkt benzerlik dönüşümünü alalım. M yüzeyinin benzer yüzeyi olan $\overline{M}$ yüzeyinin parametrik ifadesi

$$\overline{r(u, v)} = \lambda Ar(u, v) + b$$

şeklindedir.

Önerme 4.1.1: $M \subset E^3$ bir yüzey olsun. M ve $\overline{M}$ birim normal vektörleri sırasıyla N ve $\overline{N}$ olan benzer yüzeyler olmak üzere;

$$\overline{N} = AN$$

dir.

Önerme 4.1.2: $M \subset E^3$ bir yüzey olsun. M ve $\overline{M}$ şekil operatörlerinin matrisleri sırasıyla S ve $\overline{S}$ olan benzer yüzeyler olsunlar. Bu durumda

$$\overline{S} = \frac{1}{\lambda} S$$

dir.

Önerme 4.1.3: Bir M yüzeyi üzerinde bulunan bir α eğrisi geodezik bir eğri ise $\overline{M}$ yüzeyi üzerinde bulunan $\overline{\alpha}$ eğrisi de geodezik bir eğridir.

İspat. α eğrisi birim normal vektörü N olan M yüzeyi üzerinde bulunan bir geodezik bir eğri ise

$$\alpha(s)'' = \sigma(s)N|_{\alpha(s)}$$

dir. (2.6) da verilen F benzerlik dönüşümü altında α eğrisinin resmi

$$\overline{\alpha(s)} = \lambda A\alpha(s) + b$$

dir. Buradan;

$$\begin{aligned} \overline{\alpha(s)}'' &= \lambda A\alpha(s)'' \\ &= \lambda A(\sigma(s)N|_{\alpha(s)}) \\ &= \lambda \sigma(AN|_{\alpha(s)}) \\ &= \lambda \sigma \overline{N} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\overline{\alpha}$ eğrisinin $\overline{M}$ yüzeyi üzerinde geodezik olduğu gösterilmiş olur.

4.2 E^3 Öklid Uzayında Sabit Açılı Benzer Yüzeyler

Bu bölümde, sabit açılı yüzeylerden bahsedilecek ve bu yüzeylerin benzerlik dönüşümleri altında resimleri olan yüzeyler incelenecektir.

Tanım 4.2.1: E^3 3-boyutlu Öklid uzayında, birim normal vektörü sabit bir doğrultu ile sabit bir açı yapan yüzeye sabit açılı yüzey denir (Munteanu ve Nistor 2009).

Teorem 4.2.1: E^3 3-boyutlu Öklid uzayında, M yüzeyi $r(u, v)$ parametresine sahip ve birim normal vektörü $\vec{N}$ olan sabit açılı bir yüzey olsun. M yüzeyinin birim normal vektörünün sabit açı yaptığı sabit k doğrultusu

$$k = \sin \theta r_u + \cos \theta \vec{N} \quad (4.9)$$

şeklindedir (Munteanu ve Nistor 2009).

Önerme 4.2.1: E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında, M regüler bir yüzey ve $\overline{M}$, M yüzeyinin benzer yüzeyi olsun. Eğer M yüzeyi birim normal vektörü bir k doğrultusu ile sabit açı yapan sabit açılı bir yüzey ise $\overline{M}$ birim normal vektörü Ak doğrultusu ile aynı sabit açıyı yapan sabit açılı bir yüzeydir.

İspat. M birim normal vektörü N olan ve N vektörünün k sabit doğrultusu ile θ açısı yaptığı sabit açılı bir yüzey olsun. Bu durumda

$$\langle N, k \rangle = \cos \theta$$

eşitliği sağlanır.

$\overline{M}$ yüzeyinin birim normal vektörü $\overline{N} = AN$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \langle \overline{N}, \overline{k} \rangle &= \langle AN, \overline{k} \rangle \\ &= \langle AN, Ak \rangle \\ &= \langle N, k \rangle \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Örnek 4.2.1: E^3 3-boyutlu Öklid uzayında,

$$r(u, v) = \frac{\sqrt{2}}{2}((u \cos v + v^2 \cos v - 2v \sin v - 2 \cos v + 2), (u \sin v + v^2 \sin v + 2v \cos v - 2 \sin v), u)$$

parametrelendirilmesine sahip bir M yüzeyi ve

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\rightarrow F(x) = \lambda Ax + b \end{aligned}$$

$$\lambda = 4, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } b = (0, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \text{ olmak üzere;}$$

benzerlik dönüşümü verilsin. M yüzeyinin verilen benzerlik dönüşümü altındaki resmi olan yüzey şu şekilde bulunur.

$$\overline{r(u, v)} = 2\sqrt{2}(u, u \sin v + v^2 \sin v + 2v \cos v - 2 \sin v + 1, -u \cos v - v^2 \cos v + 2v \sin v + 2 \cos v - 1)$$

M yüzeyinin birim normal vektörünün $\theta = \frac{\pi}{4}$ sabit açı yaptığı sabit k doğrultusu (4.9) eşitliği yardımıyla bulunabilir.

$$\begin{aligned} r_u &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos v, \sin v, 1) \\ N &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-\cos v, -\sin v, 1) \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ alınırsa;}$$

$$\begin{aligned} k &= \sin \theta r_u + \cos \theta N \\ &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

sabit doğrultusu bulunur.

Benzer şekilde $\overline{M}$ yüzeyi için

$$\begin{aligned}\overline{r}_u &= 2\sqrt{2}(1, \sin v, -\cos v) \\ \overline{N} &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1, -\sin v, \cos v)\end{aligned}$$

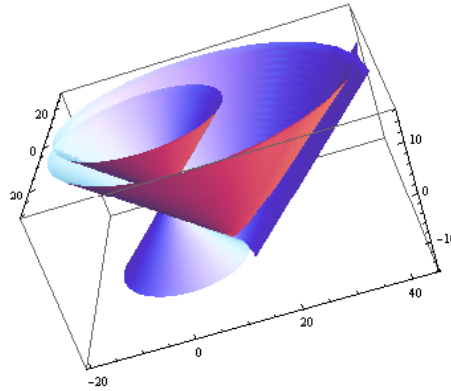
eşitlikleri yazılabilir. Benzerlik dönüşümleri açıların büyüklüğünü koruduğu için $\theta = \frac{\pi}{4}$ alınır ve

$$\begin{aligned}\overline{k} &= \sin \theta \frac{\overline{r}_u}{\|\overline{r}_u\|} + \cos \theta \overline{N} \\ &= (1, 0, 0)\end{aligned}$$

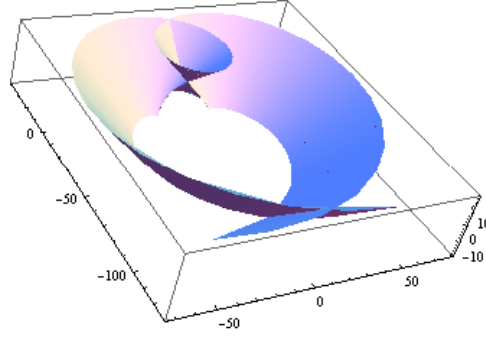
sabit doğrultusu bulunur. Ayrıca önerme (4.2.1) den

$$\begin{aligned}\overline{k} &= Ak \\ &= (1, 0, 0)\end{aligned}$$

olduğu görülür.



Şekil 4.1 Sabit açılı M yüzeyi



Şekil 4.2 Sabit açılı M yüzeyinin $\overline{M}$ benzer yüzeyi

4.3 E^3 Öklid Uzayında Paralel Weingarten Yüzeyleri ve Benzerlik Dönüşümleri

Tanım 4.3.1: M_1 ve M_2 , E^n n -boyutlu Öklid uzayında iki yüzey ve M_1 in birim normal vektör alanı, $N_1 = \sum_{i=1}^n a_i \frac{d}{dx_i}$ olsun. Eğer, bir $r \in \mathbb{R}$ sabit sayısı ve $\forall P \in M_1$ için

$$f(P) = (p_1 + ra_1(P), \dots, p_n + ra_n(P))$$

olacak şekilde bir

$$f : M_1 \rightarrow M_2$$

fonksiyonu bulunabilirse, M_2 ye M_1 in bir paralel yüzeyi denir (Hacısalıhoğlu 2000).

$M = r(u, v)$ bir parametrik yüzey ve n_i , M yüzeyinin normal vektörü olsun. M yüzeyinin paralel yüzeyi olan M_d yüzeyi

$$M_d = r(u, v) + dn_i(u, v)$$

şeklindedir. M_d yüzeyinin (2.6) ile verilen F benzerlik dönüşümü altında görüntüsü olan yüzey $\overline{M_d} = F(M_d) = \overline{M} + d_0 \overline{n_1(u, v)}$ şeklinde ifade edilir.

M yüzeyi ile bu yüzeyin F benzerlik dönüşümü altındaki resmi olan $\overline{M}$ yüzeyi benzer yüzeyler olarak adlandırılmıştı. Benzer şekilde M yüzeyinin paralel yüzeyi olan M_d yüzeyi ve bu yüzeyin (2.6) ile verilen F benzerlik dönüşümü altındaki resmi olan $\overline{M}_d$ yüzeyi benzer yüzeyler olarak adlandırılırlar. Şimdi bu yüzeyler arasındaki bazı ilişkiler verilecektir.

Önerme 4.3.1: $M \subset E^3$ yüzeyi verilsin. M yüzeyinin benzer yüzeyi $\overline{M}$, paralel yüzeyi M_r ve M_r yüzeyinin benzer yüzeyi $\overline{M}_r$ olmak üzere; M yüzeyi ile M_r yüzeyi arasındaki uzaklık r ise $\overline{M}$ ile $\overline{M}_r$ yüzeyleri arasındaki uzaklık λr dir (Georgiev 2012).

Önerme 4.3.2: $M \subset E^3$ yüzeyinin benzer yüzeyi $\overline{M}$ olsun. M yüzeyinin sabit eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla H ve K , $\overline{M}$ yüzeyinin sabit eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla $\overline{H}$ ve $\overline{K}$ olmak üzere;

$$\overline{H} = \frac{1}{\lambda}H \quad \text{ve} \quad \overline{K} = \frac{1}{\lambda^2}K \quad (4.10)$$

dır.

Teorem 4.3.1: $M \subset E^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M_r olsun. $p \in M$ noktasında M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H , $f(p) \in M_r$ noktasında M_r nin Gauss ve ortalama eğrilikleri de K_r ve H_r olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} K_r &= \frac{K}{1 + rH + r^2K} \\ H_r &= \frac{H + 2rK}{1 + rH + r^2K} \end{aligned} \quad (4.11)$$

dır (Hacısalıhoğlu 2000).

Önerme 4.3.3: $M \subset E^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M_r olsun. M_r yüzeyinin sabit eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla H_r ve K_r , $\overline{M_r}$ yüzeyinin sabit eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla $\overline{H_r}$ ve $\overline{K_r}$ olmak üzere;

$$\overline{H_r} = \frac{1}{\lambda} H_r \quad \text{ve} \quad \overline{K_r} = \frac{1}{\lambda^2} K_r \quad (4.12)$$

dır.

İspat. $M \subset E^3$ yüzeyinin bir paralel yüzeyi M_r olmak üzere; M yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrileri ile M_r yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrileri arasındaki ilişki (4.11) de verilmiştir. Bu eşitliklerden ve (4.10) da verilen eşitliklerden yararlanarak ispat kolayca tamamlanır.

Sonuç 4.3.1: Eğer M yüzeyi açılabilir bir yüzey ise $\overline{M}$, M_r ve $\overline{M_r}$ yüzeyleri de açılabilir yüzeylerdir.

Weingarten yüzeyleri Lopez tarafından yapılan bazı çalışmalarda incelenmiştir.

Tanım 4.3.2: n -boyutlu Öklid uzayı E^n de bir M yüzeyi verilsin. M yüzeyinin ortalama eğriliği H ve Gauss eğriliği K olmak üzere;

$$aH + bK = c \quad a, b, c \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad a^2 + b^2 \neq 0 \quad (4.13)$$

bağıntısını sağlayan M yüzeyine lineer Weingarten yüzeyi denir (Kalkan 2010).

Lineer Weingarten yüzeyinin diskriminantı

$$\Delta = a^2 + 4bc \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlıdır.

E^3 3-boyutlu Öklid uzayında, M lineer Weingarten yüzeyi diskriminantına bağlı olarak şu şekilde sınıflandırılır:

$\Delta < 0$ ise M yüzeyi hiperbolik yüzeydir.

$\Delta = 0$ ise M yüzeyi parabolik bir yüzeydir.

$\Delta > 0$ ise M yüzeyi eliptik bir yüzeydir (Kalkan 2010).

Bu bölümde M yüzeyi ile $\overline{M_r}$ yüzeyi arasındaki geçişler verilecektir.

Önerme 4.3.4: 3-boyutlu Öklid uzayında, M yüzeyi bir lineer Weingarten yüzeyi ise $\overline{M_r}$ yüzeyi de lineer Weingarten yüzeyidir.

İspat. M yüzeyi bir lineer Weingarten yüzeyi olsun. Bu durumda M yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla K ve H olmak üzere;

$$aH + bK = c \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. (4.11) eşitliği yardımıyla

$$K = \frac{K_r}{1 - rH_r + r^2K_r} \quad \text{ve} \quad H = \frac{H_r - 2rK_r}{1 - rH_r + r^2K_r}$$

eşitlikleri elde edilebilir. Bu eşitliklerden ve (4.12) ile verilen eşitliklerden yararlanılarak

$$\lambda(a + cr)\overline{H_r} + \lambda^2(b - 2ar - cr^2)\overline{K_r} = c$$

denklemini elde edilir.

Burada $\lambda(a + cr) = a_r$, $\lambda^2(b - 2ar - cr^2) = b_r$ ve $c = c_r$ olarak alınırsa

$$a_r\overline{H_r} + b_r\overline{K_r} = c_r \quad a_r, b_r, c_r \in \mathbb{R}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Benzer şekilde $\overline{M_r}$ yüzeyi lineer Weingarten yüzeyi ise M yüzeyi de lineer Weingarten yüzeyidir.

Paralel yüzeylerin ve benzer yüzeylerin Gauss ve ortalama eğrilikleri arasında bazı eşitlikler elde edilmişti. Bu eşitlikler, (4.13) ve (4.14) denklemleri göz önüne alınırsa yüzeylerin diskriminantları arasındaki ilişkiler bulunabilir.

M yüzeyi

$$aH + bK = c$$

bağıntısına sahip LW -yüzeyi olsun. Bu durumda M yüzeyinin diskriminantı

$$\Delta = a^2 + 4bc$$

dir.

M_r yüzeyi

$$(a + cr) H_r + (b - 2ar - cr^2) K_r = c$$

bağıntısına sahip olup M_r yüzeyinin diskriminantı

$$\Delta_r = \Delta - 3c^2r^2 - 6acr \quad (4.15)$$

dir.

$\overline{M}$ yüzeyi

$$(a\lambda) \overline{H} + (b\lambda^2) \overline{K} = c$$

bağıntısına sahip olup $\overline{M}$ yüzeyinin diskriminantı

$$\overline{\Delta} = \lambda^2 \Delta \quad (4.16)$$

dir.

$\overline{M}_r$ yüzeyi

$$\lambda(a + cr) \overline{H}_r + \lambda^2(b - 2ar - cr^2) \overline{K}_r = c$$

bağıntısına sahip olup $\overline{M}_r$ yüzeyinin diskriminantı

$$\begin{aligned} \overline{\Delta}_r &= \lambda^2(\Delta - 3c^2r^2 - 6acr) \\ &= \lambda^2\Delta_r \end{aligned} \tag{4.17}$$

dir.

Sonuç 4.3.2: Eğer M yüzeyi bir lineer Weingarten yüzeyi ise $\overline{M}$, M_r ve $\overline{M}_r$ yüzeyleri lineer Weingarten yüzeyleridir.

Sonuç 4.3.3: Benzerlik dönüşümleri lineer Weingarten yüzeylerinin cinsini korur. Yani; bir M yüzeyi eliptik(parabolik veya hiperbolik) ise $\overline{M}$ yüzeyi de eliptiktir (paraboliktir veya hiperboliktir). Benzer biçimde M_r ve $\overline{M}_r$ yüzeylerinin cinsleri de aynıdır.

Bir M yüzeyinin paralel yüzeyi M_r ve M_r yüzeyinin benzerlik dönüşümü altında resmi olan yüzey $\overline{M}_r$ olsun. M_r yüzeyinin cinsinin karakterizasyonu yapılmıştır (Kalkan 2010). Bu çalışmaya benzer olarak $\overline{M}_r$ yüzeyinin karakterizasyonunu aşağıdaki teoremlerle verebiliriz.

Teorem 4.3.2: M yüzeyi $c = 0$ olan bir LW -yüzey ise M ve $\overline{M_r}$ yüzeyleri eliptik LW -yüzeydir.

İspat. M yüzeyi için $c = 0$ olması durumunda $\Delta = a^2 > 0$ ve (4.17) eşitliğinden $\overline{\Delta_r} = \lambda^2(\Delta - 3c^2r^2 - 6acr)$ olduğunu biliyoruz. Buradan $\overline{\Delta_r} = \lambda^2\Delta > 0$ olduğu görülür. Böylece M ve $\overline{M_r}$ yüzeyleri eliptik LW -yüzeyleri olduğu söylenebilir.

Teorem 4.3.3: M yüzeyi $c > 0$ olan eliptik LW -yüzeyi olsun.

$$r_1 = \frac{1}{c}(-a - \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + bc)}) \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{1}{c}(-a + \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + bc)})$$

olmak üzere;

- a) Eğer $r_1 < r < r_2$ ise $\overline{M_r}$ eliptik LW -yüzeyidir.
- b) Eğer $r < r_1$ veya $r > r_2$ ise $\overline{M_r}$ hiperbolik LW -yüzeyidir.
- c) Eğer $r = r_1$ veya $r = r_2$ ise $\overline{M_r}$ parabolik LW -yüzeyidir.

İspat. M yüzeyi $c > 0$ olan eliptik LW -yüzeyi olsun.

$$\begin{aligned} \overline{\Delta_r} &= \lambda^2(\Delta - 3c^2r^2 - 6acr) \\ &= -3\lambda^2c^2r^2 - 6\lambda^2acr + \lambda^2a^2 + 4\lambda^2bc \end{aligned}$$

denkleminin kökleri

$$r_1 = \frac{1}{c}(-a - \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + bc)}) \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{1}{c}(-a + \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + bc)})$$

şeklinde bulunur. Buradan;

$$r_1 < r < r_2 \Rightarrow \overline{\Delta_r} > 0$$

$$r < r_1 \text{ veya } r > r_2 \Rightarrow \overline{\Delta_r} < 0$$

$$r = r_1 \text{ veya } r = r_2 \Rightarrow \overline{\Delta_r} = 0 \quad \text{yazılabilir.}$$

Teorem 4.3.4: M yüzeyi $c \langle 0$ olan eliptik LW -yüzeyi olsun.

$$r_1 = \frac{1}{c}(-a - \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + bc)}) \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{1}{c}(-a + \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + bc)})$$

olmak üzere;

a) Eğer $r_2 \langle r \langle r_1$ ise $\overline{M_r}$ eliptik LW -yüzeyidir.

b) Eğer $r \langle r_2$ veya $r \rangle r_1$ ise $\overline{M_r}$ hiperbolik LW -yüzeyidir.

c) Eğer $r = r_1$ veya $r = r_2$ ise $\overline{M_r}$ parabolik LW -yüzeyidir.

Teorem 4.3.5: M yüzeyi $c \rangle 0$ ve $a \rangle 0$ veya $c \langle 0$ ve $a \langle 0$ olan parabolik LW -yüzeyi olsun.

a) Eğer $-\frac{2a}{c} \langle r \langle 0$ ise $\overline{M_r}$ eliptik LW -yüzeydir.

b) Eğer $r \langle -\frac{2a}{c}$ veya $r \rangle 0$ ise $\overline{M_r}$ hiperbolik LW -yüzeydir.

c) Eğer $r = 0$ veya $r = -\frac{2a}{c}$ ise $\overline{M_r}$ parabolik LW -yüzeydir.

Teorem 4.3.6: M yüzeyi $c \rangle 0$ ve $a \langle 0$ veya $c \langle 0$ ve $a \rangle 0$ parabolik LW -yüzeyi olsun.

a) Eğer $0 \langle r \langle -\frac{2a}{c}$ ise $\overline{M_r}$ eliptik LW -yüzeydir.

b) Eğer $r \langle 0$ veya $r \rangle -\frac{2a}{c}$ ise $\overline{M_r}$ hiperbolik LW -yüzeydir.

c) Eğer $r = 0$ veya $r = -\frac{2a}{c}$ ise $\overline{M_r}$ parabolik LW -yüzeydir.

Teorem 4.3.7: M yüzeyi $c \neq 0$ olan hiperbolik LW -yüzeyi olsun.

$$r_1 = \frac{1}{c}(-a - \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + bc)}) \quad \text{ve} \quad r_2 = \frac{1}{c}(-a + \frac{2}{3}\sqrt{3(a^2 + bc)})$$

olmak üzere;

a) Eğer $a^2 \langle -bc$ ise $\overline{M_r}$ hiperbolik LW -yüzeydir.

b) $a^2 = -bc$ olması durumunda,

i) $r \neq -\frac{a}{c}$ ise $\overline{M_r}$ hiperbolik yüzeydir.

ii) $r = -\frac{a}{c}$ ise $\overline{M_r}$ parabolik yüzeydir.

c) $-bc \langle a^2 \langle -4bc$ ve $c \rangle 0$ olması durumunda,

i) Eğer $r_1 \langle r \langle r_2$ ise $\overline{M_r}$ yüzeyi eliptik LW -yüzeydir.

ii) Eğer $r \langle r_1$ veya $r \rangle r_2$ ise $\overline{M_r}$ hiperbolik LW -yüzeydir.

iii) Eğer $r = r_1$ veya $r = r_2$ ise $\overline{M_r}$ parabolik LW -yüzeydir.

d) $-bc \langle a^2 \langle -4bc$ ve $c \rangle 0$ olması durumunda,

i) Eğer $r_2 \langle r \langle r_1$ ise $\overline{M_r}$ yüzeyi eliptik yüzeydir.

ii) Eğer $r \langle r_2$ veya $r \rangle r_1$ ise $\overline{M_r}$ hiperbolik LW -yüzeydir.

iii) Eğer $r = r_1$ veya $r = r_2$ ise $\overline{M_r}$ parabolik LW -yüzeydir.

4.4 E^3 Öklid Uzayında Rasyonel Yüzeyler

Bu bölümde benzerlik fonksiyonları tanımlanacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla rasyonel yüzeyler elde edilecektir.

$\mathbb{R}^3$, 3-boyutlu standart reel vektör uzayında benzerlik dönüşümünün tanımı şu şekilde verilmiştir:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\rightarrow F(x) = \lambda Ax + b \end{aligned}$$

$x \in \mathbb{R}^3$, $A \in O(3)$, $\det A = 1$, $\lambda > 0$ ve b öteleme vektörüdür. Bir M parametrik yüzeyi

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

şeklinde verilsin.

Önerme 4.4.1: $M \subset E^3$ bir yüzey ve $\overline{M}$ yüzeyi M nin benzer yüzeyi olsun. M yüzeyinin birinci temel formunun elemanları E, F, G ve $\overline{M}$ yüzeyinin birinci temel formunun elemanları $\overline{E}, \overline{F}, \overline{G}$ olmak üzere;

$$\overline{E} = \lambda^2 E$$

$$\overline{F} = \lambda^2 F$$

$$\overline{G} = \lambda^2 G$$

dir. Burada λ , F benzerlik dönüşümünün benzerlik oranını ifade etmektedir.

Önerme 4.4.2: $M \subset E^3$ bir yüzey ve $\overline{M}$ yüzeyi M nin benzer yüzeyi olsun. M yüzeyinin ikinci temel formunun elemanları L, M, N ve $\overline{M}$ yüzeyinin ikinci temel formunun elemanları $\overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$ olmak üzere;

$$\overline{L} = \lambda L$$

$$\overline{M} = \lambda M$$

$$\overline{N} = \lambda N$$

dir.

M yüzeyi ile $\overline{M}$ yüzeyinin birinci ve ikinci temel formları arasında bir izomorfizm kurulabilir.

$$i_M^F : \mathcal{F}_{I,II}(M) \rightarrow \mathcal{F}_{I,II}(\overline{M})$$

Burada;

$$i_M^F(E) = \overline{E}, i_M^F(F) = \overline{F}, i_M^F(G) = \overline{G}, i_M^F(L) = \overline{L}, i_M^F(M) = \overline{M}, i_M^F(N) = \overline{N} \text{ dir.}$$

Tanım 4.4.1: $f \in \mathcal{F}_{I,II}(M)$ fonksiyonu,

$$\overline{f} = i_M^F(f) = \lambda f$$

koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonuna benzerlik fonksiyonu denir (Georgiev 2012).

Lemma 4.4.1: g_1, g_2 keyfi benzerlik fonksiyonları ve g_3 değeri sıfırdan farklı bir benzerlik fonksiyonu olmak üzere;

(i) $\lambda_1 g_1 \pm \lambda_2 g_2$ benzerlik fonksiyonudur. Burada $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dır.

(ii) $\frac{g_1 g_2}{g_3}$ benzerlik fonksiyonudur.

Önerme 4.4.3: M , 3-boyutlu Öklid uzayı E^3 de bir yüzey olsun.

$$f_0(u, v) = L - 2M + N$$

şeklinde tanımlanan $f_0 \in \mathcal{F}_{I,II}(M)$ fonksiyonu bir benzerlik fonksiyonudur. Burada L, M, N verilen yüzeyinin ikinci temel formunun elemanlarıdır.

Burada f_0 fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} f_0(u, v) = \frac{\det(r_u r_v r_{uu}) - 2 \det(r_u r_v r_{uv}) + \det(r_u r_v r_{vv})}{EG - F^2}$$

rasyonel fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyon yardımıyla rasyonel yüzeyler elde edilebilir.

Yüzeyin birinci temel formu ve ikinci temel formunun elemanları ile elde ettiğimiz $L, M, N, \frac{E}{L}, \frac{E}{M}, \frac{E}{N}, \frac{F}{L}, \frac{F}{M}, \frac{F}{N}, \frac{G}{L}, \frac{G}{M}, \frac{G}{N}$ fonksiyonları benzerlik fonksiyonlarıdır. Ayrıca, bir M yüzeyinin ortalama eğriliği ve Gauss eğriliği sırasıyla H ve K olmak üzere; $\frac{H}{K}, \frac{1}{H}$ fonksiyonları da benzerlik fonksiyonlarıdır.

Tanım 4.4.2: $M \subset E^3$ regüler bir yüzey ve $f \in \mathcal{F}_{I,II}$ bir benzerlik fonksiyonu olmak üzere;

$$\begin{aligned} r_{df}(u, v) &= r(u, v) + df(u, v)n_1(u, v) \\ &= r(u, v) + df(u, v)\frac{r_u \times r_v}{\sqrt{EG - F^2}} \quad d \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

r_{df} parametresi ile verilen M_{df} yüzeyi M yüzeyinin benzer çifti olarak adlandırılır (Georgiev 2012).

Sonuç 4.4.1: $M \subset E^3$ bir $r(u, v)$ parametrelendirmesine sahip rasyonel bir yüzey ve $f \in \mathcal{F}_{I,II}$ bir benzerlik fonksiyonu olsun. M yüzeyinin

$$r_{d0} = r(u, v) + df(u, v)n_1(u, v)$$

şeklinde tanımlanan benzer çifti rasyonel bir yüzeydir.

Örnek 4.4.1. E^3 3-boyutlu Öklid uzayında, $z = xy$ şeklinde verilen bir M yüzeyi alalım. M yüzeyinin benzer çifti olan yüzeyleri bulalım.

M yüzeyinin bir parametrelendirilmesi

$$r(u, v) = (u, v, uv)$$

dir. Yüzeyin birim normal vektörü

$$n = \left(\frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}, \frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} \right)$$

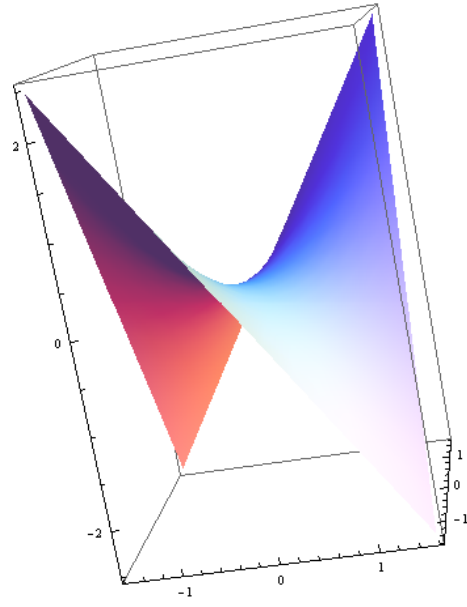
dir. Benzerlik fonksiyonu

$$\begin{aligned} f_0(u, v) &= L - 2M + N \\ &= -\frac{2}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} \end{aligned}$$

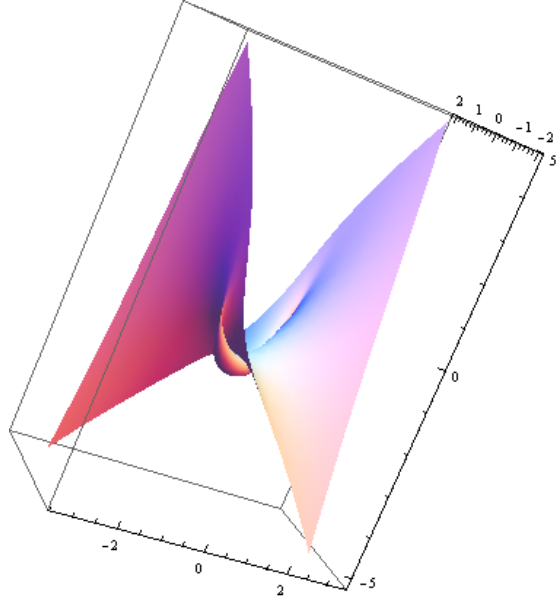
olarak bulunur. $d = 1$ için yüzeyin benzer çifti olan M_{d0} yüzeyi

$$\begin{aligned} r_{d0}(u, v) &= (u, v, uv) + 1 \cdot \frac{-2}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} (-v, -u, 1) \\ &= \left(\frac{u^3 + uv^2 + u + 2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{v^3 + u^2v + v + 2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^3v + uv^3 + uv - 2}{u^2 + v^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. M_{d0} yüzeyi rasyonel bir yüzeydir.



Şekil 4.3 M yüzeyi



Şekil 4.4 M yüzeyinin M_{d0} paralel yüzeyi

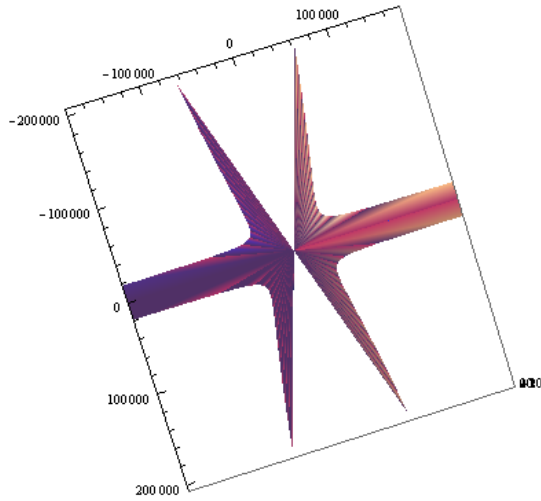
Ayrıca

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= \frac{1}{H} \\ &= \frac{(1 + u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{-uv} \end{aligned}$$

bir benzerlik fonksiyonudur. $d = 1$ için yüzeyin benzer çifti olan M_{d1} yüzeyi

$$\begin{aligned} r_{d1}(u, v) &= (u, v, uv) + 1 \cdot \frac{(1 + u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}{-uv} \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 + 1}} (-v, -u, 1) \\ &= \left(\frac{2u^2 + v^2 + 1}{u}, \frac{u^2 + 2v^2 + 1}{v}, \frac{u^2v^2 - u^2 - v^2 - 1}{uv} \right) \end{aligned}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.5 M yüzeyinin M_{d1} paralel yüzeyi

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Benzerlik geometrisi benzerlik dönüşümleri altında değişmez kalan özelliklerin incelenmesidir. Bu tezde eğriler ve yüzeyler benzerlik dönüşümleri altında iki kısımda incelenmiştir. Benzer üçgenler, benzer dörtgenler gibi kavramlar incelenmektedir. Benzer eğriler ve benzer yüzeyler ile ilgili çalışmalar ise oldukça yenidir. Bu bakımdan bu tez bu konuyu çalışanlar için önemli bir kaynak olacaktır.

KAYNAKLAR

- Encheva, R.P and Georgiev, G.H. 2009. Similar Frenet Curves, Result in Mathematics, Vol. 55, no. 3-4, pp. 359-372.
- Georgiev, G.H. 2012. Rational Generalized Offsets of Rational Surfaces, Mathematical Problems in Engineering, Article ID 618148, 15 p.
- Gokcelik, F., Kaya, S., Yayli, Y. and Ekmekci, F. N. 2014. Generalized Similar Frenet Curves, arXiv:1403.7908.
- Gray, A. 1993. Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces, CRS Press, Inc.
- Greub, W. (1967). Linear Algebra, 3rd ed., Springer Verlag, Heidelberg.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (2000). Diferensiyel Geometri, Cilt I, II. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, Ankara.
- Kalkan, Ö. (2002). Weingarten Yüzeyleri Üzerine, Doktora Tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Kühnel, W. (2006). Differential Geometry-Curves-Surfaces-Manifolds, 2nd ed., AMS, Providence, RI.
- Lopez, R. (2008). On Linear Weingarten Surfaces, International J. Math, 19, 439-448.
- Millman, R.S. (1977). Parker, G.D., Elements of Differential Geometry. Prentice Hall Inc, Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- Monterde, J. 2007. Curves with Constant Curvature Ratios, 13, arXiv:math/0412323v1.
- Munteanu, M.I. and Nistor A.I. (2009). A New Approach on Constant Angle Surfaces in E^3 , Turk J. Math. 33 , 169-178.
- Pottmann H. (1995). Rational Curves and Surfaces with Rational Offsets, Computer Aided Geometric Design, Vol. 12, no. 2, pp. 175-192.
- Sabuncuoğlu, A. (2001). Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınevi, Ankara.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Seher KAYA
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 17.06.1990
Medeni Hali : Bekar
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Aydınlikevler Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi (2008)
Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2012)
Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı (Eylül 2012 – Ağustos 2014)

Uluslararası Sempozyumlar

KMD 2014, International Mathematics Symposium,
Çankırı, Turkey, June 11-13, “Geometry of Similar Surfaces
in E^3 ” adlı çalışma sunulmuştur.

Ulusal Sempozyumlar

IX. Ankara Matematik Günleri, Atılım Üniversitesi, 12-13 Haziran 2014.

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

1. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2014 – ...)