

83567

BESSEL FONKSİYONLARI

NIHAN UYGUN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

1999 83567

**TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANİZASYON MERKEZİ**

Yrd. Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN danışmanlığında, Nihan UYGUN tarafından hazırlanan bu çalışma 14 / 09 / 1999 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Cevat KART

İmza



Üye : Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

İmza :



Üye : Yrd. Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN

İmza :



Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Esmâ KILIÇ
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BESSEL FONKSİYONLARI

Nihan UYGUN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN

Jüri: Prof. Dr. Cevat KART

Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Yrd. Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde Laplace denkleminin silindirik koordinatlardaki ifadesinden yararlanılarak Bessel denklemi elde edilmiştir. Daha sonra Bessel denkleminin çözümleri olan Bessel fonksiyonları ve onların özellikleri üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde Bessel fonksiyonları için integral gösterimleri verilmiştir. Değiştirilmiş Bessel denklemi tanımlanmış, çözümleri olan Değiştirilmiş Bessel fonksiyonları ve özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde Bessel ve Değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarının asimtotik açılımları, Lommel integralleri ve Fourier-Bessel açılımları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde ise dairesel zarın titreşimi incelenmiş, başlangıç ve sınır koşulları altında ısı denkleminin çözümleri bulunmuştur.

1999, 119 sayfa

ANAHTAR KELİMELER : Laplace denklemi, Bessel denklemi, Bessel fonksiyonları, Değiştirilmiş Bessel denklemi, Değiştirilmiş Bessel fonksiyonları, Asimtotik açılım, Lommel integrali, Fourier-Bessel açılımı, Dalgı denklemi, Isı denklemi, Isı akışı, Kararlı ısı, Değişen ısı.

ABSTRACT

Masters Thesis

BESSEL FUNCTIONS

Nihan UYGUN

Ankara University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN

Jury: Prof. Dr. Cevat KART

Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Asst. Prof. Dr. Fatma TAŞDELEN

This thesis is consists of four chapters.

In the first chapter, Bessel equation is obtained through the cylindrical coordinates of Laplace equation. In addition, Bessel functions which are the solutions of Bessel equation and their properties are studied.

The integral are presentations of Bessel functions are the main subject of the second chapter. Modified Bessel equation is defined and its solutions modified Bessel functions and their properties are introduced.

In the third chapter, the asymptotic expansions of Bessel and Modified Bessel functions, Lommel integrals and Fourier- Bessel expansions are obtained.

In the fourth chapter, the vibration of spherical membrane is investigated and the solutions of heat equation with initial and boundary conditions are found.

1999, 119 pages

KEY WORDS : Laplace equation, Bessel equation, Bessel functions, Modified Bessel equation, Modified Bessel functions, Asymptotic expansion, Lommel integral, Fourier-Bessel expansion, Wave equation, Heat equation, Heat flow, Steady temperature, Variable temperature.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana öneren, çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, değerli hocam Sayın Yrd.Doç.Dr. Fatma TAŞDELEN'e şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
SİMGELER	iv
1 BESSEL FONKSİYONLARI	1
1.1 Giriş	1
1.2 Bessel Diferensiyel Denkleminin	1
1.3 Bessel Diferensiyel Denkleminin Çözümü	3
1.4 $J_n(x)$ Bessel Fonksiyonu için Bazı İndirgeme Formülleri	12
1.5 n Tek Tamsayının Yarısı İken $J_n(x)$ Bessel Fonksiyonu	15
1.6 Bessel Katsayıları	16
1.7 Bessel İntegrali	20
1.8 J_0 Bessel Fonksiyonu için Neumann Toplam Formülü	22
1.9 Bessel Fonksiyonları için İntegral Gösterimi	24
1.10 $G_n(x)$ Bessel Fonksiyonu	29
1.11 $G_n(x)$ Bessel Fonksiyonu için Bazı İndirgeme Formülleri	34
1.12 Bessel Fonksiyonları Arasındaki İlişki	35
2 BESSEL VE DEĞİŞTİRİLMİŞ BESSEL FONKSİYONLARI İÇİN İNTEGRAL GÖSTERİMİ	44
2.1 Giriş	44
2.2 Bessel Fonksiyonları için İntegral İfadelerinin Ek Gösterimi	44
2.3 I_n ve K_n Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonları	61
2.4 I_n Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Bazı İndirgeme Formülleri	64
2.5 K_n Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Bazı İndirgeme Formülleri	67
2.6 Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonları Arasındaki İlişki	69
2.7 I_0 Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Toplam Formülü	71
2.8 Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonları için Bazı İntegral Gösterimleri	72
3 ASİMTOTİK AÇILIMLAR VE FOURIER-BESSEL AÇILIMLARI	75
3.1 Giriş	75
3.2 Asimtotik Açılımlar	75
3.2.1 Tanım:(Asimtotik Açılım)	77
3.2.2 $K_n(x)$ Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Asimtotik Açılım	77
3.2.3 $G_n(x)$ Bessel Fonksiyonu için Asimtotik Açılım	80
3.2.4 $J_n(x)$ Bessel Fonksiyonu için Asimtotik Açılım	82
3.2.5 $I_n(x)$ Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Asimtotik Açılım	84
3.3 Lommel İntegralleri	85

3.4	Bessel Fonksiyonunun Sıfırları	90
3.5	Fourier-Bessel Açılımları	92
4	BESSEL FONKSİYONLARININ UYGULAMALARI	96
4.1	Giriş	96
4.2	Dairesel Zarın Titreşimi	96
4.3	Dairesel Silindirde Isı Akışı	102
4.4	Küredeki Isı Akışı	107
	KAYNAKLAR	118
	ÖZGEÇMİŞ	119



SİMGELER

∇^2	: Laplace Operatörü
r	: Yarıçap
$J_n(x)$	: n yinci basamaktan 1 inci çeşit Bessel fonksiyonu
$Y_n(x)$	: n yinci basamaktan 2 inci çeşit Bessel fonksiyonu
$I_n(x)$	: n yinci basamaktan 1 inci çeşit Değiştirilmiş Bessel fonksiyonu
$K_n(x)$	: n yinci basamaktan 2 inci çeşit Değiştirilmiş Bessel fonksiyonu
ρ	: Yoğunluk
$T_n^m(x)$	: n yinci dereceden m yinci basamaktan 1 inci çeşit geliştirilmiş Legendre fonksiyonu
$Q_n^m(x)$	: n yinci dereceden m yinci basamaktan 2 inci çeşit geliştirilmiş Legendre fonksiyonu
χ	: İletkenlik katsayısı
A_n, B_n	: Fourier katsayıları
γ	: Euler sabiti
$A_{n,m}, B_{n,m}$	: Fourier-Bessel katsayıları

1 BESSEL FONKSİYONLARI

1.1 Giriş

Bu bölümde

$$\nabla^2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.1.1)$$

Laplace denkleminin silindirik koordinatlardaki ifadesinden yararlanılarak Bessel denklemi, onun çözümleri olan Bessel fonksiyonları ve onların özelliklerinden söz edilecektir.

1.2 Bessel Diferensiyel Denklemi

(1.1.1) ile verilen üç boyutlu Laplace denklemi için (x, y, z) düzleminde

$$x = u \cos \phi, \quad y = u \sin \phi, \quad z = z$$

dönüşümleri ile (u, ϕ, z) silindirik koordinatlarına geçilirse,

$$\nabla^2 V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2.1)$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin,

$$V(u, \phi, z) = U(u)\Phi(\phi)Z(z)$$

şeklinde değişkenlere ayrılabilir çözümünü araştıralım. Türevler

$$\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{dU}{du} \Phi Z \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = \frac{d^2 U}{du^2} \Phi Z \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} U Z \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \frac{d^2 Z}{dz^2} U \Phi$$

olacağından bu türev değerleri (1.2.1) denkleminde yerlerine konulurlarsa,

$$\frac{d^2 U}{du^2} \Phi Z + \frac{1}{u} \frac{dU}{du} \Phi Z + \frac{1}{u^2} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} U Z + \frac{d^2 Z}{dz^2} U \Phi = 0$$

denklemi bulunur. $U(u)\Phi(\phi)Z(z) \neq 0$ olduğundan bulunan son deklemler $U\Phi Z$ ile bölünürse,

$$\frac{1}{U} \left(\frac{d^2 U}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dU}{du} \right) + \frac{1}{u^2} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (1.2.2)$$

olur. Bu denklemde ilk üç terim z den bağımsız olduğundan son terim bir sabite eşittir. Bu sabit C ile gösterilirse,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = CZ \quad (1.2.3)$$

olur. Yine (1.2.2) denkleminde ilk iki terim ϕ den bağımsız olduğundan üçüncü terim bir D sabitine eşittir. Bu durumda

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = D\Phi \quad (1.2.4)$$

olur. (1.2.3) ve (1.2.4) eşitlikleri (1.2.2) denkleminde yerlerine konulur ve denklemin her iki yanı $u^2 U$ ile çarpılırsa,

$$u^2 \frac{d^2 U}{du^2} + u \frac{dU}{du} + (D + Cu^2)U = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $C = k^2$ ve $D = -n^2$ seçilirse (1.2.3) ,(1.2.4) denklemleri ve elde edilen son denklem,

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2 Z \quad (1.2.5)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -n^2 \Phi \quad (1.2.6)$$

ve

$$u^2 \frac{d^2 U}{du^2} + u \frac{dU}{du} + (k^2 u^2 - n^2)U = 0 \quad (1.2.7)$$

biçimine dönüşürler. (1.2.5) ve (1.2.6) denklemlerinin çözümleri

$$Z(z) = Ae^{-kz} + Be^{kz} \quad (1.2.8)$$

ve

$$\Phi(\phi) = E \cos n\phi + F \sin n\phi \quad (1.2.9)$$

olarak bulunurlar. (1.2.7) denkleminde $\nu = ku$ dönüşümü yapılırsa,

$$d\nu = k du \Rightarrow \frac{d\nu}{du} = k$$

$$\frac{dU}{du} = \frac{dU}{d\nu} \frac{d\nu}{du} \Rightarrow \frac{dU}{d\nu} = k \frac{dU}{d\nu}$$

$$\frac{d}{du}\left(\frac{dU}{du}\right) = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{dU}{d\nu} \frac{d\nu}{du}\right)$$

$$\frac{d^2U}{du^2} = \frac{d^2U}{d\nu^2} \left(\frac{d\nu}{du}\right)^2 + \frac{dU}{d\nu} \frac{d^2\nu}{du^2} \Rightarrow \frac{d^2U}{du^2} = k^2 \frac{d^2U}{d\nu^2}$$

olup, bu türev değerleri (1.2.7) denkleminde yerlerine konulur ve denklem düzenlenirse,

$$\nu^2 \frac{d^2U}{d\nu^2} + \nu \frac{dU}{d\nu} + (\nu^2 - n^2)U = 0 \quad (1.2.10)$$

elde edilir. Bu denklem Bessel denklemi olarak bilinir ve çözümleri olan fonksiyonlara n yinci basamaktan Bessel fonksiyonları veya Silindirik fonksiyonlar denir.

Eğer $R_n(\nu)$ n yinci basamaktan Bessel fonksiyonu ise,

$$V = R_n(ku) \frac{\sin}{\cos} (n\phi) e^{\mp kz} \quad (1.2.11)$$

fonksiyonu (1.2.1) denkleminin bir çözümüdür. Bu tür fonksiyonlar "Silindirik Harmonik Fonksiyonlar" olarak adlandırılmaktadır.

1.3 Bessel Diferensiyel Denkleminin Çözümü

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad (1.3.1)$$

denkleminde $x = 0$ noktası düzgün aykırı nokta olduğundan bu nokta komşuluğunda

$$y = x^p \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r \quad (1.3.2)$$

Frobenius serisi biçiminde çözüm arayalım. Buradan türevler alınırsa,

$$y' = x^p \sum_{r=0}^{\infty} (p+r) c_r x^{r-1}$$

$$y'' = x^p \sum_{r=0}^{\infty} (p+r)(p+r-1) c_r x^{r-2}$$

olup, bu türev değerleri (1.3.1) denkleminde yerlerine yazılırlarsa,

$$x^p \sum_{r=0}^{\infty} (p+r)(p+r-1)c_r x^r + x^p \sum_{r=0}^{\infty} (p+r)c_r x^r + x^p \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^{r+2} - n^2 x^p \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r = 0$$

ya da

$$x^p c_0 (p^2 - n^2) + x^{p+1} c_1 [(p+1)^2 - n^2] + x^p \sum_{r=2}^{\infty} \{[(p+r)^2 - n^2]c_r + c_{r-2}\} x^r = 0 \quad (1.3.3)$$

elde edilir.

(1.3.1) ifadesi ile özdeş olan (1.3.3) ifadesinde x in kuvvetlerinin tüm katsayıları sıfıra eşit olmalıdır. c_0 sıfırdan farklı seçilebileceğinden x^p nin katsayısı sıfıra eşitlenerek $p^2 - n^2 = 0$ indisel denklemini elde ederiz. Bu denklemin kökleri $p = \mp n$ dir. Diğer terimlerin katsayılarının sıfıra eşitlenmesiyle $c_1 = 0$ ve

$$[(p+r)^2 - n^2]c_r + c_{r-2} = 0 \quad ; \quad r \geq 2$$

indirgeme formülünü elde ederiz. Buradan $r = 2, 3, \dots$ için

$$[(p+2)^2 - n^2]c_2 + c_0 = 0 \Rightarrow (p+n+2)(p-n+2)c_2 = -c_0$$

$$[(p+3)^2 - n^2]c_3 + c_1 = 0 \Rightarrow (p+n+3)(p-n+3)c_3 = -c_1$$

$$[(p+4)^2 - n^2]c_4 + c_2 = 0 \Rightarrow (p+n+4)(p-n+4)c_4 = -c_2 \quad (1.3.4)$$

$$[(p+5)^2 - n^2]c_5 + c_3 = 0 \Rightarrow (p+n+5)(p-n+5)c_5 = -c_3$$

şeklindedir. (1.3.4) ifadesinden görüldüğü gibi $c_1, c_3, c_5, \dots$ katsayıları c_0 dan bağımsızdır. Bu durumda c_1 e bağlı olan tüm katsayılar

$$c_3 = c_5 = \dots = c_{2n-1} = \dots = 0$$

olur. Diğer katsayılar ise,

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{c_0}{(p-n+2)(p+n+2)} \\
c_4 &= \frac{c_0}{(p-n+2)(p-n+4)(p+n+2)(p+n+4)} \\
&\vdots \\
c_{2r} &= \frac{(-1)^r c_0}{(p-n+2)(p-n+4)\dots(p-n+2r)(p+n+2)\dots(p+n+2r)}
\end{aligned} \tag{1.3.5}$$

şeklinde c_0 katsayısına bağlı olarak bulunur.

Şimdi $n \notin Z$ olmak üzere (1.3.5) ve (1.3.2) de $p = \mp n$ koyalım. Eğer $p = n$ ise çözüm,

$$y = c_0 x^n \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\}$$

olur. c_0 özel olarak

$$c_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}$$

seçilirse,

$$y = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\}$$

olur. Buradan,

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \tag{1.3.6}$$

fonksiyonu elde edilir ki bu fonksiyon birinci çeşit Bessel fonksiyonu olarak bilinir. Burada $n > 0$ olup x in her sonlu değeri için yakınsaktır.

İkinci çözüm $p = -n$ için (1.3.5) ve (1.3.2) den

$$y = c_0 x^{-n} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(-2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2n+2)(-2n+4)} - \dots \right\}$$

olur. c_0 özel olarak

$$c_0 = \frac{1}{2^{-n} \Gamma(-n+1)}$$

seçilirse $n < 0$ için çözüm,

$$y = \frac{x^{-n}}{2^{-n} \Gamma(-n+1)} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(-2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(-2n+2)(-2n+4)} - \dots \right\}$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \quad (1.3.7)$$

elde edilir.

O halde $n \notin \mathbb{Z}$ iken Bessel diferensiyel denkleminin genel çözümü;

$$y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$$

olarak bulunur. Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

Diğer taraftan eğer n sıfır ya da tam sayı ise bu iki çözüm farklı değildir. Eğer $n = 0$ ise bu iki çözüm aşikar olarak özdeştir. Eğer n tamsayı ise (1.3.6) ve (1.3.7) serilerinden görülüyor ki n in negatif tamsayı olması halinde $J_n(x)$ ve n in pozitif tamsayı olması halinde ise $J_{-n}(x)$ tanımlı değildir. Çünkü $\Gamma(-n+r+1)$ ifadesi $r = 0, 1, \dots, n-1$ için sonsuzdur. n in tamsayı olması halinde $J_{-n}(x)$ serisi $r = 0, 1, \dots, n-1$ için tanımsızdır. Bu terimler yerine sıfır alınarak seri $r = n$ den başlatılır. O halde,

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

ya da $r = n + s$ için

$$J_{-n}(x) = (-1)^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(n+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad (1.3.8)$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi n in tamsayı olması durumunda $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır. Bu durumda ikinci bir çözüm bulmaya ihtiyaç vardır. Bunu aşağıdaki durumlarda ayrı ayrı inceliyelim.

Durum 1: ($n = 0$ hali)

$n = 0$ için (1.3.1) denklemi ,

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - 0^2) y = 0$$

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0$$

şekline dönüşür. (1.3.2) ve (1.3.5) den çözüm,

$$y = c_0 x^p \left\{ 1 - \frac{x^2}{(p+2)^2} + \frac{x^4}{(p+2)^2(p+4)^2} - \dots \right\} \quad (1.3.9)$$

olarak bulunur. İndisel denklemden $n = 0$ için $p = 0$ bulunur. (1.3.9) denkleminde $p = 0$ konulursa,

$$\begin{aligned} y &= c_0 \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \dots \right\} \\ &= c_0 \left\{ 1 - \frac{x^2}{1! 2^2} + \frac{x^4}{2! 2 \cdot 2^2} - \dots \right\} \\ &= c_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(r+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2r} \\ y &= c_0 J_0(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $J_0(x)$ fonksiyonu 0 ıncı basamaktan 1 inci çeşit Bessel fonksiyonudur. İndisel denklemin kökleri eşit yani $p_1 = 0$, $p_2 = 0$ ise ikinci çözüm, $y(x) = \frac{dy}{dp} \Big|_{p=0}$ dan bulunur. (1.3.9) eşitliğinin her iki yanının p ye göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dp} &= \frac{d}{dp} \left\{ c_0 x^p \left[1 - \frac{x^2}{(p+2)^2} + \frac{x^4}{(p+2)^2(p+4)^2} - \dots \right] \right\} \\ &= c_0 x^p \ln x \left\{ 1 - \frac{x^2}{(p+2)^2} + \frac{x^4}{(p+2)^2(p+4)^2} - \dots \right\} \\ &\quad + c_0 x^p \left\{ \frac{x^2}{(p+2)^2} \frac{2}{p+2} - \frac{x^4}{(p+2)^2(p+4)^2} \left(\frac{2}{p+2} + \frac{2}{p+4} \right) + \dots \right\} \quad (1.3.10) \end{aligned}$$

olur. $p = 0$ için değeri (1.3.10) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dp}\right)_{p=0} &= c_0 \ln x \left\{1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \dots\right\} \\ &+ c_0 \left\{\frac{x^2}{2^2} \frac{2}{2} - \frac{x^4}{2^2 4^2} \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4}\right) + \dots\right\} \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

elde edilir. $c_0 \ln x$ in katsayısı olan ifadenin $J_0(x)$ olduğu gözönünde tutulur ve

$$Y_0(x) = \ln x J_0(x) + \left\{\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots\right\} \quad (1.3.12)$$

denirse (1.3.11) ifadesi

$$\left(\frac{dy}{dp}\right)_{p=0} = c_0 \ln x J_0(x) + c_0 \left\{\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \dots\right\}$$

halini alır. Bu durumda,

$$\left(\frac{dy}{dp}\right)_{p=0} = c_0 Y_0(x)$$

elde edilir. $Y_0(x)$ fonksiyonuna 0 ıncı basamaktan 2 inci çeşit Bessel fonksiyonu denir.

Durum 2:(n pozitif tamsayı ise)

$c_0 = c(p+n)$ olarak alınırsa (1.3.2) ve (1.3.5) dan çözüm,

$$\begin{aligned} y &= c(p+n)x^p \left\{1 - \frac{x^2}{(p-n+2)(p+n+2)} \right. \\ &+ \frac{x^4}{(p-n+2)(p-n+4)(p+n+2)(p+n+4)} - \dots \left. \right\} \\ &= c(p+n)x^p \left\{1 - \frac{x^2}{(p-n+2)(p+n+2)} + \dots \right. \\ &+ \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(p-n+2)\dots(p+n-2)(p+n+2)\dots(p+3n-2)} \left. \right\} \\ &+ \frac{(-1)^n c(p+n)x^{p+2n}}{(p-n+2)\dots(p+n-2)(p+n)(p+n+2)\dots(p+3n)} \\ &\times \left\{1 - \frac{x^2}{(p+n+2)(p+3n+2)} \right. \\ &+ \frac{x^4}{(p+n+2)(p+n+4)(p+3n+2)(p+3n+4)} - \dots \left. \right\} \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

olur. (1.3.13) eşitliğinde $p = -n$ konulursa,

$$\begin{aligned} y &= \frac{(-1)^n c x^n}{(-2)^{n-1} (n-1)! 2^n n!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \\ &= \frac{(-1)^n c}{(-1)^{n-1} 2^{n-1} (n-1)! 2^n n!} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \end{aligned}$$

$$y = -\frac{c}{2^{n-1} (n-1)!} J_n(x)$$

bulunur. İndisel denklemin köklerinin arasındaki fark tamsayı ise ikinci çözüm $y(x) = \frac{d}{dp} \left[(p+n)y \right]_{p=-n}$ dir. $p = \mp n$ ve $n \in Z$ olduğundan (1.3.13) in her iki yanının p ye göre türevi alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dp} &= y \ln x + c x^p \left\{ 1 - \frac{x^2}{(p-n+2)(p+n+2)} + \dots \right. \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-2}}{(p-n+2) \dots (p+n-2)(p+n+2) \dots (p+3n-2)} \left. \right\} \\ &\quad + c(p+n)x^p \left\{ \frac{[(p+n+2) + (p-n+2)]x^2}{(p+n+2)^2(p-n+2)^2} - \dots \right\} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1} c x^{p+2n}}{(p-n+2) \dots (p+n-2)(p+n+2) \dots (p+3n)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{p-n+2} + \dots + \frac{1}{p+n-2} + \frac{1}{p+n+2} + \dots + \frac{1}{p+3n} \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{x^2}{(p+n+2)(p+3n+2)} \right. \\ &\quad + \frac{x^4}{(p+n+2)(p+n+4)(p+3n+2)(p+4n+4)} - \dots \left. \right\} \\ &\quad + \frac{(-1)^{n-1} c x^{p+2n}}{(p-n+2) \dots (p+n-2)(p+n+2) \dots (p+3n-2)} \\ &\quad \times \left\{ \frac{x^2}{(p+n+2)(p+3n+2)} \left(\frac{1}{p+n+2} + \frac{1}{p+3n+2} \right) - \dots \right\} \end{aligned}$$

olur. Bu denklemde $p = -n$ alınır,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dy}{dp}\right)_{p=-n} &= -\frac{c}{2^{n-1}(n-1)!} J_n(x) \ln x + cx^{-n} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \dots \right. \\
&+ \frac{x^{2n-2}}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \} \\
&+ \frac{(-1)^{n-1} cx^n}{(-2n+2) \dots (-2n-2)(-2) \cdot 2 \dots 2n} \\
&\times \left\{ -\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n-4} - \dots - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n} \right\} \\
&\times \left\{ 1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \dots \right\} \\
&+ \frac{(-1)^{n-1} cx^n}{(-2n+2) \dots (-2) \cdot 2 \dots 2n} \left\{ \frac{x^2}{2(2n+2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2} \right) - \dots \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dy}{dp}\right)_{p=-n} &= -\frac{c}{2^{n-1}(n-1)!} J_n(x) \ln x + cx^{-n} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \dots \right. \\
&+ \frac{x^{2n-2}}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \} + \frac{c}{2^n n!} J_n(x) \\
&- \frac{cx^n}{2^{2n-1}(n-1)! n!} \left\{ \frac{x^2}{2(2n+2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2} \right) - \dots \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $c = -2^{n-1}(n-1)!$ seçilirse çözüm,

$$\begin{aligned}
y &= J_n(x) \ln x - 2^{n-1}(n-1)! x^{-n} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \dots \right. \\
&+ \frac{x^{2n-2}}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)(2n-2) \dots 4 \cdot 2} \} - \frac{1}{2n} J_n(x) \\
&+ \frac{x^n}{2^n n!} \left\{ \frac{x^2}{2(2n+2)} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2} \right) - \dots \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafından

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) J_n(x)$$

ifadesi çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= J_n(x) \ln x - 2^{n-1}(n-1)!x^{-n}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \dots\right. \\
&\quad \left. + \frac{x^{2n-2}}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)(2n-2) \dots 4 \cdot 2}\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right)J_n(x) \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{x^n}{2^n n!} \left\{ \frac{x^2}{2(2n+2)} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - \dots \right\}
\end{aligned} \tag{1.3.14}$$

elde edilir.

$$\Phi(r) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r} \quad ve \quad \Phi(0) = 0$$

olarak tanımlanırsa (1.3.14) eşitliği,

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= J_n(x) \ln x - 2^{n-1}(n-1)!x^{-n}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \dots\right. \\
&\quad \left. + \frac{x^{2n-2}}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)(2n-2) \dots 4 \cdot 2}\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2}\Phi(n) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} [\Phi(r) + \Phi(n+r) - \Phi(n)]
\end{aligned}$$

şekline dönüşür. Buradan

$$\begin{aligned}
Y_n(x) &= J_n(x) \ln x - 2^{n-1}(n-1)!x^{-n}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n-2)} + \dots\right. \\
&\quad \left. + \frac{x^{2n-2}}{2 \cdot 4 \dots (2n-2)(2n-2) \dots 4 \cdot 2}\right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} [\Phi(r) + \Phi(n+r)] \\
&= J_n(x) \ln x - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)} \left\{ \Phi(r) + \Phi(n+r) \right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}
\end{aligned} \tag{1.3.15}$$

olarak bulunur. $Y_n(x)$ fonksiyonuna n yinci basamaktan ikinci çeşit Bessel fonksiyonu denir. Genel çözüm $G_n(x)$ ile gösterilir ve

$$G_n(x) = AJ_n(x) + BY_n(x)$$

olarak ifade edilir. Burada A ve B keyfi reel sabitlerdir.

1.4 $J_n(x)$ Bessel Fonksiyonu için Bazı İndirgeme Formülleri

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

Bessel fonksiyonunun x e göre türevi alınırsa,

$$J'_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n+2r)}{r! \Gamma(n+r+1)} \frac{x^{n+2r-1}}{2^{n+2r}}$$

bulunur. Her iki taraf x ile çarpılır ve düzenlenirse

$$xJ'_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (n+2r)}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \quad (1.4.1)$$

$$= n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}$$

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) + x \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r-1)! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1}$$

elde edilir. Bu eşitlikte r yerine $s+1$ konulursa,

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(n+s+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s+1}$$

$$xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x) \quad (1.4.2)$$

bağıntısı bulunur. (1.4.1) da $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned}
xJ'_n(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r [2(n+r) - n]}{r! \Gamma(n+r)} \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2}{r! \Gamma(n+r)} \frac{x}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (-n)}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\
&= x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r-1} - n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}
\end{aligned}$$

elde edilir. (1.3.6) eşitliği gözönünde tutulursa,

$$xJ'_n(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x) \quad (1.4.3)$$

elde edilir. (1.4.2) ve (1.4.3) eşitlikleri taraf tarafa toplanır ve $x \neq 0$ ile bölünürse,

$$2J'_n(x) = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \quad (1.4.4)$$

elde edilir. (1.4.4) de $n = 0$ alınır ve (1.3.8) eşitliği gözönünde tutulursa,

$$J'_0 = -J_1 \quad (1.4.5)$$

olur. (1.4.2) ile (1.4.3) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılır, her iki yan $x \neq 0$ ile bölünür ve düzenlenirse,

$$\frac{2n}{x} J_n(x) = J_{n+1}(x) + J_{n-1}(x) \quad (1.4.6)$$

elde edilir. (1.4.3) eşitliğinin her iki yanı x^{n-1} ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d}{dx} [x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad (1.4.7)$$

bulunur. Benzer şekilde (1.4.2) eşitliğinin her iki yanının x^{-n-1} ile çarpılıp düzenlenmesiyle,

$$\frac{d}{dx} [x^{-n} J_n(x)] = -x^{-n} J_{n+1}(x) \quad (1.4.8)$$

elde edilir. (1.4.4) eşitliğinin x e göre türevi alınır ve her iki yan 2 ile çarpılırsa,

$$2^2 J''_n(x) = 2J'_{n-1}(x) - 2J'_{n+1}(x) \quad (1.4.9)$$

olur. $J'_{n-1}(x)$ ve $J'_{n+1}(x)$ değerleri (1.4.4) eşitliğinden elde edilir, (1.4.9) eşitliğinde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$2^2 J''_n(x) = J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)$$

elde edilir. Bu işlem r-kez tekrar edilirse,

$$2^r J_n^{(r)}(x) = J_{n-r}(x) - r J_{n-r+2}(x) + \frac{r(r-1)}{2!} J_{n-r+4}(x) - \dots + (-1)^r J_{n+r}(x) \quad (1.4.10)$$

olur. Elde edilen (1.4.2),(1.4.3),(1.4.4),(1.4.5),(1.4.6), (1.4.7),(1.4.8) ve (1.4.10) eşitlikleri $J_n(x)$ Bessel fonksiyonu için elde edilen bazı indirgeme bağıntılarıdır.

Benzer indirgeme bağıntıları $J_{-n}(x)$ Bessel fonksiyonu için de elde edilebilir. Bunlardan bazılarını görelim.

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

Bessel fonksiyonunun x e göre türevi alınırsa,

$$J'_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (-n+2r)}{r! \Gamma(-n+r+1)} \frac{x^{-n+2r-1}}{2^{-n+2r}}$$

bulunur. Her iki taraf x ile çarpılır ve düzenlenirse

$$x J'_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (-n+2r)}{r! \Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \quad (1.4.11)$$

$$= -n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r r}{r! \Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r}$$

$$x J'_{-n}(x) = -n J_{-n}(x) + x \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(r-1)! \Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r-1}$$

elde edilir. Bu eşitlikte r yerine s + 1 konulursa,

$$x J'_{-n}(x) = -n J_{-n}(x) - x \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(-n+s+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s+1}$$

$$x J'_{-n}(x) = -n J_{-n}(x) - x J_{-n+1}(x) \quad (1.4.12)$$

bağıntısı bulunur. (1.4.11) da $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} xJ'_{-n}(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r [2(-n+r) + n] x}{r!(-n+r)\Gamma(-n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r-1} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r 2}{r!\Gamma(-n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r n}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \\ &= x \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r-1} + n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \end{aligned}$$

elde edilir. (1.3.7) eşitliğinden,

$$xJ'_{-n}(x) = nJ_{-n}(x) + xJ_{-n-1}(x) \quad (1.4.13)$$

bulunur. $J_n(x)$ Bessel fonksiyonları için elde edilen diğer indirgeme bağıntıları benzer yolla $J_{-n}(x)$ Bessel fonksiyonu için de elde edilebilir.

1.5 n Tek Tamsayının Yarıısı İken $J_n(x)$ Bessel Fonksiyonu

(1.3.6) de $n = \frac{1}{2}$ alınır,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(\frac{3}{2} + r)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2r} \quad (1.5.1)$$

dir. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ve $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$\Gamma(r + \frac{3}{2}) = (r + \frac{1}{2})\Gamma(r + \frac{1}{2}) = (r + \frac{1}{2})(r - \frac{1}{2}) \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{(2r+1)!}{r!2^{r+1}} \sqrt{\pi}$$

olur. Bu son eşitlik (1.5.1) de yerine konulursa,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r+1)!} x^{2r+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (1.5.2)$$

olarak bulunur. Benzer işlemler $n = -\frac{1}{2}$ için yapılırsa,

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{(2r)!} x^{2r} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \quad (1.5.3)$$

olur. Buradan görüldüğü gibi $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $J_{k+\frac{1}{2}}$ Bessel fonksiyonları sinüs ve cosinüs fonksiyonları cinsinden elde edilebilirler.

1.6 Bessel Katsayıları

Teorem 1.6.1 x pozitif bir sayı ve $t (\neq 0)$ bir kompleks değişkeni göstermek üzere

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \quad (1.6.1)$$

dir. Burada $F(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})}$ fonksiyonu $J_n(x)$ Bessel fonksiyonu için doğurucu fonksiyon olarak bilinir.

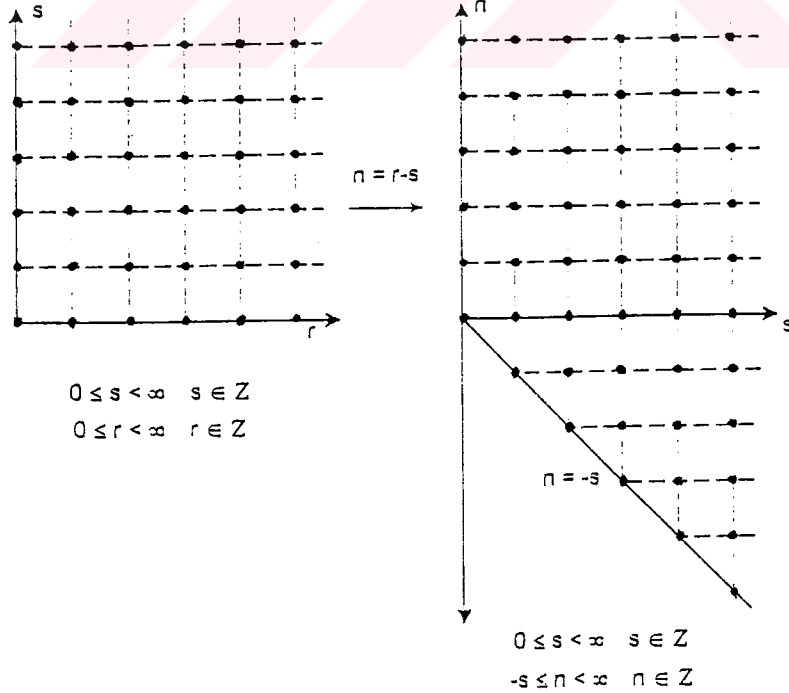
İspat: e^x üstel fonksiyonunun $x = 0$ noktası komşuluğundaki seri açılımı gözönünde tutulursa, (1.6.1) ifadesinin birinci yanı

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \left(\frac{xt}{2} \right)^r \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} \left(-\frac{x}{2t} \right)^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!r!} \left(\frac{x}{2} \right)^{r+s} t^{r-s} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $n = r - s$ bölge dönüşümü yapılırsa

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=-s}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2} \right)^{2s+n} t^n$$

olur.



Yukarıdaki şekil (r,s) indis çiftlerinin $r - s = n$ dönüşümü ile (s,n) indis çiftlerine nasıl dönüştüğünü göstermektedir. Bu şekil yardımıyla $e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}$ eşitliği,

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} t^n + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{n=-s}^{-1} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} t^n$$

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} t^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} \sum_{s=-n}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} t^n \quad (1.6.2)$$

şeklinde yazılabilir. $n \geq 0$ için t^n katsayıları

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} = J_n(x)$$

eşitliğini vermektedir. $n < 0$ ise bu durumda $m = -n$ konumu ile t^n in katsayısı yine

$$\begin{aligned} \sum_{s=-n}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+n} &= \sum_{s=m}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(s-m)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-m} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+m}}{s!(m+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+m} \\ &= (-1)^m J_m(x) = (-1)^{-n} J_{-n}(x) = (-1)^n J_{-n}(x) = J_n(x) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bulunan bu eşitlikleri (1.6.2) de yerlerine yazarsak,

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} J_n(x) t^n + \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \end{aligned}$$

elde edilir ki bu istenilendir.

Burada $J_n(x)$ ler t^n lerin katsayıları olduğundan $J_n(x)$ fonksiyonlarına "Bessel Katsayıları" da denir. Bessel katsayılarının birçok özelliği vardır. Bunlardan birkaçı aşağıdaki gibidir.

(1.6.1) eşitliğinde $t = e^{i\phi}$ alınırsa,

$$e^{\frac{x}{2}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\phi} J_n(x) \quad (1.6.3)$$

olur. Bu eşitlikte

$$\sin \phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \quad \text{ve} \quad e^{in\phi} = \cos n\phi + i \sin n\phi$$

oldukları gözönünde tutulursa,

$$e^{ix \sin \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\cos n\phi + i \sin n\phi) J_n(x)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} e^{ix \sin \phi} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} (\cos n\phi + i \sin n\phi) J_n(x) + J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\phi + i \sin n\phi) J_n(x) \\ &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\phi - i \sin n\phi) J_{-n}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\phi + i \sin n\phi) J_n(x) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$e^{ix \sin \phi} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\cos n\phi + (-1)^n \cos n\phi + i \sin n\phi - i(-1)^n \sin n\phi) J_n(x)$$

$$e^{ix \sin \phi} = J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [2 \cos(2n\phi) J_{2n}(x) + 2i \sin((2n-1)\phi) J_{2n-1}(x)] \quad (1.6.4)$$

elde edilir. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ olduğu gözönünde tutularak (1.6.4) eşitliğinin reel ve sanal kısımları ayrılırsa,

$$\cos(x \sin \phi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n\phi) J_{2n}(x) \quad (1.6.5)$$

ve

$$\sin(x \sin \phi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin((2n-1)\phi) J_{2n-1}(x) \quad (1.6.6)$$

olarak bulunurlar. (1.6.3) eşitliğinde ϕ yerine $\frac{\pi}{2} - \phi$ alınırsa eşitlik

$$e^{\frac{x}{2}(e^{i(\frac{\pi}{2}-\phi)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}-\phi)})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\frac{\pi}{2}-\phi)} J_n(x)$$

şekline dönüşür. Burada yeniden $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$e^{ix \cos \phi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\cos n(\frac{\pi}{2} - \phi) + i \sin n(\frac{\pi}{2} - \phi)] J_n(x)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} e^{ix \cos \phi} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} [\cos(\frac{n\pi}{2} - n\phi) + i \sin(\frac{n\pi}{2} - n\phi)] J_n(x) \\ &+ J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(\frac{n\pi}{2} - n\phi) + i \sin(\frac{n\pi}{2} - n\phi)] J_n(x) \\ &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(\frac{n\pi}{2} - n\phi) - i \sin(\frac{n\pi}{2} - n\phi)] J_{-n}(x) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(\frac{n\pi}{2} - n\phi) + i \sin(\frac{n\pi}{2} - n\phi)] J_n(x) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceğinden ve $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned} e^{ix \cos \phi} &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\cos(\frac{n\pi}{2} - n\phi) + (-1)^n \cos(\frac{n\pi}{2} - n\phi)] \\ &+ i \sum_{n=1}^{\infty} [\sin(\frac{n\pi}{2} - n\phi) - (-1)^n \sin(\frac{n\pi}{2} - n\phi)] J_n(x) \\ e^{ix \cos \phi} &= J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [2(-1)^n \cos(2n\phi) J_{2n}(x) \\ &+ 2i(-1)^{n-1} \cos((2n-1)\phi) J_{2n-1}(x)] \end{aligned}$$

(1.6.7)

olur. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ olduğu gözönünde tutularak (1.6.7) eşitliğinin reel ve sanal kısımları ayrılırsa,

$$\cos(x \cos \phi) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos(2n\phi) J_{2n}(x) \quad (1.6.8)$$

ve

$$\sin(x \cos \phi) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cos((2n-1)\phi) J_{2n-1}(x) \quad (1.6.9)$$

bulunur.(1.6.4) ve (1.6.7) ifadelerinden de görüldüğü gibi $e^{ix \sin \phi}$ ve $e^{ix \cos \phi}$ fonksiyonları Bessel fonksiyonları cinsinden seriye açılabilirler.

1.7 Bessel İntegrali

(1.6.5) ifadesinde n yerine r alınır, eşitliğin her iki yanı $\cos n\phi$ ile çarpılır ve 0 dan π ye kadar integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(x \sin \phi) \cos n\phi d\phi &= \int_0^{\pi} [J_0(x) + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \cos(2r\phi) J_{2r}(x)] \cos n\phi d\phi \\ &= \int_0^{\pi} J_0(x) \cos n\phi d\phi + 2 \int_0^{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \cos(2r\phi) J_{2r}(x) \cos n\phi d\phi \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \cos(2r\phi) J_{2r}(x) \cos n\phi d\phi \\ &= \begin{cases} \pi J_n(x) & n = 2r \text{ ise} \\ 0 & n \neq 2r \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde(1.6.6) ifadesinin her iki yanının $\sin n\phi$ ile çarpılıp, 0 dan π ye kadar integrallenmesiyle,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin(x \sin \phi) \sin n\phi d\phi &= 2 \int_0^{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \sin((2r-1)\phi) J_{2r-1}(x) \sin n\phi d\phi \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq 2r-1 \text{ ise} \\ \pi J_n(x) & n = 2r-1 \text{ ise} \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir. $n \in \mathbb{Z}^+$ için bu son iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned} \pi J_n(x) &= \int_0^{\pi} [\cos(x \sin \phi) \cos n\phi + \sin(x \sin \phi) \sin n\phi] d\phi \\ &= \int_0^{\pi} \cos(n\phi - x \sin \phi) d\phi \\ J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\phi - x \sin \phi) d\phi \end{aligned} \quad (1.7.1)$$

bulunur. Burada n sıfır yada pozitif tamsayıdır.

Teorem 1.7.1 n herhangi bir tamsayı ise

$$J_n(u+v) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(u) J_{n-r}(v) \quad (1.7.2)$$

dir. n nin pozitif tamsayı olması halinde ise

$$J_n(u+v) = \sum_{r=0}^n J_r(u) J_{n-r}(v) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r [J_r(u) J_{n+r}(v) + J_r(v) J_{n+r}(u)] \quad (1.7.3)$$

dir.

İspat: n herhangi bir tamsayı olsun. (1.6.1) eşitliğinde $x = u + v$ alınır,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(u+v) &= e^{\frac{1}{2}(u+v)(t-\frac{1}{t})} \\ &= e^{\frac{1}{2}u(t-\frac{1}{t})} e^{\frac{1}{2}v(t-\frac{1}{t})} \end{aligned}$$

olur. Yine (1.6.1) eşitliği gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(u+v) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} t^r J_r(u) \sum_{s=-\infty}^{\infty} t^s J_s(v) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_r(u) J_s(v) t^{r+s} \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

elde edilir. Bu eşitliğin ikinci yanında $n = r + s$ alınır $s = n - r$ olup,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(u+v) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(u) J_{n-r}(v) t^n$$

olur. t^n in katsayıları karşılaştırılırsa,

$$J_n(u+v) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(u) J_{n-r}(v)$$

elde edilir ki bu n in herhangi bir tamsayı olması halinde geçerli olan eşitliktir. Bu son eşitlik

$$\begin{aligned} J_n(u+v) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(u) J_{n-r}(v) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{-1} J_r(u) J_{n-r}(v) + \sum_{r=0}^{\infty} J_r(u) J_{n-r}(v) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Birinci toplamda r yerine $-r$ alınırsa,

$$J_n(u+v) = \sum_{r=1}^{\infty} J_{-r}(u)J_{n+r}(v) + \sum_{r=0}^n J_r(u)J_{n-r}(v) + \sum_{r=n+1}^{\infty} J_r(u)J_{n-r}(v)$$

olur. $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ olduğu gözönünde tutulur ve son toplamda r yerine $n+r$ alınırsa,

$$J_n(u+v) = \sum_{r=0}^n J_r(u)J_{n-r}(v) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r J_r(u)J_{n+r}(v) + \sum_{r=1}^{\infty} J_{n+r}(u)J_r(v)$$

bulunur. Yine $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ifadesinden yararlanılırsa,

$$J_n(u+v) = \sum_{r=0}^n J_r(u)J_{n-r}(v) + \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left[J_r(u)J_{n+r}(v) + J_{n+r}(u)J_{-r}(v) \right]$$

elde edilir ki bu ise n in pozitif tamsayı olması durumunda geçerli olan eşitliktir.

1.8 J_0 Bessel Fonksiyonu için Neumann Toplam Formülü

$$e^{\frac{x}{2}(kt - \frac{1}{kt})} = e^{\frac{x}{2t}(k - \frac{1}{k})} e^{\frac{kx}{2}(t - \frac{1}{t})}$$

şeklinde yazılabileceğinden, burada (1.6.1) eşitliği gözönünde tutulursa,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)(kt)^n = e^{\frac{x}{2t}(k - \frac{1}{k})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kx)t^n \quad (1.8.1)$$

elde edilir. Bu ifadede x yerine b , k yerine $e^{i\beta}$ ve n yerine de r konulursa,

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(b)e^{ir\beta}t^r = e^{\frac{b}{2t}(e^{i\beta} - e^{-i\beta})} \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(be^{i\beta})t^r$$

olur. $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$ olduğundan

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(b)e^{ir\beta}t^r = e^{\frac{ib}{t}\sin\beta} \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(be^{i\beta})t^r$$

bulunur. Yine (1.8.1) ifadesinde x yerine c , k yerine $e^{-i\gamma}$ ve n yerine de s konursa aynı yolla

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(c) e^{-is\gamma} t^s = e^{\frac{-ic}{i} \sin \gamma} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(be^{-i\gamma}) t^s$$

elde edilir. Bu son iki eşitlik taraf tarafa çarpılır ve düzenlenirse,

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(b) e^{ir\beta} t^r \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(c) e^{-is\gamma} t^s = e^{\frac{i}{i}(b \sin \beta - c \sin \gamma)} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_r(be^{i\beta}) J_s(be^{-i\gamma}) t^{r+s}$$

olur. (1.7.4) eşitliği gözönünde tutulursa,

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(b) e^{ir\beta} t^r \sum_{s=-\infty}^{\infty} J_s(c) e^{-is\gamma} t^s = e^{\frac{i}{i}(b \sin \beta - c \sin \gamma)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(be^{i\beta} + ce^{-i\gamma}) t^n \quad (1.8.2)$$

bulunur.

$$a = b(\cos \beta + i \sin \beta) + c(\cos \gamma - i \sin \gamma)$$

olsun. Burada $a = be^{i\beta} + ce^{-i\gamma}$ ve β, γ açıları ise $b \sin \beta - c \sin \gamma = 0$ olacak şekilde seçilsinler. Bu durumda

$$a = b \cos \beta + c \cos \gamma$$

olur. a, b ve c bir üçgenin kenarları, γ ve β açıları ise sırasıyla b ve c kenarlarının karşısındaki açılar olsunlar. Diğer açıya ise α denirse, $\alpha = \pi - (\beta + \gamma)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos \beta + c \cos \gamma)^2 + (b \sin \beta - c \sin \gamma)^2 \\ &= b^2 + c^2 + 2bc \cos(\beta + \gamma) \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \end{aligned}$$

bulunur. (1.8.2) eşitliğinde r yerine n ve s yerine $-n$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b) e^{in\beta} t^n \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{-n}(c) e^{in\gamma} t^{-n} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) t^n \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) t^n &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b) J_{-n}(c) e^{in(\beta+\gamma)} \right] t^0 \end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikte t^n in katsayıları karşılaştırılırsa $n = 0$ olmak zorundadır. Dolayısıyla,

$$J_0(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(b)J_{-n}(c)e^{in(\beta+\gamma)}$$

elde edilir. Burada $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}$ ve $\beta + \gamma = \pi - \alpha$ değerleri yerlerine konulurlarsa,

$$\begin{aligned} J_0(\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in(\pi-\alpha)} J_n(b)J_{-n}(c) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} e^{in(\pi-\alpha)} J_n(b)J_{-n}(c) + J_0(b)J_0(c) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} e^{in(\pi-\alpha)} J_n(b)J_{-n}(c) \end{aligned}$$

olur. Birinci toplamda n yerine $-n$ alınır, $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ve

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

oldukları gözönünde tutulurlarsa,

$$\begin{aligned} J_0(\sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha}) &= J_0(b)J_0(c) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(b)J_n(c) \cos(n\pi - n\alpha) \\ &= J_0(b)J_0(c) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(b)J_n(c) \cos(n\alpha) \end{aligned} \quad (1.8.3)$$

olarak elde edilir.

1.9 Bessel Fonksiyonları için İntegral Gösterimi

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Bessel diferensiyel denkleminde $y = x^n z$ dönüşümü yapılır ve türevler alınır,

$$y' = nx^{n-1}z + x^n z'$$

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}z + 2nx^{n-1}z' + x^n z''$$

bulunur. Bu türev değerleri Bessel diferensiyel denkleminde yerlerine konulurlarsa,

$$x^2 n(n-1)x^{n-2}z + x^2 2nx^{n-1}z' + x^{n+2}z'' + xnx^{n-1}z + x^{n+1}z' + x^{n+2}z - n^2 x^n z = 0$$

$$n^2 x^n z - n x^n z + 2n x^{n+1} z' + x^{n+2} z'' + n x^n z + x^{n+1} z' + x^{n+2} z - n^2 x^n z = 0$$

$$x^{n+2} z'' + (2n+1)x^{n+1} z' + x^{n+2} z = 0$$

elde edilir. Her iki tarafın x^{n+1} ile bölünmesi ile,

$$x z'' + (2n+1) z' + x z = 0 \quad (1.9.1)$$

bulunur. Bu denklemin,

$$z = \int \Phi(\lambda) e^{\lambda x} d\lambda \quad (1.9.2)$$

biçiminde bir çözümünü arayalım. Burada $\Phi(\lambda)$ fonksiyonu daha sonra belirlenecek olan belirli bir fonksiyondur. (1.9.2) nin x e göre türevleri alınırsa,

$$z' = \int \lambda \Phi(\lambda) e^{\lambda x} d\lambda$$

$$z'' = \int \lambda^2 \Phi(\lambda) e^{\lambda x} d\lambda$$

olur. Bu türev değerleri (1.9.1) diferensiyel denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\int \left[\Phi(\lambda) e^{\lambda x} (\lambda^2 + 1) x + \Phi(\lambda) e^{\lambda x} (2n+1) \lambda \right] d\lambda = 0 \quad (1.9.3)$$

elde edilir. Burada $\Phi(\lambda)$, fonksiyonu

$$\frac{d}{d\lambda} \Phi(\lambda) (\lambda^2 + 1) = \Phi(\lambda) (2n+1) \lambda \quad (1.9.4)$$

diferensiyel denklemini sağlayacak şekilde seçilen bir fonksiyon olsun. Bu eşitlik gözönünde tutulursa (1.9.3) denklemi,

$$\int e^{\lambda x} \left[x \Phi(\lambda) (\lambda^2 + 1) + \frac{d}{d\lambda} \{ \Phi(\lambda) (\lambda^2 + 1) \} \right] d\lambda = 0$$

$$\int \left[x e^{\lambda x} \Phi(\lambda) (\lambda^2 + 1) + e^{\lambda x} \Phi'(\lambda) (\lambda^2 + 1) + e^{\lambda x} \Phi(\lambda) 2\lambda \right] d\lambda = 0$$

$$\int \frac{d}{d\lambda} e^{\lambda x} \Phi(\lambda) (\lambda^2 + 1) d\lambda = 0$$

şeklinde yazılabilir.

$$\Theta(\lambda) = e^{\lambda x} \Phi(\lambda) (\lambda^2 + 1) \quad (1.9.5)$$

denilirse yukarıdaki integral,

$$\int \frac{d}{d\lambda} \Theta(\lambda) d\lambda = 0$$

halini alır. Buradaki integralin sıfır olması $\Theta(\lambda)$ fonksiyonunun integralin sınırlarında eşit değerler almasıyla mümkündür. (1.9.4) in her iki tarafı $\Phi(\lambda)(\lambda^2 + 1)$ ile bölünürse,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{d\lambda} [\Phi(\lambda)(\lambda^2 + 1)]}{\Phi(\lambda)(\lambda^2 + 1)} &= \frac{\Phi(\lambda)(2n + 1)\lambda}{\Phi(\lambda)(\lambda^2 + 1)} \\ &= \frac{(2n + 1)\lambda}{\lambda^2 + 1} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olur. Burada her iki yanın λ ya göre integrali alınırsa,

$$\ln\{\Phi(\lambda)(\lambda^2 + 1)\} = \frac{2n + 1}{2} \ln(\lambda^2 + 1) + \ln C$$

$$\ln\{\Phi(\lambda)(\lambda^2 + 1)\} = \ln\{C(\lambda^2 + 1)^{\frac{2n+1}{2}}\}$$

$$\Phi(\lambda)(\lambda^2 + 1) = C(\lambda^2 + 1)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\Phi(\lambda) = C(\lambda^2 + 1)^{n-\frac{1}{2}} \quad (1.9.6)$$

olarak bulunur. Burada C keyfi bir sabit olup özel olarak 1 değeri verilirse (1.9.2) den çözüm,

$$z = \int e^{\lambda x} (\lambda^2 + 1)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda$$

olarak bulunur. Bu durumda Bessel diferensiyel denkleminin çözümü ise,

$$y = x^n \int e^{\lambda x} (\lambda^2 + 1)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda \quad (1.9.7)$$

dir. $\Phi(\lambda)$ değeri (1.9.5) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Theta(\lambda) &= e^{\lambda x} \Phi(\lambda)(\lambda^2 + 1) \\ &= e^{\lambda x} (\lambda^2 + 1)^{n+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

olur ki bu fonksiyon, integralin sınırlarında eşit değerler alır. (1.9.5) ve (1.9.7) fonksiyonlarında λ yerine $i\lambda$ konulursa,

$$y = x^n \int e^{i\lambda x} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda$$

ve

$$\Theta(\lambda) = e^{i\lambda x} (1 - \lambda^2)^{n+\frac{1}{2}}$$

olarak bulunur. $\Theta(\lambda)$ fonksiyonu sınırlarda eşit değerler aldığından $n > -\frac{1}{2}$ için,

$$\left[\Theta(\lambda) = e^{i\lambda x} (1 - \lambda^2)^{n+\frac{1}{2}} \right]_{\lambda_1}^{\lambda_2} = 0$$

$$e^{i\lambda_1 x} (1 - \lambda_1^2)^{n+\frac{1}{2}} = e^{i\lambda_2 x} (1 - \lambda_2^2)^{n+\frac{1}{2}}$$

olur. Bu eşitlik $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$ için sağlanır. Dolayısıyla Bessel denkleminin çözümü,

$$I \equiv x^n \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda \quad (1.9.8)$$

olarak bulunur ki bu bir Bessel fonksiyonudur.

$$\begin{aligned}e^{i\lambda x} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\lambda x)^r}{r!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\lambda x)^{2r}}{(2r)!} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\lambda x)^{2r+1}}{(2r+1)!}\end{aligned}$$

olduğu gözönünde tutulursa (1.9.8) eşitliği,

$$\begin{aligned}I &= x^n \int_{-1}^1 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\lambda x)^{2r} \lambda^{2r}}{2r!} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda \\ &+ x^n \int_{-1}^1 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(i\lambda x)^{2r+1}}{(2r+1)!} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. λ ya göre λ^{2r} , $1 - \lambda^2$ fonksiyonları çift ve λ^{2r+1} fonksiyonu tekdir. İki tek ya da iki çift fonksiyonun çarpımı çift, biri tek diğeri çift fonksiyonun çarpımı ise tektir. Simetrik aralıkta tek fonksiyonun integrali sıfır, çift fonksiyonun integrali ise integral aralığının yarısının iki katına eşittir. Dolayısıyla yukarıdaki integral,

$$I = x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!} 2 \int_0^1 \lambda^{2r} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda \quad (1.9.9)$$

değerine eşittir. Eşitliğin ikinci kısmındaki integralde $\lambda^2 = \mu$ alınırsa integral ifadesi,

$$\int_0^1 \lambda^{2r} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda = \frac{1}{2} \int_0^1 \mu^{r-\frac{1}{2}} (1 - \mu)^{n-\frac{1}{2}} d\mu$$

olur.

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1 - t)^{y-1} dt, B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

oldukları gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda^{2r} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda &= \frac{1}{2} B\left(r + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n + r + 1)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2^r} \sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n + r + 1)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu ifade (1.9.9) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} I &= x^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r)!} \frac{\frac{1}{2^r} \sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n + r + 1)} \\ &= \sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) 2^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n + r + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\ I &= \sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) 2^n J_n(x) \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

olur. $n > -\frac{1}{2}$ için (1.9.8) ve (1.9.10) den,

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{-1}^1 e^{i\lambda x} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda \quad (1.9.11)$$

olarak bulunur. Yine $n > -\frac{1}{2}$ için λ yerine $-\lambda$ alınırsa,

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_{-1}^1 e^{-i\lambda x} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda \quad (1.9.12)$$

olur. (1.9.11) ve (1.9.12) taraf tarafa toplanır ve $\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$J_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^1 \cos(\lambda x) (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda$$

olarak bulunur. Bu son eşitlikte $\lambda = \sin \phi$ alınırsa $J_n(x)$ fonksiyonu,

$$J_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^1 \cos(x \sin \phi) (\cos \phi)^{2n} d\phi$$

şeklinde ifade edilir. Son olarak ϕ yerine $\frac{\pi}{2} - \phi$ alınır ve

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y, \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

oldukları gözönünde tutulursa,

$$J_n(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^n \int_0^1 \cos(x \cos \phi) (\sin \phi)^{2n} d\phi$$

olarak elde edilir.

1.10 $G_n(x)$ Bessel Fonksiyonu

$$G_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ J_{-n}(x) - e^{-in\pi} J_n(x) \right\} \quad (1.10.1)$$

fonksiyonu 2 inci çeşit Bessel fonksiyonu olan $Y_n(x)$ in yerine kullanılabilir. Şimdi bunu görelim. n sıfır ya da tamsayı iken (1.10.1) in sol tarafındaki pay ve payda sıfıra gider. Dolayısıyla sıfır bölü sıfır belirsizliği olur. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ olduğu gözönünde tutularak L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$G_n(x) = \lim_{m \rightarrow n} \frac{1}{2 \cos m\pi} \left[\frac{\partial}{\partial m} J_{-m}(x) + (\pi \sin m\pi + i\pi \cos m\pi) J_m(x) - (\cos m\pi - i \sin m\pi) \frac{\partial}{\partial m} J_m(x) \right] \quad (1.10.2)$$

şeklinde elde edilir. (1.3.6) de n yerine m alınırsa,

$$J_m(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r}$$

olur. Bu ifadenin m e göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} J_m(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\quad - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+1)} \frac{\Gamma'(m+r+1)}{\Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial m} J_m(x) = \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_m(x) - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+1)} \frac{\Gamma'(m+r+1)}{\Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r} \quad (1.10.3)$$

bulunur. Yine (1.3.6) de n yerine $-m$ alınırsa,

$$J_{-m}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r}$$

olur. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ eşitliğinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(1-(m-r)) \frac{\Gamma(m-r)}{\Gamma(m-r)}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \\ &\quad + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r}{r!} \Gamma(m-r) \frac{\sin(m-r)\pi}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \\ &\quad + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \end{aligned}$$

halini alır. $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$ ve n tamsayı iken $\cos n\pi = (-1)^n$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m-r)}{r!} \frac{\sin m\pi}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \\ &\quad + \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin de m e göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m} J_{-m}(x) &= - \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(m-r)}{r!} \frac{\sin m\pi}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\
&+ \sum_{r=0}^{n-1} \left\{ \frac{\Gamma'(m-r)}{r!} \frac{\sin m\pi}{\pi} + \frac{\Gamma(m-r)}{r!} \cos m\pi \right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \\
&- \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\
&+ \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-m+r+1)} \frac{\Gamma'(-m+r+1)}{\Gamma(-m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r}
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial m} J_{-m}(x) &= - \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_{-m}(x) + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \left\{ \Gamma'(m-r) \frac{\sin m\pi}{\pi} \right. \\
&+ \left. \Gamma(m-r) \cos m\pi \right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \\
&+ \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-m+r+1)} \frac{\Gamma'(-m+r+1)}{\Gamma(-m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \quad (1.10.4)
\end{aligned}$$

bulunur. (1.10.3) ve (1.10.4) eşitlikleri (1.10.2) de yerlerine yazılırlarsa,

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \lim_{m \rightarrow n} \frac{1}{2 \cos m\pi} \left\{ - \ln\left(\frac{x}{2}\right) J_{-m}(x) + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{r!} \left\{ \Gamma'(m-r) \frac{\sin m\pi}{\pi} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \Gamma(m-r) \cos m\pi \right\} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \right. \\
&+ \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-m+r+1)} \frac{\Gamma'(-m+r+1)}{\Gamma(-m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2r} \\
&+ \pi (\sin m\pi + i \cos m\pi) J_m(x) - \left[\ln\left(\frac{x}{2}\right) J_m(x) \right. \\
&- \left. \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(m+r+1)} \frac{\Gamma'(m+r+1)}{\Gamma(m+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2r} \right] \left[\cos m\pi - i \sin m\pi \right] \Big\}
\end{aligned}$$

elde edilir. γ Euler sabiti olmak üzere $n \in \mathbb{Z}^+$, $\gamma > 0$ için

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x+1) \quad ; \quad \Psi(n) = \phi(n) - \gamma$$

$$\Phi(n) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \quad ; \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

$$\sin n\pi = 0 \quad \text{ve} \quad \cos n\pi = (-1)^n$$

oldukları gözönünde tutulursa $G_n(x)$,

$$\begin{aligned} G_n(x) = & \frac{1}{2} \left\{ -\ln \left(\frac{x}{2} \right) J_n(x) + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-r)}{r!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2r} \right. \\ & + (-1)^n \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r \Psi(-n+r)}{r! \Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2r} \\ & \left. - \ln \left(\frac{x}{2} \right) J_n(x) + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Psi(n+r)}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2r} + i\pi J_n(x) \right\} \end{aligned}$$

halini alır. Burada eşitliğin sağındaki ikinci toplamda r yerine $n+r$ alınır ve eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned} G_n(x) = & \frac{1}{2} \left\{ -2 \ln \left(\frac{x}{2} \right) J_n(x) + \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-r)}{r!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2r} \right. \\ & + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Psi(r)}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2r} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \Psi(n+r)}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2r} + i\pi J_n(x) \left. \right\} \end{aligned}$$

olur. Eşitliğin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü toplam birleştirilirse,

$$\begin{aligned} G_n(x) = & -\ln \left(\frac{x}{2} \right) J_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\Gamma(n-r)}{r!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2r} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r [\Psi(r) + \Psi(n+r)]}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2r} + \frac{1}{2} i\pi J_n(x) \\ = & -\ln \left(\frac{x}{2} \right) J_n(x) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-n+2r} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! (n+r)!} \left\{ \Phi(r) + \Phi(n+r) - 2\gamma \right\} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2r} + \frac{1}{2} i\pi J_n(x) \end{aligned} \quad (1.10.5)$$

olur. Burada (1.3.15) ve (1.3.6) eşitlikleri gözönünde tutulurlarsa,

$$G_n(x) = -Y_n(x) + (\ln 2 - \gamma + \frac{1}{2} i\pi) J_n(x) \quad (1.10.6)$$

elde edilir. Buradan,

$$Y_n(x) = -G_n(x) + (\ln 2 - \gamma + \frac{1}{2} i\pi) J_n(x)$$

olarak bulunur. Bu eşitlik ve (1.10.1) den

$$Y_n(x) = -\frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ J_{-n}(x) - e^{-in\pi} J_n(x) \right\} + (\ln 2 - \gamma + \frac{1}{2}i\pi) J_n(x)$$

elde edilir. $n \notin Z$ için $e^{-ix} = \cos x + i \sin x$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$Y_n(x) = -\frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ J_{-n}(x) - \cos n\pi J_n(x) \right\} + (\ln 2 - \gamma) J_n(x)$$

olarak bulunur. Buradan görülüyor ki $G_n(x)$ fonksiyonu 2 inci çeşit Bessel fonksiyonu olan $Y_n(x)$ in yerine kullanılabilir.

(1.10.1) eşitliğinde n yerine $-n$ alınır ve $\sin(-x) = -\sin x$ ifadesinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} G_{-n}(x) &= \frac{\pi}{2 \sin(-n\pi)} \left\{ J_n(x) - e^{in\pi} J_{-n}(x) \right\} \\ &= \frac{\pi}{-2 \sin n\pi} \left\{ J_n(x) - e^{in\pi} J_{-n}(x) \right\} \\ &= e^{in\pi} \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ J_{-n}(x) - e^{-in\pi} J_n(x) \right\} \\ &= e^{in\pi} G_n(x) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burada $n \in Z^-$ için $e^{-ix} = \cos x + i \sin x$, $\cos n\pi = (-1)^n$ ve $\sin n\pi = 0$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$G_{-n}(x) = (-1)^n G_n(x) \Rightarrow G_n(x) = (-1)^{-n} G_{-n}(x)$$

olur. Bu eşitlik ve $J_n(x) = (-1)^{-n} J_{-n}(x)$ eşitliği (1.10.6) da kullanılırsa,

$$(-1)^{-n} G_{-n}(x) = -Y_n(x) + (\ln 2 - \gamma + \frac{1}{2}i\pi)(-1)^{-n} J_{-n}(x)$$

bulunur. Buradan,

$$Y_n(x) = (-1)^{-n} \{-G_{-n}(x) + (\ln 2 - \gamma + \frac{1}{2}i\pi) J_{-n}(x)\} \Rightarrow Y_n(x) = (-1)^{-n} Y_{-n}(x)$$

olur. O halde,

$$Y_{-n}(x) = -G_{-n}(x) + (\ln 2 - \gamma + \frac{1}{2}i\pi) J_{-n}(x)$$

olarak elde edilir.

1.11 $G_n(x)$ Bessel Fonksiyonu için Bazı İndirgeme Formülleri

(1.10.1) in her iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$G'_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin(n\pi)} \left\{ J'_{-n}(x) - e^{-in\pi} J'_n(x) \right\}$$

olur. Her iki tarafın x ile çarpılması ile,

$$xG'_n(x) = \frac{\pi}{2 \sin(n\pi)} \left\{ xJ'_{-n}(x) - e^{-in\pi} xJ'_n(x) \right\} \quad (1.11.1)$$

bulunur. $xJ'_{-n}(x) = nJ_{-n}(x) + xJ_{-n-1}(x)$ ve $xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$ indirgeme formülleri (1.11.1) de yerlerine yazılırlarsa,

$$\begin{aligned} xG'_n(x) &= \frac{\pi}{2 \sin(n\pi)} \left\{ nJ_{-n}(x) + xJ_{-n-1}(x) - e^{-in\pi} nJ_n(x) + e^{-in\pi} xJ_{n+1}(x) \right\} \\ &= n \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ J_{-n}(x) - e^{-in\pi} J_n(x) \right\} + x \frac{\pi}{2 \sin(n\pi)} \left\{ J_{-n-1}(x) + e^{-in\pi} J_{n+1}(x) \right\} \end{aligned}$$

olur. $\sin n\pi = -\sin(n+1)\pi$ ve $e^{-in\pi} = -e^{-i(n+1)\pi}$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} xG'_n(x) &= n \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ J_{-n}(x) - e^{-in\pi} J_n(x) \right\} \\ &\quad - x \frac{\pi}{2 \sin(n+1)\pi} \left\{ J_{-n-1}(x) - e^{-i(n+1)\pi} J_{n+1}(x) \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Burada (1.10.1) eşitliğinden yararlanılırsa,

$$xG_n(x) = nG_n(x) - xG_{n+1}(x) \quad (1.11.2)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir. Benzer şekilde $xJ'_{-n}(x) = -nJ_{-n}(x) - xJ_{-n+1}(x)$ ve $xJ'_n(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$ indirgeme formülleri (1.11.1) de yerlerine yazılır, $\sin n\pi = -\sin(n-1)\pi$ ve $e^{-in\pi} = -e^{-i(n-1)\pi}$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} xG'_n(x) &= -n \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ J_{-n}(x) - e^{-in\pi} J_n(x) \right\} \\ &\quad + x \frac{\pi}{2 \sin(n-1)\pi} \left\{ J_{-n+1}(x) - e^{-i(n-1)\pi} J_{n-1}(x) \right\} \end{aligned}$$

olur. Yine (1.10.1) eşitliği kullanılırsa,

$$xG_n(x) = -nG_n(x) + xG_{n-1}(x) \quad (1.11.3)$$

$G_n(x)$ fonksiyonu için başka bir indirgeme bağıntısı elde edilir. $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ için bulunan bütün indirgeme bağıntıları benzer bir yolla $G_n(x)$ Bessel fonksiyonu için de elde edilebilir.

Not: $Y_n(x) = AJ_n(x) + BG_n(x)$ formunda olan herhangi bir Bessel fonksiyonu da bütün indirgeme bağıntılarını sağlar. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. Şimdi bunu görelim:

$$Y_n(x) = AJ_n(x) + BG_n(x)$$

fonksiyonunun x e göre türevi alınır ve x ile çarpılırsa,

$$xY_n'(x) = AxJ_n'(x) + BxG_n'(x) \quad (1.11.4)$$

bulunur. Bu denklemde (1.4.2) ve (1.11.2) indirgeme bağıntıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} xY_n'(x) &= A[nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)] + B[nG_n(x) - xG_{n+1}(x)] \\ &= n[AJ_n(x) + BG_n(x)] - x[AJ_{n+1}(x) + BG_{n+1}(x)] \\ &= nY_n(x) - xY_{n+1}(x) \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de (1.11.4) eşitliğinde (1.4.3) ve (1.11.3) indirgeme bağıntıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} xY_n'(x) &= A[-nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)] + B[-nG_n(x) + xG_{n-1}(x)] \\ &= -n[AJ_n(x) + BG_n(x)] + x[AJ_{n-1}(x) + BG_{n-1}(x)] \\ &= -nY_n(x) + xY_{n-1}(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi $Y_n(x) = AJ_n(x) + BG_n(x)$ formunda olan bir Bessel fonksiyonu da $J_n(x)$ ve $J_{-n}(x)$ için elde edilen indirgeme bağıntılarını gerçekler.

1.12 Bessel Fonksiyonları Arasındaki İlişki

Teorem 1.12.1 *Eğer, $P(x)$ ve $Q(x)$ n yinci basamaktan iki Bessel fonksiyonu ise o taktirde*

$$P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x) = \frac{C}{x} \quad (1.12.1)$$

dir. Burada C keyfi sabittir.

İspat: $P(x)$ ve $Q(x)$ fonksiyonları Bessel fonksiyonları olduğundan Bessel diferensiyel denklemini sağlarlar. Bu durumda

$$x^2P''(x) + xP'(x) + (x^2 - n^2)P(x) = 0$$

sağlanır. Her iki taraf $x \neq 0$ ile bölünürse,

$$xP''(x) + P'(x) + \frac{x^2 - n^2}{x}P(x) = 0$$

olur. Bu eşitlik ise,

$$\frac{d}{dx}[xP'(x)] = (n^2 - x^2)\frac{P(x)}{x}$$

biçiminde yazılabilir. Aynı işlemler $Q(x)$ için tekrarlanırsa,

$$\frac{d}{dx}[xQ'(x)] = (n^2 - x^2)\frac{Q(x)}{x}$$

bulunur.

$$\frac{d}{dx}[xQ'(x)] = (n^2 - x^2)\frac{Q(x)}{x} \quad \text{ve} \quad (n^2 - x^2)\frac{P(x)}{x} = \frac{d}{dx}[xP'(x)]$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$(n^2 - x^2)\frac{P(x)}{x} \frac{d}{dx}[xQ'(x)] = (n^2 - x^2)\frac{Q(x)}{x} \frac{d}{dx}[xP'(x)]$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı $\frac{x}{n^2 - x^2}$ ile çarpılır ve düzenlenirse,

$$P(x)\frac{d}{dx}[xQ'(x)] - Q(x)\frac{d}{dx}[xP'(x)] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik açık bir biçimde yazılırsa,

$$P(x)Q'(x) + xP(x)Q''(x) - P'(x)Q(x) - xP''(x)Q(x) = 0$$

olur. Bu ifadeye $xP'(x)Q'(x)$ eklenip çıkartılırsa,

$$\begin{aligned} P(x)Q'(x) + xP'(x)Q'(x) + xP(x)Q''(x) \\ - P'(x)Q(x) - xP'(x)Q'(x) - xP''(x)Q(x) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. İlk üç terim $xP(x)Q'(x)$ in türevi ve son üç terim de $xP'(x)Q(x)$ nin türevi olup,

$$\frac{d}{dx}[xP(x)Q'(x)] - \frac{d}{dx}[xP'(x)Q(x)] = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ x[P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x)] \right\} = 0$$

elde edilir. Her iki tarafın x e göre integrali alınır ve x ile bölünürse,

$$P(x)Q'(x) - P'(x)Q(x) = \frac{C}{x}$$

bulunur ki bu istenilendir.

Lemma 1.12.2

$$J_n(x)J'_{-n}(x) - J'_n(x)J_{-n}(x) = -\frac{2 \sin n\pi}{\pi x} \quad (1.12.2)$$

dir.

İspat: (1.12.1) eşitliğinde özel olarak $P(x) = J_n(x)$, $Q(x) = J_{-n}(x)$ alınırsa,

$$J_n(x)J'_{-n}(x) - J'_n(x)J_{-n}(x) = \frac{C}{x}$$

olur. Buradan eşitliğin her iki tarafı x ile çarpılır ve $x \rightarrow 0$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [xJ_n(x)J'_{-n}(x) - xJ'_n(x)J_{-n}(x)] = C \quad (1.12.3)$$

olur. Şimdi sırasıyla $\lim_{x \rightarrow 0} xJ_n(x)J'_{-n}(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow 0} xJ'_n(x)J_{-n}(x)$ değerlerini hesaplayalım.

$$xJ'_{-n}(x) = -nJ_{-n}(x) - xJ_{-n+1}(x)$$

indirgeme bağıntısının her iki yanını $J_n(x)$ ile çarpılırsa,

$$xJ_n(x)J'_{-n}(x) = -nJ_n(x)J_{-n}(x) - xJ_n(x)J_{-n+1}(x)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki yanının $x \rightarrow 0$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} xJ_n(x)J'_{-n}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -nJ_n(x)J_{-n}(x) - \lim_{x \rightarrow 0} xJ_n(x)J_{-n+1}(x) \quad (1.12.4)$$

olur. (1.3.6) ve (1.3.7) eşitliklerinden

$$J_n(x)J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{r!s!\Gamma(n+r+1)\Gamma(-n+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+2s}$$

ve

$$J_n(x)J_{-n+1}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{r!s!\Gamma(n+r+1)\Gamma(-n+s+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+2s+1}$$

olup, bu eşitlikler sırasıyla $-n$, x ile çarpılır ve $x \rightarrow 0$ için limitleri alınır,

$$\lim_{x \rightarrow 0} -nJ_n(x)J_{-n}(x) = \frac{-n}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-n)}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow 0} xJ_n(x)J_{-n+1}(x) = 0$$

elde edilir. Bu değerler (1.12.4) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} xJ_n(x)J'_{-n}(x) = \frac{-n}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-n)} \quad (1.12.5)$$

bulunur. Diğer taraftan benzer şekilde,

$$xJ'_n(x) = nJ_{-n}(x) - xJ_{n+1}(x)$$

indirgeme bağıntısı $J_{-n}(x)$ ile çarpılırsa,

$$xJ'_n(x)J_{-n}(x) = nJ_n(x)J_{-n}(x) - xJ_{n+1}(x)J_{-n}(x)$$

olur. Her iki tarafın $x \rightarrow 0$ için limiti alınır,

$$\lim_{x \rightarrow 0} xJ'_n(x)J_{-n}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} nJ_n(x)J_{-n}(x) - \lim_{x \rightarrow 0} xJ_{n+1}(x)J_{-n}(x) \quad (1.12.6)$$

bulunur. (1.3.6) ve (1.3.7) eşitliklerinden

$$J_n(x)J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{r!s!\Gamma(n+r+1)\Gamma(-n+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+2s}$$

ve

$$J_{n+1}(x)J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+s}}{r!s!\Gamma(n+r+2)\Gamma(-n+s+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+2s+1}$$

olup bu eşitlikler sırasıyla n , x ile çarpılır ve $x \rightarrow 0$ için limitleri alınır,

$$\lim_{x \rightarrow 0} nJ_n(x)J_{-n}(x) = \frac{n}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-n)}$$

ve

$$\lim_{x \rightarrow 0} x J_{n+1}(x) J_{-n}(x) = 0$$

elde edilir. Bu değerler (1.12.6) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x J_n(x) J'_{-n}(x) = \frac{-n}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-n)} \quad (1.12.7)$$

bulunur. (1.12.5) ve (1.12.7) eşitlikleri (1.12.3) in sol tarafında yerlerine yazılırlarsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[J_n(x) J'_{-n}(x) - J'_n(x) J_{-n}(x) \right] = \frac{-n}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-n)} - \frac{n}{\Gamma(n+1)\Gamma(1-n)}$$

olur. Burada $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ özelliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \left[J_n(x) J'_{-n}(x) - J'_n(x) J_{-n}(x) \right] &= \frac{-n}{n\Gamma(n)\Gamma(1-n)} - \frac{n}{\Gamma(n+1)(-n)\Gamma(-n)} \\ &= -\frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(1-n)} + \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(-n)} \end{aligned}$$

bulunur.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = -x\Gamma(-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

ve

$$\Gamma(-x)\Gamma(1+x) = x\Gamma(-x)\Gamma(x) = \frac{-\pi}{\sin \pi x}$$

oldukları gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \left[J_n(x) J'_{-n}(x) - J'_n(x) J_{-n}(x) \right] &= \frac{-\sin \pi n}{\pi} - \frac{\sin \pi n}{\pi} \\ &= -\frac{2}{\pi} \sin n\pi \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan C değeri $-\frac{2}{\pi} \sin n\pi$ olarak bulunur. Bu ise istenilendir.

Sonuç 1.12.3

$$J_n(x) J_{-n+1}(x) + J_{-n}(x) J_{n-1}(x) = \frac{2 \sin n\pi}{\pi x} \quad (1.12.8)$$

dir.

İspat: (1.12.2) nın her iki yanı x ile çarpılırsa,

$$J_n(x)xJ'_{-n}(x) - xJ'_n(x)J_{-n}(x) = -\frac{2 \sin n\pi}{\pi}$$

olur. Burada $xJ'_{-n}(x) = -nJ_{-n}(x) - xJ_{-n+1}(x)$ ve $xJ'_n(x) = -nJ_n(x) + xJ_{n-1}(x)$ indirgeme bağıntıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} -\frac{2 \sin n\pi}{\pi} &= xJ_n(x)J'_{-n}(x) - xJ'_n(x)J_{-n}(x) \\ &= -nJ_n(x)J_{-n}(x) - xJ_n(x)J_{-n+1}(x) \\ &\quad + nJ_n(x)J_{-n}(x) - xJ_{-n}(x)J_{n-1}(x) \\ &= -x[J_n(x)J_{-n+1}(x) + J_{-n}(x)J_{n-1}(x)] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan istenilen elde edilir.

Sonuç 1.12.4

$$-J_n(x)J_{-n-1}(x) - J_{-n}(x)J_{n+1}(x) = \frac{2 \sin n\pi}{\pi x} \quad (1.12.9)$$

dir.

İspat: Yine (1.12.2) eşitliği x ile çarpılır ve $xJ'_{-n}(x) = nJ_{-n}(x) + xJ_{-n-1}(x)$, $xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$ indirgeme bağıntıları kullanılırsa benzer yolla,

$$-xJ_n(x)J_{-n-1}(x) - xJ_{-n}(x)J_{n+1}(x) = \frac{2 \sin n\pi}{\pi}$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

Lemma 1.12.5

$$G_n(x)J'_n(x) - G'_n(x)J_n(x) = \frac{1}{x} \quad (1.12.10)$$

dir.

İspat: (1.12.1) eşitliğinde $P(x) = G_n(x)$ ve $Q(x) = J_n(x)$ alınır ve x ile çarpılırsa,

$$xG_n(x)J'_n(x) - xG'_n(x)J_n(x) = C \quad (1.12.11)$$

olur. Şimdi sırasıyla $xG_n(x)J'_n(x)$ ve $xG'_n(x)J_n(x)$ ifadelerini bulalım. (1.10.1) eşitliği ile $xJ'_n(x)$ çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
xG_n(x)J'_n(x) &= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ J_{-n}(x) - e^{-in\pi} J_n(x) \right\} xJ'_n(x) \\
&= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ'_n(x)J_{-n}(x) - e^{-in\pi} xJ'_n(x)J_n(x) \right\}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (1.11.1) ifadesi ile $J_n(x)$ çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
xG'_n(x)J_n(x) &= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ'_{-n}(x) - e^{-in\pi} xJ'_n(x) \right\} J_n(x) \\
&= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ'_{-n}(x)J_n(x) - e^{-in\pi} xJ'_n(x)J_n(x) \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (1.12.11) da yerlerine yazılırlarsa,

$$\begin{aligned}
xG_n(x)J'_n(x) - xG'_n(x)J_n(x) &= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ'_n(x)J_{-n}(x) - e^{-in\pi} xJ'_n(x)J_n(x) \right\} \\
&\quad - \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ'_{-n}(x)J_n(x) - e^{-in\pi} xJ'_n(x)J_n(x) \right\}
\end{aligned}$$

$$x \left[G_n(x)J'_n(x) - G'_n(x)J_n(x) \right] = \frac{\pi}{2 \sin n\pi} x \left[J'_n(x)J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)J_n(x) \right]$$

olur. Bu eşitlikte (1.12.2) kullanılırsa,

$$x \left[G_n(x)J'_n(x) - G'_n(x)J_n(x) \right] = 1$$

elde edilir. Buradan C sabiti 1 olarak bulunur. Bu ise istenilendir.

Sonuç 1.12.6

$$G_{n+1}(x)J_n(x) - G_n(x)J_{n+1}(x) = \frac{1}{x} \quad (1.12.12)$$

dir.

(1.12.10) nin her iki tarafı x ile çarpılırsa,

$$G_n(x)xJ'_n(x) - xG'_n(x)J_n(x) = 1$$

olup bu eşitlikte

$xG'_n(x) = nG_n(x) - xG_{n+1}(x)$ ve $xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$ indirgeme bağıntıları kullanılırsa,

$$xG_{n+1}(x)J_n(x) - xG_n(x)J_{n+1}(x) = 1$$

elde edilir. Böylece istenilen bulunmuş olur.

Lemma 1.12.7

$$J_n(x)Y'_n(x) - J'_n(x)Y_n(x) = \frac{1}{x} \quad (1.12.13)$$

dir.

İspat: (1.12.1) eşitliğinde $P(x) = J_n(x)$ ve $Q(x) = Y_n(x)$ alınır ve x ile çarpılırsa,

$$xJ_n(x)Y'_n(x) - xJ'_n(x)Y_n(x) = C \quad (1.12.14)$$

olur. Şimdi sırasıyla $xJ_n(x)Y'_n(x)$ ve $xJ'_n(x)Y_n(x)$ ifadelerini bulalım.

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= -\frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ J_{-n}(x) - \cos n\pi J_n(x) \right\} \\ &+ (\ln 2 - \gamma) J_n(x) \end{aligned}$$

ifadesinin x e göre türevi alınır ve $xJ_n(x)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} xY'_n(x)J_n(x) &= -\frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ'_{-n}(x)J_n(x) - x \cos n\pi J'_n(x)J_n(x) \right\} \\ &+ (\ln 2 - \gamma)xJ'_n(x)J_n(x) \end{aligned}$$

bulunur. Aynı ifade $xJ'_n(x)$ çarpılırsa,

$$\begin{aligned} xY_n(x)J'_n(x) &= -\frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ_{-n}(x)J'_n(x) - x \cos n\pi J_n(x)J'_n(x) \right\} \\ &+ (\ln 2 - \gamma)xJ_n(x)J'_n(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (1.12.14) de yerlerine yazılırlarsa,

$$\begin{aligned} xY'_n(x)J_n(x) - xY_n(x)J'_n(x) &= -\frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ'_{-n}(x)J_n(x) - x \cos n\pi J'_n(x)J_n(x) \right\} \\ &+ (\ln 2 - \gamma)xJ'_n(x)J_n(x) \\ &+ \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ_{-n}(x)J'_n(x) - x \cos n\pi J_n(x)J'_n(x) \right\} \\ &- (\ln 2 - \gamma)xJ_n(x)J'_n(x) \\ &= -\frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ xJ'_{-n}(x)J_n(x) - xJ_{-n}(x)J'_n(x) \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada (1.12.2) eşitliği kullanılırsa,

$$x \left[Y'_n(x)J_n(x) - Y_n(x)J'_n(x) \right] = 1$$

elde edilir. Buradan C sabiti 1 olarak bulunur ki bu istenilendir.

Sonuç 1.12.8

$$J_{n+1}(x)Y_n(x) - J_n(x)Y_{n+1}(x) = \frac{1}{x} \quad (1.12.15)$$

dir.

İspat: (1.12.13) in her iki yanı x ile çarpılırsa,

$$J_n(x)xY'_n(x) - xJ'_n(x)Y_n(x) = 1$$

olur. Bu eşitlikte $xY'_n(x) = nY_n(x) - xY_{n+1}(x)$ ve $xJ'_n(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$ indirgeme bağıntıları kullanılırsa,

$$xJ_{n+1}(x)Y_n(x) - xJ_n(x)Y_{n+1}(x) = 1$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

2 BESSEL VE DEĞİŞTİRİLMİŞ BESSEL FONKSİYONLARI İÇİN İNTEGRAL GÖSTERİMİ

2.1 Giriş

Bu bölümde Bessel fonksiyonları için integral gösterimleri bulunacaktır. Daha sonra Değiştirilmiş Bessel denklemi tanımlanarak çözümleri olan Değiştirilmiş Bessel fonksiyonları ve onların özelliklerinden söz edilecektir.

2.2 Bessel Fonksiyonları için İntegral İfadelerinin Ek Gösterimi

Teorem 2.2.1 $n > -\frac{1}{2}$ ve $x > 0$ için

$$y = x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n+1}} \left\{ A e^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi + i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}} + B e^{-\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi - i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}} \right\} e^{-2x \cot \theta} d\theta \quad (2.2.1)$$

dir.

İspat: (1.9.7) denkleminde $\lambda = -2\nu \pm i$ alınırsa,

$$\begin{aligned} y &= x^n \int e^{-2\nu x \pm ix} (4\nu^2 \mp 4i\nu)^{n-\frac{1}{2}} (-2) d\nu \\ &= -2(\mp 4i)^{n-\frac{1}{2}} x^n e^{\pm ix} \int e^{-2\nu x} (\nu \pm i\nu^2)^{n-\frac{1}{2}} d\nu \end{aligned}$$

olur. y fonksiyonu Bessel denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$y = x^n e^{\pm ix} \int e^{-2\nu x} (\nu \pm i\nu^2)^{n-\frac{1}{2}} d\nu \quad (2.2.2)$$

fonksiyonuda Bessel denkleminin bir çözümüdür. (1.9.6) da $\lambda = -2\nu \pm i$ alınırsa,

$$\Phi(\nu) = (\mp 4i)^{n-\frac{1}{2}} C(\nu \pm i\nu^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

bulunur. Burada C keyfi sabittir. Son eşitlik ve (1.9.5) den

$$\Theta(\nu) = e^{-2\nu x \pm ix} (\mp 4i)^{n+\frac{1}{2}} C(\nu \pm i\nu^2)^{n+\frac{1}{2}}$$

dir. Burada C sabiti özel olarak $(\mp 4i)^{-n-\frac{1}{2}}$ seçilirse,

$$\Theta(\nu) = e^{-2\nu x \pm ix} (\nu \pm i\nu^2)^{n+\frac{1}{2}}$$

olur. Θ fonksiyonu integralin sınırlarında eşit değerler aldığından $n > -\frac{1}{2}$ için bu değerler,

$$e^{-2\nu x \pm ix} (\nu \pm i\nu^2)^{n+\frac{1}{2}} \Big|_{\nu_1}^{\nu_2} = 0$$

eşitliğinden $\nu_1 = 0$ ve $\nu_2 = \infty$ olarak alınabilir. O halde $n > -\frac{1}{2}$ için çözüm,

$$y = x^n e^{\pm ix} \int_0^\infty e^{-2\nu x} (\nu \pm i\nu^2)^{n-\frac{1}{2}} d\nu$$

dir. Bu çözümlerin herhangi lineer kombinasyonları da çözüm olacağından

$$y = x^n \left\{ A e^{ix} \int_0^\infty e^{-2\nu x} (\nu + i\nu^2)^{n-\frac{1}{2}} d\nu + B e^{-ix} \int_0^\infty e^{-2\nu x} (\nu - i\nu^2)^{n-\frac{1}{2}} d\nu \right\} \quad (2.2.3)$$

ifadesi de bir çözümdür ve bu çözüm $x > 0$ için geçerlidir.

(2.2.3) de $\nu = \tan \theta$ şeklinde bağımsız değişken değiştirilirse,

$$y = x^n \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} A e^{ix} e^{-2x \tan \theta} (\tan \theta + i \tan^2 \theta)^{n-\frac{1}{2}} + B e^{-ix} e^{-2x \tan \theta} (\tan \theta - i \tan^2 \theta)^{n-\frac{1}{2}} \right\} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

olur. $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ ve $\cos x - i \sin x = e^{-ix}$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$(\tan \theta + i \tan^2 \theta)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{(\sin \theta)^{n-\frac{1}{2}} (e^{i\theta})^{n-\frac{1}{2}}}{(\cos \theta)^{2n-1}}$$

ve

$$(\tan \theta - i \tan^2 \theta)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{(\sin \theta)^{n-\frac{1}{2}} (e^{-i\theta})^{n-\frac{1}{2}}}{(\cos \theta)^{2n-1}}$$

bulunur. Bu eşitlikler son denklemden yerlerine yazılır ve denklem düzenlenirse,

$$y = x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\cos \theta)^{2n+1}} \left\{ A e^{ix+i(n-\frac{1}{2})\theta} + B e^{-ix-i(n-\frac{1}{2})\theta} \right\} e^{-2x \tan \theta} d\theta$$

elde edilir. θ yerine $\frac{\pi}{2} - \theta$ alınır ve

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x \quad , \quad \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

oldukları gözönünde tutulursa,

$$y = x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n+1}} \left\{ A e^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi + i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}} + B e^{-\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi - i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}} \right\} e^{-2x \cot \theta} d\theta$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

(2.2.1) fonksiyonunda özel olarak

$$A = -ie^{-\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi}, \quad B = ie^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi} \quad (2.2.4)$$

seçilirse bu durumda çözüm,

$$\begin{aligned} Z_n &= x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n+1}} \left\{ -ie^{-\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi} e^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi + i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}} \right. \\ &\quad \left. + ie^{\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi} e^{-\frac{1}{2}(n-\frac{1}{2})i\pi - i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}} \right\} e^{-2x \cot \theta} d\theta \\ &= x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n+1}} \left\{ -ie^{i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}} + ie^{-i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}} \right\} e^{-2x \cot \theta} d\theta \\ &= x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n+1}} \left\{ 2 \frac{e^{i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}} - e^{-i\{x-(n-\frac{1}{2})\theta\}}}{2i} \right\} e^{-2x \cot \theta} d\theta \end{aligned}$$

halini alır. $\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$Z_n = 2x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n+1}} \sin\{x - (n - \frac{1}{2})\theta\} e^{-2x \cot \theta} d\theta \quad (2.2.5)$$

olarak bulunur.

$x \rightarrow 0$ için (2.2.5) deki integral ifadesi $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$ değerleri için yakınsaktır. Şimdi bunu görelim. (2.2.5) ifadesinin her iki yanını x^n ile bölünür ve $x \rightarrow 0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n+1}} \sin\left(\frac{1-2n}{2}\theta\right) d\theta \quad (2.2.6)$$

olur. $n > -\frac{1}{2}$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ için $\sin(\frac{1-2n}{2}\theta) < \sin \theta$ olduğundan

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} &< 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}} (\sin \theta)^{-2n-1} \sin \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}} (\sin \theta)^{-2n} d\theta \end{aligned}$$

olup $x > 0$ ve $y > 0$ için $B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{2x-1} (\sin \theta)^{2y-1} d\theta$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} \leq B\left(\frac{2n+1}{4}, \frac{1-2n}{2}\right)$$

bulunur. Bu ise $x \rightarrow 0$ iken (2.2.5) deki integral ifadesinin $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$ için yakınsak olmasını gerektirir.

Lemma 2.2.2 $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$ için

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{2^{2n} \Gamma(n + 1)} \quad (2.2.7)$$

dir.

İspat: (2.2.6) eşitliğinde $m = \frac{1}{2} - n$ alınırsa, $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$ olduğundan $0 < m < 1$ olur. (2.2.6) ifadesi de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{-m} (\sin \theta)^{2m-2} \sin m\theta d\theta \quad (2.2.8)$$

halini alır. $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ için $\sin nx = n \sin x F\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}; \sin^2 x\right)$ olduğu gözönünde tutulursa $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ için

$$\sin m\theta = m \sin \theta F\left(\frac{1+m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{3}{2}; \sin^2 \theta\right)$$

yazılabilir. Bu değer (2.2.8) de yerine konur ve $u = \sin^2 \theta$ bağımsız değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} = m \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{-\frac{1+m}{2}} F\left(\frac{1+m}{2}, \frac{1-m}{2}, \frac{3}{2}; u\right) du$$

bulunur. Yukarıdaki eşitlikte

$$F(a, b, c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n$$

olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} &= m \int_0^1 u^{m-1} (1-u)^{-\frac{1+m}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+m}{2}\right)_n \left(\frac{1-m}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!} u^n \\ &= m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+m}{2}\right)_n \left(\frac{1-m}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!} \int_0^1 u^{m+n-1} (1-u)^{-\frac{1+m}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ ve $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$,
 $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} &= m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+m}{2}\right)_n \left(\frac{1-m}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n n!} B(m+n, \frac{1-m}{2}) \\
&= m \left\{ \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 0!} B(m, \frac{1-m}{2}) + \frac{\frac{1+m}{2} \frac{1-m}{2}}{\frac{3}{2} 1!} B(m+1, \frac{1-m}{2}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1+m}{2} \frac{3+m}{2} \frac{1-m}{2} \frac{3-m}{2}}{\frac{3}{2} \frac{5}{2} 2!} B(m+2, \frac{1-m}{2}) + \dots \right\} \\
&= m \left\{ B(m, \frac{1-m}{2}) + \frac{\frac{1+m}{2} \frac{1-m}{2}}{\frac{3}{2} 1!} \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1-m}{2})}{\Gamma(\frac{m+3}{2})} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1+m}{2} \frac{3+m}{2} \frac{1-m}{2} \frac{3-m}{2}}{\frac{3}{2} \frac{5}{2} 2!} \frac{\Gamma(m+2)\Gamma(\frac{1-m}{2})}{\Gamma(\frac{m+5}{2})} + \dots \right\} \\
&= m \left\{ B(m, \frac{1-m}{2}) + \frac{\frac{1+m}{2} \frac{1-m}{2}}{\frac{3}{2} 1!} \frac{m\Gamma(m)\Gamma(\frac{1-m}{2})}{\frac{m+1}{2}\Gamma(\frac{m+1}{2})} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{1+m}{2} \frac{3+m}{2} \frac{1-m}{2} \frac{3-m}{2}}{\frac{3}{2} \frac{5}{2} 2!} \frac{(m+1)m\Gamma(m)\Gamma(\frac{1-m}{2})}{\frac{m+3}{2} \frac{m+1}{2}\Gamma(\frac{m+1}{2})} + \dots \right\}
\end{aligned}$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} &= m \left\{ B(m, \frac{1-m}{2}) + \frac{m(1-m)}{3 \cdot 1!} B\left(m, \frac{1-m}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m(m+1)(1-m)(3-m)}{3 \cdot 5 \cdot 2!} B(m, \frac{1-m}{2}) + \dots \right\} \\
&= m B(m, \frac{1-m}{2}) \left\{ 1 + \frac{\frac{1-m}{2} m}{\frac{3}{2} 1!} + \frac{\frac{1-m}{2} \frac{3-m}{2} m(m+1)}{\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot 2!} + \dots \right\} \\
&= m B(m, \frac{1-m}{2}) F\left(\frac{1-m}{2}, m, \frac{3}{2}; 1\right)
\end{aligned}$$

bulunur. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ ve $\gamma > 0$, $\gamma - \alpha - \beta > 0$ için

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

eşitliği gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} &= m \frac{\Gamma(m)\Gamma(\frac{1-m}{2})}{\Gamma(\frac{1+m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(1 - \frac{m}{2})}{\Gamma(1 + \frac{m}{2})\Gamma(\frac{3}{2} - m)} \\
&= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(\frac{1-m}{2})}{\Gamma(\frac{1+m}{2})} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(1 - \frac{m}{2})}{\Gamma(1 + \frac{m}{2})\Gamma(\frac{3}{2} - m)} \quad (2.2.9)
\end{aligned}$$

olur.

$$\Gamma(2x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2}) 2^{2x-1} \quad (2.2.10)$$

ifadesinde $x = \frac{1-m}{2}$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \Gamma(1-m) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1-m}{2}) \Gamma(1 - \frac{m}{2}) 2^{-m} \\ \Rightarrow \Gamma(\frac{1-m}{2}) \Gamma(1 - \frac{m}{2}) &= \sqrt{\pi} \Gamma(1-m) 2^m \end{aligned}$$

ve yine (2.2.10) ifadesinde $x = \frac{1+m}{2}$ alınırsa,

$$\Gamma(\frac{1+m}{2}) \Gamma(1 + \frac{m}{2}) = \sqrt{\pi} \Gamma(1+m) 2^{-m}$$

bulunur. Bu değerler (2.2.9) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} = \frac{\Gamma(\frac{3}{2}) \Gamma(m+1) \Gamma(\frac{1-m}{2}) \Gamma(1 - \frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2} - m) \Gamma(\frac{1+m}{2}) \Gamma(1 + \frac{m}{2})}$$

elde edilir. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ve $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ifadelerinden yararlanılırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} = 2^{2m-1} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(1-m)}{\Gamma(\frac{3}{2} - m)}$$

halini alır. $m = \frac{1}{2} - n$ değeri yerine yazılırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{2^{2n} \Gamma(n+1)}$$

olur. Bu ise istenilendir.

$Z_n(x)$ Bessel fonksiyonu olduğundan $n > -\frac{1}{2}$, $n \notin Z$ için

$$Z_n(x) = C J_n(x) + D J_{-n}(x)$$

biçiminde yazılabilir. Burada C ve D keyfi sabitlerdir. Her iki taraf x^n ile bölünür ve $x \rightarrow 0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} = C \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_n(x)}{x^n} + D \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_{-n}(x)}{x^n}$$

elde edilir.

Gösterilebilir ki $n > -\frac{1}{2}$ için $J_n(x)$ Bessel fonksiyonu $Z_n(x)$ in bir sabit katıdır. Bunu aşağıdaki durumlarda inceleyelim.

Durum 1: $(0 < n < \frac{1}{2} \text{ ise})$

(1.3.6) ifadesi x^n ile bölünür ve $x \rightarrow 0$ için limit alınır,sa,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_n(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \frac{x^{2r}}{2^{n+2r}} \\ &= \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (1.3.7) ifadesi x^n ile bölünür ve $x \rightarrow 0$ için limit alınır,sa,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_{-n}(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(-n+r+1)} \frac{x^{-2n+2r}}{2^{-n+2r}} \\ &= \infty \end{aligned}$$

elde edilir ki bu durumda,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Z_n(x)}{x^n} = C \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} + D \lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_{-n}(x)}{x^n} \quad (2.2.11)$$

eşitliğinden D sıfır olmak zorundadır. (2.2.7) ve (2.2.11) ifadelerinden,

$$C \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{2^{2n} \Gamma(n+1)} \Rightarrow C = \sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2}) 2^{-n}$$

olmalıdır. Buradan,

$$Z_n(x) = \sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2}) 2^{-n} J_n(x)$$

elde edilir. Bu ifade ve (2.2.5) in birlikte kullanılırsa,

$$\sqrt{\pi} \Gamma(n + \frac{1}{2}) 2^{-n} J_n(x) = 2x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n+1}} \sin\{x - (n - \frac{1}{2})\theta\} e^{-2x \cot \theta} d\theta$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \frac{2^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} Z_n(x) \\
&= \frac{2^{n+1}x^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n+1}} \sin\{x - (n - \frac{1}{2})\theta\} e^{-2x \cot \theta} d\theta \quad (2.2.12)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi $0 < n < \frac{1}{2}$ için $J_n(x)$ Bessel fonksiyonu, $Z_n(x)$ fonksiyonunun bir sabit katıdır.

Durum 2: ($-\frac{1}{2} < n < 0$ ise)

(1.3.6) ifadesi x^n ile bölünür ve $x \rightarrow 0$ için limit alınır,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_n(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)} \frac{x^{2r}}{2^{n+2r}} \\
&= \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde (1.3.7) ifadesi x^n ile bölünür ve $x \rightarrow 0$ için limit alınır,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{J_{-n}(x)}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \frac{x^{-2n+2r}}{2^{-n+2r}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda (2.2.11) formülündeki D sabiti sıfır olmak zorunda değildir. Yine (2.2.7) ve (2.2.11) ifadelerinden,

$$C = \sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})2^{-n}$$

bulunur. Buradan C sabiti görüldüğü gibi Durum 1 deki değerle aynıdır. $-\frac{1}{2} < n < 0$ için yine (2.2.12) eşitliği geçerlidir.

Durum 3: ($\frac{1}{2} < n < 1$ ise)

Bu durumda D sabitinin sıfır olduğunu göstermek için (2.2.5) ifadesindeki integrali, kısmi integrasyon uygulayarak alalım.

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} e^{-2x \cot \theta} d\theta = dv \quad ; \quad \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}} \sin\{x - (n - \frac{1}{2})\theta\}}{(\sin \theta)^{2n-1}} = u$$

denilirse,

$$v = \frac{1}{2x} e^{-2x \cot \theta}$$

ve

$$du = \left\{ -\left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{3}{2}} \cos\left\{x - \frac{2n+1}{2}\theta\right\}}{(\sin \theta)^{2n-1}} - (2n-1) \frac{(\cos \theta)^{n+\frac{1}{2}} \sin\left\{x - \frac{2n-1}{2}\theta\right\}}{(\sin \theta)^{2n}} \right\}$$

olur. Bu ifadeler (2.2.5) de yerlerine konulurlarsa,

$$\begin{aligned} Z_n(x) &= x^{n-1} \left[\frac{(\cos \theta)^{n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n-1}} \sin\left(x - \frac{2n-1}{2}\theta\right) e^{-2x \cot \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \left(n - \frac{1}{2}\right) x^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{3}{2}}}{(\sin \theta)^{2n-1}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{2}\theta\right) e^{-2x \cot \theta} d\theta \\ &\quad + (2n-1) x^{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n+\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n}} \sin\left(x - \frac{2n-1}{2}\theta\right) e^{-2x \cot \theta} d\theta \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

bulunur. Son eşitlikte sağdaki ilk terim $n > \frac{1}{2}$ için sıfıra gider. Diğer iki integral $x \rightarrow 0$ olduğunda $n < 1$ için yakınsaktır. Buradan $\frac{1}{2} < n < 1$ için $\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} Z_n(x)]$ limit değeri sonlu bir değer alırken $\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} J_{-n}(x)]$ limit değeri sonsuz değerini alır. Şimdi bunları görelim.

(2.2.13) eşitliğindeki ilk integrale kısalık bakımından I diyelim. I integrali x^{1-n} ile çarpılır ve $x \rightarrow 0$ için limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} I] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(n - \frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{3}{2}}}{(\sin \theta)^{2n-1}} \cos\left(x - \frac{2n+1}{2}\theta\right) e^{-2x \cot \theta} d\theta \\ &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n-\frac{3}{2}}}{(\sin \theta)^{2n-1}} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) d\theta \end{aligned}$$

olur. $\cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right)$ nın maksimum değeri 1 olduğundan yukarıdaki eşitlik,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} I] \leq \left(n - \frac{1}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{n-\frac{3}{2}} (\sin \theta)^{1-2n} d\theta (\sin \theta)^{1-2n} d\theta$$

eşitsizliğine dönüşür. $x > 0$ ve $y > 0$ için

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2x-1} (\sin t)^{2y-1} dt$$

olduğu gözönünde tutulursa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} I] \leq \frac{(n - \frac{1}{2})}{2} B(\frac{2n-1}{4}, 1-n)$$

bulunur. Burada $\frac{2n-1}{4} > 0$ ve $1-n > 0$ dır. Bu ise $\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} I]$ ifadesinin $\frac{1}{2} < n < 1$ için yakınsak olması demektir.

(2.2.13) eşitliğindeki ikinci integralin yakınsaklığını göstermek için (2.2.13) deki ikinci integrali II ile gösterelim. II integrali x^{1-n} ile çarpılır ve $x \rightarrow 0$ için limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} II] &= \lim_{x \rightarrow 0} (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n+\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n}} \sin(x - \frac{2n-1}{2}) e^{-2x \cot \theta} d\theta \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n+\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n}} \sin(\frac{1-2n}{2} \theta) d\theta \end{aligned}$$

olur. $\sin(-x) = -\sin x$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} II] = (1-2n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{n+\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{2n}} \sin(\frac{2n-1}{2} \theta) d\theta$$

bulunur. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ve $\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$ için $\sin(\frac{2n-1}{2} \theta) < \sin \theta$ dır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlik,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} II] \leq (1-2n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^{n+\frac{1}{2}} (\sin \theta)^{1-2n} d\theta (\sin \theta)^{1-2n} d\theta$$

eşitsizliğine dönüşür. Yine $x > 0$ ve $y > 0$ için

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2x-1} (\sin t)^{2y-1} dt$$

olduğu gözönünde tutulursa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} II] \leq \frac{(n - \frac{1}{2})}{2} B(\frac{2n+3}{2}, 1-n)$$

bulunur. Burada $\frac{2n-1}{4} > 0$ ve $1-n > 0$ dır. Bu ise $\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} II]$ ifadesinin $-\frac{3}{2} < n < 1$ için yakınsak olması demek olup $\frac{1}{2} < n < 1$ için de yakınsaktır. Buradan $\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} Z_n(x)]$ ifadesi sonludur.

(2.2.12) eşitliğinde n yerine -n alınırsa,

$$J_{-n}(x) = \frac{2^{-n+1}x^{-n}}{\sqrt{\pi}\Gamma(-n+\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{-n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{-2n+1}} \sin(x + \frac{2n+1}{2}\theta) e^{-2x \cot \theta} d\theta$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı x^{1-n} ile çarpılır ve $x \rightarrow 0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} J_{-n}(x)] = \frac{2^{-n+1}x^{1-2n}}{\sqrt{\pi}\Gamma(-n+\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^{-n-\frac{1}{2}}}{(\sin \theta)^{-2n+1}} \sin(x + \frac{2n+1}{2}\theta) e^{-2x \cot \theta} d\theta$$

bulunur. Bu ise $\frac{1}{2} < n < 1$ için

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x^{1-n} J_{-n}(x)] = \infty$$

dur. Buradan (2.2.11) eşitliğinde ki D sabiti sıfır seçilmek zorundadır. $\frac{1}{2} < n < 1$ için $Z_n(x)$ fonksiyonu $J_n(x)$ fonksiyonunun sabit bir katıdır. Yani, $Z_n(x) = K J_n(x)$ dir. Burada K keyfi sabittir.

(1.4.3) eşitliğinin her iki tarafı $x \neq 0$ ile bölünür ve $J_{n-1}(x)$ ifadesi çekilirse,

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x)$$

elde edilir. Bu ifadeyi $x > 0$ için $Z_n(x)$ fonksiyonunda sağlayacağından,

$$\begin{aligned} Z_{n-1}(x) &= \frac{n}{x} Z_n(x) + Z'_n(x) \\ &= \frac{n}{x} K J_n(x) + K J'_n(x) \end{aligned}$$

olur. K parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned} Z_{n-1}(x) &= K \left\{ \frac{n}{x} J_n(x) + J'_n(x) \right\} \\ &= K J_{n-1}(x) \end{aligned}$$

halini alır. Eğer $-\frac{1}{2} < n < 0$ ise Durum 2 den $Z_n(x)$ fonksiyonu $J_n(x)$ fonksiyonunun sabit katıdır. Bu durumda (2.2.12) eşitliği sağlanır. (2.2.12) eşitliğinin her iki yanı n in sürekli fonksiyonlarıdır. Bu formül $n = 0$ ve $n = \frac{1}{2}$ olduklarında da sağlanır. (1.4.2) eşitliğinin her iki yanı $x \neq 0$ ile bölünür ve $J_{n+1}(x)$ ifadesi çekilirse,

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x)$$

bulunur. Bu indirgeme bağıntısından dolayı (2.2.12) eşitliği $\frac{1}{2} < n \leq \frac{3}{2}$ için, daha sonra da $\frac{3}{2} < n \leq \frac{5}{2}$ için sağlanır. İşleme bu şekilde devam edilirse (2.2.12) eşitliği $n > -\frac{1}{2}$ değerleri için de geçerlidir.

Lemma 2.2.3 $x > 0$ ve $n > -\frac{1}{2}$ için

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{ix-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\ \left. + e^{-ix+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right\} \quad (2.2.14)$$

dir.

İspat: $x > 0$ ve $n > -\frac{1}{2}$ için (2.2.3) eşitliği A ve B katsayılarının (2.2.4) deki gibi seçilmesinden $Z_n(x)$ fonksiyonunun elde edildiğini biliyoruz. Buradan $Z_n(x)$ fonksiyonunun başka bir ifadesi

$$Z_n(x) = x^n \left\{ e^{ix-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-2vx} (v + iv^2)^{n-\frac{1}{2}} dv \right. \\ \left. + e^{-ix+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-2vx} (v - iv^2)^{n-\frac{1}{2}} dv \right\}$$

olur. (2.2.12) den ise

$$J_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} Z_n(x)$$

olduğu gözönünde tutulursa,

$$J_n(x) = \frac{(2x)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{ix-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-2vx} (v + iv^2)^{n-\frac{1}{2}} dv \right. \\ \left. + e^{-ix+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-2vx} (v - iv^2)^{n-\frac{1}{2}} dv \right\}$$

bulunur. Burada $v = \frac{u}{2x}$ dönüşümü yapılırsa,

$$J_n(x) = \frac{(2x)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{ix-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-2x\frac{u}{2x}} \left(\frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{du}{2x} \right. \\ \left. + e^{-ix+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-2x\frac{u}{2x}} \left(\frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{du}{2x} \right\} \\ = \frac{(2x)^n}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{ix-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^{n-\frac{1}{2}}}{(2x)^{n+\frac{1}{2}}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\ \left. + e^{-ix+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} \frac{u^{n-\frac{1}{2}}}{(2x)^{n+\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right\}$$

$$\begin{aligned}
J_n(x) &= \frac{(2x)^n}{(2x)^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(n+\frac{1}{2})} \left\{ e^{ix-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\
&\quad \left. + e^{-ix+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}\Gamma(n+\frac{1}{2})} \left\{ e^{ix-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\
&\quad \left. + e^{-ix+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise istenilendir.

(2.2.2) eşitliğinde $v = \frac{u}{2x}$ dönüşümü yapılırsa, v nin sınırları 0 ve ∞ olduğundan u nun da sınırları 0 ve ∞ olur. Bu durumda (2.2.2) eşitliği,

$$y = x^n e^{\pm ix} \int_0^\infty e^{-2x\frac{u}{2x}} \left(\frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} \frac{du}{2x}$$

halini alır. Bunların lineer bir kombinasyonu da Bessel denkleminin çözümü olacağından,

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x^n}{(2x)^{n+\frac{1}{2}}} \left\{ A e^{ix} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\
&\quad \left. + B e^{-ix} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right\}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada özel olarak,

$$A = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} 2^n e^{-(n-\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \quad \text{ve} \quad B = 0$$

seçilirse çözüm,

$$U_n(x) = e^{-(n-\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \frac{1}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{ix} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \quad (2.2.15)$$

olarak elde edilir. Burada $n > -\frac{1}{2}$ ve $x > 0$ dır.

Lemma 2.2.4 $n > -\frac{1}{2}$ ve $x > 0$ için

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi x} J_n(x)] = 2 \cos \left(y - (n + \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi \right) \quad (2.2.16)$$

dir.

İspat: p herhangi bir tamsayı ve $0 < y \leq 2\pi$ olmak üzere (2.2.14) eşitliğinin her iki tarafı $\sqrt{2\pi x}$ ile çarpılır ve eşitliğin sağ yanına $x = 2p\pi + y$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi x}J_n(x) &= \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{i(2p\pi+y)-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2(2p\pi+y)} \right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(2p\pi+y)+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{2(2p\pi+y)} \right)^{n-\frac{1}{2}} du \right\}\end{aligned}$$

bulunur. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ve sinüs , cosinüs fonksiyonlarının 2π periyotlu oldukları gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi x}J_n(x) &= \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{iy-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{4p\pi+2y} \right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\ &\quad \left. + e^{-iy+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{4p\pi+2y} \right)^{n-\frac{1}{2}} du \right\}\end{aligned}$$

halini alır. Her iki tarafın $p \rightarrow \infty$ için limiti alınır,

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi x}J_n(x)] &= \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ e^{iy-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{4p\pi+2y} \right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\ &\quad \left. + e^{-iy+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{iu}{4p\pi+2y} \right)^{n-\frac{1}{2}} du \right\} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{iy-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\ &\quad \left. + e^{-iy+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} du \right\}\end{aligned}$$

olur. $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi x}J_n(x)] &= \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{iy-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \Gamma(n + \frac{1}{2}) + e^{-iy+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \Gamma(n + \frac{1}{2}) \right\} \\ &= \frac{e^{iy-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} + e^{-iy+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i}}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \cos x$ ifadesinden yararlanılırsa,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi x}J_n(x)] = 2 \cos \left(y - (n + \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi \right)$$

bulunur. Bu ise istenilendir.

(2.2.14) eşitliğinde n yerine $-n$ alınır ve benzer şekilde işlemler uygulanırsa,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi x} J_{-n}(x)] = 2 \cos \left(y + \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2} \pi \right) \quad (2.2.17)$$

olarak elde edilir.

Lemma 2.2.5 $n > -\frac{1}{2}$ ve $x > 0$ için

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi x} U_n(x)] = \pi e^{iy - (n - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi i} \quad (2.2.18)$$

dir.

İspat: p herhangi bir tamsayı ve $0 < y \leq 2\pi$ olmak üzere (2.2.15) eşitliğinin her iki tarafı $\sqrt{2\pi x}$ ile çarpılır ve eşitliğin sağ yanına $x = 2p\pi + y$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\sqrt{2\pi x} U_n(x) = e^{-(n - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi i} \frac{\pi}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} e^{i(2p\pi + y)} \int_0^\infty e^{-u} u^{n - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2(2p\pi + y)} \right)^{n - \frac{1}{2}} du$$

bulunur. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ve sinüs , cosinüs fonksiyonlarının 2π periyotlu oldukları gözönünde tutulursa,

$$\sqrt{2\pi x} U_n(x) = \frac{\pi}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} e^{iy - (n - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{4p\pi + 2y} \right)^{n - \frac{1}{2}} du$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafının $p \rightarrow \infty$ için limiti alınır ve istenilen elde edilir.

Lemma 2.2.6 $n > -\frac{1}{2}$ ve $x > 0$ için

$$G_n(x) = e^{-(n - \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi i} \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{ix} \int_0^\infty e^{-u} u^{n - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2x} \right)^{n - \frac{1}{2}} du \quad (2.2.19)$$

dur.

İspat: $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$ ve $x > 0$ için $U_n(x)$ fonksiyonu Bessel fonksiyonu olduğundan,

$$U_n(x) = A J_n(x) + B J_{-n}(x) \quad (2.2.20)$$

olarak yazılabilir. $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$ olmak üzere (2.2.20) ifadesinin her iki tarafı $\sqrt{2\pi x}$ ile çarpılır ve $p \rightarrow \infty$ için limit alınır,

$$\lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi x} U_n(x)] = A \lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi x} J_n(x)] + B \lim_{p \rightarrow \infty} [\sqrt{2\pi x} J_{-n}(x)]$$

bulunur. Burada (2.2) , (2.2.18) , (2.2.17) değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\pi e^{iy - (n - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} = A 2 \cos \left(y - (n + \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi \right) + B 2 \cos \left(y + (n - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi \right) \quad (2.2.21)$$

olur. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\cos \left(y - (n + \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi \right) = \cos y \cos \left(\frac{2n+1}{4}\pi \right) + \sin y \sin \left(\frac{2n+1}{4}\pi \right) \quad (2.2.22)$$

elde edilir.

$$\cos \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \sin \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right), \cos(-\theta) = \cos \theta, \sin(-\theta) = -\sin \theta$$

olduklarından,

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{2n+1}{4}\pi \right) &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2n+1}{4}\pi \right) \\ &= \sin \left(-\frac{2n-1}{4}\pi \right) \\ &= -\sin \left(\frac{2n-1}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{2n+1}{4}\pi \right) &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2n+1}{4}\pi \right) \\ &= \cos \left(-\frac{2n-1}{4}\pi \right) \\ &= \cos \left(\frac{2n-1}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

bulunur. Bu ifadeler (2.2.22) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \cos \left(y - (n + \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi \right) &= \cos y \left(-\sin \left(\frac{2n-1}{4}\pi \right) \right) + \sin y \cos \left(\frac{2n-1}{4}\pi \right) \\ &= \sin y \cos \left(\frac{2n-1}{4}\pi \right) - \cos y \sin \left(\frac{2n-1}{4}\pi \right) \end{aligned}$$

olur. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned}\cos\left(y - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi\right) &= \sin\left(y - \frac{2n-1}{4}\pi\right) \\ &= \sin\left(y - \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade (2.2.21) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\pi e^{i(y - (n - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi)} = 2A \sin\left\{y - \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi\right\} + 2B \cos\left\{y - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi\right\}$$

olur. Buradan,

$$\pi e^{iy} e^{-i(n - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi} = 2A \sin\left\{y - \left(n - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi\right\} + 2B \cos\left\{y - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}\pi\right\}$$

halini alır. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ve

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x, \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

oldukları gözönünde tutulurlarsa,

$$\begin{aligned}\cos y (\pi e^{-i(n - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi}) + i \sin y (\pi e^{-i(n - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi}) \\ &= 2A \left\{ \sin y \cos\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) - \cos y \sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) \right\} \\ &+ 2B \left\{ \cos y \cos\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) - \sin y \sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) \right\} \\ &= \cos y \left\{ -2A \sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) + 2B \cos\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) \right\} \\ &+ \sin y \left\{ 2A \cos\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) - 2B \sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) \right\}\end{aligned}$$

bulunur. $\sin y$ nin ve $\cos y$ nin katsayıları karşılaştırılırsa,

$$\pi e^{-i(n - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi} = -2A \sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) + 2B \cos\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

$$i\pi e^{-i(n - \frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi} = 2A \cos\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right) - 2B \sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right)$$

olur. Buradan A ve B katsayıları,

$$A = -\frac{\pi}{2 \sin n\pi} e^{-in\pi} ; \quad B = \frac{\pi}{2 \sin n\pi}$$

olarak elde edilir. Bulunan bu A ve B katsayıları (2.2.20) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa,

$$\begin{aligned} U_n(x) &= -\frac{\pi}{2 \sin n\pi} e^{-in\pi} J_n(x) + \frac{\pi}{2 \sin n\pi} J_{-n}(x) \\ &= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} [J_{-n}(x) - e^{-in\pi} J_n(x)] \\ &= G_n(x) \end{aligned}$$

olur. Burada $-\frac{1}{2} < n < \frac{1}{2}$ dir. (1.11.2) indirgeme bağıntısından dolayı bu eşitlik $n > -\frac{1}{2}$ için de geçerlidir. Bu ise istenilendir.

2.3 I_n ve K_n Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonları

Eğer,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$$

Bessel denkleminde $x=it$ alınırsa,

$$(it)^2 \left(-\frac{d^2 y}{dt^2} \right) + (it) \left(\frac{dy}{it dt} \right) + ((it)^2 - n^2)y = 0$$

$$(-t^2) \left(-\frac{d^2 y}{dt^2} \right) + t \frac{dy}{dt} + (-t^2 - n^2)y = 0$$

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} - (t^2 + n^2)y = 0 \quad (2.3.1)$$

denklemini elde edilir. Bu denklem Değiştirilmiş Bessel diferensiyel denklemini olarak bilinir. $t = 0$ Değiştirilmiş Bessel diferensiyel denkleminin düzgün aykırı noktası olduğundan Frobenius serisi biçiminde çözüm aranırsa çözüm,

$$I_n(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{n+2r} \quad (2.3.2)$$

olarak bulunur. Bu fonksiyon 1 inci çeşit Değiştirilmiş Bessel fonksiyonu olarak bilinir. 2 inci çeşit Değiştirilmiş Bessel fonksiyonu ise

$$K_n(t) = \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \{I_{-n}(t) - I_n(t)\} \quad (2.3.3)$$

olarak bilinir. Aynı zamanda (2.3.1) Değiştirilmiş Bessel diferensiyel denkleminin çözümleri $J_n(it)$ ve $G_n(it)$ dir. Şimdi $J_n(it)$ fonksiyonu ile $I_n(t)$ fonksiyonu

ve $G_n(it)$ fonksiyonu ile $K_n(t)$ fonksiyonu arasındaki ilişkiyi bulalım.

(1.3.6) ifadesinde x yerine it alınırsa,

$$\begin{aligned} J_n(it) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{it}{2} \right)^{n+2r} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (i)^{n+2r}}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{n+2r} \\ &= i^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{n+2r} \end{aligned}$$

olur. $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ oldukları gözönünde tutulur ve (2.3.2) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} J_n(it) &= (e^{\frac{i\pi}{2}})^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{n+2r} \\ &= e^{\frac{1}{2}in\pi} I_n(t) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

bulunur. Benzer şekilde (1.10.1) ifadesinde $x = it$ alınırsa,

$$G_n(it) = \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \{ J_{-n}(it) - e^{-in\pi} J_n(it) \}$$

olur. Burada (2.3.4) ve (2.3.3) eşitlikleri kullanılırlarsa,

$$\begin{aligned} G_n(it) &= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \left\{ e^{-\frac{1}{2}in\pi} I_{-n}(t) - e^{-in\pi} e^{\frac{1}{2}in\pi} I_n(t) \right\} \\ &= e^{-\frac{1}{2}n\pi i} \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \{ I_{-n}(t) - I_n(t) \} \\ &= e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(t) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

elde edilir. (2.3.3) ifadesinde n yerine $-n$ alınırsa,

$$\begin{aligned} K_{-n}(t) &= \frac{\pi}{2 \sin(-n\pi)} \{ I_n(t) - I_{-n}(t) \} \\ &= \frac{\pi}{-2 \sin n\pi} \{ -(I_{-n}(t) - I_n(t)) \} \\ &= \frac{-\pi}{-2 \sin n\pi} \{ I_{-n}(t) - I_n(t) \} \\ K_{-n}(t) &= K_n(t) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

eşitliği bulunur. $I_n(t)$ ve $K_n(t)$ için gösterilen (2.3.2) ve (2.3.3) numaralı formüllerle $J_n(x)$ ve $G_n(x)$ için kullanılan formüller birbirinin benzeridir.

Eğer n tamsayı ise (1.3.8) sağlanır. (1.3.8) eşitliğinde x yerine it alınır ve her iki taraf $e^{-\frac{1}{2}n\pi i}$ ile çarpılırsa,

$$e^{-\frac{1}{2}n\pi i} J_{-n}(it) = (-1)^n e^{-\frac{1}{2}n\pi i} J_n(it)$$

olur. (2.3.4) numaralı formülden yararlanılırsa,

$$I_{-n}(t) = e^{\frac{1}{2}n\pi i} J_n(it)$$

$$(-1)^n I_n(t) = e^{\frac{1}{2}n\pi i} J_{-n}(it) e^{-n\pi i}$$

bulunur. $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, $\sin n\pi = 0$ ve $\cos n\pi = (-1)^n$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$(-1)^n I_n(t) = I_{-n}(t) (\cos n\pi + i \sin n\pi)$$

$$I_{-n}(t) = I_n(t) \quad (2.3.7)$$

elde edilir. (1.10.5) de x yerine it alınırsa,

$$\begin{aligned} G_n(it) &= -J_n(it) \ln \left(\frac{it}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} \left(\frac{it}{2} \right)^{-n+2r} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \left\{ \Phi(r) + \Phi(n+r) - 2\gamma \right\} \left(\frac{it}{2} \right)^{n+2r} \\ &+ \frac{1}{2} i\pi J_n(it) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

olur. Burada (2.3.4) ve (2.3.5) eşitlikleri (2.3.8) de yerlerine yazılırlarsa,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(t) &= -e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) \left\{ \ln(i) + \ln \left(\frac{t}{2} \right) \right\} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(n-r-1)!}{r!} (i)^{-n} (-1)^r \left(\frac{t}{2} \right)^{-n+2r} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!(n+r)!} \left\{ \Phi(r) + \Phi(n+r) - 2\gamma \right\} (i)^n (-1)^r \left(\frac{t}{2} \right)^{n+2r} \\ &+ \frac{1}{2} i\pi e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) \end{aligned}$$

halini alır. $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ ve $\ln e^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{\pi}{2}i \ln e = \frac{1}{2}\pi i \Rightarrow \ln(i) = \frac{1}{2}\pi i$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(t) &= -e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) \frac{1}{2}\pi i - e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) \ln \left(\frac{t}{2} \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r (n-r-1)!}{r!} (e^{\frac{\pi}{2}i})^{-n} \left(\frac{t}{2} \right)^{-n+2r} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(e^{\frac{\pi}{2}i})^n}{(n+r)!r!} \left\{ \Phi(r) + \Phi(n+r) - 2\gamma \right\} \left(\frac{t}{2} \right)^{n+2r} \\ &+ \frac{1}{2} i\pi e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) \end{aligned}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılır ve her iki yan $e^{-\frac{1}{2}n\pi i}$ ile bölünürse,

$$\begin{aligned} K_n(t) &= (-1)^{n+1} I_n(t) \ln \left(\frac{t}{2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^r (n-r-1)!}{r!} \left(\frac{t}{2} \right)^{-n+2r} \\ &+ \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!(n+r)!} \left(\frac{t}{2} \right)^{n+2r} \left\{ \Phi(r) + \Phi(n+r) - 2\gamma \right\} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

elde edilir. Burada $\gamma > 0$, $\Phi(0) = 0$, $\Phi(r) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{r}$ ve $n \in Z$ dir.

2.4 I_n Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Bazı İndirgeme Formülleri

(2.3.4) eşitliğinin her iki yanının t ye göre türevi alınırsa,

$$iJ'_n(it) = e^{\frac{1}{2}n\pi i} I'_n(t)$$

olur. Yine (2.3.4) den

$$J_{n+1}(it) = e^{\frac{1}{2}(n+1)\pi i} I_{n+1}(t)$$

bulunur. (1.4.2) de x yerine it alınır ve yukarıdaki eşitlikler kullanılırsa,

$$it \frac{e^{\frac{1}{2}n\pi i} I'_n(t)}{i} = ne^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) - ite^{\frac{1}{2}(n+1)\pi i} I_{n+1}(t)$$

halini alır. Eşitliğin her iki tarafı $e^{\frac{1}{2}n\pi i}$ ile bölünürse,

$$tI'_n(t) = nI_n(t) - ite^{\frac{\pi}{2}i} I_{n+1}(t)$$

olur. Burada $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} tI'_n(t) &= nI_n(t) - it(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})I_{n+1}(t) \\ tI'_n(t) &= nI_n(t) - itiI_{n+1}(t) \\ tI'_n(t) &= nI_n(t) + tI_{n+1}(t) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

elde edilir. (1.4.3) indirgeme bağıntısında $x = it$ alınır ve $J_n(it) = e^{\frac{1}{2}n\pi i}I_n(t)$ kullanılırsa,

$$it \frac{e^{\frac{1}{2}n\pi i}I'_n(t)}{i} = -ne^{\frac{1}{2}n\pi i}I_n(t) + ite^{\frac{1}{2}(n-1)\pi i}I_{n-1}(t)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı da $e^{\frac{1}{2}n\pi i}$ ile bölünürse,

$$\begin{aligned} tI'_n(t) &= -nI_n(t) + ite^{-\frac{\pi}{2}i}I_{n-1}(t) \\ tI'_n(t) &= -nI_n(t) + it(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2})I_{n-1}(t) \\ tI'_n(t) &= -nI_n(t) + tI_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

olur. (2.4.1) ve (2.4.2) indirgeme bağıntıları taraf tarafa toplanırsa,

$$2tI'_n(t) = tI_{n-1}(t) + tI_{n+1}(t)$$

halini alır. $t \neq 0$ olmak üzere her iki taraf t ye bölünürse,

$$2I'_n(t) = I_{n-1}(t) + I_{n+1}(t) \quad (2.4.3)$$

elde edilir. (2.4.1) de özel olarak $n = 0$ alınırsa,

$$tI'_0(t) = I_0(t) + tI_1(t)$$

olur. $t \neq 0$ olmak üzere her iki taraf t ye bölünürse,

$$I'_0(t) = I_1(t) \quad (2.4.4)$$

bulunur veya (2.4.3) de $n = 0$ alınırsa,

$$2I'_0(t) = I_{-1}(t) + I_1(t)$$

olur. $n \in Z$ için (2.3.7) den

$$I_{-1}(t) = I_1(t)$$

elde edilir. Bu nedenle

$$2I'_0(t) = I_1(t) + I_1(t) \Rightarrow I'_0(t) = I_1(t)$$

bulunur. (2.4.2) den (2.4.1) i çıkarılırsa,

$$-2nI_n(t) + tI_{n-1}(t) - tI_{n+1}(t) = 0 \Rightarrow 2nI_n(t) = tI_{n-1}(t) - tI_{n+1}(t)$$

olur. $t \neq 0$ olmak üzere eşitliğin her iki tarafı t ile bölünürse,

$$\frac{2n}{t}I_n(t) = I_{n-1}(t) - I_{n+1}(t) \quad (2.4.5)$$

elde edilir. (2.4.2) in her iki tarafı t^{n-1} ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} t^{n-1}tI'_n(t) &= t^{n-1}[-nI_n(t) + tI_{n-1}(t)] \\ t^n I'_n(t) &= -nt^{n-1}I_n(t) + t^n I_{n-1}(t) \\ t^n I'_n(t) + nt^{n-1}I_n(t) &= t^n I_{n-1}(t) \\ \frac{d}{dt}[t^n I_n(t)] &= t^n I_{n-1}(t) \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

bulunur. Benzer şekilde (2.4.1) nin her iki tarafı t^{-n-1} ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} t^{-n-1}tI'_n(t) &= t^{-n-1}[nI_n(t) + tI_{n+1}(t)] \\ t^{-n} I'_n(t) &= t^{-n-1}nI_n(t) + t^{-n} I_{n+1}(t) \\ t^{-n} I'_n(t) - nt^{-n-1}I_n(t) &= t^{-n} I_{n+1}(t) \\ \frac{d}{dt}[t^{-n} I_n(t)] &= t^{-n} I_{n+1}(t) \end{aligned} \quad (2.4.7)$$

elde edilir. (2.4.3) nin her iki tarafının t ye göre türevi alınır ve 2 ile çarpılırsa,

$$2^2 I''_n(t) = 2I'_{n-1}(t) + 2I'_{n+1}(t)$$

olur. Burada (2.4.3) kullanılırsa,

$$2^2 I''_n(t) = I_{n-2}(t) + 2I_n(t) + I_{n+2}(t)$$

bulunur. Buradaki işlemler benzer şekilde $(r-2)$ kez tekrarlanırsa,

$$2^r \frac{d^r}{dt^r} I_n(t) = I_{n-r}(t) + I_{n-r+2}(t) + \frac{r(r-1)}{2!} I_{n-r+4}(t) + \dots + I_{n+r}(t) \quad (2.4.8)$$

bulunur.

2.5 K_n Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Bazı İndirgeme Formülleri

Birinci bölümün 10 uncu kısmında gösterilen G_n için bulunan indirgeme bağıntılarının benzerleri K_n için de geçerlidir. Şimdi bunları görelim.

(2.3.5) eşitliğinin t ye göre türevi alınır,

$$\begin{aligned} iG'_n(it) &= e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K'_n(t) \\ G'_n(it) &= \frac{e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K'_n(t)}{i} \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

bulunur. (2.3.5) eşitliğinden

$$G_{n+1}(it) = e^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i} K_{n+1}(t)$$

yazılır. (1.11.2) de $x = it$ alınır ve bu ifadeler yerlerine konulurlarsa,

$$it \frac{e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K'_n(t)}{i} = ne^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(t) - ite^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i} K_{n+1}(t)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $e^{-\frac{1}{2}(n)\pi i}$ ile bölünürse,

$$\begin{aligned} tK'_n(t) &= nK_n(t) - ite^{-\frac{1}{2}\pi} K_{n+1}(t) \\ tK'_n(t) &= nK_n(t) - it(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}) K_{n+1}(t) \\ tK'_n(t) &= nK_n(t) - tK_{n+1}(t) \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

olur. Benzer şekilde (1.11.3) de $x = it$ alınır ve

$$G_n(it) = e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(t)$$

$$G_{n+1}(it) = e^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i} K_{n+1}(t)$$

eşitlikleri kullanılırsa,

$$it \frac{e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K'_n(t)}{i} = -ne^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(t) + ite^{-\frac{1}{2}(n-1)\pi i} K_{n-1}(t)$$

olur. Eşitliğin her iki tarafı $e^{-\frac{1}{2}n\pi i}$ ile bölünürse,

$$\begin{aligned}
tK'_n(t) &= -nK_n(t) + ite^{\frac{\pi}{2}i}K_{n-1}(t) \\
tK'_n(t) &= -nK_n(t) + it(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})K_{n-1}(t) \\
tK'_n(t) &= -nK_n(t) - tK_{n-1}(t)
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

bulunur. (2.5.2) ve (2.5.3) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2tK'_n(t) = -tK_{n+1}(t) - tK_{n-1}(t)$$

olur. $t \neq 0$ olmak üzere her iki taraf t ye bölünürse,

$$2K'_n(t) = -K_{n+1}(t) - K_{n-1}(t) \tag{2.5.4}$$

elde edilir. Bu eşitlikte özel olarak $n = 0$ alınırsa,

$$2K'_0(t) = -K_1(t) - K_{-1}(t)$$

bulunur. (2.3.6) eşitliğinden

$$K_{-1}(t) = -K_1(t)$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned}
2K'_0(t) &= -K_1(t) - K_{-1}(t) \\
K'_0(t) &= K_1(t)
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

elde edilir. (2.5.3) ifadesinden (2.5.2) ifadesi çıkarılırsa,

$$-2nK_n(t) - tK_{n-1}(t) + tK_{n+1}(t) = 0$$

olur. $t \neq 0$ olmak üzere eşitliğin her iki yanı t ile bölünürse,

$$\frac{2n}{t}K_n(t) = K_{n+1}(t) - K_{n-1}(t)$$

bulunur. (2.5.3) ifadesinin her iki yanı t^{n-1} ile çarpılır ve düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt}(t^n K_n(t)) = -t^n K_{n-1}(t) \tag{2.5.6}$$

bulunur. Benzer şekilde (2.5.2) ifadesi de t^{-n-1} ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{d}{dt}(t^{-n}K_n(t)) = -t^{-n}K_{n+1}(t) \quad (2.5.7)$$

elde edilir. (2.5.4) ifadesinin t ye göre türevi alınır -2 ile çarpılır ve (2.5.4) eşitliği kullanılırsa,

$$(-2)^2 K_n''(t) = K_{n-2}(t) + 2K_n(t) + K_{n+2}(t)$$

dir. Buradaki işlemler benzer şekilde $(r-2)$ kez tekrarlanırsa,

$$\begin{aligned} (-2)^r \frac{d^r}{dt^r} K_n(t) &= K_{n-r}(t) + rK_{n-r+2}(t) + \frac{r(r-1)}{2!} K_{n-r+4}(t) \\ &+ \dots + K_{n+r}(t) \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

elde edilir.

2.6 Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonları Arasındaki İlişki

(2.3.4) ifadesinin her iki yanının t ye göre türevi alınır,

$$iJ'_n(it) = e^{\frac{1}{2}n\pi i} I'_n(t) \quad \text{ve} \quad iJ'_{-n}(it) = e^{-\frac{1}{2}n\pi i} I'_{-n}(t)$$

olur. (1.12.2) fadesinde $x = it$ alınır ve yukarıda bulunan eşitlikler kullanılırlarsa,

$$I_n(t)I'_{-n}(t) - I'_n(t)I_{-n}(t) = -\frac{2 \sin n\pi}{\pi t} \quad (2.6.1)$$

elde edilir. Benzer şekilde (2.3.4) ifadesinden,

$$\begin{aligned} J_n(it) &= e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) \\ J_{-n+1}(it) &= e^{\frac{1}{2}(-n+1)\pi i} I_{-n+1}(t) \\ J_{-n}(it) &= e^{-\frac{1}{2}n\pi i} I_{-n}(t) \\ J_{n-1}(it) &= e^{\frac{1}{2}(n-1)\pi i} I_{n-1}(t) \\ J_{-n-1}(it) &= e^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i} I_{-n-1}(t) \\ J_{n+1}(it) &= e^{\frac{1}{2}(n+1)\pi i} I_{n+1}(t) \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler $x = it$ için (1.12.8) ve (1.12.9) de yerlerine yazılırlarsa sırasıyla

$$e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) e^{\frac{1}{2}(-n+1)\pi i} I_{-n+1}(t) + e^{-\frac{1}{2}n\pi i} I_{-n}(t) e^{\frac{1}{2}(n-1)\pi i} I_{n-1}(t) = \frac{2 \sin n\pi}{i\pi t}$$

$$I_n(t) e^{\frac{\pi}{2}i} I_{-n+1}(t) + I_{-n}(t) e^{-\frac{\pi}{2}i} I_{n-1}(t) = \frac{2 \sin n\pi}{i\pi t}$$

$$-e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) e^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i} I_{-n-1}(t) - e^{-\frac{1}{2}n\pi i} I_{-n}(t) e^{\frac{1}{2}(n+1)\pi i} I_{n+1}(t) = \frac{2 \sin n\pi}{i\pi t}$$

$$-I_n(t) e^{-\frac{\pi}{2}i} I_{n-1}(t) - I_{-n}(t) e^{\frac{\pi}{2}i} I_{n+1}(t) = \frac{2 \sin n\pi}{i\pi t}$$

olur. Bu eşitliklerde $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ ve $e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i$ oldukları dikkate alınır ve eşitliğin her yanı i ile bölünürse,

$$I_n(t) I_{-n+1}(t) - I_{-n}(t) I_{n-1}(t) = I_n(t) I_{-n-1}(t) - I_{-n}(t) I_{n+1}(t) = -\frac{2 \sin n\pi}{\pi t} \quad (2.6.2)$$

elde edilir. Benzer yolla (2.3.4) ve (2.3.5) ifadelerinden

$$\begin{aligned} J_n(it) &= e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) & ; & & G_n(it) &= e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(t) \\ iJ'_n(it) &= e^{\frac{1}{2}n\pi i} I'_n(t) & ; & & iG'_n(it) &= e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K'_n(t) \\ J_{n+1}(it) &= e^{\frac{1}{2}(n+1)\pi i} I_{n+1}(t) & ; & & G_{n+1}(it) &= e^{-\frac{1}{2}(n+1)\pi i} K_{n+1}(t) \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadelerden gerekli olanlar (1.12.10) ve (1.12.12) de yerlerine konulur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$K_n I'_n - K'_n I_n = \frac{1}{t} \quad (2.6.3)$$

$$e^{-\frac{\pi}{2}i} K_{n+1} I_n - e^{\frac{\pi}{2}i} I_{n+1} K_n = \frac{1}{it}$$

bulunur. Son ifadede $e^{-\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$ ve $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ oldukları dikkate alınır ve değerleri olan $-i$ ve i eşitlikte yerlerine konulurlarsa,

$$\left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} \right) K_{n+1} I_n - \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) I_{n+1} K_n = \frac{1}{it}$$

$$-i K_{n+1} I_n - i K_n I_{n+1} = \frac{1}{it}$$

bulunur. Her iki taraf $-i$ ile bölünürse,

$$K_{n+1}I_n + K_nI_{n+1} = \frac{1}{t} \quad (2.6.4)$$

elde edilir.

Teorem 2.6.1 n herhangi bir tamsayı ise

$$I_n(u+v) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} I_r(u)I_{n-r}(v) \quad (2.6.5)$$

dir.

İspat: n tamsayı iken (1.7.2) de $x = iu$ ve $y = iv$ alınırsa,

$$\begin{aligned} J_n(iu + iv) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(iu)J_{n-r}(iv) \\ J_n(i(u+v)) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} J_r(iu)J_{n-r}(iv) \end{aligned}$$

olur. Burada (2.3.4) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(u+v) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}r\pi i} I_r(u) e^{\frac{1}{2}(n-r)\pi i} I_{n-r}(v) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}r\pi i + \frac{1}{2}(n-r)\pi i} I_r(u) I_{n-r}(v) \\ &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_r(u) I_{n-r}(v) \\ e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(u+v) &= e^{\frac{1}{2}n\pi i} \sum_{r=-\infty}^{\infty} I_r(u) I_{n-r}(v) \\ I_n(u+v) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} I_r(u) I_{n-r}(v) \end{aligned}$$

bulunur ki bu ise istenilendir.

2.7 I_0 Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Toplam Formülü

(1.8.3) ifadesinde $b = ix$, $c = iy$ alınır ve yine (2.3.4) ifadesi kullanılırsa,

$$J_0 \left\{ \sqrt{i^2 x^2 + i^2 y^2 - 2i^2 xy \cos \alpha} \right\} = J_0(ix)J_0(iy) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ix)J_n(iy) \cos n\alpha$$

$$J_0 \left\{ i \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha} \right\} = J_0(ix)J_0(iy) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ix)J_n(iy) \cos n\alpha$$

$$e^{\frac{1}{2}0i\pi} J_0 \left\{ \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha} \right\} = e^{\frac{1}{2}0i\pi} I_0(x)e^{\frac{1}{2}0i\pi} I_0(y)$$

$$+ 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(x)e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(y) \cos n\alpha$$

$$I_0 \left\{ \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha} \right\} = I_0(x)I_0(y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{n\pi i} I_n(x)I_n(y) \cos n\alpha$$

bulunur. Burada $n \in N$ için $e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n$ olduğu gözönünde tutulur ve $x = b, y = c$ denilirse,

$$I_0 \left\{ \sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha} \right\} = I_0(b)I_0(c) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(b)I_n(c) \cos n\alpha \quad (2.7.1)$$

elde edilir. Bu ise I_0 Değiştirilmiş Bessel fonksiyonu için toplam formülü olarak bilinir.

2.8 Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonları için Bazı İntegral Gösterimleri

(1.9.11) ve (1.9.12) eşitlikleri birlikte yazılırsa $n > -\frac{1}{2}$ için,

$$J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2} \right)^n \int_{-1}^1 e^{\mp i\lambda x} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda$$

olur. Bu eşitlikte $x = it$ alınır ve (2.3.4) ifadesi kullanılırsa,

$$e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{it}{2} \right)^n \int_{-1}^1 e^{\pm \lambda t} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda$$

$$e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) = (i)^n \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2} \right)^n \int_{-1}^1 e^{\pm \lambda t} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda$$

bulunur. Burada $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) = e^{\frac{1}{2}n\pi i} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^n \int_{-1}^1 e^{\pm\lambda t} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda$$

elde edilir. Bu eşitlikte her iki taraf $e^{i\frac{\pi}{2}}$ ile bölünürse,

$$I_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^n \int_{-1}^1 e^{\pm\lambda t} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda \quad (2.8.1)$$

olarak bulunur. Bu eşitlik ayrı ayrı yazılırsa,

$$I_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^n \int_{-1}^1 e^{\lambda t} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda$$

ve

$$I_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^n \int_{-1}^1 e^{-\lambda t} (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda$$

olur. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanır ve $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$I_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^n \int_{-1}^1 \cosh(\lambda t) (1 - \lambda^2)^{n-\frac{1}{2}} d\lambda \quad (2.8.2)$$

elde edilir. Bu eşitlikte de $\lambda = \sin \phi$ şeklinde bağımsız değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(t \sin \phi) (\cos^2 \phi)^{n-\frac{1}{2}} \cos \phi d\phi \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(t \sin \phi) (\cos \phi)^{2n} d\phi \end{aligned} \quad (2.8.3)$$

olur. Burada ϕ yerine $\frac{\pi}{2} - \phi$ alınırsa,

$$I_n(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + \frac{1}{2})} \left(\frac{t}{2}\right)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(t \sin \phi) (\cos \phi)^{2n} d\phi \quad (2.8.4)$$

bulunur.

(2.2.14) ifadesinde $x = it$ alınır ve (2.3.4) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi i t} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{i^2 t - (n + \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{i u}{2 i t}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\ &\quad \left. + e^{-i^2 t + (n + \frac{1}{2}) \frac{1}{2} \pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{i u}{2 i t}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right\} \end{aligned}$$

olur. Burada t yerine x alınır $i^2 = -1$ olduğu gözönünde tutulur ve eşitliğin her iki tarafı $e^{\frac{1}{2}n\pi i}$ ile bölünürse,

$$I_n(x) = \frac{1}{(i)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi x} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{-x-(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i - \frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\ \left. + e^{x+(n+\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i - \frac{1}{2}\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right.$$

bulunur. Bu eşitlikte $i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\pi}{4}i}$ olduğu dikkate alınır ve eşitlik düzenlenirse,

$$I_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \left\{ e^{-x-(n+\frac{1}{2})\pi i} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \\ \left. + e^x \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \right. \quad (2.8.5)$$

elde edilir. Burada $x > 0$ ve $n > -\frac{1}{2}$ dir. Benzer şekilde (2.2.19) ifadesinde x yerine it alınır , (2.3.5) eşitliği kullanılır ve $i^2 = -1$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(t) = e^{-(n-\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2it}} e^{i^2 t} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{iu}{2it}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \\ = e^{-t-(n-\frac{1}{2})\frac{1}{2}\pi i} \frac{1}{i^{\frac{1}{2}} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2t}\right)^{n-\frac{1}{2}} du$$

bulunur. $i^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{\pi}{4}i}$ olduğu dikkate alınarak t yerine x alınır ve eşitliğin her iki yanını $e^{-\frac{1}{2}n\pi i}$ ile bölünürse,

$$K_n(x) = e^{-x} \frac{1}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} du \quad (2.8.6)$$

olarak elde edilir. Burada yine $x > 0$ ve $n > -\frac{1}{2}$ dir.

Fizik uygulamalarında $K_n(x)$ Değiştirilmiş Bessel fonksiyonunun önemli bir yeri vardır. (2.8.6) formülünde $x \rightarrow \infty$ için $K_n(x)$ Değiştirilmiş Bessel fonksiyonunun sıfıra gitmesi fizik uygulamalarında önemli ölçüde kullanılır. Kullanıldığı bazı yerler:

-Süper iletken numunelerin direnç ve alınganlık(mıknatıslanma) hesaplarında kullanılır.

-Süper iletkenlerde silindirik koordinatlarda alternatif akım(AC) kayıplarının incelenmesinde kullanılır.

-Sınır değer problemlerinin çözümünde kullanılır. (Ör: Potansiyel kutusu, elektro-mağnetik teoride potansiyelin sınırlanması, termo-dinamikte ısı hesabı)

3 ASİMTOTİK AÇILIMLAR VE FOURIER-BESSEL AÇILIMLARI

3.1 Giriş

Bu bölümde Bessel ve Değiştirilmiş Bessel fonksiyonlarının asimtotik açılımları, Lommel integralleri son olarak Fourier-Bessel açılımları elde edilecektir.

3.2 Asimtotik Açılımlar

Lemma 3.2.1 $m \in R$ ve

$$R'_s = \frac{\Gamma(m+1)}{s!\Gamma(m-s+1)} z^s \int_0^1 s(1-t)^{s-1}(1+zt)^{m-s} dt \quad (3.2.1)$$

olmak üzere

$$(1+z)^m = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\Gamma(m+1)}{r!\Gamma(m-r+1)} z^r + R'_s \quad (3.2.2)$$

dir.

İspat: $(1+zt)^{m-1}$ ifadesinin 0 dan 1 e kadar t ye göre integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1+zt)^{m-1} dt &= \int_1^{1+z} u^{m-1} \frac{du}{z} \\ &= \left[\frac{1}{mz} u^m \right]_1^{1+z} \\ &= \frac{1}{mz} [(1+z)^m - 1] \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(1+z)^m = 1 + mz \int_0^1 (1+zt)^{m-1} dt \quad (3.2.3)$$

olur. Burada $(1+zt)^{m-1} = u$ ve $dt = dv$ denir ve kısmi integrasyon kullanılırsa,

$$\begin{aligned} (1+z)^m &= 1 + mz \left\{ [t(1+zt)^{m-1}]_0^1 - \int_0^1 t(m-1)(1+zt)^{m-2} z dt \right\} \\ &= 1 + mz \left\{ (1+z)^{m-1} - (m-1)z \int_0^1 t(1+zt)^{m-2} dt \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (3.2.3) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(1+z)^m &= 1 + mz \left\{ 1 + (m-1)z \int_0^1 (1+zt)^{m-2} dt \right. \\
&\quad \left. - (m-1)z \int_0^1 t(1+zt)^{m-2} dt \right\} \\
&= 1 + mz + m(m-1)z^2 \int_0^1 \left[(1+zt)^{m-2} - t(1+zt)^{m-2} \right] dt \\
&= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 \int_0^1 2(1-t)(1+zt)^{m-2} dt
\end{aligned}$$

olur. Tekrar

$$2(1-t)dt = dv$$

$$(1+zt)^{m-2} = u$$

denir ve yine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
(1+z)^m &= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 \left\{ \left[-(1-t)^2(1+zt)^{m-2} \right]_0^1 \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 -(1-t)^2(m-2)(1+zt)^{m-3} z dt \right\} \\
&= 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!} z^2 \\
&\quad + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} z^3 \int_0^1 3(1-t)^2(1+zt)^{m-3} dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu işlemin $(s-2)$ için doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$(1+z)^m = \sum_{r=0}^{s-2} \frac{\Gamma(m+1)}{r!\Gamma(m-r+1)} z^r + R'_{s-1} \quad (3.2.4)$$

ve

$$R'_{s-1} = \frac{\Gamma(m+1)}{(s-1)!\Gamma(m-s+2)} z^{s-1} \int_0^1 (s-1)(1-t)^{s-2}(1+zt)^{m-s+1} dt$$

olsun. R'_{s-1} eşitliğine kısmi integrasyon uygulayalım.

$$(1+zt)^{m-s+1} dt = u \quad \text{ve} \quad (s-1)(1-t)^{s-2} dt = dv$$

denirse.

$$\begin{aligned}
R'_{s-1} &= \frac{\Gamma(m+1)}{(s-1)!\Gamma(m-s+2)} z^{s-1} \left[- (1+zt)^{m-s+1} (1-t)^{s-1} \right]_0^1 \\
&\quad - \int_0^1 - (1-t)^{s-1} (m-s+1) (1+zt)^{m-s} z dt \\
R'_{s-1} &= \frac{\Gamma(m+1)}{(s-1)!\Gamma(m-s+2)} z^{s-1} + \frac{\Gamma(m+1)}{s!\Gamma(m-s+1)} z^s \int_0^1 s(1-t)^{s-1} (1+zt)^{m-s} dt
\end{aligned}$$

olur. R'_{s-1} değeri (3.2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$(1+z)^m = \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\Gamma(m+1)}{r!\Gamma(m-r+1)} z^r + R'_s$$

elde edilir. Burada

$$R'_s = \frac{\Gamma(m+1)}{s!\Gamma(m-s+1)} z^s \int_0^1 s(1-t)^{s-1} (1+zt)^{m-s} dt$$

dir. Bu ise istenilendir.

3.2.1 Tanım:(Asimtotik Açılım)

Sonlu sayıda terim ve kalan terimden oluşan bir seride, kalan terim değişkenin yeterince büyük değerleri için yeterince küçük yapılabiliyor ise bu tür seriye asimtotik seri yada asimtotik açılım denir.

3.2.2 $K_n(x)$ Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Asimtotik Açılım

$(1 + \frac{u}{2x})^{n-\frac{1}{2}}$ ifadesinin binom açılımı (3.2.2) den yararlanılarak yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{n-\frac{1}{2}} &= \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2}+1)}{r!\Gamma(n-\frac{1}{2}-r+1)} \left(\frac{u}{2x}\right)^r + R'_s \\
&= \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{r!\Gamma(n-r+\frac{1}{2})} \left(\frac{u}{2x}\right)^r + R'_s
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$R'_s = \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{s!\Gamma(n-s+\frac{1}{2})} \left(\frac{u}{2x}\right)^s \int_0^1 s(1-t)^{s-1} \left(1 + \frac{ut}{2x}\right)^{n-s-\frac{1}{2}} dt$$

dir. $(1 + \frac{u}{2x})^{n-\frac{1}{2}}$ ifadesinin binom açılımı (2.8.6) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$K_n(x) = \frac{e^{-x}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left\{ \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{r! \Gamma(n - r + \frac{1}{2})} \left(\frac{u}{2x}\right)^r du \right. \\ \left. + \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} R'_s du \right\}$$

elde edilir. Toplam sonlu olduğundan integral ile toplam yer değiştirir ve R'_s değeri yerine yazılırsa,

$$K_n(x) = \frac{e^{-x}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left\{ \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{r! \Gamma(n - r + \frac{1}{2})} \left(\frac{1}{2x}\right)^r \int_0^\infty e^{-u} u^{n+r-\frac{1}{2}} du \right. \\ \left. + \int_0^\infty e^{-u} u^{n-\frac{1}{2}} \left[\frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{s! \Gamma(n - s + \frac{1}{2})} \left(\frac{u}{2x}\right)^s \int_0^1 s(1-t)^{s-1} \left(1 + \frac{ut}{2x}\right)^{n-s-\frac{1}{2}} dt \right] du \right\}$$

olur. Burada $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ olduğu gözönüne alındığında,

$$K_n(x) = \frac{e^{-x}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left\{ \sum_{r=0}^{s-1} \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{r! \Gamma(n - r + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(n + r + \frac{1}{2})}{(2x)^r} \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(n + \frac{1}{2})}{s! \Gamma(n - s + \frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^s} \int_0^\infty e^{-u} u^{n+s-\frac{1}{2}} du \int_0^1 s(1-t)^{s-1} \left(1 + \frac{ut}{2x}\right)^{n-s-\frac{1}{2}} dt \right\}$$

yazılabilir. Bu eşitliğin ikinci tarafındaki son ifade

$$R_s = \frac{1}{s! \Gamma(n - s + \frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^s} \int_0^\infty e^{-u} u^{n+s-\frac{1}{2}} du \int_0^1 s(1-t)^{s-1} \left(1 + \frac{ut}{2x}\right)^{n-s-\frac{1}{2}} dt \quad (3.2.5)$$

ile gösterilirse,

$$K_n(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[\sum_{r=0}^{s-1} \frac{\Gamma(n + r + \frac{1}{2})}{r! \Gamma(n - r + \frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^r} + R_s \right] \quad (3.2.6)$$

elde edilir. Burada $x > 0$ dır.

$K_n(x)$ in asimtotik açılıma sahip olduğunu göstermek için $|R_s|$ nin sonlu kaldığını gösterelim.

$1 + \frac{ut}{2x} \geq 1$ olduğunda s indisi, $n - s - \frac{1}{2}$ indisi negatif olacak şekilde seçilmelidir. Burada x reel ve pozitif bir sayı olduğundan,

$$\left(1 + \frac{ut}{2x}\right)^{n-s-\frac{1}{2}} \leq 1$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |R_s| &= \left| \frac{1}{s! \Gamma(n-s+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^s} \int_0^\infty e^{-u} u^{n+s-\frac{1}{2}} du \int_0^1 s(1-t)^{s-1} \left(1 + \frac{ut}{2x}\right)^{n-s-\frac{1}{2}} dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{s! \Gamma(n-s+\frac{1}{2})} \right| \left| \frac{1}{(2x)^s} \right| \int_0^\infty |e^{-u}| |u^{n+s-\frac{1}{2}}| du \\ &\quad \times \int_0^1 |s| |(1-t)^{s-1}| \left| \left(1 + \frac{ut}{2x}\right)^{n-s-\frac{1}{2}} \right| dt \end{aligned}$$

bulunur. $(1 + \frac{ut}{2x})^{n-s-\frac{1}{2}} \leq 1$ olduğu için,

$$|R_s| \leq \frac{1}{s! \Gamma(n-s+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^s} \int_0^\infty e^{-u} u^{n+s-\frac{1}{2}} du \int_0^1 s(1-t)^{s-1} dt$$

halini alır. $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$; $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$|R_s| \leq \frac{1}{s! \Gamma(n-s+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^s} \Gamma(n+s+\frac{1}{2}) s B(1, s)$$

elde edilir. $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ ifadesinden yararlanılırsa,

$$|R_s| \leq \frac{\Gamma(n+s+\frac{1}{2})}{s! \Gamma(n-s+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^s} \frac{s \Gamma(1) \Gamma(s)}{\Gamma(s+1)} dt$$

bulunur. $\Gamma(x) = (x-1)!$ ve $0! = 1$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$|R_s| \leq \frac{\Gamma(n+s+\frac{1}{2})}{s! \Gamma(n-s+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^s} \frac{s 0! (s-1)!}{s!}$$

$$|R_s| \leq \frac{\Gamma(n+s+\frac{1}{2})}{s! \Gamma(n-s+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^s} \quad (3.2.7)$$

olarak elde edilir. x yeteri kadar büyütüldüğünde, bu kalan ifade istenildiği kadar küçük yapılabilir. Bu ise $|R_s|$ nin sonlu kaldığını gösterir.

(3.2.6) deki seri açılırsa,

$$\begin{aligned} K_n(x) &= e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[\frac{\Gamma(n+0+\frac{1}{2})}{0!\Gamma(n-0+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^0} + \frac{\Gamma(n+1+\frac{1}{2})}{1!\Gamma(n-1+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(n+2+\frac{1}{2})}{2!\Gamma(n-2+\frac{1}{2})} \frac{1}{(2x)^2} + \dots \right] \\ &= e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[1 + \frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{1!\Gamma(n-\frac{1}{2})} \frac{1}{2x} + \frac{\Gamma(n+\frac{5}{2})}{2!\Gamma(n-\frac{3}{2})} \frac{1}{4x^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

olur. Burada $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} K_n(x) &= e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[1 + \frac{(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\Gamma(n-\frac{1}{2})}{1!\Gamma(n-\frac{1}{2})} \frac{1}{2x} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+\frac{3}{2})(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})\Gamma(n-\frac{3}{2})}{2!\Gamma(n-\frac{3}{2})} \frac{1}{4x^2} + \dots \right] \\ &= e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[1 + \frac{(2n+1)(2n-1)}{1!2x} + \frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)(2n-3)}{2!4x^2} + \dots \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$K_n(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right] \quad (3.2.8)$$

olarak bulunur.

$K_n = K_{-n}$ olduğundan bu açılım n in negatif değerleri için de geçerlidir.

3.2.3 $G_n(x)$ Bessel Fonksiyonu için Asimtotik Açılım

(2.3.5) eşitliğinde $t = -ix$ alır ve $-i = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = e^{-\frac{1}{2}i\pi}$ olduğu gözönüne alınırsa,

$$G_n(x) = e^{-\frac{1}{2}in\pi} K_n(e^{-\frac{1}{2}i\pi} x) \quad (3.2.9)$$

yazılabilir. Bu eşitlik kullanılarak (3.2.8) den,

$$\begin{aligned}
K_n(e^{-\frac{1}{2}i\pi}x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2xe^{-\frac{\pi}{2}}}} e^{-(-ix)} \left[1 + \frac{4n^2-1}{1!8(-ix)} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!(-8ix)^2} \right. \\
&+ \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!(-8ix)^3} \\
&+ \left. \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!(-8ix)^4} + \dots \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $e^{-\frac{1}{2}in\pi}$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{1}{2}in\pi} K_n(e^{-\frac{1}{2}i\pi}x) &= e^{-\frac{1}{2}in\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{\frac{\pi}{4}i} e^{ix} \left[1 - \frac{4n^2-1}{1!8ix} + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!(8ix)^2} \right. \\
&- \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!(8ix)^3} \\
&+ \left. \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!(8ix)^4} + \dots \right]
\end{aligned}$$

olur. (3.2.9) den eşitliğin sol tarafı $G_n(x)$ fonksiyonunu verir, sağ taraftaki seri paydanın tek ve çift kuvvetlerine göre iki seri biçiminde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
G_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{1}{2}in\pi+i(x+\frac{\pi}{4})} \left\{ \left[1 + \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!i^2(8x)^2} \right. \right. \\
&+ \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!i^4(8x)^4} + \dots \left. \right] \\
&+ \left[-i \frac{4n^2-1}{1!i^2(8x)} - i \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!i^4(8x)^3} + \dots \right] \left. \right\} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{1}{2}in\pi+i(x+\frac{\pi}{4})} \left\{ \left[1 - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)}{2!(8x)^2} \right. \right. \\
&+ \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)(4n^2-7^2)}{4!(8x)^4} + \dots \left. \right] \\
&+ i \left[\frac{4n^2-1^2}{1!(8x)} - \frac{(4n^2-1^2)(4n^2-3^2)(4n^2-5^2)}{3!(8x)^3} + \dots \right] \left. \right\} \quad (3.2.10)
\end{aligned}$$

elde edilir veya ikinci bir yol olarak $K_n(x)$ Bessel fonksiyonunun asimtotik açılımında izlenen yol takip edilerek (2.2.19) dan $G_n(x)$ Bessel fonksiyonu için (3.2.10) asimtotik açılım elde edilebilir.

3.2.4 $J_n(x)$ Bessel Fonksiyonu için Asimtotik Açılım

(1.3.7) ve (1.3.6) eşitliklerinde x yerine $xe^{i\pi}$ alınır ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
 J_{-n}(xe^{i\pi}) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{xe^{i\pi}}{2}\right)^{-n+2r} \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} (e^{i\pi})^{-n+2r} \\
 &= e^{-in\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(-n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2r} \\
 J_{-n}(xe^{i\pi}) &= e^{-in\pi} J_{-n}(x)
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

ve

$$\begin{aligned}
 J_n(xe^{i\pi}) &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{xe^{i\pi}}{2}\right)^{n+2r} \\
 &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} (e^{i\pi})^{n+2r}
 \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$$\begin{aligned}
 J_n(xe^{i\pi}) &= e^{in\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!\Gamma(n+r+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r} \\
 J_n(xe^{i\pi}) &= e^{in\pi} J_n(x)
 \end{aligned} \tag{3.2.13}$$

olarak bulunurlar. (1.10.1) eşitliğinde x yerine $xe^{i\pi}$ alınırsa,

$$G_n(xe^{i\pi}) = \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \{J_{-n}(xe^{i\pi}) - e^{-in\pi} J_n(xe^{i\pi})\} \tag{3.2.14}$$

olur. (1.10.1) , (3.2.14) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılır ve (3.2.11) , (3.2.13) eşitlikleri kullanılırlarsa,

$$\begin{aligned}
 G_n(x) - e^{in\pi} G_n(xe^{i\pi}) &= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \{J_{-n}(x) - e^{-in\pi} J_n(x)\} \\
 &- \frac{\pi e^{in\pi}}{2 \sin n\pi} \{J_{-n}(xe^{i\pi}) - e^{-in\pi} J_n(xe^{i\pi})\} \\
 &= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \{J_{-n}(x) - e^{in\pi} J_{-n}(xe^{i\pi}) \\
 &- e^{-in\pi} J_n(x) + J_n(xe^{i\pi})\} \\
 &= \frac{\pi}{2 \sin n\pi} \{J_{-n}(x) - e^{in\pi} e^{-in\pi} J_{-n}(x) \\
 &- e^{-in\pi} J_n(x) + e^{in\pi} J_n(x)\} \\
 &= \frac{\pi J_n(x)}{2 \sin n\pi} \{e^{in\pi} - e^{-in\pi}\}
 \end{aligned}$$

elde edilir. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ ve $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$i\pi J_n(x) = G_n(x) - e^{in\pi} G_n(xe^{i\pi}) \quad (3.2.15)$$

bulunur. (3.2.10) asimtotik açılımında x yerine $xe^{i\pi}$ alınır ve $e^{i\pi} = -1$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} G_n(xe^{i\pi}) &= \sqrt{\frac{\pi}{2xe^{i\pi}}} e^{-\frac{1}{2}n\pi i + i(xe^{i\pi} + \frac{1}{4}\pi)} \left[\left\{ 1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8(xe^{i\pi}))^2} + \dots \right\} \right. \\ &\quad \left. + i \left\{ \frac{4n^2 - 1^2}{1!8(xe^{i\pi})} - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3!(8(xe^{i\pi}))^3} + \dots \right\} \right] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{-\frac{1}{2}n\pi i + i(-x + \frac{1}{4}\pi)} \left[\left\{ 1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right\} \right. \\ &\quad \left. + i \left\{ -\frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3!(8x)^3} - \dots \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

olur. (3.2.10) ve (3.2.16) değerleri (bvgftr543.2.15) de yerlerine yazılır $i = e^{\frac{\pi}{2}}$ olduğu gözönünde tutulur ve her iki taraf $\pi e^{\frac{\pi}{2}}$ ile bölünürse,

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \left\{ \left[e^{-\frac{1}{2}n\pi i + i(x - \frac{1}{4}\pi)} - e^{\frac{1}{2}n\pi i - i(x + \frac{3}{4}\pi)} \right] \left[1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right] \right. \\ &\quad + i \left[e^{-\frac{1}{2}n\pi i + i(x - \frac{1}{4}\pi)} + e^{\frac{1}{2}n\pi i - i(x + \frac{3}{4}\pi)} \right] \left[\frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3!(8x)^3} + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

olur. $e^{-\frac{3\pi}{4}i} = e^{i(\frac{\pi}{4} - \pi)} = -e^{\frac{\pi}{4}i}$ olduğu dikkate alınır,

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \left\{ \left[2 \frac{e^{-\frac{1}{2}n\pi i + i(x - \frac{1}{4}\pi)} + e^{\frac{1}{2}n\pi i - i(x - \frac{1}{4}\pi)}}{2} \right] \left[1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right] \right. \\ &\quad + i \left[2i \frac{e^{-\frac{1}{2}n\pi i + i(x - \frac{1}{4}\pi)} - e^{\frac{1}{2}n\pi i - i(x - \frac{1}{4}\pi)}}{2i} \right] \left[\frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3!(8x)^3} + \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

halini alır. $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ ve $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ oldukları gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} J_n(x) = & \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}n\pi\right) \left\{ 1 - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right\} \\ & - \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}n\pi\right) \left\{ \frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} \right. \\ & \left. - \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)(4n^2 - 5^2)}{3!(8x)^3} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

asimtotik açılımı elde edilir.

3.2.5 $I_n(x)$ Değiştirilmiş Bessel Fonksiyonu için Asimtotik Açılım

(3.2.15) da x yerine it alınır,

$$i\pi J_n(it) = G_n(it) - e^{in\pi} G_n(ite^{i\pi})$$

olur. (2.3.4) ve (2.3.5) değerleri yukarıda yerlerine yazılırlarsa,

$$i\pi e^{\frac{1}{2}n\pi i} I_n(t) = e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(t) - e^{in\pi} e^{-\frac{1}{2}n\pi i} K_n(te^{i\pi})$$

olur. Burada t yerine x alınır ve eşitliğin her iki tarafı $e^{\frac{1}{2}n\pi i}$ ile bölünürse,

$$i\pi I_n(x) = e^{-n\pi i} K_n(x) - K_n(xe^{i\pi}) \quad (3.2.18)$$

elde edilir. (3.2.8) serisinde x yerine $xe^{i\pi}$ alınır ve $e^{i\pi} = -1$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\begin{aligned} K_n(xe^{i\pi}) &= \sqrt{\frac{\pi}{2xe^{i\pi}}} e^{-(-x)} \left\{ 1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!8(-x)} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(-8x)^2} + \dots \right\} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{x - \frac{\pi}{2}i} \left\{ 1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} - \dots \right\} \end{aligned}$$

olur. Bu seri ve (3.2.8) deki seri (3.2.18) da yerlerine yazılırlarsa,

$$\begin{aligned} i\pi I_n(x) &= e^{-in\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left\{ 1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \right\} \\ &- e^{-\frac{\pi}{2}i} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^x \left\{ 1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} - \dots \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik $i = e^{\frac{\pi}{2}}$ olduğu gözönünde tutularak $i\pi$ ile bölünürse $I_n(x)$ fonksiyonunun asimtotik açılımı,

$$\begin{aligned}
I_n(x) = e^{-i(n+\frac{1}{2})\pi} \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^{-x} \left\{ 1 + \frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} \right. \\
+ \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots \left. \right\} \\
- \sqrt{\frac{1}{2\pi x}} e^x \left\{ 1 - \frac{4n^2 - 1^2}{1!8x} + \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2)}{2!(8x)^2} - \dots \right\} \quad (3.2.19)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

3.3 Lommel İntegralleri

$$x^2 u'' + x u' + (\lambda^2 x^2 - m^2)u = 0 \quad (3.3.1)$$

$$x^2 v'' + x v' + (\mu^2 x^2 - n^2)v = 0 \quad (3.3.2)$$

denklemlerinin çözümleri sırasıyla u ve v olsun. Bu denklemler sırasıyla $\frac{v}{x}$ ve $\frac{u}{x}$ fonksiyonlarıyla çarpıldıktan sonra taraf tarafa çıkarılırsa,

$$x(uv'' - vu'') + uv' - vu' + (\mu^2 - \lambda^2)xuv + \left(\frac{m^2 - n^2}{x}\right)uv = 0$$

$$\frac{d}{dx} [x(uv' - vu')] = \left\{ (\lambda^2 - \mu^2)x + \frac{n^2 - m^2}{x} \right\} uv$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafının a dan b ye kadar integrali alınır,

$$\int_a^b \frac{d}{dx} [x(uv' - vu')] dx = \int_a^b \left[(\lambda^2 - \mu^2)x + \frac{n^2 - m^2}{x} \right] uv dx$$

$$\int_a^b \left[(\lambda^2 - \mu^2)x + \frac{n^2 - m^2}{x} \right] uv dx = \left[x(uv' - vu') \right]_a^b \quad (3.3.3)$$

elde edilir.

$n > -1$ için kabul edelim ki $m = n$, $u = J_n(\lambda x)$, $v = J_n(\mu x)$ ve $a = 0, b = x$ olsun. Bu durumda (3.3.3) eşitliği,

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^x x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx = x \left[\mu J_n(\lambda x) J_n'(\mu x) - \lambda J_n(\mu x) J_n'(\lambda x) \right] \quad (3.3.4)$$

olarak veya (1.4.2) bağıntısı kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^x x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx &= J_n(\lambda x) \mu x J_n'(\mu x) - J_n(\mu x) \lambda x J_n'(\lambda x) \\
&= J_n(\lambda x) [n J_n(\mu x) - \mu x J_{n+1}(\mu x)] \\
&\quad - J_n(\mu x) [n J_n(\lambda x) - \lambda x J_{n+1}(\lambda x)] \\
(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^x x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx &= -x [\mu J_n(\lambda x) J_{n+1}(\mu x) \\
&\quad - \lambda J_n(\mu x) J_{n+1}(\lambda x)]
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

şeklinde yazılabilir. (3.3.4) eşitliğinin her iki tarafı $\lambda^2 - \mu^2$ ile bölünür ve $\lambda \rightarrow \mu$ için limit alınır,sa,

$$\begin{aligned}
\int_0^x x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx &= \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} x [\mu J_n(\lambda x) J_n'(\mu x) - \lambda J_n(\mu x) J_n'(\lambda x)] \\
\lim_{\lambda \rightarrow \mu} \int_0^x x J_n(\lambda x) J_n(\mu x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} x [\mu J_n(\lambda x) J_n'(\mu x) - \lambda J_n(\mu x) J_n'(\lambda x)] \\
\int_0^x x J_n^2(\lambda x) dx &= \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

belirsizliği ortaya çıkar. Bu belirsizliği kaldırmak için L'Hospital kuralı uygulanır,sa,

$$\begin{aligned}
\int_0^x x J_n^2(\lambda x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \left\{ \frac{1}{-2\mu} x [J_n(\lambda x) J_n'(\mu x) + \mu x J_n(\lambda x) J_n''(\mu x) \right. \\
&\quad \left. - \lambda x J_n'(\mu x) J_n'(\lambda x)] \right\} \\
&= \frac{x^2}{2} \left[(J_n'(\lambda x))^2 - \frac{1}{\lambda^2 x^2} J_n(\lambda x) (\lambda^2 x^2 J_n''(\lambda x) + \lambda x J_n'(\lambda x)) \right]
\end{aligned}$$

bulunur. (1.3.1) Bessel denkleminde dolay

$$x^2 y'' + x y' = (n^2 - x^2) y$$

dir. $J_n(\lambda x)$ Bessel fonksiyonu olduğundan,

$$\lambda^2 x^2 J_n''(\lambda x) + \lambda x J_n'(\lambda x) = (n^2 - \lambda^2 x^2) J_n(\lambda x)$$

ifadesi gerçektlenir. O halde,

$$\begin{aligned}
\int_0^x x J_n^2(\lambda x) dx &= \frac{x^2}{2} \left[(J_n'(\lambda x))^2 - \frac{1}{\lambda^2 x^2} J_n(\lambda x) (n^2 - \lambda^2 x^2) J_n(\lambda x) \right] \\
&= \frac{x^2}{2} \left[(J_n'(\lambda x))^2 - \left(\frac{n^2}{\lambda^2 x^2} - 1 \right) J_n^2(\lambda x) \right] \\
\int_0^x x J_n^2(\lambda x) dx &= \frac{x^2}{2} \left[\{J_n'(\lambda x)\}^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2 x^2} \right) J_n^2(\lambda x) \right]
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

bulunur.

$m + n > 0$, $m \neq n$ için kabul edelim ki (3.3.3) ifadesinde $\mu = \lambda, u = J_m(\lambda x)$, $v = J_n(\lambda x), a = 0$ ve $b = 1$ olsun. Bu durumda,

$$\int_0^1 \frac{n^2 - m^2}{x} J_m(\lambda x) J_n(\lambda x) dx = \left[x J_m(\lambda x) \lambda J_n'(\lambda x) - x J_n(\lambda x) \lambda J_m'(\lambda x) \right]_0^1$$

olur. Bulunan ifade düzenlenirse,

$$\int_0^1 J_m(\lambda x) J_n(\lambda x) \frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{m^2 - n^2} \left[J_n(\lambda) J_m'(\lambda) - J_m(\lambda) J_n'(\lambda) \right] \tag{3.3.7}$$

elde edilir.

Eğer $n > 0$ ise (3.3.7) ifadesinde $m \rightarrow n$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{m \rightarrow n} \int_0^1 J_m(\lambda x) J_n(\lambda x) \frac{dx}{x} &= \lim_{m \rightarrow n} \frac{\lambda}{m^2 - n^2} \left[J_n(\lambda) J_m'(\lambda) - J_m(\lambda) J_n'(\lambda) \right] \\
&= \frac{0}{0}
\end{aligned}$$

belirsizliği ortaya çıkar. Bu belirsizliği kaldırmak için L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x J_n^2(\lambda x) \frac{dx}{x} &= \lim_{m \rightarrow n} \frac{\lambda}{2m} \left[J_n(\lambda) \frac{\partial}{\partial m} J_m'(\lambda) - J_n'(\lambda) \frac{\partial}{\partial m} J_m(\lambda) \right] \\
\int_0^1 J_n^2(\lambda x) \frac{dx}{x} &= \frac{\lambda}{2n} \left[J_n(\lambda) \frac{\partial}{\partial n} J_n'(\lambda) - J_n'(\lambda) \frac{\partial}{\partial n} J_n(\lambda) \right]
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

bulunur.

$I_n(x)$ fonksiyonu için Lommel integralleri benzer yolla $n > -1$ için

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^x x I_n(\lambda x) I_n(\mu x) dx = x \left[\lambda I_n(\mu x) I_n'(\lambda x) - \mu I_n(\lambda x) I_n'(\mu x) \right] \quad (3.3.9)$$

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_0^x x I_n(\lambda x) I_n(\mu x) dx = -x \left[\mu I_n(\lambda x) I_{n+1}(\mu x) - \lambda I_n(\mu x) I_{n+1}(\lambda x) \right] \quad (3.3.10)$$

$$\int_0^x x I_n^2(\lambda x) dx = -\frac{x^2}{2} \left[(I_n'(\lambda x))^2 - \left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2 x^2}\right) I_n^2(\lambda x) \right] \quad (3.3.11)$$

$m + n > 0$ için

$$\int_0^1 I_n(\lambda x) I_m(\lambda x) \frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{m^2 - n^2} \left[I_n(\lambda) I_m'(\lambda) - I_m(\lambda) I_n'(\lambda) \right] \quad (3.3.12)$$

$$\int_0^1 I_n^2(\lambda x) \frac{dx}{x} = \frac{\lambda}{2n} \left[I_n(\lambda) \frac{\partial}{\partial n} I_n'(\lambda) - I_n'(\lambda) \frac{\partial}{\partial n} I_n(\lambda) \right] \quad (3.3.13)$$

olarak bulunurlar.

Son olarak $K_n(x)$ fonksiyonu için Lommel integralleri benzer yolla $R(\lambda + \mu) > 0$ için

$$(\lambda^2 - \mu^2) \int_x^\infty x K_n(\lambda x) K_n(\mu x) dx = x \left[\mu K_n(\lambda x) K_n'(\mu x) - \lambda K_n(\mu x) K_n'(\lambda x) \right] \quad (3.3.14)$$

ve $R(\lambda) > 0$ için

$$\int_x^\infty x K_n^2(\lambda x) dx = \frac{x^2}{2} \left[(K_n'(\lambda x))^2 - \left(1 + \frac{n^2}{\lambda^2 x^2}\right) K_n^2(\lambda x) \right] \quad (3.3.15)$$

olarak bulunurlar.

(3.3.3) denkleminde

$$u = J_n(ax) G_n(\rho x) - J_n(\rho x) G_n(ax)$$

$$v = J_n(ay) G_n(\rho y) - J_n(\rho y) G_n(ay)$$

olsun. Burada a ve b pozitif reel sabitler, u ve v ise ρ nun fonksiyonlarıdır. (3.3.3) denklemi $\lambda = x$, $\mu = y$, $x = \rho$, $n = m$ için

$$\begin{aligned} (x^2 - y^2) \int_a^b \rho u v d\rho &= \left[\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial \rho} - v \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho=b} \\ \int_a^b \rho u v d\rho &= \frac{1}{x^2 - y^2} \left[\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial \rho} - v \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho=b} \end{aligned} \quad (3.3.16)$$

olur. (3.3.16) eşitliğinde $y \rightarrow x$ için limit alınırsa,

$$\lim_{y \rightarrow x} \int_a^b \rho u v d\rho = \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{x^2 - y^2} \left[\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial \rho} - v \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho=b} \quad (3.3.17)$$

olur.

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} v &= \lim_{y \rightarrow x} (J_n(ay)K_n(\rho y) - J_n(\rho y)G_n(ay)) \\ &= J_n(ax)G_n(\rho x) - J_n(\rho x)G_n(ax) \\ &= u \end{aligned}$$

olup bu durumda (3.3.17) eşitliğinin ikinci yanında $\frac{0}{0}$ belirsizliği ortaya çıkar. Belirsizliği kaldırmak için L'Hospital kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int_a^b \rho u^2 d\rho &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{1}{-2y} \left[\rho \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho=b} \\ \int_a^b \rho u^2 d\rho &= \frac{1}{-2x} \left[\rho \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho=b} \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$u = I_n(ax)K_n(\rho x) - I_n(\rho x)K_n(ax)$$

$$v = I_n(ay)K_n(\rho y) - I_n(\rho y)K_n(ay)$$

fonksiyonları için

$$\int_a^b \rho u v d\rho = -\frac{1}{x^2 - y^2} \left[\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial \rho} - v \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho=b} \quad (3.3.19)$$

$$\int_a^b \rho u^2 d\rho = \frac{1}{2x} \left[\rho \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right]_{\rho=b} \quad (3.3.20)$$

eşitlikleri elde edilir.

3.4 Bessel Fonksiyonunun Sıfırları

Bu kısımda verilen teoremler Bessel fonksiyonlarının sıfırları hakkında bilgi vermektedir.

Teorem 3.4.1 *Eğer y ,*

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3.4.1)$$

lineer diferensiyel denkleminin herhangi bir çözümü ise, $a \neq 0$ olmak üzere y fonksiyonu tekrar eden sıfır yerine(katlı-köke) sahip değildir. Burada a, b, c fonksiyonları x in fonksiyonları olup kendileri ve türevleri sürekli olan fonksiyonlardır.

İspat: Kabul edelim ki y nin sıfırları tekrar etsin. Bu durumda y ve y' sıfırları eşit olup (3.4.1) diferensiyel denkleminde $a \neq 0$ için $y'' = 0$ olmak zorundadır. Şimdi (3.4.1) diferensiyel denkleminin x e göre türevi alınır,

$$ay'' + by' + cy = 0$$

$$ay''' + (a' + b)y'' + (b' + c)y' + c'y = 0 \quad (3.4.2)$$

bulunur. Bu denklemde $y = 0$, $y' = 0$ ve $y'' = 0$ dır. Bu durumda (3.4.2) diferensiyel denkleminde $ay''' = 0$ dır. Bu ise $a \neq 0$ için $y''' = 0$ olması demektir. İşleme bu şekilde devam edilirse, y nin diğer türevleri de sıfır olmak zorundadır. Bu ise Taylor teoreminden dolayı y nin özdeş olarak sıfır olması demektir. Bu durumda aşikar çözüm elde edilir. Bu ise teoremi ispatlar.

Sonuç 3.4.2 $x \neq 0$ olmak üzere Bessel fonksiyonunun bütün sıfırları basittir.

İspat: (3.4.1) denkleminde $a = x^2$, $b = x$ ve $c = x^2 - n^2$ alınır ispat açıktır.

Sonuç 3.4.3 $J_n(x)$ ve $J'_n(x)$ fonksiyonları $x \neq 0$ için ortak sıfır yerine sahip değildir.

İspat: Teorem(3.4.1) in ispatından dolayı ispat açıktır.

Teorem 3.4.4 Bessel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü P ve Q ise bu durumda $x \neq 0$ olmak üzere bu çözümler ortak sıfır yerine sahip değildir.

İspat: Bessel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü P ve Q olsun.(1.12.1) den

$$PQ' - P'Q = \frac{c}{x}$$

olduğunu biliyoruz. Kabul edelim ki P ve Q çözümleri x in aynı değerleri için ortak sifıra sahip olsun. Bu durumda,

$$P(x_1)Q'(x_1) - P'(x_1)Q(x_1) = \frac{c}{x_1}$$

$$c = 0$$

bulunur. $c = 0$ değeri (1.12.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$PQ' - P'Q = 0$$

olur. Her iki taraf PQ ile bölünür ve düzenlenirse,

$$\frac{P'}{P} = \frac{Q'}{Q}$$

elde edilir. Bu ise P fonksiyonu Q nun sabit bir katı ise geçerlidir.O halde P ile Q lineer bağımlıdır. Bu da kabulümüz ile çelişir. Yani; lineer bağımsız iki çözümün ortak sıfır yeri(kökü) olamaz.

Örneğin; $J_n(x)$ ile $Y_n(x)$ in ortak sıfır yeri(kökü) yoktur.

Teorem 3.4.5 $J_n(x)$ ve $J_{n+1}(x)$ fonksiyonları $x \neq 0$ için ortak köke sahip değildir.

İspat:(1.4.2) indirgeme bağıntısından,

$$J'_n(x) - n \frac{J_n(x)}{x} = J_{n+1}(x)$$

dır. Kabul edelim ki $J_n(x)$ ve $J_{n+1}(x)$ fonksiyonları ortak köke sahip olsun. Bu durumda $J_n(x)$ ve $J'_n(x)$ fonksiyonları ortak köke sahiptir. Bu ise Sonuç3.4.3 ile çelişir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.4.6 n reel olmak üzere $K_n(x)$ in reel pozitif sıfırı yoktur.

İspat: (2.8.6) ifadesinden $\lim_{x \rightarrow \infty} K_n(x) = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu ise bize x in herhangi pozitif reel değeri için $K_n(x)$ in sıfır olmamasını verir. (2.3.6) eşitliğinden $K_n(x)$ için geçerli her durum $K_{-n}(x)$ için de geçerli olacağından $x \in R^+$ için $K_{-n}(x) \neq 0$ dır. Bu da reel n ler için $K_n(x)$ in pozitif reel sıfırlarının olmaması demektir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.4.7 n reel sayı olmak üzere $G_n(x)$ fonksiyonunun reel sıfırı yoktur.

İspat: Kabul edelim ki $x \in R$ için $G_n(x) = 0$ dır. (1.10.6) eşitliğinden

$$G_n(x) = 0 \Rightarrow -Y_n(x) + (\ln 2 - \gamma - \frac{1}{2}i\pi)J_n(x) = 0$$

olur. Bu ise reel ve imajiner kısımların sıfır olması demektir. Yani, $Y_n(x) = 0$ ve $J_n(x) = 0$ olur. Buda Teorem(3.4.4) ile çelişir. O halde $G_n(x)$ fonksiyonunun reel kökü yoktur.

3.5 Fourier-Bessel Açılımları

$(0, a)$ aralığında Dirichlet koşullarını sağlayan bir $f(x)$ fonksiyonu,

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} A_r J_n(\lambda_r x) \quad (3.5.1)$$

şeklinde seriye açılabilir. Burada $n > -1$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ pozitif sayıları $J_n(\lambda a)$ nın sıralı sıfırlarıdır.

(3.5.1) ifadesinin her iki yanı $xJ_n(\lambda_k x)$ ile çarpılır ve 0 dan a ya kadar integral alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^a x f(x) J_n(\lambda_k x) dx &= \int_0^a \sum_{r=1}^{\infty} A_r x J_n(\lambda_r x) J_n(\lambda_k x) dx \\ &= \int_0^a A_k x J_n(\lambda_k x) J_n(\lambda_k x) dx \\ &\quad + \int_0^a \sum_{r=1, r \neq k}^{\infty} A_r x J_n(\lambda_r x) J_n(\lambda_k x) dx \\ &= A_k \int_0^a x J_n^2(\lambda_k x) dx \\ &\quad + \sum_{r=1, r \neq k}^{\infty} A_r \int_0^a x J_n(\lambda_r x) J_n(\lambda_k x) dx \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

bulunur. (3.3.4) ifedesinde $\lambda = \lambda_r, \mu = \lambda_k$ ve $x = a$ alınırsa,

$$(\lambda_r^2 - \lambda_k^2) \int_0^a x J_n(\lambda_r x) J_n(\lambda_k x) dx = a \left[\lambda_k J_n(\lambda_r a) J_n'(\lambda_k a) - \lambda_r J_n(\lambda_k a) J_n'(\lambda_r a) \right]$$

olur. $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ pozitif sayıları $J_n(\lambda a)$ nın sıfırları olduğundan,

$$\int_0^a x J_n(\lambda_r x) J_n(\lambda_k x) dx = 0 \quad (3.5.3)$$

elde edilir. (3.3.6) denkleminde $\lambda = \lambda_k$, $x = a$ alınır,

$$\begin{aligned} \int_0^a x (J_n(\lambda_k x))^2 dx &= \frac{a^2}{2} \left[(J'_n(\lambda_k a))^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^2 a^2}\right) J_n^2(\lambda_k a) \right] \\ &= \frac{a^2}{2} [J'_n(\lambda_k a)]^2 \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

bulunur. (3.5.3) ve (3.5.4) ifadelerinin (3.5.2) eşitliğinde yerlerine konulmasıyla,

$$\begin{aligned} \int_0^a x f(x) J_n(\lambda_k x) dx &= A_k \int_0^a x J_n^2(\lambda_k x) dx + \sum_{r=1, r \neq k}^{\infty} A_r \int_0^a x J_n(\lambda_r x) J_n(\lambda_k x) dx \\ &= A_k \frac{a^2}{2} [J'_n(\lambda_k a)]^2 \end{aligned}$$

olur. Burada k indisi yerine r indisi alınır,

$$\int_0^a x f(x) J_n(\lambda_r x) dx = \frac{a^2}{2} A_r [J'_n(\lambda_r a)]^2$$

elde edilir. Bu eşitlikten A_r katsayıları

$$A_r = \frac{2 \int_0^a x f(x) J_n(\lambda_r x) dx}{a^2 [J'_n(\lambda_r a)]^2} \quad (3.5.5)$$

olarak bulunurlar. $x=a$ olduğunda seri aşikar olarak sıfır değerini alır.

Şimdi de λ_r ler $\lambda J'_n(\lambda a) + h J_n(\lambda a)$ nın pozitif kökleri olsunlar. Buradan

$$\lambda_r J'_n(\lambda_r a) + h J_n(\lambda_r a) = 0 \Rightarrow J'_n(\lambda_r a) = -\frac{h}{\lambda_r} J_n(\lambda_r a)$$

dir. Bu eşitlik ve (3.3.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^a x J_n(\lambda_r x) J_n(\lambda_k x) dx &= \frac{a}{\lambda_r^2 - \lambda_k^2} \left[\lambda_k J_n(\lambda_r a) \left(-\frac{h}{\lambda_k} J_n(\lambda_k a) \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_r J_n(\lambda_k a) \left(-\frac{h}{\lambda_r} J_n(\lambda_r a) \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

elde edilir. (3.3.6) ifadesinde $\lambda = \lambda_k$ ve $x = a$ alınırsa,

$$\int_0^a x \left(J_n(\lambda_k x) \right)^2 dx = \frac{a^2}{2} \left[\left(J'_n(\lambda_k a) \right)^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^2 a^2} \right) J_n^2(\lambda_k a) \right]$$

olur. Bu eşitlikte yine,

$$J'_n(\lambda_r a) = -\frac{h}{\lambda_r} J_n(\lambda_r a)$$

olduğu gözönünde tutulursa

$$\begin{aligned} \int_0^a x J_n^2(\lambda_k x) dx &= \frac{a^2}{2} \left[\left(-\frac{h}{\lambda_k} J_n(\lambda_k a) \right)^2 + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda_k^2 a^2} \right) J_n^2(\lambda_k a) \right] \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{a^2 h^2 + (a^2 \lambda_k^2 - n^2)}{a^2 \lambda_k^2} \right] J_n^2(\lambda_k a) \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

bulunur. (3.5.6) ve (3.5.7) ifadeleri (3.5.2) de yerlerine konulurlarsa,

$$\int_0^a x f(x) J_n(\lambda_k x) dx = \frac{a^2}{2} A_k \left[\frac{a^2 h^2 + (a^2 \lambda_k^2 - n^2)}{a^2 \lambda_k^2} \right] J_n^2(\lambda_k a)$$

olur. Burada k indisi yerine r indisi alınırsa,

$$\int_0^a x f(x) J_n(\lambda_r x) dx = \frac{a^2}{2} A_r \frac{a^2 h^2 + (a^2 \lambda_r^2 - n^2)}{a^2 \lambda_r^2} J_n^2(\lambda_r a)$$

elde edilir. Buradan katsayılar,

$$A_r = \frac{2}{a^2} \frac{a^2 \lambda_r^2 \int_0^a x f(x) J_n(\lambda_r x) dx}{(a^2 h^2 + (a^2 \lambda_r^2 - n^2)) J_n^2(\lambda_r a)} \quad (3.5.8)$$

olarak bulunurlar. Özellikle $h=0$ iken λ lar $(\lambda_1, \lambda_2, \dots) J'_n(\lambda a)$ nın sıfırlarıdır. (3.5.8) ifadesinde $h=0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_0^a x f(x) J_n(\lambda_r x) dx &= \frac{a^2}{2} A_r \frac{a^2 \lambda_r^2 - n^2}{a^2 \lambda_r^2} J_n^2(\lambda_r a) \\ &= \frac{a^2}{2} A_r \left(1 - \frac{n^2}{a^2 \lambda_r^2} \right) J_n^2(\lambda_r a) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$A_r = \frac{2 \int_0^a x f(x) J_n(\lambda_r x) dx}{a^2 \left(1 - \frac{n^2}{a^2 \lambda_r^2}\right) J_n^2(\lambda_r a)} \quad (3.5.9)$$

olur. Bu açılımlar $0 < x < a$ için geçerlidir.



4 BESSEL FONKSİYONLARININ UYGULAMALARI

4.1 Giriş

Bu bölümde Dairesel zarın titreşimi incelenecektir. Daha sonra ise başlangıç ve sınır koşulları altında ısı denkleminin çözümleri bulunacaktır.

4.2 Dairesel Zarın Titreşimi

Zarın titreşimi denklemi, matematiksel fiziğin problemlerinin çözümlerini bulmak için kullanılır. Dairesel zar yüzeyinin titreşim dönüşümü, Bessel fonksiyonlarının uygulama alanlarından biridir.

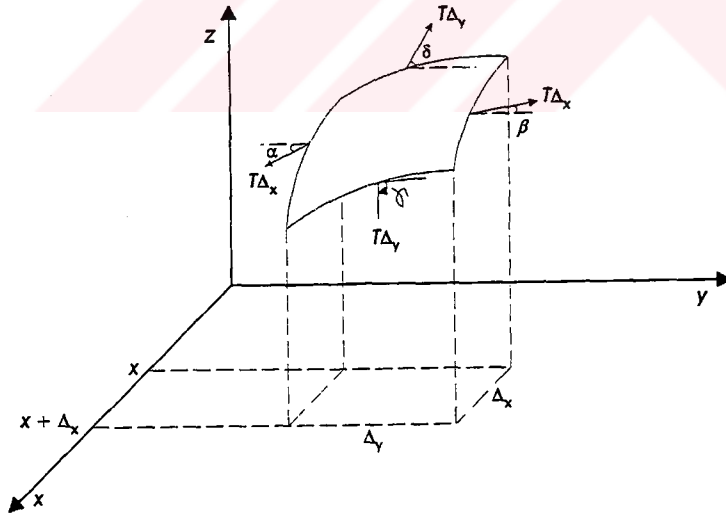
Buradaki zar ince esnek tabaka olup, yoğunluğu düzgün olsun.

Zarın ağırlığı zardaki gerilim kuvvetini hissettirmeyecek kadar küçük olsun.

Yer değiştirmiş zarın herhangi bir noktasındaki eğimi daha küçük olsun.

Son olarak kabul edelim ki zar, kusursuz titreşimler yapsın.

Bu kabuller altında zarın küçük bir parçasını düşünelim. Sapma ve yüzey eğimi küçük olduğunda alan elemanı yaklaşık olarak $\Delta x \Delta y$ ye eşittir. Eğer T birim uzunluktaki gerilim kuvveti olarak alınırsa, kenarlardaki hareket eden kuvvetler $T\Delta x$ ve $T\Delta y$ dir.



Telin bütün yönlerdeki düşey gerilim kuvvetlerinin bileşkesi,

$$T\Delta x \sin \beta - T\Delta x \sin \alpha + T\Delta y \sin \delta - T\Delta y \sin \gamma$$

dır. Yüzeyin eğimi mümkün olduğu kadar küçük olduğundan, açılarının sinüsleri yerine tanjantları alınabilir. Dolayısıyla,

$$T\Delta x(\tan \beta - \tan \alpha) + T\Delta y(\tan \delta - \tan \gamma)$$

bulunur. Newton'un 2 inci hareket kanununa göre Kuvvet=Kütle× İvme dir. Yani,

$$T\Delta x(\tan \beta - \tan \alpha) + T\Delta y(\tan \delta - \tan \gamma) = \rho\Delta A z_{tt} \quad (4.2.1)$$

dir. Burada ρ yoğunluğu ve $\Delta A = \Delta x\Delta y$ şeklinde olan alan elemanını göstermektedir. Analizden biliyoruz ki,

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= z_y(x_1, y) \\ \tan \beta &= z_y(x_2, y + \Delta y) \\ \tan \delta &= z_x(x, y_1) \\ \tan \gamma &= z_x(x + \Delta x, y_2) \end{aligned}$$

dir. Burada x_1 ve x_2 x in x ile $x + \Delta x$ arasındaki değeridir. y_1 ve y_2 de benzer şekilde y in y ile $y + \Delta y$ arasındaki değeridir. Bu değerler (4.2.1) de yerlerine konulurlarsa,

$$T\Delta x \left[z_y(x_2, y + \Delta y) - z_y(x_1, y) \right] + T\Delta y \left[z_x(x + \Delta x, y_2) - z_x(x, y_1) \right] = \rho\Delta x\Delta y z_{tt}$$

bulunur. Bu eşitlik $\rho\Delta x\Delta y$ ile bölünürse,

$$\frac{T}{\rho} \left[\frac{z_y(x_2, y + \Delta y) - z_y(x_1, y)}{\Delta y} + \frac{z_x(x + \Delta x, y_2) - z_x(x, y_1)}{\Delta x} \right] = z_{tt}$$

olur. Burada $\Delta x \rightarrow 0$ ve $\Delta y \rightarrow 0$ için limit alınırsa,

$$\frac{T}{\rho} [z_{yy} + z_{xx}] = z_{tt}$$

elde edilir. $\frac{T}{\rho} = c^2$ denilirse,

$$z_{tt} = c^2 [z_{yy} + z_{xx}] \quad (4.2.2)$$

denklemi bulunur. Bu denklem Dalga denklemi olarak bilinir. (4.2.2) dalga denkleminde,

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta$$

dönüşümleri ile kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right] \quad (4.2.3)$$

elde edilir. Bu denklemin

$$z(t, r, \theta) = T(t)R(r)\Theta(\theta) \quad (4.2.4)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir çözümlerini arayalım. Buradan türevler,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{d^2 T}{dt^2} R \Theta, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{dR}{dr} T \Theta, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{d^2 R}{dr^2} T \Theta, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} T R$$

olup, bu türevler (4.2.3) denkleminde yerlerine yazılır ve elde edilen eşitliğin her iki yanı $T(t)R(r)\Theta(\theta)$ ile bölünürse,

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{c^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{c^2}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \quad (4.2.5)$$

elde edilir. Bu denklemde son terim diğer terimlerden bağımsız olduğundan,

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$

değeri sabittir. Burada Θ periyodiktir ve periyodu 2π dir. n keyfi tamsayı olmak üzere,

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -n^2$$

denilirse,

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = -n^2 \Theta \quad (4.2.6)$$

olur. Bu denklemin çözümü,

$$\Theta(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta \quad (4.2.7)$$

şeklinde bulunur. Burada A ve B keyfi sabitlerdir.

Yine (4.2.5) eşitliğinin sol tarafındaki terim bir sabite eşit olmalıdır. Bu sabiti de $-p^2$ ile gösterelim. Bu durumda,

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -p^2 T \quad (4.2.8)$$

olur. Bu denklemin çözümü ise,

$$T(t) = C \cos pt + D \sin pt \quad (4.2.9)$$

dir. Burada C ve D keyfi sabitlerdir.

(4.2.6) ve (4.2.8) değerleri (4.2.5) de yerlerine konulurlarsa,

$$-p^2 = \frac{c^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) + \frac{c^2}{r^2} (-n^2)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı $r^2 R$ ile çarpılır, c^2 ile bölünür ve $\frac{p}{c} = k$ alınır,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + (k^2 r^2 - n^2) R = 0 \quad (4.2.10)$$

olur. Bu denklemde $kr = t$ bağımsız değişken değiştirmesi yapılırsa

$$t^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + t \frac{dR}{dt} + (t^2 - n^2) R = 0$$

Bessel diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden yararlanılarak (4.2.10) denkleminin çözümü,

$$R(r) = F J_n(kr) + G Y_n(kr) \quad (4.2.11)$$

şeklinde yazılabilir. Burada F ve G keyfi sabitlerdir.

(4.2.7), (4.2.9) ve (4.2.11) çözümleri (4.2.4) de yerlerine yazılırlarsa,

$$z = \left\{ A \cos n\theta + B \sin n\theta \right\} \left\{ C \cos pt + D \sin pt \right\} \left\{ F J_n(kr) + G Y_n(kr) \right\} \quad (4.2.12)$$

olur. Burada A,B,C,D,E,F ve G keyfi sabitler, n herhangi bir tamsayı ve $p = kc$ dir.

Zar $r = a$ çemberi ile sınırlı ise G sıfır olmak zorundadır. Çünkü $r = 0$ değeri için $Y_n(kr)$ sonsuz değerini alır. $z(a) = 0$ sınır koşulundan θ ve t nin bütün değerleri için $J_n(ka)$ sıfır değerini alır. Buradan (4.2.12) ifadesinin yerini,

$$z = \left\{ A \cos n\theta + B \sin n\theta \right\} \left\{ C \cos pt + D \sin pt \right\} J_n(kr) \quad (4.2.13)$$

ifadesi alır. Burada $J_n(ka) = 0$ dir. Eğer titreşim simetrik ise çözüm θ dan bağımsız olduğundan $n = 0$ ise (4.2.13) ifadesi,

$$z = \left\{ C \cos pt + D \sin pt \right\} J_0(kr) \quad (4.2.14)$$

ifadesine dönüşür.

Zar eğer durgun halden harekete başlıyor ise ilk olarak $\frac{\partial z}{\partial t}(0, r, \theta) = 0$ dır. Bu koşul (4.2.13) de yerine yazılırsa $D = 0$ olur. Bu durumda dalga denkleminin çözümü,

$$z = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(p_m t) J_0(k_m r) \quad (4.2.15)$$

dir. Burada $p_m = ck_m$ olup, $t = 0$ için $z(0, r, \theta) = f(r)$ sağlansın. Bu koşul (4.2.15) de yerine yazılırsa,

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0(k_m r) \quad (4.2.16)$$

olur. Buradan c_m Fourier katsayılarını belirleyelim. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $r J_0(k_m r)$ ile çarpılır 0 dan a ya kadar integrali alınır ve (3.5.5) eşitliği kullanılırsa,

$$\int_0^a r f(r) J_0(k_m r) dr = \frac{a^2}{2} c_m \{J_0'(k_m a)\}^2$$

elde edilir. Buradan c_m katsayıları,

$$c_m = \frac{2 \int_0^a r f(r) J_0(k_m r) dr}{a^2 \{J_0'(k_m a)\}^2}$$

olarak bulunur.

Başka bir durumda zarın titreşim hareketi simetrik olmasın. Bu durumda (4.2.2) dalga denkleminin benzer şekilde

$$z(t, 0, \theta) = 0 \quad , \quad z(t, a, \theta) = 0 \quad , \quad z_t(0, r, \theta) = 0$$

başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözümü,

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{n,m} \cos n\theta + B_{n,m} \sin n\theta \right\} \cos(p_m t) J_n(k_m r) \quad (4.2.17)$$

şeklindedir. Burada $k_1, k_2, k_3, \dots$ ler $J_n(ka)$ Bessel fonksiyonunun sıralı pozitif sıfırlarıdır ve $p_m = ck_m$ dir. $z(0, r, \theta) = f(r, \theta)$ koşulu (4.2.17) da yerine yazılırsa,

$$f(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{n,m} \cos n\theta + B_{n,m} \sin n\theta \right\} J_n(k_m r) \quad (4.2.18)$$

elde edilir. (4.2.18) nin her iki yanını $r \cos \nu \theta J_\nu(k_s r)$ ile çarpılır ve daha sonra 0 dan a ya ve 0 dan 2π ye kadar integraleri alınır,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \theta) J_\nu(k_s r) r \cos \nu \theta dr d\theta &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{n,m} \int_0^{2\pi} \int_0^a \cos n\theta \cos \nu \theta \right. \\ &\quad \times r J_n(k_m r) J_\nu(k_s r) dr d\theta \\ &\quad \left. + B_{n,m} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sin n\theta \cos \nu \theta r J_n(k_m r) J_\nu(k_s r) dr d\theta \right\} \end{aligned}$$

olur. Sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının ortogonalite özelliğinden,

$$\int_0^{2\pi} \sin n\theta \cos \nu \theta d\theta = 0 \quad (4.2.19)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos \nu \theta d\theta = \begin{cases} \pi & n = \nu \text{ ise} \\ 0 & n \neq \nu \text{ ise} \end{cases} \quad (4.2.20)$$

dir. Bu özellik kullanılırsa yukarıdaki eşitlik,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \theta) J_\nu(k_s r) r \cos \nu \theta dr d\theta &= \sum_{n=0, n \neq \nu}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{n,m} \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos \nu \theta d\theta \right. \\ &\quad \times \left. \int_0^a r J_n(k_m r) J_\nu(k_s r) dr \right\} \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{\nu,m} \int_0^{2\pi} \cos^2 \nu \theta d\theta \int_0^a r J_\nu(k_m r) J_\nu(k_s r) dr \right\} \\ &= \pi \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ A_{\nu,m} \int_0^a r J_\nu(k_m r) J_\nu(k_s r) dr \right\} \\ &= \pi \sum_{m=1, m \neq s}^{\infty} \left\{ A_{\nu,m} \int_0^a r J_\nu(k_m r) J_\nu(k_s r) dr \right\} \\ &+ \pi \left\{ A_{\nu,s} \int_0^a r J_\nu(k_s r) J_\nu(k_s r) dr \right\} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin sağ tarafında (3.5.3) ve (3.5.4) eşitlikleri kullanılırlarsa,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \theta) J_\nu(k_s r) r \cos \nu \theta dr d\theta = \pi A_{\nu,s} \frac{a^2}{2} \{ J'_\nu(k_s r) \}^2$$

olarak bulunur. Burada ν yerine n , s yerine de m alınırsa $A_{n,m}$ katsayıları

$$A_{n,m} = \frac{2 \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \theta) J_n(k_m r) r \cos n\theta dr d\theta}{\pi a^2 \{J'_n(k_m r)\}^2} \quad (4.2.21)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (4.2.18) eşitliğinin her iki yanını $r \sin \nu \theta J_\nu(k_s r)$ ile çarpılır ve 0 dan a ya 0 dan 2π ye kadar iki katlı integral alınır $B_{n,m}$ katsayıları ise,

$$B_{n,m} = \frac{2 \int_0^{2\pi} \int_0^a f(r, \theta) J_n(k_m r) r \sin n\theta dr d\theta}{\pi a^2 \{J'_n(k_m r)\}^2}$$

olarak bulunur. $A_{n,m}$ ve $B_{n,m}$ katsayıları (4.2.17) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa istenilen çözüm elde edilir.

4.3 Dairesel Silindirde Isı Akışı

Isının akış denklemi

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \chi \nabla^2 \nu \equiv \chi \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \right) \quad (4.3.1)$$

olarak bilinir. Buradaki χ sabiti "maddenin ısı iletkenliği" dir.

(4.3.1) ile verilen ısı denklemi için,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

silindirik koordinatlarına geçerek türevler alınıp (4.3.1) denkleminde yerlerine yazılırlarsa,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} \right) \quad (4.3.2)$$

denklemini elde edilir. Şimdi dairesel bir silindirdeki ısı akışını aşağıdaki durumlarda inceleyelim.

Durum 1:(Sonsuz-silindirdeki Değişen Isı)

$r = a$ ile sınırlanan silindirin yüzeyindeki ısı sıfır olsun ve ilk ısı $\nu = f(r)$ olsun. Bu durumda ısı θ ve z den bağımsızdır. Buradan (4.3.2) denklemi

$$\frac{1}{\chi} \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \quad (4.3.3)$$

halini alır. Bu denklemin $\nu(t, r) = T(t)R(r)$ biçiminde değişkenlerine ayrılabilir çözümlerini arayalım. Türevler alınırsa,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{dT}{dt} R, \quad \frac{\partial \nu}{\partial r} = \frac{dR}{dr}, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} = \frac{d^2 R}{dr^2} T$$

olur. Bu türevler (4.3.3) denkleminde yerlerine yazılır ve elde edilen denklem $T(t)R(r) \neq 0$ ile bölünürse,

$$\frac{1}{\chi T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) \quad (4.3.4)$$

elde edilir. Bir tarafı sadece t-ye diğer tarafı sadece r-ye bağlı olan böyle bir eşitliğin sağlanması ancak her iki yanın ortak bir sabite eşit olması ile mümkündür. Bu ortak ayırma sabitini C olarak alırsak (4.3.4) eşitliği

$$\frac{1}{\chi T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = C$$

olarak yazılır. Buradan

$$\frac{dT}{dt} = C \chi T$$

denkleminin çözümü,

$$T = E e^{\chi C t}$$

şeklindedir. Kabulümüz gereği ısı $t \rightarrow \infty$ için $T = 0$ olmalıdır. Bunun sağlanması için C ayırma sabiti negatif olmalıdır. $C = -\lambda^2$ denirse çözüm,

$$T = E e^{-\chi \lambda^2 t} \quad (4.3.5)$$

şekline dönüşür. (4.3.4) eşitliğinden

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0 \quad (4.3.6)$$

yazılabilir. Bu denklemin her iki yanı r^2 ile çarpılır ve $\lambda r = t$ bağımsız değişken değiştirmesi yapılırsa,

$$t^2 \frac{d^2 R}{dt^2} + t \frac{dR}{dt} + t^2 R = 0$$

sıfıncı basamaktan Bessel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü ise,

$$R(r) = BJ_0(t) + DY_0(t)$$

dir. $t = \lambda r$ değerini yerine yazarsak

$$R(r) = BJ_0(\lambda r) + DY_0(\lambda r)$$

olur. $r = 0$ için çözümün sonlu kalmasını istediğimizden $D \equiv 0$ almalıyız. Çünkü $r \rightarrow 0$ için $Y_0(\lambda r)$ fonksiyonu sonsuz değerini alır. Buna göre

$$R(r) = BJ_0(\lambda r) \quad (4.3.7)$$

olur. Burada $J_0(\lambda r)$ sıfıncı basamaktan birinci çeşit Bessel fonksiyonudur.

$$\nu(a, t) = R(a)T(t) = 0 \Rightarrow R(a) = 0$$

sınır koşulunu (4.3.7) denkleminde uygularsak

$$R(a) = BJ_0(\lambda a)$$

olmasını gerektirir. Bu denklem sonsuz tane λ_n sıfırına sahiptir. (4.3.5) eşitliğinden dolayı

$$T_n(t) = E_n e^{-\chi \lambda_n^2 t}$$

dir. Dolayısıyla (4.3.6) nın çözümü $\nu(r, t) = R(r)T(t)$ den

$$\nu_n(r, t) = E_n B_n e^{-\chi \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) \quad (4.3.8)$$

olur. Biliyoruz ki denklem lineer olduğundan süperpozisyon gereğince,

$$\nu(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\chi \lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) \quad (4.3.9)$$

de aynı denklemin çözümüdür. Burada $E_n B_n = A_n$ dir.

Şimdi A_n katsayılarını bulmak için $\nu(r, 0) = f(r)$ başlangıç koşulundan yararlanabiliriz.

$$\nu(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(\lambda_n r) \quad (4.3.10)$$

olur. (4.3.10) eşitliğinin her iki yanını $r J_0(\lambda_n r)$ ile çarpılır, 0 dan a ya kadar integrali alınır ve (3.5.5) eşitliği kullanılırsa

$$A_n = \frac{2}{a^2} \frac{\int_0^a r f(r) J_0(\lambda_n r) dr}{\{J_0'(\lambda_n a)\}^2}$$

şeklindedir. Burada $J_0' = -J_1$ olduğu gözönünde tutulursa

$$A_n = \frac{2}{a^2} \frac{\int_0^a r f(r) J_0(\lambda_n r) dr}{\{J_1(\lambda_n a)\}^2}$$

olur. Bulunan bu katsayı (4.3.9) eşitliğinde yerine konulursa denklemin koşulları sağlayan çözümü,

$$\nu = \frac{2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 t} J_0(\lambda_n r) \frac{\int_0^a x f(x) J_0(\lambda_n x) dx}{\{J_1(\lambda_n a)\}^2} \quad (4.3.11)$$

olarak bulunur.

Durum 2:(Yarı-sonsuz Silindirde Kararlı Isı)

Silindirin eksenini z -ekseni ve tabanını da $z = 0$ düzlemi olarak alalım. Taban $\nu = f(r)$ ısısında tutulurken ısı akışı $r = a$ yüzeyinden sıfır ısıli ortama doğru yayılsın. Böylece ν , θ dan bağımsız olur. Bu durumda (4.3.2) denklemi

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = 0 \quad (4.3.12)$$

dır. Bu durumda sınır koşulları

$$\nu = f(r) \quad z = 0 \text{ ise} \quad (4.3.13)$$

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} + h\nu = 0 \quad r = a \text{ ise} \quad (4.3.14)$$

şeklindedir. (4.3.12) denkleminin $\nu(r, z) = R(r)Z(z)$ biçiminde değişkenlerine ayrılabilir çözümlerini arayalım. Türevler,

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} = Z \frac{dR}{dr}, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} = Z \frac{d^2 R}{dr^2}, \quad \frac{\partial^2 \nu}{\partial z^2} = R \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

olur. Bu türev değerleri (4.3.12) denkleminde yerine yazılır ve her iki tarafı $R(r)Z(z)$ ile bölünürse,

$$\frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right\} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0 \quad (4.3.15)$$

bulunur. Birinci terim sadece r-ye, ikinci terim sadece z-ye bağılı olan böyle bir eşitliğin sağlanması için

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

terimi bir sabite eşit olmalıdır. Bu sabiti C ile gösterelim. Bu durumda

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = CZ$$

olur. Bu denklemin çözümü ise

$$Z(z) = Fe^{\sqrt{C}z} + Ge^{-\sqrt{C}z}$$

şeklindedir. $z \rightarrow \infty$ için Z sıfır olduğundan F sabiti sıfır ve C sabiti pozitif olmalıdır. $C = \lambda^2$ denirse çözüm

$$Z(z) = Fe^{-\lambda z}$$

olur. Burada λ pozitiftir. Bu durumda (4.3.15) denklemi

$$\frac{1}{R} \left\{ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right\} + \lambda^2 = 0$$

halini alır. Bu denklem R ile çarpılırsa,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0$$

bulunur. Bu denklemin çözümü

$$R(r) = DJ_0(\lambda r) + EY_0(\lambda r)$$

dir. $r \rightarrow 0$ için $Y_0(\lambda r)$ sonsuz değerini aldığından E sıfır olmalıdır. Dolayısıyla

$$\nu_m(r, z) = G_m D_m e^{-\lambda_m z} J_0(\lambda_m r)$$

olarak bulunur. Biliyoruz ki denklem lineer olduğundan süperpozisyon prensibi gereğince

$$\nu(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m e^{-\lambda_m z} J_0(\lambda_m r) \quad (4.3.16)$$

de aynı denklemin çözümüdür. Burada $G_m D_m = A_m$ dir. (4.3.13) başlangıç koşulundan dolayı

$$f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(\lambda_m r)$$

dir. (4.3.14) sınır koşulundan dolayı

$$\lambda J'_0(\lambda a) + h J_0(\lambda a) = 0 \quad (4.3.17)$$

olur. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ lar $\lambda J'_0(\lambda a) + h J_0(\lambda a)$ nın sıfırlarıdır. (4.3.14) eşitliği gözönünde tutulursa A_m katsayıları (3.5.8) eşitliğinden

$$A_m = \frac{2 \lambda_m^2 \int_0^a r f(r) J_0(\lambda_m r) dr}{a^2 (h^2 + \lambda_m^2) \{J_0(\lambda_m a)\}^2}$$

şeklinde bulunur. Bu katsayılar (4.3.16) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\nu = \frac{2}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\lambda_m^2 z} J_0(\lambda_m r) \frac{\lambda_m^2 \int_0^a x f(x) J_0(\lambda_m x) dx}{(h^2 + \lambda_m^2) \{J_0(\lambda_m a)\}^2} \quad (4.3.18)$$

çözümü elde edilir.

4.4 Küredeki Isı Akışı

(4.3.1) ısı denkleminde (r, θ, ϕ) küresel koordinatlarına

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$

dönüşümleri ile geçilirse,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \chi \left\{ \frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \nu}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \nu}{\partial \phi^2} \right\} \quad (4.4.1)$$

denklemini elde edilir.

Durum 1:(Küresel Boşluklu Bir Bölgede Kararlı Isı)

Kabul edelim ki kürenin iç yüzeyi $r = a$, dış yüzeyi $r = b$ ve yüzeylerdeki sıcaklıklar sırasıyla ν_1 ve ν_2 olsun. Bu durumda sıcaklık t, θ ve ϕ den bağımsızdır. Buradan (4.4.1) denklemi,

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} = 0 \quad (4.4.2)$$

halini alır. Bu denklemde $\nu = \frac{u}{r}$ dönüşümü yapılırsa türevler,

$$\frac{\partial \nu}{\partial r} = -\frac{u}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r^3}$$

olur. Bu türev değerleri (4.4.2) denkleminde yerlerine yazılır ve elde edilen denklem r ile çarpılırsa,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = 0$$

denklemini bulunur. Sınır koşulları ise

$$\begin{aligned} u &= a\nu_1 & r &= a \text{ ise} \\ u &= b\nu_2 & r &= b \text{ ise} \end{aligned}$$

olurlar. Bu sınır koşulları altında denklemin çözümü

$$u = \frac{\nu_1 a(b-r) + \nu_2 b(r-a)}{b-a}$$

olarak elde edilir. Buradan (4.4.2) denkleminin çözümü,

$$\nu = \frac{\nu_1 a(b-r) + \nu_2 b(r-a)}{r(b-a)} \quad (4.4.3)$$

olarak bulunur. Bu çözüm zamandan bağımsız kararlı çözüm olarak bilinir.

Durum 2:(Küresel Boşluklu Bir Bölgede Isı Değişimi)

Kabul edelim ki kürenin iç yüzeyi $r = a$, dış yüzeyi $r = b$, yüzeydeki sıcaklıklar sırasıyla ν_1 , ν_2 sabit ısılarında olsunlar. Ayrıca $t = 0$ için $\nu = f(r)$ olsun. Bu durumda sıcaklık θ ve ϕ den bağımsızdır. Buradan (4.4.1) denklemini,

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} = \chi \left(\frac{\partial^2 \nu}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \nu}{\partial r} \right) \quad (4.4.4)$$

olur. Bu denklemde $\nu = \frac{u}{r}$ dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \quad (4.4.5)$$

denklemini elde edilir. Başlangıç ve sınır koşulları ise

$$\begin{aligned} u &= a\nu_1 & ; & & r = a \text{ için} \\ u &= b\nu_2 & ; & & r = b \text{ için} \\ u &= rf(r) & ; & & t = 0 \text{ için} \end{aligned}$$

olarak bulunurlar. (4.4.5) denkleminde

$$u = a\nu_1 + (b\nu_2 - a\nu_1) \frac{r-a}{b-a} + z$$

dönüşümü yapılrısa (4.4.5) denklemini

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} \quad t > 0 \text{ ve } a < r < b \text{ için} \quad (4.4.6)$$

şekline dönüşür. Başlangıç ve sınır koşulları ise

$$z = 0 \quad r = a \text{ ve } r = b \text{ için} \quad (4.4.7)$$

$$z = rf(r) - a\nu_1 - (b\nu_2 - a\nu_1) \frac{r-a}{b-a} \quad t = 0 \text{ için} \quad (4.4.8)$$

halini alır. (4.4.6) denkleminin $z(r,t) = R(r)T(t)$ şeklinde değişkenlerine ayrılabilen çözümünü arayalım. Türevler alınırsa,

$$\frac{\partial z}{\partial t} = R \frac{dT}{dt} \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial r} = T \frac{dR}{dr} \quad , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = T \frac{d^2 R}{dr^2}$$

olur. Bu türev değerleri (4.4.6) denkleminde yerlerine yazılır ve χRT ile bölünürse,

$$\frac{1}{\chi T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} \quad (4.4.9)$$

denklemini elde edilir. Bir tarafı sadece t-ye diğer tarafı sadece r-ye bağlı olan böyle bir eşitliğin sağlanması ancak her iki yanın ortak bir sabite eşit olması ile mümkündür. Bu ortak ayırma sabitini C olarak alırsak

$$\frac{dT}{dt} = \chi CT$$

olur. Bu denklemin çözümü

$$T(t) = e^{\chi C t}$$

dir. $t \rightarrow \infty$ için $z = 0$ koşulundan dolayı $T = 0$ olmalıdır. Bu ise $C < 0$ olması demektir. $C = -\lambda^2$ seçilirse

$$T(t) = e^{-\chi \lambda^2 t} \quad (4.4.10)$$

olur ve (4.4.9) denkleminin sağ tarafı

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = -\lambda^2 R$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemin çözümü

$$R(r) = A \cos \lambda r + B \sin \lambda r$$

dir. (4.4.7) sınır koşullarından dolayı $R(a) = 0$ ve $R(b) = 0$ olur. $R(a) = 0$ koşulundan

$$R(r) = A \sin(r - a)\lambda \quad (4.4.11)$$

elde edilir. $R(b) = 0$ koşulu (4.4.11) denkleminde uygulanırsa

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{b-a}$$

özdeğerleri bulunur. Bu λ_n değerleri (4.4.10) ve (4.4.11) da yerlerine yazılırlarsa sırasıyla

$$T_n(t) = e^{-\chi \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2} t} \quad (4.4.12)$$

ve

$$R_n(r) = A \sin \frac{n\pi(r-a)}{b-a} \quad (4.4.13)$$

halini alır. (4.4.12) ve (4.4.13) ifadeleri $z(r, t) = T(t)R(r)$ eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa,

$$z_n = A_n e^{-\chi \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2} t} \sin \frac{n\pi(r-a)}{b-a}$$

olur. Süperpozisyon prensibinden verilen denklemin koşulları sağlayan çözümü,

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\chi \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2} t} \sin \frac{n\pi(r-a)}{b-a} \quad (4.4.14)$$

olarak bulunur. A_n katsayılarını belirlemek için (4.4.14) denkleminde (4.4.8) başlangıç koşulu uygulanırsa,

$$r f(r) - a\nu_1 - (b\nu_2 - a\nu_1) \frac{r-a}{b-a} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi(r-a)}{b-a}$$

elde edilir. Bu eşitliğin birinci yanına $g(r)$ denirse,

$$g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi(r-a)}{b-a}$$

olur. Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafı $\sin \frac{k\pi(r-a)}{b-a}$ ile çarpılır ve a dan b ye kadar integrali alınır,

$$\begin{aligned} \int_a^b g(r) \sin \frac{k\pi(r-a)}{b-a} dr &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_a^b \sin \frac{n\pi(r-a)}{b-a} \sin \frac{k\pi(r-a)}{b-a} dr \\ &= \sum_{n=1, n \neq k}^{\infty} A_n \int_a^b \sin \frac{n\pi(r-a)}{b-a} \sin \frac{k\pi(r-a)}{b-a} dr \\ &\quad + A_k \int_a^b \sin^2 \frac{k\pi(r-a)}{b-a} dr \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte

$$\int_a^b \sin n\theta \sin k\theta = \begin{cases} \frac{b-a}{2} & n = k \text{ ise} \\ 0 & n \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

olduğu gözönünde tutulursa,

$$\int_a^b g(r) \sin \frac{k\pi(r-a)}{b-a} dr = A_k \frac{b-a}{2}$$

bulunur. Burada k indisi yerine n indisi , r yerine x ve $g(x)$ yerine de değeri yazılırsa A_n katsayıları

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b \left\{ x f(x) - a\nu_1 - (b\nu_2 - a\nu_1) \frac{x-a}{b-a} \right\} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} dx \\ &= \frac{2}{b-a} \int_a^b x f(x) \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} dx + \frac{2}{b-a} \nu_1 \frac{b-a}{n\pi} \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \Big|_a^b \\ &\quad - \frac{2(b\nu_2 - a\nu_1)}{b-a} \int_a^b \frac{x-a}{b-a} \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} dx \end{aligned}$$

halini alır. Bu eşitlikteki son integrale kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b x f(x) \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} dx + \frac{2a}{n\pi} \nu_1 (\cos n\pi - 1) \\ &\quad - \frac{2(b\nu_2 - a\nu_1)}{b-a} \left[-\frac{x-a}{b-a} \frac{b-a}{n\pi} \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right]_a^b \\ &\quad + \int_a^b \frac{b-a}{n\pi} \cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a} dx \end{aligned}$$

olur. n tamsayı iken $\cos n\pi = (-1)^n$ olduğu gözönünde tutulur ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$A_n = \frac{2(-1)^n}{n\pi} (a\nu_1 - b\nu_2) + \frac{2}{b-a} \int_a^b x f(x) \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} dx$$

olarak elde edilir. Buradan (4.4.4) denkleminin başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözümü,

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{a\nu_1}{r} + \frac{b\nu_2 - a\nu_1}{r} \frac{r-a}{b-a} + \frac{1}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^n}{n\pi} (a\nu_1 - b\nu_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{b-a} \int_a^b x f(x) \sin \frac{n\pi(x-a)}{b-a} dx \right\} e^{-\chi \frac{n^2 \pi^2}{(b-a)^2} t} \sin \frac{n\pi(r-a)}{b-a} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Durum 3:(Simetrik olmayan Isı Değerli Katı-küre)

$r = a$ yüzeyindeki ısı sıfır olsun. $t = 0$ da $\nu = f(r, \theta, \phi)$ olmak üzere (4.4.1) denklemine

$$\cos \theta = \mu \quad \text{ve} \quad \nu = e^{-\chi \lambda^2 t} u(r, \mu, \phi)$$

dönüşümlerini uygulayalım. Türev değerleri,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu}{\partial t} &= -\chi \lambda^2 e^{-\chi \lambda^2 t} u \\ \frac{\partial \nu}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \\ &= -\sin \theta e^{-\chi \lambda^2 t} \frac{\partial u}{\partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial \theta^2} &= e^{-\chi \lambda^2 t} \left(-\cos \theta \frac{\partial u}{\partial \mu} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu}{\partial \phi} &= e^{-\chi \lambda^2 t} \frac{\partial u}{\partial \phi} \\ \frac{\partial^2 \nu}{\partial \phi^2} &= e^{-\chi \lambda^2 t} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2}\end{aligned}$$

olur. Bu türev değerleri (4.4.1) denkleminde yerlerine yazılır ve $e^{-\chi \lambda^2 t}$ ile bölünürse,

$$-\chi \lambda^2 u = \chi \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(-\mu \frac{\partial u}{\partial \mu} + (1 - \mu^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} \right) - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \mu} + \frac{1}{r^2(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right\}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı χ ile bölünür ve düzenlenirse,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{\partial u}{\partial \mu} \right\} + \frac{1}{r^2(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \lambda^2 u = 0 \quad (4.4.15)$$

denklemini elde edilir. Bu denkleminde $u(r, \mu, \phi) = R(r)\Theta(\mu)\Phi(\phi)$ şeklinde değişkenlerine ayrılabilen çözüm arayalım. Buradan türevler,

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \Theta \Phi \frac{dR}{dr}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \Theta \Phi \frac{d^2 R}{dr^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial \mu} = R \Phi \frac{d\Theta}{d\mu}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} = R \Theta \frac{d^2 \Phi}{d\mu^2}$$

olur. Bu türev değerleri (4.4.15) denkleminde yerlerine yazılır ve $R(r)\Theta(\mu)\Phi(\phi)$ ile bölünürse,

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right\} \right] + \frac{1}{r^2(1 - \mu^2)} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\mu^2} + \lambda^2 = 0 \quad (4.4.16)$$

elde edilir. Burada,

$$\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\mu^2}$$

terimi diğer terimlerden bağımsız olduğundan (4.4.16) eşitliğinin sağlanabilmesi için bir sabite eşit olmalıdır. Bu sabit $-m^2$ olarak alınırsa,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\mu^2} = -m^2 \Phi$$

denklemini bulunur. Bu denklemin çözümü

$$\Phi(\phi) = C \cos m\phi + D \sin m\phi \quad (4.4.17)$$

şeklinde. Burada C ve D keyfi sabitlerdir. Buradan (4.4.16) denkleminin son iki terimi

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right\} + \frac{m^2}{1 - \mu^2} = K$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde $K = -n(n+1)$ alınır ve denklemin her iki yanı Θ ile çarpılırsa,

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right\} + \left\{ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right\} \Theta = 0$$

denklemini elde edilir. Bu denklem geliştirilmiş Legendre denklemi olarak bilinir. Bu denklemin çözümü ise

$$\Theta(\mu) = AT_n^m(\mu) + BQ_n^m(\mu)$$

şeklindedir. Burada A ve B keyfi sabitlerdir. n tamsayı olmak üzere $\mu = \mp 1$ için Θ sonsuz değerini alır. Dolayısıyla $B = 0$ olmalıdır. Buradan çözüm

$$\Theta(\mu) = AT_n^m(\mu) \quad (4.4.18)$$

olur.

$$\frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right\} + \frac{m^2}{1 - \mu^2} = -n(n+1)$$

olduğu gözönünde tutulursa (4.4.16) denklemi

$$\frac{1}{R} \left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} \right] - \frac{1}{r^2} n(n+1) + \lambda^2 = 0$$

halini alır. Bu denklemin her iki yanı $r^2 R$ ile çarpılırsa,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + (\lambda^2 r^2 - n(n+1)) R = 0 \quad (4.4.19)$$

bulunur. Burada $R = r^{-\frac{1}{2}} y$ dönüşümü yapılırsa türevler,

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dr} &= -\frac{1}{2} r^{-\frac{3}{2}} y + r^{-\frac{1}{2}} \frac{dy}{dr} \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{3}{4} r^{-\frac{5}{2}} y - r^{-\frac{3}{2}} \frac{dy}{dr} + r^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2 y}{dr^2} \end{aligned}$$

olur. Bu türev değerleri (4.4.19) denkleminde yerlerine konulur ve $r^{\frac{1}{2}}$ ile çarpılırsa,

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (\lambda^2 r^2 - n^2 - n - \frac{1}{4}) y = 0$$

halini alır. Bu denklem düzenlenirse,

$$r^2 \frac{d^2 y}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + \left\{ \lambda^2 r^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right\} y = 0$$

elde edilir. Burada $\lambda r = t$ şeklinde bağımsız değişken değiştirilirse,

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + \left\{ t^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right\} y = 0$$

Bessel denklemi elde edilir. Bessel denkleminin çözümü,

$$y = E J_{n+\frac{1}{2}}(t) + F J_{-n-\frac{1}{2}}(t)$$

şeklindedir. Burada E ve F keyfi sabitlerdir. Bu durumda (4.4.19) denkleminin çözümü,

$$R(r) = E r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) + F r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(\lambda r)$$

olarak bulunur. Burada $r \rightarrow 0$ için $r^{-\frac{1}{2}} J_{-n-\frac{1}{2}}(\lambda r)$ fonksiyonu sonsuz değerini alır. Bu nedenle $F = 0$ olmalıdır. Buradan çözüm

$$R(r) = E r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) \quad (4.4.20)$$

olur. (4.4.15) denkleminin çözümü (4.4.17), (4.4.18) ve (4.4.20) dan

$$u = r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) T_n^m(\mu) \left\{ A \cos m\phi + B \sin m\phi \right\}$$

bulunur. $\nu = e^{-\chi \lambda^2 t} u$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\nu = e^{-\chi \lambda^2 t} (\lambda r)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r) T_n^m(\mu) \left\{ A \cos m\phi + B \sin m\phi \right\}$$

elde edilir. Burada $\nu(t, a, \theta, \phi) = 0$ koşulu yüklenirse $J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda a) = 0$ olur. Buradan genel çözüm

$$\begin{aligned} \nu = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\chi \lambda_p^2 t} (\lambda_p r)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) T_n^m(\mu) \left\{ A_{n,m,p} \cos m\phi \right. \\ \left. + B_{n,m,p} \sin m\phi \right\} \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

şeklindedir. Burada $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ ler $J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda a)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır. $\nu(0, r, \theta, \phi) = f(r, \theta, \phi)$ koşulundan (4.4.21) çözümü

$$f(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{p=1}^{\infty} (\lambda_p r)^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) T_n^m(\mu) \left\{ A_{n,m,p} \cos m\phi \right. \\ \left. + B_{n,m,p} \sin m\phi \right\} \quad (4.4.22)$$

halini alır. Bu eşitliğin her iki yanını $r^{\frac{3}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) T_k^l(\mu) \cos l\phi$ ile çarpılır ve 0 dan a ya -1 den 1 e, 0 dan 2π ye kadar üç-katlı integral alınır ve (4.2.19) , (4.1.20) eşitlikleri gözönünde tutulurlarsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^a r^{\frac{3}{2}} f(r, \theta, \phi) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) T_k^l(\mu) \cos l\phi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{-\frac{1}{2}} A_{n,m,p} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^a r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) \\ & \quad \times T_n^m(\mu) T_k^l(\mu) \cos m\phi \cos l\phi dr d\mu d\phi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{-\frac{1}{2}} A_{n,m,p} \int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos l\phi d\phi \int_{-1}^1 T_n^m(\mu) T_k^l(\mu) d\mu \\ & \quad \times \int_0^a r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) dr \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0, m \neq l}^n \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{-\frac{1}{2}} A_{n,m,p} \int_0^{2\pi} \cos m\phi \cos l\phi d\phi \int_{-1}^1 T_n^m(\mu) T_k^l(\mu) d\mu \\ & \quad \times \int_0^a r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) dr \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{-\frac{1}{2}} A_{n,l,p} \int_0^{2\pi} \cos l\phi \cos l\phi d\phi \int_{-1}^1 T_n^l(\mu) T_k^l(\mu) d\mu \\ & \quad \times \int_0^a r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) dr \\ &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{-\frac{1}{2}} A_{n,l,p} \int_{-1}^1 T_n^l(\mu) T_k^l(\mu) d\mu \int_0^a r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) dr \\ &= \pi \sum_{n=0, n \neq k}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{-\frac{1}{2}} A_{n,l,p} \int_{-1}^1 T_n^l(\mu) T_k^l(\mu) d\mu \int_0^a r J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) dr \\ &+ \pi \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{-\frac{1}{2}} A_{k,l,p} \int_{-1}^1 T_k^l(\mu) T_k^l(\mu) d\mu \int_0^a r J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) dr \end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\int_{-1}^1 T_n^l(\mu) T_k^l(\mu) d\mu = \begin{cases} \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \frac{2}{2k+1} & n = k \text{ ise} \\ 0 & n \neq k \text{ ise} \end{cases}$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^a r^{\frac{3}{2}} f(r, \theta, \phi) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) T_k^l(\mu) \cos l\phi \\ &= \pi \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \frac{2}{2k+1} \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p^{-\frac{1}{2}} A_{k,l,p} \int_0^a r J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) dr \\ &= \pi \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \frac{2}{2k+1} \sum_{p=1, p \neq s}^{\infty} \lambda_p^{-\frac{1}{2}} A_{k,l,p} \int_0^a r J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) dr \\ &+ \pi \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \frac{2}{2k+1} \lambda_s^{-\frac{1}{2}} A_{k,l,s} \int_0^a r J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) dr \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte (3.5.3) ve (3.5.4) eşitliklerinden yararlanılırsa,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^a r^3 f(r, \theta, \phi) J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) T_k^l(\mu) \cos l\phi \\ &= \pi \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \frac{2}{2k+1} \lambda_s^{-\frac{1}{2}} A_{k,l,s} \frac{a^2}{2} \{J'_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s a)\}^2 \\ &= \frac{a^2 \pi}{2k+1} \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \frac{(k+l)!}{(k-l)!} \{J'_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s a)\}^2 A_{k,l,s} \end{aligned}$$

bulunur. Burada k indisi yerine n indisi, l indisi yerine m indisi ve s indisi yerine p indisi alınır. $A_{n,m,p}$ katsayıları,

$$A_{n,m,p} = \frac{2n+1}{a^2 \pi \lambda_p^{-\frac{1}{2}}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^a x^{\frac{3}{2}} f(x, \theta, \phi) J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) T_n^m(\mu) \cos m\phi dr d\mu d\phi}{\{J'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p a)\}^2} \quad (4.4.23)$$

olarak bulunur. Benzer şekilde (4.4.21) eşitliğin her iki yanını $r^{\frac{3}{2}} J_{k+\frac{1}{2}}(\lambda_s r) T_k^l(\mu) \sin l\phi$ ile çarpılır ve 0 dan a ya -1 den 1 e, 0 dan 2π ye kadar üç-katlı integral alınır. $B_{n,m,p}$ katsayıları da

$$B_{n,m,p} = \frac{2n+1}{a^2 \pi \lambda_p^{-\frac{1}{2}}} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \int_0^a x^{\frac{3}{2}} f(x, \theta, \phi) J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p r) T_n^m(\mu) \sin m\phi dr d\mu d\phi}{\{J'_{n+\frac{1}{2}}(\lambda_p a)\}^2}$$

olurlar. $A_{n,m,p}$ ve $B_{n,m,p}$ katsayıları (4.4.21) eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa istenilen çözüm elde edilir.

KAYNAKLAR

- Bowman, F. (1958). *Introduction to bessel functions*. New York: Dover Pub.
- Gray, A., & Mathews, G. (1966). *A treatise on bessel functions and their applications to physics* (2nd ed.). New York: Dover Publications.
- Macrobert, A. G. G. M. T. (1922). *Bessel functions*. London.
- Macrobert, T. (1967). *Spherical harmonics; an elementary treatise on harmonic functions with applications*. Oxford, New York: Pergamon Press.
- McLachlon, N. (1955). *Bessel functions for engineers* (2nd ed.). Oxford: Clarendon Press.
- Pinsky, M. (1991). *Partial differential equations and boundary-value problems with applications*. New York: McGraw-Hill.
- Rainville, E. (1960). *Special functions*. New York: Macmillan.
- Stegan, M. A. I. (1965). *Handbook of mathematical functions*. Washington D.C.: U.S. Government Printing Office.
- Tyn, M. (1973). *Partial differential equations of mathematical physics*. New York: American Elsevier Pub. Co.
- Watson, G. (1966). *A treatise on the theory of bessel functions*. Cambridge: Cambridge University Press.

TC MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
DOKÜMAN İSTİSNA MÜDÜRLÜĞÜ

ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 1991 yılında girdiği Ankara Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 1995-Haziran dönemimde Matematikçi olarak mezun oldu. 1995-Eylül döneminde Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans yapmaya hak kazandı.

1998 yılında Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak girdi. Halen aynı üniversitede araştırma görevlisi olarak çalışmaktadır.

