

ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALKA TEORİSİNDE DRAZİN TERSİNİRLER

Serhat Emirhan SOYCAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2024

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HALKA TEORİSİNDE DRAZİN TERSİNİRLER

Serhat Emirhan SOYCAN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tuğçe ÇALCI

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm tezin girişidir. İkinci bölüm tez için gerekli olan temel kavramlara ayrılmıştır. Üçüncü bölümde Drazin tersinir ve genelleştirilmiş Drazin tersinir kavramları tanımlanmış ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölüm Jacobson ikilileri ve Drazin tersinirler için Jacobson lemması ile ilgilidir. Beşinci bölüm genelleştirilmiş Drazin tersinirler için Jacobson Lemması ve Cline Formülü ile ilgilidir. Altıncı bölümde Jacobson lemmasının Drazin ve genelleştirilmiş Drazin tersinirler için bazı genişlemeleri verilmiştir.

Haziran 2024, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: Drazin tersinir, genelleştirilmiş Drazin tersinir, pseudo tersinir, Cline formülü, Jacobson lemması

ABSTRACT

Master Thesis

DRAZIN INVERSES IN RING THEORY

Serhat Emirhan SOYCAN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tuğçe ÇALCI

This study consists of six chapters. The first chapter is the introduction of the thesis. Chapter two is about basic concepts which are necessary for the thesis. In the third chapter, the Drazin inverse and the generalized Drazin inverse are defined and some results of these are given. Chapter four deals with Jacobson's pairs and the Jacobson's Lemma for Drazin inverses. The fifth chapter is related to the Jacobson's Lemma and Cline's Formula for generalized Drazin inverses. In the sixth chapter, some extensions of the Jacobson's Lemma are given for Drazin and generalized Drazin inverses.

June 2024, 53 pages

Key Words: Drazin inverse, generalized Drazin inverse, pseudo invertible, Cline's Formula, Jacobson's Lemma

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesi sırasında bana bilgi ve tecrübeleriyle yol gösteren, tecrübelerini benimle paylaşan, ilgisini ve güler yüzünü benden esirgemeyen danışmanım, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Tuğçe Çalçı'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), çalışmalarında yardımlarını, fikir ve görüşlerini benimle paylaşan hocam, Sayın Prof. Dr. Abdullah HARMANCI'ya (Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), desteğini ve yardımlarını her zaman hissettiğim ve bu çalışmada da yardımlarını sakınmayan hocam, Sayın Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU'na (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Prof. Dr. Burcu ÜNGÖR'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), 2210 kodlu Yurt İçi Yüksek Lisans Burs Programı ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a ve bu süreçte beni maddi manevi destekleyen ve her zaman yanımda olan sevgili aileme gönülden teşekkür ederim.

Serhat Emirhan SOYCAN
Ankara, Haziran 2024

İÇİNDEKİLER

TEZ ONAY SAYFASI

ETİK.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1 Temel Kavramlar	3
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ TERSİNİR ELEMANLAR	7
3.1 Kuvvetli π -Düzenli Elemanlar.....	7
3.2 Pseudo-Tersinir Elemanlar	13
3.3 Genelleştirilmiş Drazin Tersinirler.....	18
4. DRAZİN TERSİNİRLER İÇİN JACOBSON LEMMASI	23
4.1 Drazin Tersinirler İçin Jacobson Lemması	23
5. GENELLEŞTİRİLMİŞ DRAZİN TERSİNİRLER İÇİN UYGULAMALAR.....	31
5.1 Jacobson Lemması ve Uygulamaları.....	31
5.2 Cline Formülü ve Uygulamaları	36
6. DRAZİN TERSİNİRLER İÇİN JACOBSON LEMMASININ GENİŞLEMELERİ	41
6.1 Drazin Tersinirler için Jacobson Lemmasının Genişlemeleri.....	41
7. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	50
KAYNAKLAR.....	51
ÖZGEÇMİŞ.....	53

SİMGELER DİZİNİ

a^d	a nın Drazin tersi
a^D	a nın genelleştirilmiş Drazin tersi
$a^\#$	a nın grup tersi
a^-	a nın iç genelleştirilmiş tersi
a'	a nın pseudo-tersi
$r_R(a)$	a nın R deki sağ sıfırlayanı
$l_R(a)$	a nın R deki sol sıfırlayanı
a^π	a nın spektral eşkaresi
$M_n(\mathbb{F})$	Bileşenleri $\mathbb{F}$ cisminden gelen $n \times n$ tipindeki matrislerin kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar Kümesi
$\text{Ker } f$	f nin çekirdeği
$\text{Im } f$	f nin görüntü kümesi
$\text{CFM}(\mathbb{F})$	$\mathbb{F}$ cismi üzerindeki sütun sonlu matrislerin halkası
R^d	R deki Drazin tersinir elemanların kümesi
R^-	R deki düzenli elemanların kümesi
R^D	R deki genelleştirilmiş Drazin tersinir elemanların kümesi
$R^\#$	R deki grup tersinir elemanların kümesi
$U(R)$	R deki tersinir elemanların kümesi
R^{nil}	R deki üstel sıfır elemanların kümesi
R^{qnil}	R deki yarı üstel sıfır elemanların kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi

1. GİRİŞ

Arens ve Kaplansky (1948) yılında "*Topologic representation of algebras*" isimli makalesinde cebirsel cebirlerin ve minimum şartına sahip halkaların genişlemeleri olarak iki tür halkayı incelemiştir. Bunlardan biri her a elemanı için $a^n x a^n = a^n$ olacak şekilde bir x elemanı ve pozitif bir n tamsayısı bulunan halkadır ve bu halka π -düzenli (π -regular) halka olarak isimlendirilir. Diğeri ise her a elemanı için $a^{n+1} x = a^n$ olacak şekilde bir x elemanı ve bir n pozitif tamsayısı bulunan halkadır. Bu halka sağ π düzenli(*right π -regular*) halka olarak isimlendirilir. Ardından Azumaya (1954) yılında "*Strongly π -Regular Rings*" isimli makalesinde bir R halkasında $a \in R$ için $a^2 x = a$ (ya da $x a^2 = a$) olacak şekilde bir $x \in R$ varsa a elemanına sağ (ya da sol) düzenli (*right (or left) regular*) adını vermiştir. Aynı makalede Azumaya bir $a \in R$ elemanı hem sağ hem de sol düzenli ise, o zaman a elemanına kuvvetli düzenli (*strongly regular*) adını vermiştir. Yine aynı makalede Azumaya $a \in R$ için eğer a nın herhangi bir kuvveti sağ (ya da sol) düzenli ise, o zaman a elemanına sağ (ya da sol) π -düzenli (*right (or left) π -regular*) adını vermiştir. Dahası eğer a hem sağ π -düzenli hem sol π -düzenli ise, o zaman a elemanına kuvvetli π -düzenli (*strongly π -regular*) adını vermiştir.

Drazin (1958) yılında, "*Pseudo-inverses in associative rings*" isimli makalesinde bir R halkasında $x \in R$ için $x^m = x^{m+1} c$ ve $c = c^2 x$ olacak şekilde $c \in \text{comm}(x)$ ve $m \in \mathbb{Z}^+$ varsa x elemanına pseudo-tersinir (*pseudo-invertible*) adını vermiştir. Burada $c \in R$ ye x in pseudo-terisi (*pseudo-inverse*) denilmiştir. Aynı makalede Azumaya'nın kuvvetli π -düzenli eleman tanımıyla pseudo-tersinir eleman arasındaki ilişkiyi incelemiş ve denk olduklarını göstermiştir.

Koliha (1995) yılında "*A Generalized Drazin Inverse*" isimli makalesinde bir R halkasında $a \in R$ için $ax = xa$, $ax^2 = x$, $a - a^2 x \in R^{nil}$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa a elemanına sonlu indeksli Drazin Tersinir (*finite index Drazin invertible*) adını vermiştir. Bu tanım Drazin'in pseudo-tersinir tanımıyla denktir. Yani pseudo-tersinir tanımına alternatif bir karakterizasyon ortaya konmuştur. Dahası Koliha aynı ma-

kalede bir R halkasında $a \in R$ için $ax = xa$, $x = ax^2$, $a - a^2x \in R^{nil}$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa a elemanına *Drazin tersinir* (*Drazin invertible*) adını vermiştir. Aslında Koliha Drazin'in tersinir tanımını genelleştirmiştir. Daha sonraları literatürde Drazin'in pseudo-tersinir tanımı Drazin tersinir, Koliha'nın tanımı genelleştirilmiş Drazin tersinir olarak isimlendirilmiştir.

Bu çalışmada *kuvvetli π -düzenli* (*strongly π -regular*), *Drazin tersinir* (*Drazin invertible*), *kutuplu* (*polar*) ve *pseudo-tersinir* (*pseudo-invertible*) tanımlarının denk oldukları gösterilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Daha sonra yarı kutuplu ve genelleştirilmiş Drazin tersinir tanımlarının denk oldukları gösterilmiştir. Cline formülü, Jacobson lemması ve genişlemeleri verilmiş. Drazin tersinir ve genelleştirilmiş Drazin tersinir elemanlar için Cline'ın formülü, Jacobson lemması ve genişlemelerinin uygulamaları çalışılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışmada kullanılan tanımlar ve önermeler verilmektedir.

2.1 Temel Kavramlar

Uyarı 2.1 Bu çalışma boyunca halkalar birimli alınmaktadır ve bir R halkasındaki tersinir elemanların kümesi $U(R)$ ile gösterilmektedir.

Tanım 2.1 R bir halka olsun. Eğer $e \in R$ için $e^2 = e$ sağlanıyor ise, o zaman e ye *eşkare* (*idempotent*) *eleman*; $e_1, e_2 \in R$ eşkare elemanlar olmak üzere eğer $e_1e_2 = 0 = e_2e_1$ ise, o zaman e_1 ve e_2 elemanlarına *dik eşkare* (*orthogonal idempotent*) denir.

Tanım 2.2 R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ için $a^n = 0$ olacak biçimde bir $n \in \mathbb{Z}^+$ varsa a ya *üstel sıfır* (*nilpotent*) *eleman* denir. Ayrıca R halkasındaki tüm üstel sıfır elemanların kümesi R^{nil} ile gösterilir.

Tanım 2.3 R bir halka olsun. $r_R(a) = \{x \in R : ax = 0\}$ şeklinde tanımlı kümeye a nın R deki *sağ sıfırlayanlarının* (*right annihilator*) kümesi denir. Benzer şekilde $l_R(a) = \{y \in R : ya = 0\}$ şeklinde tanımlı kümeye a nın R deki *sol sıfırlayanlarının kümesi* (*left annihilator*) denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.4 R bir halka olsun. O zaman $a \in R$ için

$$comm(a) = \{x \in R : ax = xa\}$$

ve

$$comm^2(a) = \{x \in R : \text{her } y \in comm(a) \text{ için } xy = yx\}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5 R bir halka olsun. Eğer $a \in R$ için $axa = a$ olacak şekilde $x \in R$ varsa, o zaman a ya *düzenli* (*regular*) *eleman* denir ve $x = a^-$ ile gösterilir. R nin her elemanı düzenli ise, o zaman R ye *düzenli* (*regular*) *halka* denir. Eğer R halkasının tüm düzenli elemanlarının oluşturduğu küme R^- ile gösterilir.

Tanım 2.6 R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer $1 - x$ in R de sol tersi varsa, x 'e *sol yarı düzenli* (*left quasiregular*), $1 - x$ in R de sağ tersi varsa x 'e *sağ yarı düzenli* (*right quasiregular*), $1 - x$ in R de sol ve sağ tersi varsa x 'e *yarı düzenli* (*quasiregular*) eleman denir (Anderson ve Fuller 1992).

Tanım 2.7 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer her $x \in comm(a)$ için $1 - xa \in U(R)$ ise, o zaman a ya *yarı üstel sıfır* (*quasinilpotent*) eleman denir. R halkasındaki tüm yarı üstel sıfır elemanların kümesi R^{qnil} ile gösterilir (Harte 1991).

Önerme 2.1 R bir halka, $a \in U(R)$ ve $b \in R^{qnil} \cap comm(a)$ olsun. Bu durumda $a + b \in U(R)$ dir.

İspat. $b \in R^{qnil}$ olduğundan her $x \in comm(b)$ için $1 + xb \in U(R)$ dir. $b \in comm(a)$ olduğundan $1 + ab \in U(R)$ dir ve buradan $a^{-1}(a + b) = 1 + a^{-1}b \in U(R)$ elde edilir. Sonuç olarak $(1 + a^{-1}b)^{-1}a^{-1}(a + b) = 1$ sağlanır. ■

Tanım 2.8 R bir halka olsun. R nin maksimal sağ ideallerinin kesişimine R nin *Jacobson radikali* denir ve $J(R)$ ile gösterilir.

Önerme 2.2 R bir halka olsun. O zaman aşağıda verilenler birbirine denktir.

- (1) R nin bütün maksimal sol (sağ) ideallerinin kesişimi
- (2) R deki bütün sol (sağ) ilkel ideallerin kesişimi
- (3) $\{x \in R : \text{her } r, s \in R \text{ için } rxs \text{ yarı düzenli}\}$
- (4) $\{x \in R : \text{her } r \in R \text{ için } rx \text{ yarı düzenli}\}$
- (5) $\{x \in R : \text{her } s \in R \text{ için } xs \text{ yarı düzenli}\}$
- (6) R deki bütün yarı düzenli sol (sağ) ideallerinin birleşimi
- (7) R nin bütün yarı düzenli ideallerinin birleşimi
- (8) R nin en geniş dar sol (sağ) ideali (Anderson ve Fuller 1992).

Aşağıda verilen sonuç literatürde Jacobson lemması olarak yer almakta ve çalışma boyunca sıklıkla kullanılmaktadır.

Lemma 2.1 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $1 - ab \in U(R)$ ise, o zaman $1 - ba \in U(R)$ dir. Burada $(1 - ba)^{-1} = 1 + b(1 - ab)^{-1}a$ dır.

İspat.

$$\begin{aligned}
(1 - ab)(1 - ab)^{-1} &= 1 \\
b(1 - ab)(1 - ab)^{-1}a &= ba \\
(b - bab)(1 - ab)^{-1}a &= ba \\
b(1 - ab)^{-1}a - bab(1 - ab)^{-1}a &= ba \\
(1 - ba)(b(1 - ab)^{-1}a) &= ba + 1 - 1 \\
(1 - ba)(b(1 - ab)^{-1}a + 1) &= 1. \blacksquare
\end{aligned}$$

Tanım 2.9 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer

$$xa^{k+1} = a^k, ax^2 = x, ax = xa$$

denklemlerini sağlayacak şekilde bir $x \in R$ ve bir $k \in \mathbb{N}^+$ varsa, o zaman a ya *Drazin tersinir* (*Drazin invertible*) denir. Böyle bir tek türlü x elemanı varsa, o zaman x e a nın *Drazin tersi* (*Drazin inverse*) denir ve a^d ile gösterilir. Eğer k bu denklemi sağlayan en küçük pozitif tamsayı ise, o zaman k ya a nın *Drazin indeksi* (*index*) denir ve $ind(a)$ ile gösterilir. Özel olarak eğer $ind(a) = 1$ ise, o zaman x e a nın *grup tersi* (*group inverse*) denir ve $a^\#$ ile gösterilir.

Teorem 2.1 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $xa^{k+1} = a^k$ ve $ax^2 = x$ olacak şekilde bir $x \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ varsa, o zaman aşağıdakiler sağlanır.

- (1) Her m pozitif tamsayısı için $ax = a^m x^m$ dir.
- (2) $xax = x$ dir.
- (3) Her $m \geq k$ pozitif tamsayısı için $a^m x^m a^m = a^m$ dir.
- (4) a Drazin tersinirdir ve $a^d = x^{k+1}a^k$ dir.

Lemma 2.2 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Bu durumda $a \in R^\#$ olması için gerek ve yeter şart $a \in a^2R \cap Ra^2$ olmasıdır. Dahası eğer $x, y \in R$ için $a = xa^2 = a^2y$ ise, o zaman $a^\# = xay = x^2a = ay^2$ dir (Hartwig ve Luh 1977).

Lemma 2.3 R bir halka ve $a \in R$ olsun. O zaman a nın Drazin tersinir olması için gerek ve yeter şart bir $k \geq 1$ tamsayısı için a^k nın grup tersinir olmasıdır. Dahası $a^d = a^{k-1}(a^k)^\# = (a^k)^\# a^{k-1}$ dir (Masic 2017).



3. HALKALARDA DRAZİN TERSİNİRLER

3.1 Kuvvetli π -Düzenli Elemanlar

Tanım 3.1 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer $axa = a$ olacak şekilde bir $x \in R$ varsa, o zaman a ya *düzenli* (*regular*) eleman denir. Eğer $a^2x = a$ (ya da $xa^2 = a$) olacak şekilde bir $x \in R$ varsa a ya *sağ* (ya da *sol*) *düzenli* (*left* (*or right*) *regular*) eleman denir. Dahası eğer a hem sağ hem sol düzenli ise, o zaman a ya *kuvvetli düzenli* (*strongly regular*) eleman denir (Azumaya 1954).

Lemma 3.1 R bir halka ve $a \in R$ bir kuvvetli düzenli eleman olsun. O zaman öyle tek türlü $z \in R$ vardır ki $az = za$, $a^2z(za^2) = a$ ve $az^2(z^2a) = a$ dır ve özel olarak a düzenlidir. $a^2x = a$ olacak şekilde her $x \in R$ için $z = ax^2$ elde edilir. Dahası $z \in comm^2(a)$ dır (Azumaya 1954).

İspat. (1) $a^2x = a$ ve $ya^2 = a$ olacak şekilde $x, y \in R$ olsun. O zaman

$$ax = ya^2x = ya$$

olur. Böylece

(2)

$$ax^2 = yax = y^2a$$

dir. Ayrıca (1) den

(3)

$$axa = ya^2 = a = a^2x = aya$$

elde edilir. Şimdi $z = ax^2$ yazılırsa, o zaman $az = aya = ax = ya = yaxa = za$, $a^2z = aza = axa = a$ ve $az^2 = yaz = yax = z$ elde edilir (Azumaya 1954).

Şimdi varsayalım ki $z' \in R$ z ile aynı eşitlikleri sağlasın. O zaman (2) deki x ile y yerine sırasıyla z ve z' yazılırsa, o zaman $z = az^2 = z'^2a = z'$ elde edilir ki bu da z nin tek türlü olduğunu gösterir.

İspatı tamamlamak için $ac = ca$ olacak şekilde bir $c \in R$ alınsın. O zaman $zac = zca = zca^2z = za^2cz = acz = caz$ elde edilir yani c , $az = za$ ile yer değiştirir.

Buradan $zc = z^2ac = zcza = zazc = czaz = cz$ olur ki bu da ispatı tamamlar. ■

Lemma 3.2 R bir halka ve $a, x \in R$ için $a^2x = a$ olacak şekilde a bir sağ düzenli eleman olsun. O zaman n bir pozitif tamsayı olmak üzere $r \leq n$ olacak şekilde bir r pozitif tamsayısı olsun.

$$(a - ax^n a^n)^r = a^r - ax^{n-r+1} a^n$$

dir ve $r = n + 1$ iken

$$(a - ax^n a^n)^r = 0$$

dır (Azumaya 1954).

İspat. İddianın $r = 1$ durumu için geçerli olduğu açık olduğundan r üzerine tümevarım yapılır. Farz edilsin ki $r \leq n$ ve iddia r için sağlansın. O zaman

$$(a - ax^n a^n)^r = a^r - ax^{n-r+1} a^n$$

dır. Eşitlik sağdan $a - ax^n a^n$ ile çarpılırsa ve $a^{n+1}x^n = a$ olduğu bilgisi kullanılırsa ki bu $a^2x = a$ olmasının açık bir sonucudur, buradan

$$(a - ax^n a^n)^{r+1} = a^{r+1} - a^{r+1}x^n a^n - ax^{n-r+1} a^{n+1} + ax^{n-r+1} a^{n+1}x^n a^n = a^{r+1} - a^{r+1}x^n a^n$$

elde edilir. Fakat $r < n$ iken

$a^{r+1}x^n = a^{r+1}x^r x^{n-r} = ax^{n-r}$ ve $r = n$ iken $a^{r+1}x^n = a^{n+1}x^n = a$ dır ki bu da tümevarımı tamamlar. ■

Tanım 3.2 R bir halka olsun. Eğer R deki bütün üstel sıfır elemanların üstel sıfırlık indeksi sınırlı ise, o zaman R ye *sınırlı indeksli (bounded index) halka* denir. Bu durumda tüm üstel sıfırlık indekslerinin en küçük üst sınırına R nın *indeksi (index)* denir (Kaplansky 1950).

Teorem 3.1 R bir sınırlı indeksli halka olsun. O zaman R deki her sağ düzenli eleman kuvvetli düzenlidir (Azumaya 1954).

İspat. R halkasının indeksi n ve $a, x \in R$ için $a^2x = a$ olacak şekilde bir sağ düzenli a elemanı olsun. O zaman Lemma 3.2 gereğince $(a - ax^n a^n)^{n+1} = 0$ dır.

Fakat R nin indeksi n olduğundan $(a - ax^n a^n)^n = 0$ olmalıdır. Diğer yandan Lemma 3.2 dolayısıyla $(a - ax^n a^n)^n = a^n - axa^n$ dir. Buradan $a^n - axa^n = 0$ elde edilir. Eğer Lemma 3.2 de n yerine $n + 1$ uygulanırsa, o zaman $(a - ax^{n+1} a^{n+1})^{n+1} = a^{n+1} - axa^{n+1} = a(a^n - axa^n) = 0$ dir. Buradan $(a - ax^{n+1} a^{n+1})^n = 0$ dır. Fakat yine Lemma 3.2 den $(a - ax^{n+1} a^{n+1})^n = a^n - ax^2 a^{n+1}$ dir. Böylece $a^n = ax^2 a^{n+1}$ elde edilir. Sağdan ax^n ile çarpılırsa ve $a^{n+1} x^n = a$ bağıntısı kullanılırsa $a = ax^2 a^2$ elde edilir ki bu da a nın sol düzenliliğini gösterir. ■

Teorem 3.2 R bir halka ve $a \in R$ bir sağ düzenli eleman olsun. O zaman a nın kuvvetli düzenli olması için gerek ve yeter şart $r_R(a^2) = r_R(a)$ olmasıdır (Azumaya 1954).

İspat. ($\Rightarrow$) $a \in R$ kuvvetli düzenli olsun. Yani $a^2 x = a$ ve $ya^2 = a$ olacak şekilde $x, y \in R$ var. $r_R(a) \subseteq r_R(a^2)$ olduğu açıktır. $b \in r_R(a^2)$ olsun yani $a^2 b = 0$. O zaman $ab = ya^2 b = 0$ olup $b \in r_R(a)$ dır. Böylece $r_R(a) = r_R(a^2)$ elde edilir.

($\Leftarrow$) a nın sağ düzenli bir eleman ve $r_R(a) = r_R(a^2)$ olsun. O zaman a sağ düzenli bir eleman olduğundan dolayı $a^2 R = aR$ dir. Şimdi $f : aR \rightarrow a^2 R$, $f(u) = au$ ile tanımlı f fonksiyonu göz önüne alınsın. $a^2 R = aR$ olduğundan f örtendir. Ayrıca $r_R(a) = r_R(a^2)$ olması $\ker f = \{0\}$ olmasını gerektirir. Böylece f bir izomorfizmadır. Şimdi $f^{-1} = g$ olsun. $f(a) = a^2$ olduğundan $g(a^2) = a$ dır. Böylece $g(g(a))a^2 = g(g(a^2))a = g(a)a = g(a^2) = a$ olup a sol düzenlidir. ■

von Neumann her elemanı düzenli olan bir R halkasını düzenli halka olarak tanımlamıştır ve Kaplansky 1948 yılında yayımladığı "*Topological Representation of Algebras*" isimli çalışmasında bir R halkasının her elemanı sağ düzenli ise, o zaman R ye kuvvetli düzenli halka adını vermiştir. Ayrıca aynı çalışmasında bir kuvvetli düzenli R halkasının her elemanının kuvvetli düzenli olduğunu göstermiştir. Kuvvetli düzenli halkalar sıfırdan farklı üstel sıfır eleman içermediğinden dolayı bu Teorem 3.1 in bir sonucudur.

Tanım 3.3 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a nın herhangi bir kuvveti düzenli ise, o zaman a ya π -düzenli eleman denir. Eğer a nın herhangi bir kuvveti sağ (ya da sol) düzenli ise, o zaman a ya sağ (ya da sol) π -düzenli (right (or left) π -regular) eleman denir. Ayrıca eğer a hem sağ π -düzenli hem de sol π -düzenli ise, o zaman a ya kuvvetli

π -düzenli (*strongly π -regular*) eleman denir (Azumaya 1954).

n bir doğal sayı olmak üzere a^n nin bir sağ düzenli eleman olması için gerek ve yeter şart $a^{n+1}x = a^n$ olacak şekilde bir $x \in R$ olmasıdır.

Lemma 3.3 R bir halka, $a, x, y \in R$ ve $n, m \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $a^{n+1}x = a^n$ ve $ya^{m+1} = a^m$ ise, o zaman $a^{m+1}x = a^m$ ve $ya^{n+1} = a^n$ dir (Azumaya 1954).

İspat. Eğer $m \geq n$ ise, o zaman $a^{n+1}x = a^n$ olduğundan $a^{m+1}x = a^m$ olduğu açıktır. Eğer $m < n$ ise, o zaman $a^m = ya^{m+1}$ olması $a^m = y^{n-m}a^n$ olmasını gerektirir. Buradan $a^{m+1}x = y^{n-m}a^{n+1}x = y^{n-m}a^n = a^m$ elde edilir. Benzer şekilde $ya^{n+1} = a^n$ olduğu gösterilir. ■

Teorem 3.3 R bir halka ve $a \in R$ bir kuvvetli π -düzenli eleman olsun. Eğer a^n sağ düzenli ise, o zaman a^n kuvvetli düzenlidir. Dahası öyle bir $z \in R$ vardır ki $az = za$ ve $a^{n+1}z = a^n$ dir (Azumaya 1954).

İspat. a^n nin kuvvetli düzenli olması Lemma 3.3 ün direkt bir sonucudur. Lemma 3.1 den $a^{2n}z = a^n$ ve $r \in comm^2(a^n)$ olacak şekilde bir $r \in R$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca $a \in comm(a^n)$ olduğundan $ra = ar$ dir. Böylece $a^{n-1}r = z$ alınırsa istenen z elde edilir. ■

Sonuç 3.1 Kuvvetli π -düzenli elemanlar π -düzenlidir (Azumaya 1954).

Tanım 3.4 R bir halka ve $a \in R$ bir kuvvetli π -düzenli eleman olsun. Bu durumda a^n sağ düzenli olacak şekildeki en küçük n pozitif tamsayısına a nın *kuvvetli π -düzenlilik indeksi* (*index of strongly π regular element*) denir (Azumaya 1954).

a kuvvetli π -düzenli ve a^n sağ düzenliyken a^n nin sol düzenli olduğu Lemma 3.3 ten açıktır. Ayrıca dikkat edilmelidir ki her üstel sıfır eleman aynı zamanda bir kuvvetli π -düzenli elemandır ve üstel sıfırlık indeksi ile kuvvetli π -düzenlilik indeksi aynı olur.

Lemma 3.4 a indeksi n olan bir kuvvetli π -düzenli ve $z \in R$ için $az = za$ ve $a^{n+1}z = a^n$ olsun. O zaman $a - a^2z$ indeksi n olan bir üstel sıfırdır (Azumaya 1954).

İspat. $az = za$ olduğundan $(a - a^2z)^n$ için binom açılımı uygulanabilir. Yani

$$(a - a^2z)^n = a^n - \binom{n}{1}a^{n+1}z + \binom{n}{2}a^{n+2}z^2 - \dots + (-1)^na^{2n}z^n$$

dir. Fakat aynı zamanda $a^{n+1}z = a^n$ olması $a^n = a^{n+2}z^2 = \dots = a^{2n}z^n$ olmasını gerektirir. Buradan

$$(a - a^2z)^n = a^n - \binom{n}{1}a^n + \binom{n}{2}a^n - \dots + (-1)^na^n = (a - a)^n = 0$$

Diğer yandan binom açılımından $(a - a^2z)^{n-1} = a^{n-1}a^nx$ olacak şekilde bir $x \neq 0$ vardır. Böylece $a - a^2z$ nin üstel sıfırlık indeksi n dir. ■

Aşağıdaki teorem, Teorem 3.1, Teorem 3.3 ve Lemma 3.4 ten elde edilir.

Teorem 3.4 R sınırlı indeksli (üstel sıfırlık indeksi) bir halka olsun. O zaman R deki her sağ π -düzenli eleman aynı zamanda indeksi R nin indeksini aşmayan bir kuvvetli π -düzenli elemandır (Azumaya 1954).

K bir cisim ve R de K üzerinde bir cebir olsun (sonlu boyutlu olmak zorunda değil). a R nin bir cebirsel elemanı ve $\mu(\lambda)$ a nın minimum polinomu olsun. Jacobson (1945) yılındaki "*Structure theory for algebraic algebras of bounded degree*" isimli çalışmasında a nın indeksini $\lambda^r \mu(\lambda)$ yı bölecek şekildeki en büyük r tamsayısı olarak tanımlar. Şimdi a kuvvetli π -düzenli bir eleman iken a nın Jacobson indeksi ile kuvvetli düzenlilik indeksi kıyaslansın. $\lambda^r, \mu(\lambda)$ yı tam bölsün. O zaman $\mu(\lambda) = \lambda^r + \alpha_1\lambda^{r+1} + \alpha_2\lambda^{r+2} + \dots$ ($\alpha_1, \alpha_2 \dots \in K$) formundadır. O zaman $\alpha_1\lambda\mu(\lambda) = \alpha_1\lambda^{r+1} + \alpha_1^2\lambda^{r+2} + \dots$, ve dolayısıyla $\nu(\lambda) = (\alpha_1^2 - \alpha_2)\lambda + \dots$ bir polinom iken $\mu(\lambda) - \alpha_1\lambda\mu(\lambda) = \lambda^r + (\alpha_2 - \alpha_1^2)\lambda^{r+2} + \dots = \lambda^r - \lambda^{r+1}\nu(\lambda)$ dir. $a, \mu(\lambda)$ nın bir sıfırı olduğundan $\mu(\lambda) - \alpha_1\lambda\mu(\lambda)$ nın da bir sıfırındır yani $a^r = a^{r+1}\nu(a)$ dir. Bu da a nın kuvvetli π -düzenli olduğunu gösterir. n a nın kuvvetli π -düzenlilik indeksi olsun. O zaman $n \leq r$ dir Dahası Lemma 3.3 ten $a^n = a^{n+1}\nu(a)$ dir yani $a \lambda^n - \lambda^{n+1}\nu(\lambda)$ polinomunun bir sıfırındır. $\mu(\lambda)$ a nın minimum polinomu olduğundan $\lambda^n - \lambda^{n+1}\nu(\lambda)$ polinomu $\mu(\lambda)$ ile bölünebilir olmalıdır ki bu da $n \leq r$ olmasını gerektirir. Buradan $n = r$ dir. Yani a nın kuvvetli π -düzenlilik indeksi ile Jacobson indeksi aynıdır.

R nin bir kuvvetli π -düzenli halka olmasının gerek ve yeter şartının R nin hem sağ

π -düzenli hem de sol π -düzenli halka olması olduğu açıktır. Dahası R nin kuvvetli π -düzenliliği R nin π -düzenliliğini gerektirir. Ancak karşıtının doğru olabilmesi için R nin sınırlı indeksli olması gerekmektedir.

Önerme 3.1 R bir halka olmak üzere $a \in R$ olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

- (1) a kuvvetli π -düzenlidir.
- (2) $a^n = fw = wf$ olacak şekilde f eşkaresi, u tersiniri ve $n \geq 1$ tamsayısı vardır.
- (3) a^m kuvvetli π -düzenli olacak şekilde bir $m \geq 1$ vardır (Nicholson 1999).

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) a bir kuvvetli π -düzenli eleman olsun. O zaman $a^{n+1}b = a^n$ ve $ab = ba$ olacak şekilde bir $b \in R$ ve $n \geq 1$ tamsayısı vardır. Dolayısıyla her $k \geq 1$ tamsayısı için $a^n = a^{n+k}b^k$ dir. Özel olarak $a^n = a^{2n}b^n = a^n b^n a^n$ dir. Böylece $f = a^n b^n = b^n a^n$ bir eşkairedir. $af = fa$ dır ve $a^n f = a^n$ dir. $c = b^n f$ olsun. O zaman $c \in fRf$ ve $a^n c = ca^n = f$ dir. Buradan $(a^n + (1 - f))(c + (1 - f)) = a^n c + a^n(1 - f) + (1 - f)c + (1 - f) = f + c - fc + 1 - f = 1$ olup $a^n + (1 - f) \in U(R)$ elde edilir. $w = a^n + (1 - f)$ ile gösterilir ise, o zaman $fw = wf = a^n f = a^n$ dir. (2) $\Rightarrow$ (3) $a^n = fw = wf$ olacak şekilde f eşkaresi, u tersiniri ve $n \geq 1$ tamsayısı olsun. O zaman $a^n w^{-1} a^n = f a^n = a^n$ ve $aw^{-1} = w^{-1}a$ dır. (3) $\Rightarrow$ (1) a^m kuvvetli π -düzenli olacak şekilde bir $m \geq 1$ olsun. O zaman a kuvvetli π -düzenlidir. ■

Teorem 3.5 R sınırlı indeksli bir halka olsun. O zaman aşağıdakiler denktir.

- (1) R bir π -düzenli halkadır.
- (2) R bir sağ π -düzenli halkadır.
- (3) R bir sol π -düzenli halkadır.
- (4) R bir kuvvetli π -düzenli halkadır (Azumaya 1954).

İspat. (2) $\Rightarrow$ (4) Teorem 3.5 in direkt bir sonucudur. Sağ-sol simetriden dolayı (3) $\Rightarrow$ (4) tür. O zaman sadece (1) $\Rightarrow$ (2) olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Diyelim ki R indeksi n olan bir π -düzenli halka ve $a \in R$ olsun. O zaman a^n π -düzenlidir. Yani bir $n' \geq 1$ için $a^{nn'}$ düzenlidir. $r = nn'$ denirse $r \geq n$ dir ve

$a^r x a^r = a^r$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. $a^r x = e$ yazılırsa e bir eşkaredir ve $eR = a^r R$ dir. Benzer şekilde a^{r+1} in π -düzenli olmasından dolayı $s > r$ ve $fR = a^s R$ olacak şekilde s tamsayısı ve f eşkaresi vardır. $a^s R \subseteq a^r R$ olduğundan fR, eR nin bir direkt toplanan sağ idealidir. Dolayısıyla $e = f_1 + g$ ve $f_1 R = fR (= a^s R)$ olacak şekilde f_1 ve g ortogonal eşkareleri vardır. Şimdi R nin bir ilkel ideali P olsun. Hipotezden dolayı artık halka sınıfı $\bar{R} = R/P$ en büyük derecesi n olan bir bölüm halkası üzerinde bir matris halkasıdır. $\bar{a} = a + P$ olsun ve $\bar{R} \supset \bar{a}\bar{R} \supset \bar{a}^2\bar{R} \supset \dots$ sağ ideal zinciri düşünülürse $\bar{R}$ basit halkasının derecesi ile $\bar{R}$ nin sağ ideallerinin kompozisyon uzunluğu aynı olduğundan $\bar{a}^n\bar{R} = \bar{a}^{n+1}\bar{R} = \dots$ dir ve özel olarak $\bar{a}^r\bar{R} = \bar{a}^s\bar{R}$ dir. O zaman $\bar{e}\bar{R} = \bar{f}_1^r\bar{R}$ iken $\bar{e}\bar{R} = \bar{a}^r\bar{R}$ ve $\bar{f}_1\bar{R} = \bar{a}^s\bar{R}$ dir. Diğer yandan $\bar{e} = \bar{f}_1 + \bar{g}$ dir ayrıca $\bar{f}_1$ ve $\bar{g}$ ortogonal eşkareler olduğundan $\bar{e}\bar{R} = \bar{f}_1\bar{R} \oplus \bar{g}\bar{R}$ buradan $\bar{g}\bar{R} = 0$ yani $g \in P$. Bu durum tüm ilkel idealler için geçerlidir yani g tüm ilkel ideallerin kesişiminin yani Jacobson radikalının bir elemanıdır. Eğer tek yarı-düzenli eşkare eleman 0 ise, o zaman $g = 0$ dir ve bu da gösterir ki $a^r R = a^{r+1} R$ iken $a^r R (= eR = f_1 R) = a^s R$ dir. İkinci eşitlikten a sağ düzenlidir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

3.2 Pseudo-Tersinir Elemanlar

Tanım 3.5 R bir halka ve $x \in R$ olsun. m bir pozitif tamsayı olmak üzere eğer

$$cx = xc, \quad x^{m+1}c = x^m, \quad c = c^2x$$

olacak şekilde bir $c \in R$ varsa, o zaman x e *pseudo-tersinir* (*pseudo-invertible*) eleman denir (Drazin 1958).

Teorem 3.6 R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer x in pseudo-tersi varsa, o zaman tektir ve x in pseudo tersi $comm^2(x)$ in elemanıdır (Drazin 1958).

İspat. R bir halka ve $x \in R$ pseudo-tersinir bir eleman olsun. Ayrıca

$c_1x = xc_1, \quad x^{m+1}c_1 = x^m, \quad c_1 = c_1^2x$ ve $c_2x = xc_2, \quad x^{n+1}c_2 = x^n, \quad c_2 = c_2^2x$ olacak şekilde $c_1, c_2 \in R$ elemanları x in pseudo-tersleri olsunlar. O zaman $k = \max(m, n)$ olmak üzere

$$c_1x^{k+1} = x^k = x^{k+1}c_2$$

ve

$$c_1 = c_1^2 x, \quad c_2 = x c_2^2$$

elde edilir. İkinci eşitlik her s tamsayısı için $c_1 = c_1^{s+1} x^s$ ve $c_2 = c_2^{s+1} x^s$ olmasını gerektirir. Özel olarak $s = k$ seçilirse $c_1 = c_1^{k+1} x^k$ ve $c_2 = c_2^{k+1} x^k$ elde edilir.

Buradan

$$c_1 = c_1^{k+1} x^k = c_1^{k+1} x^{k+1} c_2 = c_1 x c_2 = \dots = c_2$$

olur ve x in pseudo-tersinin tek olduğu elde edilir. x in pseudo-tersi c ile gösterilsin ve $xy = yx$ olacak şekilde $y \in R$ olsun. O zaman

$$cy = c^{k+1} x^k y = x^k y c^{m+1} = y c^{m+1} x^m = y c$$

dir. Yani $c \in comm^2(x)$ dir. ■

Teorem 3.6 gereği x in pseudo-tersi tek türlü olduğundan dolayı x in pseudo-tersi x' olarak gösterilebilir. $x \in U(R)$ iken $x^{-1} = x'$ olduğu açıktır.

Sonuç 3.2 R bir halka olsun. j bir tamsayı olmak üzere eğer $x_1, \dots, x_j, R$ nin $x_s x_t = 0$ ($s, t = 1 \dots j, s \neq t$) olacak şekilde pseudo-tersinir elemanları ise, o zaman $x_1 + \dots + x_j$ pseudo tersinirdir ve $(x_1 + \dots + x_j)' = x_1' + \dots + x_j'$ dir (Drazin 1958).

İspat. Genelliği bozmaksızın $j = 2$ olsun ve x_1 ve x_2 yerine sırasıyla u ve v yazılsın. Hipotezden $uv = vu = 0$ olduğu açıktır. Teorem 3.6 dan u, v, u' ve v' birbirleriyle yer değişirler ve hipotezden açıktır ki $uv = uv' = u'v = u'v' = vu = v'u = vu' = v'u' = 0$ dır. O zaman

$$(u' + v')(u + v) = (u + v)(u' + v')$$

ve

$$(u' + v')^2(u + v) = (u')^2 u + (v')^2 v = u + v$$

elde edilir ve m , $u^m = (u')^{m+1} u$ ve $v^m = (v')^{m+1} v$ olacak kadar büyük seçilirse;

$$(u + v)^{m+1}(u' + v') = u^{m+1} u' + v^{m+1} v' = u^m + v^m = (u + v)^m$$

elde edilir. ■

R bir halka ve $x \in R$ olsun. Eğer x pseudo-tersinir ise, o zaman $x^m = x^{m+1}x'$ şartını sağlayan en küçük m tamsayısına x in *pseudo indeksi* (*index*) denir ve $ind(x)$ ile gösterilir. Eğer x pseudo-tersinir değil ise, o zaman $ind(x) = \infty$ dur denir.

Teorem 3.7 R bir halka olmak üzere $x \in R$ pseudo-tersinir ve k bir pozitif tamsayı olsun. O zaman x^k pseudo-tersinirdir ve $(x^k)' = (x')^k$ dir. Ayrıca $0 \leq kq - ind(x) < k$ olacak şekilde $ind(x^k) = q$ tek türdür (Drazin 1958).

İspat. $xx' = x'x$ olduğundan $x^k(x')^k = (x')^k x^k$ dir. Ayrıca $x^{ind(x)} = x^{ind(x)+1}$ ve $(x')^2 = x'$ olduğundan $x^{ind(x)} = x^{ind(x)+j}(x')^j$ ($j = 1, 2, \dots$) dir. Böylece $ind(x) \leq kq$ olduğundan

$$(x^k)^q = x^{kq-ind(x)} x^{ind(x)} = x^{kq-ind(x)} x^{ind(x)+k} (x')^k = (x^k)^{q+1} (x')^k,$$

$$(x')^k = (x')^{k-1} (x')^{k+1} x^k = ((x')^k)^2 x^k$$

dir. Dolayısıyla $(x')^k$, $(x^k)'$ için şartları sağlar ve $ind(x^k) \leq q$ dur. Son olarak $ind(x^k) < q$ olması $(x^k)^{q-1} = (x^k)^q (x')^k$ olmasını gerektirir. $x' = x^{k-1} (x')^k$ olduğundan $x^{k(q-1)} = x^{kq-(k-1)} x' = x^{k(q-1)+1} x'$ elde edilir. $ind(x)$ in tanımından $ind(x) \leq k(q-1)$ dir ki bu da q nun seçimiyle çelişir. Dolayısıyla $q = ind(x^k)$ dir. ■

Teorem 3.8 R bir halka ve $x \in R$ pseudo-tersinir olsun. O zaman $ind(x') = 2$ dir ve $x'' = x^2 x'$ dir (Drazin 1958).

İspat. $x'(x^2 x') = (x^2 x')x'$ olduğu açıktır. Ayrıca $(x')^2(x^2 x') = (x')^3 x^2 = x'$ dir ve $(x^2 x')^2 x' = x^4 (x')^3 = x^2 x'$ dir ki bu da $x^2 x' = x''$ olması anlamına gelir. ■

Sonuç 3.3 R bir halka ve $x \in R$ bir pseudo-tersinir olsun. O zaman $x'' = x$ olması için gerek ve yeter şart $ind(x) = 1$ olmasıdır. Bu durumda herhangi bir $y \in R$ için $y \in comm(x)$ olması için gerek ve yeter şart $y \in comm(x')$ olmasıdır (Drazin 1958).

Sonuç 3.4 R bir halka ve $x \in R$ bir pseudo-tersinir olsun. O zaman her $ind(x) \leq k$ tamsayısı için $(x^k)'' = x^k$ dir (Drazin 1958).

Sonuç 3.5 R bir halka ve $x \in R$ bir pseudo-tersinir olsun. O zaman $x''' = x'$ dir (Drazin 1958).

Teorem 3.9 R bir halka ve $x \in R$ olsun. x in pseudo-tersinir olması için gerek ve yeter şart x in kuvvetli π -düzenli olmasıdır (Drazin 1958).

İspat. x in pseudo-tersinir olduğu durumda x in kuvvetli π -düzenli olduğu açıktır. Karşıt olarak x kuvvetli π -düzenli olsun. O zaman $x^{p+1}a = x^p$ ve $bx^{q+1} = x$ olacak şekilde $a, b \in R$ ve p, q pozitif tamsayıları vardır. $m = \max(p, q)$ ve $c = x^m a^{m+1}$ olsun. $m = \max(p, q)$ olduğundan $x^{m+1}a = x^m = bx^{m+1}$ dir yani $x^m a = bx^{m+1}a = bx^m$ dir. Buradan herhangi bir k pozitif tamsayısı için $x^m a^k = b^k x^m$ elde edilir yani $x^m a^{m+1} = c = b^{m+1} x^m$ dir. O zaman

$$xc = xx^m a^{m+1} = x^{m+1} a a^m = x^m a^m = b^m x^m = b^m b x^{m+1} = b^{m+1} x^m x = cx$$

dir. Ve $x^m = x^{m+k} a^k$ olduğundan

$$x^{m+1} c = x^{m+1} x^m a^{m+1} = x^{m+(m+1)} a^{m+1} = x^m$$

dir. Ayrıca

$$c^2 x = cxc = cx^{m+1} a^{m+1} = x^{m+1} ca^{m+1} = x^m a^{m+1} = c$$

dir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Daha genel olarak aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.10 Bir $a \in R$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (1) $p \in \text{comm}(a)$, $ap \in R^{nil}$ ve $a + p \in U(R)$ olacak şekilde $p^2 = p \in R$ vardır.
- (2) $p \in \text{comm}^2(a)$, $ap \in R^{nil}$ ve $a + p \in U(R)$ olacak şekilde $p^2 = p \in R$ vardır.
- (3) $b \in \text{comm}(a)$, $b = ab^2$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.
- (4) $b \in \text{comm}^2(a)$, $b = ab^2$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.
- (5) $b \in \text{comm}^2(a)$, $b = ab^2$ ve $a - a^2b \in R^{nil}$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.

(6) $b \in comm(a)$, $b = ab^2$ ve $a - a^2b \in R^{nil}$ olacak şekilde $b \in R$ vardır.

(7) $a^p = a^{p+1}x$ ve $a^q = ya^{q+1}$ olacak şekilde p, q pozitif tamsayıları ve $x, y \in R$ vardır.

(8) $b \in comm(a)$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır.

(9) $b \in comm^2(a)$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak şekilde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır (Çalcı 2014).

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) $ap \in R^{nil}$ olduğundan $(ap)^k = a^k p = 0$ olacak şekilde k pozitif tamsayısı vardır. $b = (a + p)^{-1}(1 - p)$ olsun. Bu durumda $ab = ba = 1 - p$ olur. Eğer $x \in comm(a)$ olarak alınırsa, $xp - pxp = (1 - p)xp = (1 - p)^k xp = b^k a^k xp = b^k x a^k p = 0$ olup $xp = pxp$ elde edilir. Benzer şekilde $px = pxp$ olduğu gösterilerek $p \in comm^2(a)$ bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (3) Eğer $b = (a + p)^{-1}(1 - p)$ olarak alınırsa, $b \in comm(a)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $ab^2 = a[(a + p)^{-1}(1 - p)]^2 = a(a + p)^{-2}(1 - p) = (a + p)(a + p)^{-2}(1 - p) = (a + p)^{-1}(1 - p) = b$ dir. Kabul gereğince $ap^k = a^k p = 0$ olacak şekilde pozitif bir k tamsayısı mevcut olup kolayca görülebileceği üzere $a^k = a^{k+1}b$ elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4) Kabulden dolayı $b \in comm(a)$, $b = ab^2$ ve $a^k = a^{k+1}b$ olacak biçimde bir $b \in R$ ve $k \in \mathbb{N}$ vardır. Dolayısıyla sadece $b \in comm^2(a)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için $xa = ax$ olacak şekilde bir $x \in R$ alınsın. Bu durumda $bx = b(ab)^k x = b^{k+1}a^k x = b^{k+1}xa^k = b^{k+1}xa^{k+1}b = (ba)^{k+1}xb = bxab$ ve $xb = x(ab^2) = xa^k b^{k+1} = a^k x b^{k+1} = a^{k+1}bx b^{k+1} = bxab = baxb$ elde edilir. Yani $bx = xb$ olup $b \in comm^2(a)$ dir.

(4) $\Rightarrow$ (5) Hipotezden dolayı $a^k = a^{k+1}b$ olup $(a - a^2b)^k = 0$ bulunur.

(5) $\Rightarrow$ (6) Açıktır.

(6) $\Rightarrow$ (7) Kabulden dolayı $a - a^2b \in R^{nil}$ olduğundan $(a - a^2b)^k = 0$ olacak şekilde bir k pozitif tamsayısı vardır. Bu durumda $a^k = a^{k+1}b$ ve $a^k = ba^{k+1}$ elde edilir ki bu istenendir.

(7) $\Rightarrow$ (8) $a^p = a^{p+1}x$ ve $a^q = ya^{q+1}$ olacak şekilde $x, y \in R$ ve $p, q \in \mathbb{Z}$ mevcut olsun. Eğer $m = \max\{p, q\}$ kabul edilip $b = a^m x^{m+1}$ alınırsa, $a^{m+1}x = a^m = ya^{m+1}$ ve $a^m x = ya^{m+1}x = ya^m$ sağlanır. Tümevarım prensibinden kolayca gösterilebilir ki $a^m x^k = y^k a^m$ ($k = 1, 2, \dots$) dir. Dikkat edilmelidir ki b tamsayısı aynı zamanda $b = y^{m+1}a^m$ olarak ifade edilebilir. Bu durumda $ab = aa^m x^{m+1} = a^{m+1}xx^m =$

$a^m x^m = y^m a^m = \dots = ba$ olup yine tümevarım prensibinden $a^m = a^{m+k} x^k$ elde edilir. Böylece $a^{m+1} b = a^{m+1} a^m x^{m+1} = a^{m+(m+1)} x^{m+1} = a^m$ sağlanır.

(8) $\Rightarrow$ (9) Hipotezden $ab = ba$ ve $a^k = a^{k+1} b$ olacak şekilde bir $b \in R$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $a^k = a^{k+1} b = a^{k+2} b^2 = a^{k+3} b^3 = \dots = a^{k+j} b^j$ ($j = 1, 2, \dots$) elde edilir. Eğer $c = a^k b^{k+1}$ alınrsa o zaman $a^k = a^{k+1} c$ olacağı açıktır. Yine $ac = a^{k+1} b^{k+1}$ ve $ca = a^k b^{k+1} a = a^{k+1} b^{k+1}$ olduğundan $ac = ca$ dır. Diğer taraftan $c \in comm^2(a)$ olduğu (3) $\Rightarrow$ (4) ispatına benzer olarak gösterilebilir.

(9) $\Rightarrow$ (1) Kabulden $b \in comm^2(a)$ ve $a^k = a^{k+1} b$ olacak biçimde $b \in R$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ mevcuttur. Eğer $c = a^k b^{k+1}$ denilirse, $b \in comm^2(a)$ olduğundan kolayca görülür ki $c \in comm^2(a)$ dır. Ayrıca $a^{k+1} c = a^k$ olduğu da açıktır. Diğer taraftan $c^2 a = cac = ca^{k+1} b^{k+1} = a^{k+1} c b^{k+1} = a^k b^{k+1} = c$ dir. Bu durumda $p = 1 - ac$ olsun. $ac^2 = c$ ve $c \in comm(a)$ olduğundan $p^2 = p \in comm(a)$ sağlanır. $a^k - a^{k+1} c = a^k(1 - ac) = a^k p = (ap)^k = 0$ olup $ap \in R^{nil}$ bulunur. Diğer taraftan $(a+p)(c+p) = 1+ap \in U(R)$ olup $a + p \in U(R)$ olma şartı da sağlanır. ■

Tanım 3.6 Teorem 3.10 daki denk şartlardan birini sağlayan $a \in R$ ye *kuvvetli π -düzenli* (*strongly π -regular*), *Drazin-tersinir* (*Drazin-invertible*), *pseudo-tersinir* (*pseudo-invertible*), *kutuplu* (*polar*) eleman denir. Teorem 3.10 deki (3), (4), (5) ve (6) denk şartlarından birini sağlayan b elemanına, a nın *Drazin tersi* (*Drazin inverse of a*) denir ve a^d ile gösterilir. Bu çalışmada genellikle Drazin tersinir kavramı kullanılmaktadır.

3.3 Genelleştirilmiş Drazin Tersinirler

Drazin ters halka teoride önemli bir araçtır. Refleksif olmamasına rağmen matris teoride, hesaplamalarda ve matrislerin çeşitli uygulamalarında çok kullanışlıdır. Drazin tersin sıfırdan farklı özdeğerleri verilen matrisin sıfırdan farklı özdeğerlerine karşılık gelir ve karşılık gelen matrislerin özvektörleri aynı derecedendir. Karmaşık Banach cebirindeki bir a elemanı için eğer a' a nın drazin tersi olsun. Eğer a' nin sıfırdan farklı spektrumları a nın sıfırdan farklı spektral noktalarına karşılık gelecek oluyorsa genellikle a' ye a nın spektral tersi denir. Örneğin matris tersi bir spektral terstir. Caradus 1978 yılında yayımladığı "*Generalized inverses and operator theory*", King 1977 yılında yayımladığı "*A note on Drazin inverses*" ve Lay 1975

yılında yayımladığı "*Spectral properties of generalized inverses of linear operators*" isimli çalışmalarında karmaşık Banach uzaylarındaki sınırlı lineer operatörlerin bağlamında Drazin tersini incelediler.

Bu bölümde R birimli bir halka olarak alınacaktır. İlk olarak Drazin tersinin denk tanımları verilecektir. R deki tersinir ve nilpotent elemanların kümeleri sırasıyla $U(R)$ ve R^{nil} ile gösterilecektir.

Lemma 3.5 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer

$$ab = ba, \quad b = ab^2, \quad a - a^2b \in R^{nil} \quad (3.1)$$

olacak şekilde bir $b \in R$ varsa, o zaman b ye a nın Drazin tersi denir. Tanımındaki a nın Drazin indeksi $ind(a)$ ile $a - a^2b$ nin üstel sıfırlık indeksi eşittir (Koliha 1995).

İspat. $ab = ba$ ve $b = ab^2$ olsun. O zaman $p = 1 - ab$ bir eşkaredir. Çünkü $(ab)^2 = a(ab^2) = ab$ olup ab eşkaredir. Buradan her k için

$$a^k - a^{k+1}b = a^k p = (ap)^k = (a(1 - ab))^k = (a - a^2b)^k$$

dir. ■

Harte (1991) yılında yayımladığı "*On quasinihpotents in rings*" isimli makalesinde herhangi bir R halkası için yarı üstel sıfır elemanı tanımlar.

Tanım 3.7 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer her $x \in comm(a)$ için $1 - xa$ tersinir ise, o zaman a ya *yarı üstel sıfır (quasinihpotent) eleman* denir. R deki üstel sıfır eleman elemanların kümesi R^{qnil} ile gösterilir (Harte 1991).

Tanım 3.8 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer

$$ab = ba, \quad b = ab^2, \quad a - a^2b \in R^{qnil} \quad (3.2)$$

olacak şekilde bir $b \in R$ varsa b ye a nın genelleştirilmiş Drazin tersi denir. $b = a^D$ ile gösterilir. a nın Drazin indeksi $ind(a)$ ile $a - a^2b$ nin üstel sıfırlık indeksi eşittir. Aksi takdirde $ind(a) = \infty$ dir (Koliha 1995).

Lemma 3.6 R bir halka ve $a \in R$ olsun. a nın genelleştirilmiş Drazin tersinin olması için gerek ve yeter şart

$$ap \in R^{qnil}, a + p \in U(R) \quad (3.3)$$

olacak şekilde bir $p \in comm(a)$ eşkaresi olmasıdır.

Burada a nın genelleştirilmiş Drazin tersi tek türdür ve

$$a^D = (a + p)^{-1}(e - p) \quad (3.4)$$

ile belirlidir (Koliha 1995).

İspat. Yukarıda verilen şartları sağlayan bir $p \in comm(a)$ eşkaresi olsun. b yi $b = (a + p)^{-1}(1 - p)$ olarak seçilsin. O zaman $ab = ba$,

$$ab = a(a + p)^{-1}(1 - p) = (a + p)(a + p)^{-1}(1 - p) = 1 - p$$

ve $ab^2 = (ab)b(1 - p)b = b(1 - p) = b$ dir. Sonuç olarak

$$a - a^2b = a(1 - ab) = ap \in R^{qnil}$$

dır.

Karşıt olarak b yukarıda verilen şartları sağlasın. $p = a - ab$ olarak seçilsin. $(ab)^2 = a(ab^2) = ab$ olduğundan dolayı p , a ile yer değiştiren bir eşkaredir ve $ap = a - ab^2 \in R^{qnil}$ dir. Dahası,

$$(a + p)(b + p) = ab + ap + pb + p = 1 + ap \in U(R)$$

Ayrıca $ap \in R^{qnil}$ olduğundan $a + p \in U(R)$ dir. $(a + p)b = 1 - p$ olduğundan $b = (a + p)^{-1}(e - p)$ dir. Bu da b nin tek türliliğini ispatlar. ■

Tanım 3.9 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer

$$p^2 = p, p \in comm^2(a), ap \in R^{qnil}, a + p \in U(R)$$

olacak şekilde bir $p \in R$ var ise, o zaman a ya *yarı kutuplu (quasipolar) eleman* denir

ve bu şartları sağlayan p elemanına a nın spektral eşkaresi (*spectral idempotent*) denir (Koliha ve Patricio 2002).

Önerme 3.2 R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer a yarı kutuplu ise, o zaman a nın spektral eşkare elemanı tek türdür ve a^π ile gösterilir (Koliha ve Patricio 2002).

İspat. $a \in R$ bir yarı kutuplu eleman, p ve q da a nın spektral eşkareleri olsunlar. O zaman

$$1 - (1 - p)q = 1 - (1 - p)(a + p)^{-1}(a + p)q = 1 - (1 - p)(a + p)^{-1}aq = 1 - b(aq)$$

dır. $p \in comm^2(a)$ olduğundan $b \in comm(aq)$ elde edilir. Böylece $aq \in R^{qnil}$ olduğundan $1 - b(aq) \in U(R)$ olur. O zaman

$$1 - (1 - p)q = 1 - (1 - p)^2q^2 = (1 - (1 - p)q)(1 + (1 - p)q).$$

dur. $1 - (1 - p)q$ tersinir olduğundan $(1 - p)q = 0$ yani $q = pq$ dur. Benzer şekilde $(1 - q)p \in U(R)$ ve $p = pq = qp$ dir. Böylece $p = q$ elde edilir ve dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.11 R bir halka ve $a \in R$ olsun. $a \in R$ nin genelleştirilmiş Drazin tersinir olması için gerek ve yeter şart a nın yarı kutuplu olmasıdır. Bu durumda a nın genelleştirilmiş Drazin tersi a^D

$$b = (a + a^\pi)^{-1}(1 - a^\pi) = (1 - a^\pi)(a + a^\pi)^{-1}$$

şeklinde tek türlü olarak belirlidir (Koliha ve Patricio 2002).

İspat. a bir yarı kutuplu eleman ve p de a nın spektral eşkaresi olsun. $b = (a + p)^{-1}(1 - p)$ olarak kabul edilsin. O zaman $b \in comm^2(a)$ dır. Dahası

$$ab^2 = a(1 - p)(a + p)^{-2} = (a + p)(1 - p)(a + p)^{-2} = (1 - p)(a + p)^{-1} = b,$$

ve

$$a^2b - a = a^2(1 - p)(a + p)^{-1} - a = a(a + p)(a + p)^{-1}(1 - p) - a = -ap \in R^{qnil}$$

dir. Karşıt olarak a genelleştirilmiş Drazin tersinir ve a nın genelleştirilmiş Drazin tersi b olsun. Eğer $p = 1 - ab$ olarak alınırsa, o zaman $p \in comm^2(a)$, $(1 - p)^2 = a^2b^2 = a(ab^2) = ab = 1 - p$ dir ki bu da $p^2 = p$ olmasını gerektirir. Son olarak $ap = a - a^2b \in R^{qnil}$ ve $bp = b(1 - ab) = b - ab^2 = 0$ olduğundan

$$(a + p)(b + p) = ab + ap + bp + p = 1 - p + ap + p = 1 + ap \in U(R)$$

dir. Böylece $(a + p)b = ab + pb = 1 - p + pb = 1 - p$ olduğundan $b = (a + p)^{-1}(1 - p)$ dir. Sonuç olarak b nin yazımı tek türdür. ■

4. DRAZİN TERSİNİRLER İÇİN JACOBSON LEMMASI

4.1 Drazin Tersinirler için Jacobson Lemması

R bir halka olsun. Eğer $1 - ab$ tersinir ise, o zaman $1 - ba$ da tersinirdir. Önermesi "*Jacobson lemması (Jacobson's lemma)*" olarak adlandırılır. Burada $(1 - ba)^{-1} = 1 + b(1 - ab)^{-1}a$ dır. Bu bölümde Jacobson lemması'nın Drazin tersinir elemanlar için uygulamaları ele alınmaktadır.

Lemma 4.1 R bir halka, $a, b \in R$, $\alpha = 1 - ab$, $\alpha \in R^d$, $ind(\alpha) = k$ ve $\beta = 1 - ba$ olsun. Eğer $e = 1 - \alpha\alpha^d$, $\varepsilon = bea$ ve $\gamma = 1 + b\alpha^d a$ ise, o zaman (A) $\beta^k \varepsilon = 0$, (B) $\varepsilon \gamma = \varepsilon$, (C) $\beta \gamma = \gamma \beta = 1 - \varepsilon$, (D) $\beta^{k+1} \gamma = \beta^k$ dir (Lam ve Nielsen 2014).

İspat. $\alpha^k = \alpha^{k+1} \alpha^d$ ve $e \alpha^d = (1 - \alpha \alpha^d) \alpha^d = 0$ olduğundan,

$$\beta^k \varepsilon = \beta^k bea = b \alpha^k (1 - \alpha \alpha^d) a = 0$$

$$\varepsilon \gamma = bea(1 + b\alpha^d a) = be(a + (1 - \alpha) \alpha^d a) = be(1 + (1 - \alpha) \alpha^d a) = be(e + \alpha^d a) = \varepsilon$$

$$\beta \gamma = \beta(1 + b\alpha^d a) = \beta + \beta b \alpha^d a = (1 - ba) + b \alpha \alpha^d a = 1 - b(1 - \alpha \alpha^d) a = 1 - bea = 1 - \varepsilon$$

ve

$$\gamma \beta = (1 + b\alpha^d a) \beta = (1 - ba) + b \alpha \alpha^d a = 1 - b(1 - \alpha \alpha^d) a = 1 - bea = 1 - \varepsilon$$

dir.

Son olarak $\beta^{k+1} \gamma = \beta^k (\beta \gamma) = \beta^k (1 - \varepsilon) = \beta^k$ dir. ■

Teorem 4.1 R bir halka, $a, b \in R$, $\alpha = 1 - ab$, $\alpha \in R^d$, $ind(\alpha) = k$, $\beta = 1 - ba$, $e = 1 - \alpha \alpha^d$, $\varepsilon = bea$ ve $\gamma = 1 + b\alpha^d a$ olsun. O zaman $\beta = 1 - ba \in R^d$ ve $ind(\beta) = k$ dır. Burada her bir $n \geq k$ için

$$\beta^n = (1 - bea)^n + b \alpha^n a$$

dır. Ayrıca her $n \geq k$ tamsayısı için $\beta\beta^d = (1 - bea)^n$ dır (Lam ve Nielsen 2014).

İspat. R bir halka, $a, b \in R$, $\alpha = 1 - ab$, $\alpha \in R^d$, $\text{ind}(\alpha) = k$ ve $\beta = 1 - ba$ olsun. Lemma 4.1 (C) ve (D) gereğince β kuvvetli π -düzenlidir. Teorem 3.9 dolayısıyla $\beta^d = \beta^n \gamma^{n+1}$ dir. Lemma 4.1 (C) gereğince

$$\begin{aligned}\beta^d &= (\beta\gamma)^n \gamma \\ &= (1 - \varepsilon)^n (1 + \gamma - 1) \\ &= (1 - \varepsilon)^n + (1 - \varepsilon)^n (\gamma - 1) = (1 - \varepsilon)^n + \gamma - 1 \\ &= (1 - \varepsilon)^n + b\alpha^d a\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi tekrar Lemma 4.1 (C) den

$$\beta\beta^d = \beta^{k+1} \gamma^{k+1} = (\beta\gamma)^{k+1} = (1 - \varepsilon)^{k+1} = (1 - bea)^k$$

olup ispat tamamlanır. ■

Teorem 4.2 R bir halka, $a, b \in R$, $\alpha = 1 - ab$, $\alpha \in R^d$, $\text{ind}(\alpha) = k$ ve $\beta = 1 - ba$ $e = 1 - \alpha\alpha^d$, $\varepsilon = bea$, $\gamma = 1 + b\alpha^d a$ ve $u = \alpha - e$ olsun. O zaman $u \in U(R)$ dir ve $r = 1 + \alpha + \dots + \alpha^{k-1}$ için β nın spektral eşkaresi $f = bera = -beu^{-1}a$ dır. Özel olarak $ReR = RfR$ dir (Lam ve Nielsen 2014).

İspat. $\delta = 1 - \varepsilon \in R$ olsun. Teorem 4.1 gösterir ki

$$f = 1 - \delta^k = (1 - \delta)(1 + \delta + \dots + \delta^{k-1}) = bea(1 + \delta + \dots + \delta^{k-1}) \quad (4.1)$$

dir. $e \in \text{comm}(ab)$ olduğundan, $a\delta = a - abea = (1 - eab)a$ dır. Bundan dolayı

$$ea\delta^i = e(1 - eab)^i a = (e - eab)^i a = e\alpha^i a \text{ (her } i \geq 0 \text{ için)} \quad (4.2)$$

4.1 ve 4.2 den $f = bera$ elde edilir. [Not edilsin ki, eğer $k = 0$ ise, o zaman $r = 0$ olarak yorumlanır.] Özel olarak $RfR \subseteq ReR$ dir. Benzer şekilde $RfR = ReR$ dir. Teoremin geri kalanı için, $u = \alpha - e \in U(R)$ olduğu iddia edilir. Şimdi α Drazin tersinir olduğundan kuvvetli π -düzenlidir. Önerme 3.1 gereği $\alpha^n = (1 - e)w = w(1 - e)$ olacak şekilde $w \in U(R)$ vardır. $v = \alpha^{n-1}w^{-1}(1 - e) - (1 + \alpha + \dots + \alpha^{n-1})e$ olsun. $1 - e = p$ yazılırsa $u = \alpha - e = \alpha p - (1 - \alpha)(1 - p)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
uv &= [\alpha p - (1 - \alpha)(1 - p)][\alpha^{n-1}w^{-1}(1 - e) - (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1})e] \\
&= \alpha^n w^{-1}p + (1 - \alpha)(1 + \alpha + \cdots + \alpha^{n-1})e \\
&= p + (1 - \alpha^n)(1 - p) \\
&= 1
\end{aligned}$$

dir. Böylece $u \in U(R)$ dir. Şimdi, $f = -beu^{-1}a$ olduğunu göstermek için $er = -eu^{-1}$ olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi

$$\begin{aligned}
eur &= e(\alpha - 1 + 1 - e)r \\
&= e(\alpha - 1)(1 + \alpha \cdots + \alpha^{k-1}) \\
&= e(\alpha^k - 1) = (e\alpha)^k - e
\end{aligned}$$

dir. $(e\alpha)^k = 0$ olduğundan $eur = -e$ elde edilir. $ur = ru$ olduğundan $er = eu^{-1}$ elde edilir. Böylece $f = bera = -beu^{-1}a$ dır. ■

$ind(\alpha) \leq 1$ için aşağıdaki sonuç, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 nin özel halidir.

Sonuç 4.1 R bir halka olmak üzere $a, b \in R$ olsun. Eğer $\alpha = 1 - ab \in R$ spektral eşkaresi e olan bir grup tersinir eleman ise, o zaman $\beta = 1 - ba$ da grup tersinirdir ve $\beta^d = 1 + b(\alpha^d - e)a$ dır ve β nın spektral eşkaresi $f = bea$ dır (Benzer şekilde $e = bfa$ elde edilir) (Lam ve Nielsen 2014).

α nın üstel sıfır olması durumu için aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.2 R bir halka olsun. $\alpha = 1 - ab \in R$ üstel sıfırlık indeksi k olan bir üstel sıfır olsun. O zaman

- (1) $\beta = 1 - ba$ indeksi k olan bir Drazin tersinirdir ve $\beta^d = \beta^k = \beta^{k+1} = \cdots$ dır. β nın spektral eşkaresi olan f için $RfR = R$ dir.
- (2) Eğer b sağ sıfır bölen değil ise, o zaman $\beta^k = 0$ dır.
- (3) Eğer R bir Dedekind-sonlu halka ise, o zaman β ile α benzerdir. Bu durumda β nın üstel sıfırlık indeksi k dır (Lam ve Nielsen 2014).

İspat.

(1) α nilpotent bir eleman ise, o zaman α Drazin tersinirdir ve $\alpha^d = 0$ dir. Dolayısıyla $e = 1 - \alpha\alpha^d = 1$ dir. Teorem 4.1 de $\alpha^d = 0$ yerleştirilir ise, o zaman $\beta^d = \beta^k$ elde edilir. Ayrıca $\beta^k b = b\alpha^k = 0$ olduğundan $\beta^{k+1} = \beta^k(1 - ba) = \beta^k - \beta^k ba = \beta^k$ elde edilir. Böylece $\beta^k = \beta^{k+1}$ dir.

(2) b sağ sıfır bölen olmasın. O zaman $\beta^k b = 0$ olması $\beta^k = 0$ olmasını gerektirir.

(3) R Dedekind-sonlu halka olsun. α üstel sıfır olduğundan $ab = 1 - \alpha \in U(R)$ dir. Dolayısıyla $b \in U(R)$ dir. Böylece $b\alpha b^{-1} = b(1 - ab)b^{-1} = 1 - ba = \beta$ olup α ile β benzerdir. Özel olarak β nın üstel sıfırlık indeksi k dir. ■

Uyarı 4.1 $k = 1$ olması durumunda $\alpha = 0$ dir yani $ab = 1$ dir. O zaman $(ba)^2 = ba$ dir ve $(1 - ba)^2 = 1 - ba$ dir. Fakat $ba = 1$ olmayabilir yani $\beta = 1 - ba = 0$ olmayabilir.

Burada Drazin tersinir α ve β ve onların spektral eşkareleri arasındaki ilişki üzerinde durulur. Bu ilişki $\beta b = b\alpha$ ve basit değişme kurallarının "formal genişlemesi"dir.

Teorem 4.3 R bir halka olmak üzere $\alpha = 1 - ab \in R$, $\beta = 1 - ba \in R$ Drazin tersinir elemanlar, e, f sırasıyla α ve β nın spektral eşkare elemanları olsunlar. O zaman $\beta^d b = b\alpha^d$, $(\beta^d)^d b = b(\alpha^d)^d$ ve $fb = be$ dir (Benzer şekilde $\alpha^d a = a\beta^d$, $\alpha^{dd} a = a\beta^{dd}$ ve $ea = af$ dir) (Lam ve Nielsen 2014).

İspat. $ind(\alpha) = k$ ve $\gamma = 1 + b\alpha^d a$ olsun. O zaman (A) $\gamma b = b(e + \alpha^d)$ ve (B) $\alpha^d = \alpha^k(e + \alpha^d)^{k+1}$ olduğunu iddia edilsin. (A) nın ispatı için $\gamma b = (1 + b\alpha^d a)b = b(1 + \alpha^d(1 - \alpha)) = b(e + \alpha^d)$ dir. (B) nin ispatı için $(\alpha(e + \alpha^d))^k = (\alpha e + (1 - e))^k = \alpha^k e + (1 - e)$ dir. O zaman $\alpha^k(e + \alpha^d)^{k+1} = \alpha^k(e + \alpha^d)^k(e + \alpha^d) = (\alpha^k e + (1 - e))(e + \alpha^d) = \alpha^k e + \alpha^d = \alpha^d$ dir. (A), (B) ve $\beta^d = \beta^k \gamma^{k+1}$ olduğundan

$$\beta^d b = \beta^k \gamma^{k+1} b = \beta^k b(e + \alpha^d)^{k+1} = b\alpha^k(e + \alpha^d)^{k+1} = b\alpha^d \quad (4.3)$$

dir. Buradan $be = b - b\alpha^d \alpha = b - \beta^d b\alpha = \beta^d \beta b = fb$ elde edilir. Son olarak $(\beta^d)^d = \beta^2 \beta^d$ olduğundan

$$(\beta^d)^d b = \beta^2 \beta^d b = \beta^2 b\alpha^d = b\alpha^2 \alpha^d = b(\alpha^d)^d$$

dir. ■

Dikkat edilsin ki daha yüksek mertebeden Drazin tersinirler için değişme kuralına bakmaya gerek yoktur. Çünkü α Drazin tersinir bir eleman ise, o zaman $((\alpha^d)^d)^d = \alpha^d$ dir.

Tanım 4.1 R bir halka ve $\alpha, \beta \in R$ olsun. Eğer $\alpha = 1 - ab$ ve $\beta = 1 - ba$ olacak şekilde $a, b \in R$ varsa, o zaman $(\alpha, \beta) \in R^2$ ye bir Jacobson ikilisi (Jacobson pair) denir. Bu durumda (β, α) da bir Jacobson ikilisidir. $r \in R$ için $(r, r) \in R^2$ her zaman bir Jacobson ikilisidir. Değişmeli halka durumunda tüm Jacobson ikilileri bu şekildedir (Lam ve Nielsen).

Örnek 4.1 R bir halka ve $e, f \in R$ eşkare elemanlar olsun. Eğer sağ R -modül olarak $eR \cong fR$ (denk olarak sol R -modül olarak $Re \cong Rf$) ise, o zaman bu eşkare elemanlar izomorftur denir ve $e \cong f$ ile gösterilir. Burada $e \cong f$ olması için gerek ve yeter şart $(1 - e, 1 - f)$ nin Jacobson ikilisi olmasıdır (Lam ve Nielsen).

İspat. $e \cong f$ olsun. O zaman tanım gereği sağ R -modül olarak $eR \cong fR$ dir.

$\alpha : eR \rightarrow fR$ bir izomorfizma olsun. O zaman $\alpha(e) = fr$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. $\alpha(e) = \alpha(e)e = fre = b$ olsun. Diğer yandan $\alpha^{-1} : fR \rightarrow eR$ bir izomorfizmadır. Dolayısıyla $\alpha^{-1}(f) = es$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. $\alpha^{-1}(f) = \alpha^{-1}(f)f = esf = a$ olsun. O zaman

$$f = \alpha(\alpha^{-1}(f)) = \alpha(esf) = \alpha(e)sf = fresf = bsf = besf = ba$$

dır. Ayrıca

$$e = \alpha^{-1}(\alpha(e)) = \alpha^{-1}(fre) = \alpha^{-1}(f)re = esfre = esffre = ab$$

dir. Yani $1 - e = 1 - ab$ ve $1 - f = 1 - ba$ olup $(1 - e, 1 - f)$ bir Jacobson ikilisidir. Diğer yön için $(1 - e, 1 - f)$ bir Jacobson ikilisi olsun. O zaman $e = ab$ ve $f = ba$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır. Eğer $\alpha : eR \rightarrow fR$, $\alpha(x) = b(x)$ olarak tanımlanır ise, o zaman α nın izomorfizma olduğu iddia edilir. Şimdi $y \in fR$ olsun. O zaman $y = fr$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. Burada $\alpha(ear) = bear = b(ab)ar = babar = ffr = fr$ olup α örtendir. Ayrıca $\ker \alpha = \{0\}$ olduğu açıktır. Böylece α bir izomorfizmadır. ■

Lemma 4.2 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. O zaman bir n doğal sayısı için $r = \sum_{i=0}^{n-1} (1 - ab)^i$ iken

$$(1 - ba)^n = 1 - bra \text{ ve } (1 - ab)^n = 1 - rab$$

dir (Castro vd. 2010).

Teorem 4.4 R bir halka olsun. Eğer $(\alpha, \beta) \in R^2$ Jacobson ikilisi ise, o zaman her $1 \leq n$ tamsayısı için (α^n, β^n) Jacobson ikilisidir. Ayrıca eğer α π -düzenli ise, o zaman β π -düzenlidir (Lam ve Nielsen 2014).

İspat. $\alpha = 1 - ab$ ve $\beta = 1 - ba$ olsun. O zaman $r = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} \in R$ iken Lemma 4.2 gereği $\alpha^n = 1 - (ra)b$ ve $\beta^n = 1 - b(ra)$ dır. Dolayısıyla $(\alpha^n, \beta^n) \in R^2$ bir Jacobson ikilisidir. Eğer α π -düzenli eleman ise, o zaman $1 \leq n$ için α^n düzenlidir. O zaman β^n düzenlidir. Böylece β π -düzenlidir. ■

Sonuç 4.3 R bir halka, $\alpha \in U(R)$ ve $\beta \in R$ olsun. Eğer (α, β) bir Jacobson ikilisi ise, o zaman her n tamsayısı için (α^n, β^n) bir Jacobson ikilisidir (Lam ve Nielsen 2014).

İspat. R bir halka ve $\alpha \in U(R)$ olsun. O zaman Lemma 2.1 gereği $\beta \in U(R)$ dir. Yani her $n \in \mathbb{Z}$ için (α^n, β^n) mevcuttur. Şimdi $\alpha = 1 - ab$ ve $\beta = 1 - ba$ olsun. Lemma 2.1 gereğince $\beta^{-1} = 1 + b(\alpha^{-1}a)$ ve $\alpha^{-1} = 1 + (a\beta^{-1})b$ dir. Fakat $\alpha a = a\beta$ olması $\alpha^{-1}a = \beta^{-1}a$ olmasını gerektirir yani $(\alpha^{-1}, \beta^{-1})$ bir Jacobson ikilisidir. Teorem 4.4 ten (α^n, β^n) bir Jacobson ikilisidir. ■

Teorem 4.5 R bir halka olmak üzere $(\alpha, \beta) \in R$ bir Jacobson ikilisi, α Drazin tersinir eleman, e, f sırasıyla α ve β nın spektral eşkareleri olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur (Lam ve Nielsen 2014).

- (1) e ve f aynı zamanda α^d ve β^d nün de spektral eşkareleridir ve $e \cong f$ dir.
- (2) Sırasıyla α ve β nın birleşmeli eşkareleri olan $1 - e$ ve $1 - f$ bir Jacobson ikilisi oluşturur.
- (3) (α^d, β^d) bir Jacobson ikilisidir.

- (4) $e + \alpha^d, f + \beta^d \in U(R)$ dir ve $(e + \alpha^d)^{-1} = e + \alpha^{dd}$ ve $(f + \beta^d)^{-1} = f + \beta^{dd}$ dir.
 Ve her $n > 0$ için

$$(e + (\alpha^d)^n, f + (\beta^d)^n) \text{ ve } (e + (\alpha^{dd})^n, f + (\beta^{dd})^n)$$

Jacobson ikilileridir.

İspat. (1) $\alpha^{dd} = \alpha^2 \alpha^d$ olduğundan α^d nin spektral eşkaresi

$$1 - \alpha^{dd} \alpha^d = 1 - (\alpha^2 \alpha^d) \alpha^d = 1 - \alpha(\alpha^d \alpha \alpha^d) = 1 - \alpha \alpha^d = e$$

dir. Benzer şekilde β^d nin spektral eşkaresi f dir. α ve β nın Drazin indeksleri k , $r = 1 + \alpha + \dots + \alpha^{k-1}$ ve $s = 1 + \beta + \dots + \beta^{k-1}$ olsun. Teorem 4.2 den $f = bea$ ve $e = afsb$ dir. $\alpha a = a\beta$ olduğundan dolayı $ra = as$ dir. Teorem 4.3 gereğince $ea = af$ dir. Dolayısıyla

$$f = be(ra) = be(as) = b(afs) \cong (afs)b = e$$

dir.

(2) Örnek 4.1 den $e \cong f$ olmasının $(1 - e, 1 - f)$ nin Jacobson ikilisi olmasını gerektirdiği açıktır. Fakat fikirlerin uyumunu göstermek için başka bir ispat daha sunulur. Teorem 4.1 den $1 - f = (1 - bea)^k$ ve benzer biçimde $(1 - e) = (1 - afb)^k$ dir. $ea = af$ olduğundan $(1 - bea, 1 - afb)$ bir Jacobson ikilisidir. Dolayısıyla Teorem 4.4 den $((1 - bea)^k, (1 - afb)^k) = (1 - f, 1 - e)$ bir Jacobson ikilisidir.

(3) Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 den

$$\beta^d = 1 - b(er - \alpha^d)a \text{ ve } \alpha^d = 1 - a(fs - \beta^d)b \quad (4.4)$$

elde edilir. Ayrıca $ra = as$, $\alpha^d a = a\beta^d$ ve $ea = af$ olduğundan

$$a_1 := (er - \alpha^d)a = e(as) - a\beta^d = a(fs - \beta^d) \quad (4.5)$$

olsun. O zaman 4.4 den $(\alpha^d, \beta^d) = (1 - ba_1, 1 - a_1b)$ olup bir Jacobson ikilisidir.

(4) $\gamma = 1 + b\alpha^d a$ olsun. $\alpha^d a = a\beta^d$ olduğundan

$$\gamma = 1 + b\alpha^d a = 1 + ba\beta^d = 1 + (1 - \beta)\beta^d = f + \beta^d \quad (4.6)$$

şeklinde ifade edilebilir. Şimdi

$$1 + (\alpha^d a)b = 1 + \alpha^d(1 - \alpha) = e + \alpha^d$$

olduğundan $(\gamma, e + \alpha^d) = (f + \beta^d, e + \alpha^d)$ bir Jacobson ikilisidir.

$(e + \alpha^{dd})(e + \alpha^d) = e + (\alpha\alpha^d) = e + (1 - e) = 1$ ve $(e + \alpha^{dd})(e + \alpha^d) = (e + \alpha^d)(e + \alpha^{dd})$ olduğundan $e + \alpha^d$ tersinirdir ve tersi $e + \alpha^{dd}$ dir. Benzer şekilde $f + \beta^d$ tersinirdir ve tersi $f + \beta^{dd}$ dir. Sonuç 4.3 gereğince her n tamsayısı için $((e + \alpha^d)^n, (f + \beta^d)^n)$ bir Jacobson ikisilidir. $e\alpha^d = \alpha^d e = 0$ olduğundan $n > 0$ için $(e + (\alpha^d)^n, f + (\beta^d)^n) = ((e + \alpha^d)^n, (f + \beta^d)^n)$ olup bir Jacobson ikilisidir. Benzer şekilde $(e + (\alpha^{dd})^n, f + (\beta^{dd})^n)$ da bir Jacobson ikilisidir. ■

Uyarı 4.2 Tabii ki de Teorem 4.3 ün direkt uygulaması ile (α, β) üzerinde başka Jacobson ikilileri elde edilebilir. Bazı örnekleri aşağıda verilmiştir.

$$(1 - a\alpha, 1 - a\beta), (1 - a\alpha^d, 1 - a\beta^d) (1 - ae, 1 - af)$$

Ancak bu Jacobson ikilileri daha az ilgi çekicidir çünkü bileşenleri Drazin tersinir değildir.

Uyarı 4.3 Genel olarak Teorem 4.5 in (2) sinde α ve β nın birleşmeli eşkareleri $1 - e$ ve $1 - f$ izomorf olmak zorunda değildir. Örneğin eğer $ab = 1 \neq ba$ olacak şekilde $a, b \in R$ ise, o zaman $\alpha = 1 - ab = 0$ olup birleşmeli eşkareye sahiptir ve birleşmeli eşkaresi 0 dır. Eğer $\beta = 1 - ba$ izomorfik bir birleşmeli eşkare elemana sahip ise, o zaman o da 0 olmalıdır. Böylece $f = 1$ elde edilir. Fakat Teorem 4.2 $f = bea = ba \neq 1$ olmasını gerektirir ki bu da bir çelişkidir (Lam ve Nielsen 2014).

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ DRAZİN TERSİNİRLER İÇİN UYGULAMALAR

5.1 Jacobson Lemması ve Uygulamaları

Bu bölümde Jacobson lemmasının ve Cline formülünün genelleştirilmiş Drazin tersinirler üzerindeki uygulamaları araştırılmaktadır.

Aşağıda konu için önemli bir teorem verilmektedir.

Teorem 5.1 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $\alpha = 1 - ab \in R^D$ ise, o zaman $\beta = 1 - ba \in R^D$ dir ve

$$\beta^D = 1 + b(1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1}(\alpha^D - \alpha^\pi)a = 1 + b[\alpha^D - \alpha^\pi(1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1}]a$$

ve

$$\beta^\pi = b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1}a$$

dır (Zhuang vd. 2012).

İspat. $p = \alpha^\pi$ olsun Teorem 3.11 gereğince $-\alpha p \in R^{qnil}$ dir. Dolayısıyla $1 - p\alpha \in U(R)$ dir. $q = bp(1 - p\alpha)^{-1}a$ olsun. Dikkat edilsin ki $\beta b = (1 - ba)b = b(1 - ab) = b\alpha$ ve $a\beta = \alpha a$ dir. O zaman

$$\beta q = b\alpha p(1 - p\alpha)^{-1}a = bp(1 - p\alpha)^{-1}\alpha a = q\beta$$

dır. Teorem 3.11 gereğince dolayı β nin spektral eşkaresinin q olduğunu göstermek yeterlidir.

$c = [p(1 - p\alpha)^{-1} - 1]a$ olsun. $ab = 1 - \alpha$ olduğundan

$$(1 - p\alpha)(1 + cb) = \alpha + p - p\alpha - p\alpha^2 = (1 - p\alpha)(\alpha + p)$$

elde edilir. Bu da $1 + cb$ nin tersinir olduğunu ispatlar. Jacobson lemması gereği

$1 + bc$ de tersinirdir. Buradan hareketle

$$\beta + q = 1 - ba + bp(1 - p\alpha)^{-1}a = 1 + bc \in U(R)$$

elde edilir.

$z(\beta q) = (\beta q)z$ olacak şekilde $z \in R$ olsun. O zaman

$$[b\alpha p(1 - p\alpha)^{-1}a]z = z[b\alpha p(1 - p\alpha)^{-1}a]$$

dır. Eşitliğin her iki tarafı da a ile soldan b ile sağdan çarpılırsa,

$$ab\alpha p(1 - p\alpha)^{-1}azb = azb\alpha p(1 - p\alpha)^{-1}ab$$

elde edilir. $abp = pab = p(1 - p\alpha)$ olduğundan

$$(\alpha p)(azb) = (azb)(\alpha p)$$

elde edilir ki bu da $(1 - p\alpha)^{-1}azb \in \text{comm}(\alpha p)$ olmasını gerektirir. $\alpha p \in R^{qnil}$ olduğundan

$$1 + [(1 - p\alpha)^{-1}azb](\alpha p) = 1 + [(1 - p\alpha)^{-1}az](b\alpha p) \in U(R)$$

dir. Jacobson lemması gereğince $1 + (\beta q)z = 1 + (b\alpha p)[(1 - p\alpha)^{-1}az] \in U(R)$ dir.

Böylece $\beta q \in R^{qnil}$ dir.

Dikkat edilsin ki $pab = p(1 - p\alpha)$ dır. O zaman

$$q^2 = b(1 - p\alpha)^{-1}pab(1 - p\alpha)^{-1}pa = b(1 - p\alpha)^{-1}pa = q$$

olup q bir eşkaredir. $\beta y = y\beta$ olacak şekilde $y \in R$ olsun. O zaman $(ba)y = y(ba)$ dır. Böylece

$$(ayb)\alpha = a(y\beta)b = a(\beta y)b = \alpha(ayb)$$

dir. Yani $ayb \in \text{comm}(\alpha)$ dir. $p \in \text{comm}^2(\alpha)$ olduğundan $ayb \in \text{comm}(p)$ dir ki bu

$ayb \in comm(p\alpha)$ olmasını gerektirir. Böylece $ayb \in comm(1 - p\alpha)$ dir. O zaman

$$(ayb)p(1 - p\alpha)^{-1} = p(1 - p\alpha)^{-1}(ayb)$$

dir. Son eşitliğin her iki tarafı da soldan b , sağdan a ile çarpılırsa

$$bayq = qyba$$

elde edilir. $bay = yba$ ve $\beta q = q\beta$ olduğu da düşünülürse

$$yq(1 - \beta) = (1 - \beta)yq = qy(1 - \beta) = (1 - \beta)qy$$

olduğu elde edilir. Buradan

$$yq(1 - \beta q) = qyq(1 - \beta q) \text{ ve } (1 - \beta q)qy = (1 - \beta q)qyq$$

elde edilir. $\beta q \in R^{qnil}$ olduğundan $1 - \beta q \in U(R)$ dir. Böylece

$$yq = qyq = qy$$

elde edilir ki bu da $q \in comm^2(\beta)$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla q β nın spektral eşkaresidir ve $\beta^D = (\beta + q)^{-1}(1 - q)$ olur. Ayrıca $\alpha + p = 1 + cb$ ve $\beta + q = 1 + bc$ olduğundan Jacobson lemması

$$(\beta + q)^{-1} = 1 - b(\alpha + p)^{-1}[p(1 - p\alpha)^{-1} - 1]a$$

olmasını gerektirir. O zaman

$$\begin{aligned} \beta^D &= (\beta + q)^{-1}(1 - q) \\ &= [1 - b(\alpha + p)^{-1}(p(1 - p\alpha)^{-1} - 1)a][1 - bp(1 - p\alpha)^{-1}a] \\ &= 1 - bp(1 - p\alpha)^{-1}a + b(\alpha + p)^{-1}(1 - p)(1 - p\alpha)^{-1}a \\ &= 1 + b(1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1}(\alpha^D - \alpha^\pi)a \\ &= 1 + b[\alpha^D - \alpha^\pi(1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1}]a \end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Eğer $ap \in R^{qnil}$ yerine $ap \in R^{nil}$ alınır ise, o zaman aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $1 - ab \in R^d$ ve $\text{ind}(1 - ab) = k$, o zaman $1 - ba \in R^d$ ve $\text{ind}(1 - ba) = k$ dir. Ayrıca

$$r = \sum_{i=0}^{k-1} (1 - ab)^i \quad \text{ve} \quad (1 - ab)^\pi = 1 - (1 - ab)(1 - ab)^d.$$

iken

$$(1 - ba)^d = 1 + b [(1 - ab)^d - (1 - ab)^\pi r] a$$

dir (González vd. 2010).

İspat. $\alpha = 1 - ab$, $\beta = 1 - ba$ ve $p = \alpha^\pi$ olsun. Teorem 5.1 gereğince, $\beta \in R^D$ ve $\beta^\pi = bp(1 - p\alpha)^{-1}a$. $q = \beta^\pi$ olsun. O zaman $\beta q = bp\alpha(1 - p\alpha)^{-1}a = q\beta$ olur. $abp = (1 - p\alpha)p$ ilişkisi kullanılarak

$$(\beta q)^n = b(1 - \alpha)^{n-1}(p\alpha)^n(1 - p\alpha)^{-n}a$$

sonucuna n üzerinden yapılan tümevarım ile ulaşılır. Hipoteze göre $(p\alpha)^k = 0$ dır, o zaman $(\beta q)^k = 0$ elde edilir ki bu da $\text{ind}(\beta) \leq k$ 'yı ifade eder. Yani,

$$\text{ind}(1 - ba) \leq \text{ind}(1 - ab)$$

dır. Benzer şekilde $\text{ind}(1 - ab) \leq \text{ind}(1 - ba)$ dır. Bu nedenle,

$$\text{ind}(1 - ba) = \text{ind}(1 - ab) = k$$

Sonucuna ulaşılır. α^d mevcut olduğundan, $\alpha^D = \alpha^d$ dir. Ayrıca,

$$\alpha^D - \alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1} = \alpha^d - p \sum_{i=0}^{k-1} (p\alpha)^i = (1 - ab)^d - (1 - ab)^\pi r$$

olup burada

$$r = \sum_{i=0}^{k-1} (1 - ab)^i$$

şeklinde tanımlanır. ■

Yukarıda verilen sonuçta eğer $k = 1$ alınır ise, o zaman grup tersinirler için bir sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2 $a, b \in R$ olsun. Eğer $1 - ab \in R^\#$ ise, o zaman $1 - ba \in R^\#$ dır ve

$$(1 - ba)^\# = 1 + b[(1 - ab)^\# - (1 - ab)^\pi] a,$$

dır. Burada $(1 - ab)^\pi = 1 - (1 - ab)^\#(1 - ab)$ şeklindedir (González vd. 2010).

Sonuç 5.3 R bir halka, $a \in R$ düzenli bir eleman ve a nın iç tersi a^- olsun. Eğer $a^2a^- + 1 - aa^-$, $a^-a^2 + 1 - a^-a$, $a + 1 - aa^-$ ve $a + 1 - a^-a$ elemanlarından biri R^D nin bir elemanı ise, o zaman hepsi R^D nin elemanıdır (Zhuang vd. 2012).

İspat. $c = 1 - a$, $d = aa^-$, $e = a$, $f = a^- - aa^-$ ve $g = a^-a$ olsun. Bu durumda aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$a^2a^- + 1 - aa^- = 1 - cd = 1 - ef;$$

$$a^-a^2 + 1 - a^-a = 1 - gc;$$

$$a + 1 - a^-a = 1 - fe = 1 - cg;$$

$$a + 1 - aa^- = 1 - dc.$$

Teorem 5.1 gereğince, $1 - xy$ nin genelleştirilmiş Drazin tersinir olması için gerek ve yeter şart $1 - yx$ in genelleştirilmiş Drazin tersinir olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 5.1 ve Sonuç 5.3 gereğince aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.4 R bir halka olmak üzere $a \in R^-$ ve a nın iç tersi a^- olsun. O zaman $a^2a^- + 1 - aa^-$, $a^-a^2 + 1 - a^-a$, $a + 1 - aa^-$ ve $a + 1 - a^-a$ elemanlarının indeksleri eşittir (Zhuang vd. 2012).

5.2 Cline'in Formülü ve Uygulamaları

Aşağıda genelleştirilmiş Drazin tersinirler için Cline'in Formülü'nün uygulaması verilir.

Teorem 5.2 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer ab genelleştirilmiş Drazin tersinir ise, o zaman ba genelleştirilmiş Drazin tersinirdir ve

$$(ba)^D = b(ab)^D a$$

dır (Liao vd. 2014).

İspat.

$\alpha = ab$, $\beta = ba$, $p = 1 - \alpha^D \alpha$ ve $q = 1 - b\alpha^D a$ olsun. Öyleyse $p \in \text{comm}^2(\alpha)$, $\alpha + p \in U(R)$ ve $\alpha p \in R^{qnil}$ dir. Devamında

$$(1) \beta + q \in U(R),$$

$$(2) \beta q \in R^{qnil} \text{ ve}$$

$$(3) q^2 = q \in \text{comm}^2(\beta) \text{ olduğu kanıtlanır.}$$

(1) $1 + (a - \alpha^D a)b = \alpha + (1 - \alpha^D a) = \alpha + p \in U(R)$ elde edilir. Jacobson lemmasına göre,

$$\beta + q = \beta + (1 - b\alpha^D a) = 1 + b(a - \alpha^D a) \in U(R) \text{ dir.}$$

(2) yi kanıtlamak için, $c = \beta q$ olarak yazılsın. O zaman

$$c = ba(1 - b\alpha^D a) = ba - bab\alpha^D a = b(1 - \alpha\alpha^D a) = bpa \text{ elde edilir. } z \in R \text{ için } cz = zc$$

olduğu varsayılınsın. Bir sonraki adımda, $1 - zc \in U(R)$ olduğu gösterilmektedir.

$cz = zc$ olduğundan, $cz^2 = z^2c$, yani $bpa z^2 = z^2 bpa$ elde edilir. Bu denklem sol taraftan a ile, sağ taraftan ise b ile çarpılırsa, o zaman

$$\alpha p(az^2b) = abpa z^2b = az^2bpab = (az^2b)\alpha p \text{ olur. Bu yolla } az^2b \in \text{comm}(\alpha p) \text{ elde}$$

edilir. $\alpha p \in R^{qnil}$ olduğundan, $1 - \alpha p(az^2b) = 1 - (\alpha pa)(z^2b) \in U(R)$ dir. Jacobson lemması gereği $1 - (z^2b)\alpha pa$ tersinirdir. $c^2 = bpabpa = bp\alpha pa = b\alpha pa$ ve $cz = zc$ olduğundan, şu sonuca varılır:

$$(1 - zc)(1 + zc) = (1 + zc)(1 - zc) = 1 - z^2c^2 \in U(R) \text{ dir.}$$

Dolayısıyla, $1 - zc \in U(R)$ dir.

Şimdi (3) ü göstermek için, öncelikle q nun bir eşkare olduğu kanıtlanır. Gerçekten de,

$$q^2 = (1 - b\alpha^D a)(1 - b\alpha^D a) = 1 - 2b\alpha^D a + b\alpha^D a\alpha^D a = 1 - b\alpha^D a = q \text{ dir. Ayrıca}$$

$$\beta q = ba(1 - b\alpha^D a) = ba - bab\alpha^D a = ba - b\alpha^D aba = (1 - b\alpha^D a)\beta = q\beta \quad (5.1)$$

dir.

Şimdi $y \in R$ olacak şekilde $y\beta = \beta y$ olduğu düşünölsün, o zaman $y(ba) = (ba)y$ dir.

Daha sonra bu denklemi soldan a ile, sağdan ise b ile çarparak, $(ayb)ab = ab(ayb)$ olduğu elde edilir. Böylece $ayb \in \text{comm}(\alpha)$ dir. $\alpha^D \in \text{comm}^2(\alpha)$ olduğundan, $ayb \in \text{comm}(\alpha^D)$ dir. Bundan dolayı $ayb \in \text{comm}(\alpha^D - (\alpha^D)^2)$, yani

$$ayb(\alpha^D - (\alpha^D)^2) = (\alpha^D - (\alpha^D)^2)ayb \text{ dir. O zaman } y(ba) = (ba)y \text{ olduğundan}$$

$$bayb(\alpha^D - (\alpha^D)^2)a = ybab(\alpha^D - (\alpha^D)^2)a = yb\alpha(\alpha^D - (\alpha^D)^2)a = yb\alpha\alpha^D a - yb\alpha^D a$$

ve

$$b(\alpha^D - (\alpha^D)^2)ayba = b(\alpha^D - (\alpha^D)^2)abay = b(\alpha^D - (\alpha^D)^2)\alpha ay = b\alpha^D \alpha ay - b\alpha^D ay$$

elde edilir.

Bundan dolayı,

$$yb\alpha\alpha^D a - yb\alpha^D a = b\alpha^D \alpha ay - b\alpha^D ay \text{ dir.}$$

$y(ba) = (ba)y$ olduğu göz önünde bulundurulursa bir hesaplama sonucunda

$$yq - y\beta q = qy - \beta qy \text{ elde edilir.}$$

Bu sonuç, denklem (5.1) ve $y(ba) = (ba)y$ olduğu düşünölsün

$$(1 - \beta q)yq(1 - \beta q) = (1 - \beta q)qy(1 - \beta q) \text{ elde edilir.}$$

(2) ye göre, $\beta q \in R^{qnil}$ dir. Bu nedenle $1 - \beta q \in U(R)$ 'dir. Dolayısıyla, $yq = qy$ olur ve bu da (3) ü gösterir.

Bu nedenle, $\beta = ba$ bir genelleştirilmiş Drazin tersine sahiptir ve

$$(ba)^D = \beta^D = (\beta + q)^{-1}(1 - q) \text{ dir.}$$

Dahası $t = a - \alpha^D a$ için

$1 + tb = \alpha + p$ ve $1 + bt = \beta + q$ olduğu elde edilir. Bu nedenle

$$(\beta + q)^{-1} = (1 + bt)^{-1} = 1 - b(1 + tb)^{-1}t = 1 - b(\alpha + p)^{-1}t \text{ dir.}$$

$$\alpha^D = (\alpha + p)^{-1}(1 - p) = (\alpha + p)^{-1}\alpha\alpha^D \text{ olduğundan}$$

$$(ba)^D = (\beta + q)^{-1}(1 - q) = [1 - b(\alpha + p)^{-1}t]b\alpha^D a = b\alpha^D a - b(\alpha + p)^{-1}\alpha\alpha^D a + b(\alpha +$$

$p)^{-1}\alpha^D\alpha\alpha^D a = b(\alpha^D)^2 a = b((ab)^D)^2 a$ dır ki bu ispatı tamamlar. ■

Sonuç 5.5 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer ab Drazin tersinir ve $\text{ind}(ab) = k$ ise, o zaman ba Drazin tersinirdir ve $k - 1 \leq \text{ind}(ba) \leq k + 1$ dir (Liao vd. 2014).

İspat. $c = b((ab)^D)^2 a$ olarak tanımlansın. Teorem 5.2 gereğince, ba genelleştirilmiş Drazin tersi olup $(ba)^D = c$ dir. Varsayım gereği, $(ab)^k = (ab)^{k+1}(ab)^D$ olduğu için

$$[ba - (ba)^2 c]^{k+1} = b[(ab)^k - (ab)^{k+1}(ab)^D] a = 0$$

elde edilir. Bu nedenle $ba - (ba)^2 c \in R^{nil}$ dir. Dolayısıyla $(ba)^D = c = b((ab)^D)^2 a$ dir. Yukarıdaki argümandan dolayı ayrıca

$$\text{ind}(ba) \leq k + 1 = \text{ind}(ab) + 1$$

dir. Benzer şekilde $\text{ind}(ab) \leq \text{ind}(ba) + 1$ elde edilir. Dolayısıyla, $\text{ind}(ba) \geq k - 1$ dir ve bu ispatı tamamlar. ■

Sonuç 5.6 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer ab grup tersinir ise, o zaman aşağıdakilerden biri sağlanır.

- (1) ba tersinirdir.
- (2) ba grup tersinirdir ve $(ba)^\# = b((ab)^\#)^2 a$ dir.
- (3) ba Drazin tersinirdir, $\text{ind}(ba) = 2$ dir ve $(ba)^D = b((ab)^\#)^2 a$ dir (Liao vd. 2014).

Uyarı 5.1 (1) $a, b \in R$ için, ab tersinir iken ba mutlaka tersinir olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathbb{N}$ kümesi pozitif tamsayıları $\mathbb{R}$ ise gerçel sayıları temsil etsin. $R = CFM_{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ ile $\mathbb{R}$ üzerindeki sütun sınırlı $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ matrislerinin halkasını gösterebiliriz. E_{ij} , R içindeki bir eleman olup, (i, j) -girdisi 1 ve diğer yerlerde 0 dir. Aşağıdaki matrisler ele alınsın:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} E_{i(i+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in R,$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} E_{(i+1)i} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in R.$$

Bu durumda AB birimi oluşturur ancak BA çarpımından birim matris elde edilmez çünkü ilk satırı sıfır vektörüdür. Ancak, bu durumda BA grup tersinirdir ve $(BA)^{\#} = B(AB)^{-2}A$ 'dır. (Bu ab ve ba nın indekslerinin eşit olmadığını gösterir.)

m ve n pozitif tamsayıları için $R_{m \times n}$, R halkası üzerindeki tüm $m \times n$ matrislerinin kümesi ve $k = m + n$ olarak belirlensin. $A \in R_{m \times n}$ ve $B \in R_{n \times m}$ olan matrisler verildiğinde, iki $k \times k$ matris C ve D aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Gözlemlenir ki:

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix}, \quad DC = \begin{pmatrix} BA & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Çünkü CD ve DC aynı halka olan $R_{k \times k}$ içindedir, Teorem 5.2, aşağıdaki sonucu vermek için uygulanır: Eğer CD genelleştirilmiş Drazin tersinir ise, o zaman DC genelleştirilmiş Drazin tersinirdir ve Cline'in formülü geçerli olup

$$(DC)^D = D((CD)^D)^2 C$$

dir. Bu, dikdörtgen matrisler için Cline'in formülüne yol açar.

Sonuç 5.7 $A \in R_{m \times n}$ ve $B \in R_{n \times m}$ olsun. Eğer $AB \in R_{m \times m}$ genelleştirilmiş Drazin tersinir ise, o zaman $BA \in R_{n \times n}$ de öyledir ve aşağıdaki formül geçerlidir:

$$(BA)^D = B((AB)^D)^2 A$$

(Liao vd. 2014).

İspat. $k = m + n$ olarak yazılsın. Herhangi bir $T \in R_{m \times m}$ nin genelleştirilmiş Drazin

tersinir olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R_{k \times k}$$

nin genelleştirilmiş Drazin tersinir olmasıdır. Burada

$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} T^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

dır. Benzer şekilde, $S \in R_{n \times n}$ nin genelleştirilmiş Drazin tersinir olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \in R_{k \times k}$$

nın genelleştirilmiş Drazin tersinir olmasıdır. Burada

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}^D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S^d \end{pmatrix}.$$

dir. C ve D matrisleri (5.2) deki şekilde tanımlansın. Yukarıdaki argüman için

$S = AB$ ve $T = BA$ olarak yazılır ve (5.3) uygulanırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\begin{pmatrix} (BA)^D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (DC)^D = D((CD)^D)^2 C = \begin{pmatrix} B((AB)^D)^2 A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Böylece ispat tamamlanır. ■

6. DRAZİN TERSİNİRLER İÇİN JACOBSON LEMMASININ GENİŞ- LEMELERİ

6.1 Drazin Tersinirler için Jacobson Lemmasının Genişlemeleri

Yan ve Fang 2015 yılında yayımladıkları "*Common properties of the operator products in local spectral theory*" isimli makalede sınırlı lineer operatörler ve Banach uzayı arasında Jacobson lemmasının yeni bir genişlemesini çalışmıştır: R bir halka $a, b, c, d \in R$, $acd = dbd$ ve $dba = aca$ olsun. Burada açıktır ki $d = a$ alınırsa $aba = aca$ dır.

Dikkat edilmelidir ki, $acd = dbd$, $bdb = bac$ ve $1 - ac$ tersinir olduğunda, o zaman $1 - bd$ tersinirdir ve

$$(1 - bd)^{-1} = 1 + b(1 - ac)^{-1}d$$

olur. Eğer $acd = dbd$, $dba = aca$ ve $1 - bd$ tersinir ise, o zaman $1 - ac$ tersinirdir ve

$$(1 - ac)^{-1} = 1 + [1 + d(1 - bd)^{-1}b]ac.$$

olur.

Bu bölümde, bir halka içinde Jacobson lemmasının genişlemesi incelenmektedir. $acd = dbd$ ve $bdb = bac$ durumunda, eğer $1 - ac$ grup tersinir, Drazin tersinir veya genelleştirilmiş Drazin tersinir ise, o zaman $1 - bd$ nin de öyle olduğu gösterilmektedir, ve $1 - bd$ nin grup, Drazin, genelleştirilmiş Drazin terslerinin $1 - ac$ ye karşılık gelen tersleri ile ifadeleri verilmektedir.

Teorem 6.1 R bir halka ve $a, b, c, d \in R$ olmak üzere $acd = dbd$ ve $bdb = bac$ sağlansın. Eğer $1 - ac \in R^\#$ ise, o zaman $1 - bd \in R^\#$ ve

$$(1 - bd)^\# = 1 + b[(1 - ac)^\# - (1 - ac)^\pi]d \quad (6.1)$$

dir (Masic 2017)

İspat. (6.1) eşitliğin sağ tarafı y ile gösterilsin. O zaman

$$(1 - bd)y = 1 - bd + b(1 - ac) [(1 - ac)^{\#} - (1 - ac)^{\pi}] d = 1 - b(1 - ac)^{\pi} d$$

elde edilir. Benzer şekilde $y(1 - bd) = 1 - b(1 - ac)^{\pi} d$ olur. Böylece $(1 - bd)y = y(1 - bd)$ dir. Dahası

$$(1 - bd)y(1 - bd) = [1 - b(1 - ac)^{\pi} d](1 - bd) = 1 - bd - b(1 - ac)^{\pi}(1 - ac)d = 1 - bd.$$

$db(1 - ac) = (1 - ac)db$ olduğundan $db(1 - ac)^{\#} = (1 - ac)^{\#}db$ ve $db(1 - ac)^{\pi} = (1 - ac)^{\pi}db$ olduğu elde edilir. Şimdi

$$\begin{aligned} y(1 - bd)y &= y[1 - b(1 - ac)^{\pi} d] \\ &= y - b(1 - ac)^{\pi} d - b[(1 - ac)^{\#} - (1 - ac)^{\pi}](1 - ac)^{\pi} dbd \\ &= y - b(1 - ac)^{\pi} d + b(1 - ac)^{\pi} acd \\ &= y - b(1 - ac)^{\pi}(1 - ac)d = y \end{aligned}$$

dir. Böylece $1 - bd \in R^{\#}$ ve $(1 - bd)^{\#} = y$ dir. ■

Teorem 6.1 de $c = b$ ve $d = a$ alınır, o zaman aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.1 R bir halka ve $a, b \in R$ ve $1 - ab \in R^{\#}$ ise, o zaman $1 - ba \in R^{\#}$ olur ve

$$(1 - ba)^{\#} = 1 + b [(1 - ab)^{\#} - (1 - ab)^{\pi}] a$$

dır (Masic 2017).

Teorem 6.2 R bir halka ve $a, b, c, d \in R$ olmak üzere $acd = dbd$ ve $dba = aca$ sağlansın. Eğer $1 - bd \in R^{\#}$ ise, o zaman $1 - ac \in R^{\#}$ ve

$$(1 - ac)^{\#} = 1 + ac + d [(1 - bd)^{\#} - 2(1 - bd)^{\pi}] bac$$

dir (Masic 2017).

İspat. Eğer $y = 1 + ac + d [(1 - bd)^{\#} - (1 - bd)^{\pi}] bac$ olarak tanımlanırsa, o zaman, Teorem 6.1 in kanıtında olduğu gibi kontrol edilebilir ki $(1 - ac)y = y(1 - ac)$ ve $(1 - ac)y(1 - ac) = 1 - ac$ dir. Lemma 2.2 kullanılırsa, $1 - ac \in R^{\#}$ ve $(1 - ac)^{\#} =$

$y(1 - ac)y = y - d(1 - bd)^\pi bac$ elde edilir. ■

Teorem 6.2 de a ile b nin ve c ile d nin rolleri değiştirilir ise, o zaman aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.2 R bir halka ve $a, b, c, d \in R$ olmak üzere $bdc = cac$ ve $cab = bdb$ koşullarını sağlıyorsa, o zaman $1 - ac \in R^\#$ olduğunda $1 - bd \in R^\#$ olur ve

$$(1 - bd)^\# = 1 + bd + c [(1 - ac)^\# - 2(1 - ac)^\pi] abd$$

dir (Mosic 2017).

Eğer Teorem 6.2 de $d = a$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.3 R bir halka ve $a, b, c \in R$ olmak üzere $aba = aca$ koşulunu sağlıyorsa ve $1 - ba \in R^\#$ ise, o zaman $1 - ac \in R^\#$ dir ve

$$(1 - ac)^\# = 1 + ac + a [(1 - ba)^\# - 2(1 - ba)^\pi] bac$$

dir (Mosic 2017).

Uyarı 6.1 Eğer $a, b \in R$ ve $1 - ba \in R^\#$ ise ve Sonuç 6.3 $c = b$ varsayılırsa, o zaman $1 - ab \in R^\#$ dir ve

$$(1 - ab)^\# = 1 + ab + a [(1 - ba)^\# - 2(1 - ba)^\pi] bab := X_1.$$

dir. Sonuç 6.1'de a ve b nin rolleri değiştirilirse, $1 - ab \in R^\#$ ve

$$(1 - ab)^\# = 1 + a [(1 - ba)^\# - (1 - ba)^\pi] b := X_2$$

elde edilir. Bu iki ifade X_1 ve X_2 için $(1 - ab)^\#$ eşittir, çünkü:

$$\begin{aligned}
X_1 &= 1 + ab + a(1 - ba)^\#b - a(1 - ba)^\#(1 - ba)b - a(1 - ba)^\pi bab \\
&\quad + a(1 - ba)^\pi(1 - ba)b - a(1 - ba)^\pi b \\
&= 1 + ab + a(1 - ba)^\#b - a(1 - ba)^\#(1 - ba)b - abab \\
&\quad + a(1 - ba)^\#(1 - ba)bab - a(1 - ba)^\pi b \\
&= 1 + a(1 - ba)b + a(1 - ba)^\#b - a(1 - ba)^\#(1 - ba)^2b - a(1 - ba)^\pi b \\
&= X_2
\end{aligned}$$

dir.

Teorem 6.1 kullanılarak, $1 - ac$ Drazin tersinir olduğunda $1 - bd$ nin Drazin tersinir olduğu doğrulanır. Bu bölüm boyunca bir toplamın alt sınırı üst sınırından büyükse, o zaman toplam her zaman sıfır olarak tanımlanır. Örneğin,

$$\sum_{k=0}^{-1} * = 0$$

ifadesi geçerli olup aşağıdaki teorem $1 - ac \in U(R)$ ($k=0$ için) ve $1 - ac \in R^\#$ ($k=1$ için) durumlarını kapsar.

Teorem 6.3 R bir halka ve $a, b, c, d \in R$ elemanları $acd = dbd$ ve $bdb = bac$ koşullarını sağlasın. Eğer $1 - ac \in R^d$ ise, o zaman $1 - bd \in R^d$ ve

$$(1 - bd)^d = 1 + b[(1 - ac)^d - (1 - ac)^\pi r]d$$

olur. Burada

$$r = \sum_{j=0}^{k-1} (1 - ac)^j$$

ve $\text{ind}(1 - ac) = k$ dır (Mosic 2017).

İspat. $k \geq 2$ için $s = \sum_{j=0}^{k-1} (1 - db)^j$ olsun. O zaman

$$1 - rac = (1 - ac)^k \in R^\# \text{ olduğundan}$$

$$racs d = rac d \sum_{j=0}^{k-1} (1 - bd)^j = rdb d \sum_{j=0}^{k-1} (1 - bd)^j = \sum_{j=0}^{k-1} d(1 - bd)^j b s d = s d b s d$$

dir ve

$$brac = \sum_{j=0}^{k-1} (1-bd)^j bac = \sum_{j=0}^{k-1} (1-bd)^j bdb = bsdb$$

Teorem 6.1 gereği $1 - bsd \in R^\#$ ve

$$\begin{aligned} (1 - bsd)^\# &= 1 + b[(1 - rac)^\# - (1 - rac)^\pi]sd \\ &= 1 + b[((1 - ac)^d)^k - (1 - ac)^\pi]sd \end{aligned}$$

dir.

$1 - bsd = (1 - bd)^k$ olmasından ve Lemma 2.3 gereğince, $1 - bd \in R^d$ ve

$$s' = \sum_{j=0}^{k-2} (1 - db)^j \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} (1 - bd)^d &= [(1 - bd)^k]^\# (1 - bd)^{k-1} \\ &= (1 - bd)^{k-1} + b[((1 - ac)^d)^k - (1 - ac)^\pi](1 - ac)^{k-1}sd \\ &= 1 - bs'd + b(1 - ac)^d(1 + (1 - ac)s')d - b(1 - ac)^\pi(1 - ac)^{k-1}d \\ &= 1 - b[(1 - ac)^d - (1 - ac)^\pi s' - (1 - ac)^\pi(1 - ac)^{k-1}]d \\ &= 1 - b[(1 - ac)^d - (1 - ac)^\pi s]d \\ &= 1 - b[(1 - ac)^d - (1 - ac)^\pi r]d \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 6.3 te $c = b$ ve $d = a$ alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.4 R bir halka ve $a, b \in R$ için, eğer $1 - ab \in R^d$ ise, o zaman $1 - ba \in R^d$ olur ve

$$(1 - ba)^d = 1 + b[(1 - ab)^d - (1 - ab)^\pi r_1] a$$

dır. Burada $r_1 = \sum_{j=0}^{k-1} (1 - ab)^j$ ve $\text{ind}(1 - ab) = k$ dir (Gonzalez, Araujo ve Patricio 2010).

Teorem 6.4 R bir halka ve $a, b, c, d \in R$ olmak üzere $acd = dbd$ ve $dba = aca$ koşulları sağlansın. Eğer $1 - bd \in R^d$ ise, o zaman $1 - ac \in R^d$ dir ve

$$(1 - ac)^d = (1 + sac)(1 - ac)^{k-1} + s^2 d(1 - bd)^d bac - 2d(1 - bd)^\pi (1 - bd)^{k-1} bac$$

dir. Burada $s = \sum_{j=0}^{k-1} (1 - db)^j$ ve $\text{ind}(1 - bd) = k \geq 1$ dir (Masic 2017).

İspat. İspatı Teorem 6.3 ün ispatına benzerdir. ■

Teorem 6.4 te $d = a$ alınırsa, o zaman $(1 - ac)^d, (1 - ba)^d$ cinsinden ifade edilir.

Sonuç 6.5 R bir halka olmak üzere $a, b, c \in R$ elemanları için, $aba = aca$ koşulu sağlansın. Eğer $1 - ba \in R^d$ ise, o zaman $1 - ac \in R^d$ dir ve

$$(1 - ac)^d = (1 + r_1 ac)(1 - ac)^{k-1} + r_1^2 a(1 - ba)^d bac - 2d(1 - ba)^\pi (1 - ba)^{k-1} bac$$

dir. Burada $r_1 = \sum_{j=0}^{k-1} (1 - ab)^j$ ve $\text{ind}(1 - ba) = k \geq 1$ dir (Masic 2017).

Aşağıdaki teoremdede $acd = dbd$ ve $bdb = bac$ koşulları altında, halka içinde $1 - ac$ nin genelleştirilmiş Drazin tersinirliğinin $1 - bd$ nin genelleştirilmiş Drazin tersinirliğini gerektirdiği kanıtlanır.

Teorem 6.5 R bir halka olmak üzere $a, b, c, d \in R$ elemanları için $acd = dbd$ ve $bdb = bac$ koşulları sağlansın. Eğer $1 - ac \in R^D$ ise, o zaman $1 - bd \in R^D$ dir ve

$$(1 - bd)^D = 1 + b \left[(1 - ac)^D - (1 - ac)^\pi (1 - (1 - ac)^\pi (1 - ac))^{-1} \right] d \quad (6.2)$$

dir (Masic 2017).

İspat.

$y = 1 + b \left[(1 - ac)^D - (1 - ac)^\pi (1 - (1 - ac)^\pi (1 - ac))^{-1} \right] d$, $\alpha = 1 - ac$ ve $\beta = 1 - bd$ olsun.

Teorem 3.11 ye göre, $1 - \alpha^\pi \alpha \in U(R)$ ve

$$y(1 - bd) = 1 - bd + b[\alpha^D - \alpha^\pi (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1}] \alpha d$$

$$= 1 - b\alpha^\pi d - b\alpha^\pi (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1} \alpha d$$

$$= 1 - b\alpha^\pi [1 + (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1} \alpha \alpha^\pi] d$$

$$= 1 - b\alpha^\pi (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1} d$$

dir. $\alpha(db) = (db)\alpha$ olduğu için $(db)\alpha^D = \alpha^D(db)$, $(db)\alpha^\pi = \alpha^\pi(db)$ ve

$(db)(1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1} = (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1}(db)$ dir. Dolayısıyla,

$$y(1 - bd)y = y - b\alpha^\pi (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1} d + bdb\alpha^\pi (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-2} d$$

$$= y - b\alpha^\pi (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-2} (1 - \alpha^\pi \alpha - ac) d$$

$$= y - b\alpha^\pi (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-2} (\alpha^\pi \alpha - \alpha^\pi \alpha) d$$

$$= y$$

dir. Şimdi $(1 - bd) - (1 - bd)y(1 - bd) = b\alpha^\pi (1 - \alpha^\pi \alpha)^{-1} d \in R^{qnil}$ olduğunu göstermek

için $z \in R$ ve

$b\alpha\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dz = zb\alpha\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d$ olsun. O zaman

$$db\alpha\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dzb = dzb\alpha\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}db$$

elde edilir ve $(db)\alpha = \alpha(db)$ olduğu göz önüne alındığında

$$\alpha\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}acdzb = dzbac\alpha\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}$$

sonucuna varılır. Buradan ve

$$ac\alpha^\pi = \alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)$$

olduğu bilgisinden,

$$\alpha\alpha^\pi dzb = dzb\alpha\alpha^\pi$$

ifadesi elde edilir. Burada $\alpha\alpha^\pi \in R^{qnil}$ olduğu ve $\alpha\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dzb = (1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dzb\alpha\alpha^\pi$ olduğu göz önüne alındığında,

$$1 + (1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dzb\alpha\alpha^\pi \in U(R)$$

elde edilir. Jacobson lemması kullanılarak,

$$1 + b\alpha\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dz \in U(R)$$

elde edilir ki bu da

$$b\alpha\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d \in R^{qnil}$$

olduğunu gösterir. $y \in comm^2(1 - bd)$ olduğunu göstermek için, $z \in R$ ve $z(1 - bd) = (1 - bd)z$ olsun. Bu durumda, $zbd = bdz$ ve $dzb\alpha = dz\beta b = d\beta zb = \alpha dzb$ dir. $dzb\alpha = \alpha dzb$ olduğu için, $dzb\alpha^D = \alpha^D dzb$, $dzb\alpha^\pi = \alpha^\pi dzb$ ve $dzb(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1} = (1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dzb$ dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
zb\alpha^\pi d &= zb\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d \\
&= zb\alpha c\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d \\
&= zbdb\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d \\
&= bdz b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d \\
&= b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dzbd \\
&= b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dbdz \\
&= bac\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dz \\
&= b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dz \\
&= b\alpha^\pi dz
\end{aligned}$$

olduğundan

$$zb\alpha\alpha^D d = b\alpha\alpha^D dz$$

olur. Dolayısıyla,

$$zb\alpha^D d - zbdb\alpha^D d = b\alpha^D dz - b\alpha^D dbdz$$

dir ve

$$zbdb\alpha^D d = bdbz\alpha^D d = b\alpha^D dzbd = b\alpha^D dbdz$$

olduğu için,

$$zb\alpha^D d = b\alpha^D dz \tag{6.3}$$

dır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dz b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d &= bdbz b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d \\
&= zb\alpha c\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-2}d \\
&= zb\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-2}d \\
&= zb\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}dz b\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d &= b(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-2}\alpha^\pi dzbd \\
&= b(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-2}\alpha^\pi acdz \\
&= b(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}\alpha^\pi dz
\end{aligned}$$

eşitlikleri

$$zb\alpha^\pi(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}d = b(1 - \alpha^\pi\alpha)^{-1}\alpha^\pi dz \tag{6.4}$$

olmasını gerektirir. (6.3) ve (6.4) kullanılarak, $zy = yz$ sonucuna varılır. Dolayısıyla, $y \in comm^2(1 - bd)$ ve genelleştirilmiş Drazin tersinin tanımından dolayı $1 - bd \in R^D$ ve $(1 - bd)^D = y$ dir. ■

Eğer üstteki teoremden $c = b$ ve $d = a$ alınırsa, o zaman aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 6.6 R bir halka ve $a, b \in R$ olsun. Eğer $1 - ab \in R^D$ ise, o zaman $1 - ba \in R^D$ ve

$$(1 - ba)^D = 1 + b \left[(1 - ab)^D - (1 - ab)^\pi (1 - (1 - ab)^\pi (1 - ab))^{-1} \right] a$$

dır (Mosic 2017).



7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada Drazin tersinir, kuvvetli π -düzenli, pseudo-tersinir ve polar eleman tanımlarının denk oldukları gösterilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir. Genelleştirilmiş Drazin tersinir ve yarı kutuplu eleman tanımlarının denk oldukları ispatlanmıştır. Cline'ın formülüne, Jacobson lemmasına ve genişlemelerine yer verilmiş ve Drazin tersinir, genelleştirilmiş Drazin tersinir ve grup tersinir elemanların Jacobson lemması ve Cline formülünü sağladıkları ispatlanmıştır. Jacobson ikilisi tanımı verilmiş ve Jacobson ikililerinin özellikleri incelenmiştir.



KAYNAKLAR

- Anderson, F. W. ve Fuller, K. R. 1992. Rings and Categories of Modules. Springer-Verlag, 386, New-York.
- Arens, R. F. ve Kaplansky, I. 1948. Topological representation of algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 63, 457-481.
- Azumaya, G. 1954. Strongly π -regular rings. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I., 13, 34-39.
- Caradus, S. R. 1978. Generalized inverses and operator theory. Queen's University, 206, Kingston, Ontario.
- Castro-González, N., Mendes-Araújo, C. ve Patricio, P. 2010. Generalized inverses of a sum in rings. Bull. Aust. Math. Soc., 82(1), 156–164.
- Cline, R. E. 1965. An application of representations for the generalized inverse of a matrix. Tech. Summary Rep.,
- Çalıcı, T. 2014. Yarı kutuplu halkalar. Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 100, Ankara.
- Drazin, M. P. 1958. Pseudo-inverses in associative rings and semigroups. Amer. Math. Monthly, 65, 506-514.
- Eklof, P. C. ve Mekler, A. H. 1990. Almost free modules. North-Holland, 498, Amsterdam.
- Harte, R. E. 1991. On quasinilpotents in rings. Panamer. Math. J., 1, 10-16.
- Hartwig, R. E. ve Luh, J. 1977. A note on the group structure of unit regular ring elements. Pacific J. Math., 71(2).
- Higgins, P. M. 1992. Techniques of the semigroup theory. Oxford University Press, 272, Oxford.
- Hungerford, T. W. 1974. Algebra. Holt, Rinehart and Winston Inc., 502, New York-Montreal.
- Kaplansky, I. 1950. Topological representation of algebras. II. Trans. Amer. Math. Soc., 68, 62-75.
- Kaplansky, I. 1968. Rings of Operators. W. A. Benjamin Inc., 151, New York-Amsterdam.
- King, C. F. 1977. A note on Drazin inverses. Pacific J. Math., 70(2), 383-390.
- Koliha J. J. 1996. A generalized Drazin inverse. Glasgow Math. J., 38(3), 367–381.
- Koliha, J. J. ve Patricio, P. 2002. Elements of rings with equal spectral idempotents. J. Aust. Math. Soc., 72(1), 137-152.

- Lam, T. Y. ve Nielsen, P. P. 2014. Jacobson's lemma for Drazin inverses. *Contemp. Math.*, 609.
- Lay, D. C. 1975. Spectral properties of generalized inverses of linear operators. *SIAM J. Appl. Math.*, 29, 103-109.
- Liao, Y., Chen, J. ve Cui, J. 2014. Clines formula for the generalized Drazin inverse. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*(2), 37(1), 37-42.
- Mosic, D. 2017. Extensions of Jacobson's lemma for Drazin inverses. *Aequationes Math.*, 91(3), 419-428.
- Nashed, M. Z. 1976. Generalized inverses and applications. Academic Press, 1068, New York-London.
- Nicholson, W. K. 1999 Strongly clean rings and Fitting's lemma. *Comm. Algebra*, 27(8), 3583-3592.
- Rudin, W. 1987. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Book Company, 416, New-York.
- Yan, K. and Fang, X. C. 2015. Common properties of the operator products in local spectral theory. *Acta Math. Sin.*, 31(11), 1715-1724.
- Zhuang, G., Chen, J. ve Cui, J. 2012. Jacobson's lemma for the generalized Drazin inverse. *Linear Algebra Appl.*, 436(3), 742-746.