

**ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI FUZZY CEBİRSEL YAPILAR

Sibel YURDUSEVEN

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

ANKARA

2008

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI FUZZY CEBİRSEL YAPILAR

Sibel YURDUSEVEN

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Erdal GÜNER

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde fuzzy kümeler ve fuzzy kümeler üzerinde tanımlanan küme işlemleri verilmiştir. Üçüncü bölümde fuzzy gruplar incelenmiştir. Dördüncü bölümde fuzzy halkalar araştırılmıştır. Son olarak beşinci bölümde ise fuzzy grupların ve fuzzy ideallerin kartezyen çarpımı çalışılmıştır.

Temmuz 2008, 88 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fuzzy küme, fuzzy bağıntı, fuzzy grup, fuzzy seviye alt grup, fuzzy halka, fuzzy ideal.

ABSTRACT

Master Thesis

SOME FUZZY ALGEBRAIC STRUCTURES

Sibel YURDUSEVEN

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Erdal GÜNER

This thesis consists of five parts. The first part has been reserved for the introduction. In the second part, fuzzy sets and sets operations which is defined on fuzzy sets have been given. In the third part, fuzzy groups have been investigated. In the fourth part, fuzzy rings have been examined. Finally in the fifth part, the cartesian product of fuzzy subgroups and fuzzy ideals have been studied.

July 2008, 88 pages

Keywords: Fuzzy set, fuzzy relation, fuzzy group, fuzzy level subgroup, fuzzy ring, fuzzy ideal.

TEŞEKKÜR

Tezimi yöneten ve çalışmalarım da yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, her zaman yakın ilgi ve desteğini gördüğüm danışman hocam sayın Yrd. Doç Dr. Erdal GÜNER'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), çalışmalarım sırasında tezime maddi destek olan TÜBİTAK Bilim Adamı Yetiştirme Grubu'na, araştırmalarım da bilgi ve önerilerini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Sabahattin BALCI'ya (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü), çalışmalarım süresince manevi desteğini eksik etmeyen sayın hocam Doç. Dr. Ayhan ŞERBETÇİ'ye (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü) en derin duygularım la teşekkür ederim. Ayrıca benden manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve eşime de teşekkür ederim.

Sibel YURDUSEVEN

Ankara, Temmuz 2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1. GİRİŞ.....	1
2. FUZZY KÜMELER.....	3
2.1 Fuzzy Kümeler ve Özellikleri.....	3
2.2 Fuzzy Kümelerin Bir Fonksiyon Altındaki Görüntüsü ve Ters Görüntüsü.....	12
2.3 Fuzzy Bağntı.....	15
3. FUZZY GRUPLAR.....	18
3.1 Fuzzy Alt Grupoidler.....	18
3.2 Fuzzy Alt Gruplar.....	21
3.3 Fuzzy Seviye Alt Grupları.....	29
3.4 Fuzzy Normal Alt gruplar.....	33
3.5 Fuzzy Yan Cümleler.....	35
3.6 Fuzzy Bölüm Grubu.....	38
4. FUZZY HALKALAR.....	41
4.1 Fuzzy Alt Halka ve Fuzzy İdealler.....	41
4.2 Fuzzy Seviye Alt Halkaları ve Fuzzy Seviye İdealleri.....	50
4.3 Halkaların Fuzzy Yan Cümleleri.....	55
4.4 Fuzzy Bölüm Halkaları.....	63
4.5 Fuzzy Asal İdeal ve Fuzzy Maksimal İdeal.....	70
5. FUZZY İDEALLERİN VE FUZZY GRUPLARIN KARTEZYEN ÇARPIMI	76
KAYNAKLAR.....	86
ÖZGEÇMİŞ.....	88

SİMGELER DİZİNİ

G	Grup
R	Halka
$(S, \cdot)$	Grupoid
$\mathcal{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
μ'	μ fuzzy kümesinin tümleyeni
$\mu \circ \eta$	μ ve η fuzzy bağıntılarının bileşkesi
$\text{Im}(\alpha)$	α dönüşümünün görüntü kümesi
$\text{Ker}(\alpha)$	α dönüşümünün çekirdeği
$ A $	A kümesinin eleman sayısı
0_R	R halkasının toplama işlemine göre birim elemanı

1. GİRİŞ

Fuzzy küme teorisi, klasik küme teorisine alternatif olarak ilk kez L.A. Zadeh tarafından 1965 yılında ortaya atılmıştır.

Zadeh'e göre gerçek dünyada bir kümenin elemanları arasındaki ilişkiler kesin olarak tanımlanamamaktadır. 1965 yılına kadar matematikte incelenen konuların önceden belirlenen kurallara kesin olarak uyup uymadığı araştırılmış, bu incelemelerde her zaman bir kesinlik aranmıştır. Aristo mantığı üzerinde temellenen klasik küme teorisi, verilen bir alana ait tüm bireyleri incelenen özelliğe göre ikiye ayırır. Bu teoriye göre bir önerme belirlenen kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlıştır. Ancak yaşadığımız dünyada bir çok olay vardır ki kesin olarak doğru ya da yanlış olduğunu ifade etmek zordur. Bu sebeple klasik küme teorisi uygulamada esnek olmamaktadır. Bu problem, klasik mantığın kabulü olan var-yok çiftinin ara değerlerini tanımlamakla giderilebilir. Fuzzy küme bu karmaşıklığı azaltmak için doğru ile yanlış birbirinden ayıran kesinliği ortadan kaldırmaktadır.

Klasik küme teorisinde bir karakteristik fonksiyon, göz önüne alınan bir evrensel küme içinde herhangi bir elemanın 0 veya 1 değeriyle kümeye ait olup olmadığını belirtmektedir. Zadeh, çalışmasında bu fonksiyonu, evrensel kümedeki elemanların gerçekte bu kümeye ait olabilme şiddetiyle veya yoğunluğuyla orantılı olarak genişletmiş, değer kümesini $[0, 1]$ kapalı aralığı olarak almış ve elemanların kümeye ait olma derecelerini de 0 ile 1 arasına yerleştirmiştir. Böylece elemanlar aldıkları üyelik dereceleriyle kümeye ait olurlar. Olası bir elemanın üyelik derecesinin 1'e daha yakın olması kümeye daha fazla ait olması anlamına gelir. Bu şekilde genişletilmiş fonksiyon ile karakterize edilen kümeye fuzzy küme denmiştir. Tam üye olma ve üye olmama durumu fuzzy kümede sırasıyla 1 ve 0 değerleriyle karşılanır. Bu yüzden klasik küme kavramı fuzzy küme kavramının bu iki değere kısıtlanmış özel bir şekli olarak görülebilir.

Fuzzy küme üzerinde yapılan araştırmalar, ortaya çıktığı günden bu yana hızla büyümüştür. Oluşturduğu kavramsal çerçeve ve sonuçları itibarıyla řu anda oldukça geniş bir perspektife sahiptir. Klasik mantıktan farklı olarak problemin tam olarak tarif edilmediği, problemle ilgili bilginin yetersiz veya belirsiz olduğu durumlarda kullanılabilir olması bu büyümenin temel nedenidir. Bilinen yöntemlerle yeterli doğrulukta modellenemeyen karmaşık sistemlerde, başlangıç koşullarında veya tanımlarında belirsizlikler olan sistemlerde kullanılması en iyi çözüümü verir. Bu modelleme değerlendirme, optimizasyon, karar verme, denetim, teşhis ve bilgi gibi uygulamalar olabilir. Ayrıca matematiksel olarak ifade edilemeyen sadece girdi-çıktı ilişkisi bilenen fonksiyonların tahmininde de kullanılır. Bu ilişki matematiksel denklemi bilinmeyen herhangi bir fonksiyonun özelliklerine yakın özellikler gösteren bir model oluşturulmasına imkân verir.

Uygulama alanlarının genişliği ve bu alanlarda oluşturduğu sonuçların etkisi bakımından fuzzy küme teorisi bugün bilimsel çalışmalarda önemli bir yer tutmaktadır. Uluslararası bilim kuruluşları tarafından desteklenip birçok üniversitede ders olarak okutulmaktadır. Bunların yanı sıra teori, endüstriyel sahalarda uygulanmaya başlamıştır. Geliştirilen son teoremler, fuzzy mantığı ilke olmak üzere mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, ekonomi gibi konularda sistemleri modellemek üzere kullanılmaktadır.

Fuzzy küme teorisi Rosenfeld (1971) tarafından fuzzy cebirsel yapılara taşınarak bir grubun fuzzy alt grubu tanımlanmıştır. Das (1981) seviye alt grupları üzerine çalışmıştır. Daha sonra birçok bilim adamı tarafından fuzzy kavramı geliştirilmiştir. Mukherjee and Bhattacharya (1984) fuzzy normal alt grupları ve fuzzy yan cümleleri, Mukherjee and Sen (1987) fuzzy idealleri, Malik and Mordeson (1990) fuzzy asal idealleri tanımlamışlardır. Dixit *et al.* (1992) fuzzy halkaları, Kuraoka and Kuroki (1992) fuzzy bölüm halkalarını incelemiştir. Ersoy (2003) fuzzy alt grupların ve fuzzy ideallerin kartezyen çarpımı üzerine çalışmıştır.

2. FUZZY KÜMELER

2.1 Fuzzy Kümeler ve Özellikleri

Bu bölümde fuzzy kümeler, fuzzy kümelere genişletilmiş kapsama, birleşim, kesişim, tümleyen, bağıntı gibi kavramlar ve bu kavramların çeşitli özellikleri tanımlanmıştır.

Fuzzy küme teorisi kesin olmayan, belirsiz faaliyet ve gözlemlerin tanımlarının geçtiği problemleri çözmek için geliştirilmiştir. Bir fuzzy küme sürekli üyelik dereceleri olan nesneler sınıfıdır. Bu küme, her bir elemanı 0 ve 1 arasında değişen bir üyelik derecesine tayin eden üyelik (karakteristik) fonksiyonu tarafından karakterize edilir.

Tanım 2.1.1: X boş olmayan bir küme ve $J = [0, 1] \subset \mathcal{R}$ olsun.

$\mu_A: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu tarafından karakterize edilen,

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \subset X \times J$$

kümesine X de bir fuzzy küme denir. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)$ değerine x in A ya ait olma derecesi denir. $\mu_A(x)$ in 1 e yaklaşması x in A ya daha fazla ait olması anlamına gelmektedir (Zadeh 1965).

Klasik küme teorisinde A bir küme ise üyelik fonksiyonu $\mu_A(x)$, $x \in A$ olduğunda 1, $x \notin A$ olduğunda 0 olmak üzere iki değer almaktadır. Bu şekilde üyelik fonksiyonu sadece 0 ve 1 değerini alan kümelere adî küme veya basit küme denir.

$\mu_X: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_X(x) = 1$ olarak tanımlanırsa X kümesi,

$$X = \{(x, 1) \mid x \in X\}$$

fuzzy kümesi olarak yazılabilir.

$\mu_\emptyset: X \rightarrow [0, 1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_\emptyset(x) = 0$ olarak tanımlanırsa boş küme,

$$\emptyset = \{(x, 0) \mid x \in X\}$$

fuzzy kümesi olarak yazılabilir.

Üyelik fonksiyonu μ olan X de bir A fuzzy kümeye kısaca X in μ fuzzy alt kümesi denir ve $\mu = \{(x, \mu(x)) \mid x \in X\}$ olarak yazılır.

X in tüm fuzzy alt kümelerinin cümlesini $F(X)$ ile gösterelim.

Tanım 2.1.2: Bir X kümesinin μ ve η fuzzy alt kümeleri verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için,

$$\mu(x) = \eta(x)$$

ise μ ve η fuzzy alt kümeleri eşittir denir ve $\mu = \eta$ yazılır.

Tanım 2.1.3: μ ve η bir X kümesinin fuzzy alt kümeleri olsun. Eğer $\forall x \in X$ için,

$$\mu(x) \leq \eta(x)$$

ise η fuzzy alt kümesi μ fuzzy alt kümesini kapsıyor denir ve $\mu \subseteq \eta$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4: Bir X kümesinin μ fuzzy alt kümesinin μ' tümleyeni $\forall x \in X$ için,

$$\mu'(x) = 1 - \mu(x)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.5: μ ve η , bir X kümesinin iki fuzzy alt kümesi olsun. $\forall x \in X$ için,

$$\beta(x) = \max \{\mu(x), \eta(x)\}$$

şeklinde tanımlı β fuzzy alt kümesine, μ ve η fuzzy alt kümelerinin birleşimi denir ve $\beta = \mu \cup \eta$ yazılır. $\forall x \in X$ için,

$$\varphi(x) = \min \{\mu(x), \eta(x)\}$$

şeklinde tanımlı φ fuzzy alt kümesine μ ve η fuzzy alt kümelerinin kesişimi denir ve

$\varphi = \mu \cap \eta$ yazılır. Genel olarak $\mu = \{\mu_i \mid i \in I, \mu_i \in F(X)\}$ fuzzy alt kümeleri için,

$\beta = \bigcup_{i \in I} \mu_i$ ve $\varphi = \bigcap_{i \in I} \mu_i$ fuzzy alt kümeleri $\forall x \in X$ için,

$$\beta(x) = \sup_{i \in I} \{\mu_i(x)\}$$

$$\varphi(x) = \inf_{i \in I} \{\mu_i(x)\}$$

olarak tanımlanır.

Örnek 2.1.1: $X = \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere X in μ ve ξ fuzzy alt kümeleri,

$$\mu(1) = \xi(4) = 0.7$$

$$\mu(2) = 0.9$$

$$\mu(3) = \xi(1) = \mu(4) = 0.5$$

$$\xi(2) = 1$$

$$\xi(3) = 0$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\mu = \{(1, 0.7), (2, 0.9), (3, 0.5), (4, 0.5)\}$$

$$\xi = \{(1, 0.5), (2, 1), (3, 0), (4, 0.7)\}$$

$$\mu' = \{(1, 0.3), (2, 0.1), (3, 0.5), (4, 0.5)\}$$

$$\xi' = \{(1, 0.5), (2, 0), (3, 1), (4, 0.3)\}$$

$$\mu \cup \xi = \{(1, 0.7), (2, 1), (3, 0.5), (4, 0.7)\}$$

$$\mu \cap \xi = \{(1, 0.5), (2, 0.9), (3, 0), (4, 0.5)\}$$

olur.

Lemma 2.1.1: Bir X kümesinin μ ve η fuzzy alt kümelerinin birleşimi, μ ve η yi içeren en küçük fuzzy alt kümedir. Eğer β , X kümesinin, μ ve η yi içeren herhangi bir fuzzy alt kümesi ise $\mu \cup \eta$ yi de içerir.

İspat: β , μ ve η yi içeren herhangi bir fuzzy alt küme olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için, $\beta(x) \geq \mu(x)$ ve $\beta(x) \geq \eta(x)$ dir. Dolayısıyla $\beta(x) \geq \max \{\mu(x), \eta(x)\}$ olur. $\varphi = \mu \cup \eta$ fuzzy alt kümesi $\varphi(x) = \max \{\mu(x), \eta(x)\}$ şeklinde tanımlı olduğundan $\beta(x) \geq \varphi(x)$ olup böylece $\varphi \subseteq \beta$ dır.

Lemma 2.1.2: Bir X kümesinin μ ve η fuzzy alt kümelerinin kesişimi μ ve η tarafından içerilen en büyük fuzzy alt kümedir (Zadeh 1965).

Teorem 2.1.1: X boş olmayan bir küme ve $\mu, \eta, \beta \in F(X)$ olsun. Bu durumda,

- (i) $\mu \subseteq \eta \Leftrightarrow \eta' \subseteq \mu'$
 - (ii) $(\mu \cup \eta)' = \mu' \cap \eta'$
 $(\mu \cap \eta)' = \mu' \cup \eta'$
 - (iii) $\beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)$
 $\beta \cup (\mu \cap \eta) = (\beta \cup \mu) \cap (\beta \cup \eta)$
 - (iv) $\mu \cap (\eta \cap \beta) = (\mu \cap \eta) \cap \beta$
 $\mu \cup (\eta \cup \beta) = (\mu \cup \eta) \cup \beta$
 - (v) $(\mu')' = \mu$
 - (vi) $\mu \cap \eta = \emptyset \Leftrightarrow \mu \subseteq \eta'$
 - (vii) $\{\mu_i \mid i \in I, \mu_i \in F(X)\}$ fuzzy alt kümeleri için,

$$(\bigcup_{i \in I} \mu_i)' = \bigcap_{i \in I} \mu_i'$$

$$(\bigcap_{i \in I} \mu_i)' = \bigcup_{i \in I} \mu_i'$$
 - (viii) $\mu \subseteq \mu \cup \eta$ ve $\eta \subseteq \mu \cup \eta$
 - (ix) $\mu \subseteq \beta$ ve $\eta \subseteq \beta \Rightarrow \mu \cup \eta \subseteq \beta$
- dır.

İspat:

(i) $\forall x \in X$ için $\mu'(x) = 1 - \mu(x)$ dir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \mu \subseteq \eta &\Leftrightarrow \mu(x) \leq \eta(x) \\ &\Leftrightarrow 1 - \mu(x) \geq 1 - \eta(x) \\ &\Leftrightarrow \mu'(x) \geq \eta'(x) \\ &\Leftrightarrow \eta' \subseteq \mu' \end{aligned}$$

olur.

(ii) $\mu \cup \eta = \beta$ ve $\mu \cap \eta = \emptyset$ dersek,

$$\begin{aligned} \beta(x) &= \max \{\mu(x), \eta(x)\} \\ \emptyset(x) &= \min \{\mu(x), \eta(x)\} \end{aligned}$$

olur. $\mu(x) \geq \eta(x)$ olsun. Bu durumda $\mu'(x) \leq \eta'(x)$ dir. Dolayısıyla,

$$(\mu \cup \eta)'(x) = 1 - (\mu \cup \eta)(x) = 1 - \max \{\mu(x), \eta(x)\} = 1 - \mu(x) = \mu'(x) \text{ ve}$$

$$(\mu' \cap \eta')(x) = \min \{\mu'(x), \eta'(x)\} = \mu'(x)$$

olur. Böylece $\forall x \in X$ için $(\mu \cup \eta)'(x) = (\mu' \cap \eta')(x)$ dir. Dolayısıyla

$$(\mu \cup \eta)' = (\mu' \cap \eta') \text{ dir. Ayrıca,}$$

$$(\mu \cap \eta)'(x) = 1 - \min \{\mu(x), \eta(x)\} = 1 - \eta(x) = \eta'(x) \text{ ve}$$

$$(\mu' \cup \eta')(x) = \max \{\mu'(x), \eta'(x)\} = \eta'(x)$$

olur. Böylece $\forall x \in X$ için $(\mu \cap \eta)'(x) = (\mu' \cup \eta')(x)$ dir. Dolayısıyla

$$(\mu \cap \eta)' = (\mu' \cup \eta') \text{ dir.}$$

(iii) $\mu(x) \leq \eta(x) \leq \beta(x)$ olsun. Bu durumda,

$$\beta \cap (\mu \cup \eta) = \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = \min \{\beta(x), \max \{\mu(x), \eta(x)\}\} = \eta(x)$$

$$(\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta) = \omega \Leftrightarrow \omega(x) = \max \{\min \{\beta(x), \mu(x)\}, \min \{\beta(x), \eta(x)\}\} \\ = \eta(x)$$

olur. Böylece $\forall x \in X$ için $\beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)$ dir.

Aynı şekilde,

$$\mu(x) \leq \beta(x) \leq \eta(x) \Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)$$

$$\eta(x) \leq \mu(x) \leq \beta(x) \Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)$$

$$\beta(x) \leq \eta(x) \leq \mu(x) \Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)$$

$$\eta(x) \leq \beta(x) \leq \mu(x) \Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)$$

$$\beta(x) \leq \mu(x) \leq \eta(x) \Rightarrow \beta \cap (\mu \cup \eta) = (\beta \cap \mu) \cup (\beta \cap \eta)$$

dir.

$\beta \cup (\mu \cap \eta) = (\beta \cup \mu) \cap (\beta \cup \eta)$ olduğu da benzer şekilde gösterilir.

$$(iv) \mu \cap (\eta \cap \beta) = \xi \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \xi(x) = \min \{\mu(x), \min \{\eta(x), \beta(x)\}\} \\ = \min \{\mu(x), \eta(x), \beta(x)\} \text{ ve}$$

$$(\mu \cap \eta) \cap \beta = \chi \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \chi(x) = \min \{\min \{\mu(x), \eta(x)\}, \beta(x)\} \\ = \min \{\mu(x), \eta(x), \beta(x)\}$$

olur. Böylece $\mu \cap (\eta \cap \beta) = (\mu \cap \eta) \cap \beta$ dir.

$$\mu \cup (\eta \cup \beta) = \delta \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \delta(x) = \max \{\mu(x), \max \{\eta(x), \beta(x)\}\} \\ = \max \{\mu(x), \eta(x), \beta(x)\} \text{ ve}$$

$$\begin{aligned}
(\mu \cup \eta) \cup \beta = \zeta &\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \zeta(x) = \text{maks} \{ \text{maks} \{ \mu(x), \eta(x) \}, \beta(x) \} \\
&= \text{maks} \{ \mu(x), \eta(x), \beta(x) \}
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\mu \cup (\eta \cup \beta) = (\mu \cup \eta) \cup \beta$ dir.

(v) $\forall x \in X$ için $\mu'(x) = 1 - \mu(x)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
(\mu')'(x) &= 1 - \mu'(x) \\
&= 1 - (1 - \mu(x)) \\
&= \mu(x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $(\mu')' = \mu$ dir.

$$\begin{aligned}
(\text{vi}) \quad (\mu \cap \eta) = \emptyset &\Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } (\mu \cap \eta)(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \min \{ \mu(x), \eta(x) \} = 0 \text{ dir.}
\end{aligned}$$

1. Durum: $\forall x \in X$ için $\mu(x) \leq \eta(x)$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için $\mu(x) = 0$ olup $\mu = \emptyset$ dir. $\eta \subseteq X$ olduğundan (i) den $X' \subseteq \eta' \Leftrightarrow \emptyset \subseteq \eta' \Leftrightarrow \mu \subseteq \eta'$ olur.

2. Durum: $\forall x \in X$ için $\eta(x) \leq \mu(x)$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için $\eta(x) = 0$ olup $\eta = \emptyset$ dir. $\mu \subseteq X$ ve $X = \emptyset' = \eta'$ olduğundan $\mu \subseteq \eta'$ dir.

$$\begin{aligned}
(\text{vii}) \quad (\bigcup_{i \in I} \mu_i)(x) &= \sup_{i \in I} \{ \mu_i(x) \} \Rightarrow (\bigcup_{i \in I} \mu_i)'(x) = 1 - \sup_{i \in I} \{ \mu_i(x) \} \\
&= \inf_{i \in I} \{ 1 - \mu_i(x) \} \\
&= \inf_{i \in I} \{ \mu_i'(x) \} \\
&= (\bigcap_{i \in I} \mu_i')(x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $(\bigcup_{i \in I} \mu_i)' = \bigcap_{i \in I} \mu_i'$ dir.

$$\begin{aligned}
(\bigcap_{i \in I} \mu_i)(x) &= \inf_{i \in I} \{ \mu_i(x) \} \Rightarrow (\bigcap_{i \in I} \mu_i)'(x) = 1 - \inf_{i \in I} \{ \mu_i(x) \} \\
&= \sup_{i \in I} \{ 1 - \mu_i(x) \} \\
&= \sup_{i \in I} \{ \mu_i'(x) \} \\
&= (\bigcup_{i \in I} \mu_i')(x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $(\bigcap_{i \in I} \mu_i)' = \bigcup_{i \in I} \mu_i'$ dir.

(viii) $\forall x \in X$ için $\mu(x) \leq \max \{\mu(x), \eta(x)\}$ olduğundan $\mu \subseteq \mu \cup \eta$ dir. Benzer şekilde $\eta \subseteq \mu \cup \eta$ olur.

(ix) $\mu \subseteq \beta$ ve $\eta \subseteq \beta$ olsun. Bu durumda $\forall x \in X$ için,

$$\mu(x) \leq \beta(x) \text{ ve } \eta(x) \leq \beta(x)$$

olacağından $\max \{\mu(x), \eta(x)\} \leq \beta(x)$ dir. Böylece $\mu \cup \eta \subseteq \beta$ dir.

Tanım 2.1.6: X boş olmayan bir küme olsun. $r \in (0, 1]$ ve $\forall y \in X$ için,

$$x_r(y) = \begin{cases} r & , y = x \\ 0 & , y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlı X in x_r fuzzy alt kümesine X de bir fuzzy nokta denir.

Tanım 2.1.7: X boş olmayan bir küme ve μ , X in bir fuzzy alt kümesi olsun. $t \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$$

kümesine μ nün bir seviye alt kümesi denir (Malik and Mordeson 1991).

Örnek 2.1.2: $A = \{a, b, c\}$ olmak üzere A nın bir μ fuzzy alt kümesi,

$$\mu(a) = 0.3, \mu(b) = 0.1, \mu(c) = 0.4$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$0 \leq t \leq 0.1 \text{ için } \mu_t = \{a, b, c\} = A$$

$$0.1 < t \leq 0.3 \text{ için } \mu_t = \{a, c\}$$

$$0.3 < t \leq 0.4 \text{ için } \mu_t = \{c\}$$

$$0.4 < t \leq 1 \text{ için } \mu_t = \emptyset$$

olur.

Lemma 2.1.3: μ bir X kümesinin fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in X$ ve $k \in [0, 1]$ olmak üzere,

$$\mu(x) = \sup \{k \mid x \in \mu_k\}$$

dir (Kumar 1992a).

Tanım 2.1.8: “ $\cdot$ ” bir X kümesi üzerine tanımlı ikili işlem ve $\mu, \eta \in F(X)$ olsun. $\mu\eta$ çarpımı,

$$\mu\eta(x) = \begin{cases} \sup_{x=y \cdot z} \{\min(\mu(y), \eta(z))\} & , y, z \in X \text{ için } x = y \cdot z \text{ ise} \\ 0 & , \forall y, z \in X \text{ için } x \neq y \cdot z \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 2.1.3: “ $\cdot$ ” işlemi $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde,

$$a = b \cdot c = e \cdot d$$

$$c = a \cdot b = c \cdot b = e \cdot a$$

$$d = c \cdot c = d \cdot a = b \cdot a$$

şeklinde tanımlı bir ikili işlem olsun. X kümesinin μ ve ξ fuzzy alt kümeleri,

$$\mu(a) = \mu(c) = \xi(d) = 0.3$$

$$\mu(b) = \mu(d) = 0.4$$

$$\mu(e) = \xi(a) = 0.2$$

$$\xi(b) = \xi(e) = 0.8$$

$$\xi(c) = 0.5$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (\mu\xi)(a) &= \sup \{ \min \{ \mu(b), \xi(c) \}, \min \{ \mu(e), \xi(d) \} \} \quad (a = b \cdot c = e \cdot d) \\ &= \sup \{ \min \{ 0.4, 0.5 \}, \min \{ 0.2, 0.3 \} \} \\ &= \max \{ 0.4, 0.2 \} \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

$$(\mu\xi)(b) = 0 \quad (\forall y, z \in X \text{ için } b \neq y \cdot z)$$

$$(\mu\xi)(c) = \sup \{ \min \{ \mu(a), \xi(b) \}, \min \{ \mu(c), \xi(b) \}, \min \{ \mu(e), \xi(a) \} \} \\ = 0.3$$

$$(\mu\xi)(d) = 0.3$$

$$(\mu\xi)(e) = 0$$

olur.

Tanım 2.1.9: X boş olmayan bir küme, μ ve η , X in fuzzy alt kümeleri olsun. μ ve η fuzzy kümelerinin $\mu \otimes \eta$ cebirsel çarpımı $\forall x \in X$ için,

$$\mu \otimes \eta(x) = \mu(x) \cdot \eta(x)$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.1.2: X herhangi bir küme olmak üzere $\mu, \eta \in F(X)$ için $\mu \otimes \eta \subseteq \mu \cap \eta$ dir.

İspat: $\forall x \in X$ için $\mu(x), \eta(x) \in [0, 1]$ olduğundan,

$$\mu \otimes \eta(x) = \mu(x) \cdot \eta(x) \leq \min \{ \mu(x), \eta(x) \} = (\mu \cap \eta)(x)$$

olur. Böylece $\mu \otimes \eta \subseteq \mu \cap \eta$ dir.

Tanım 2.1.10: X boş olmayan bir küme, μ ve η , X in fuzzy alt kümeleri olsun. μ ve η fuzzy alt kümelerinin $\mu \oplus \eta$ cebirsel toplamı $\forall x \in X$ için,

$$(\mu \oplus \eta)(x) = \mu(x) + \eta(x) - \mu(x) \cdot \eta(x)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 2.1.11: X boş olmayan bir küme, μ ve η , X in fuzzy alt kümeleri olsun. μ ve η fuzzy alt kümelerinin $\mu \ominus \eta$ cebirsel farkı $\forall x \in X$ için,

$$(\mu \ominus \eta)(x) = \min \{ \mu(x), 1 - \eta(x) \}$$

şeklinde tanımlıdır.

Örnek 2.1.4: $B = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ olmak üzere X kümesinin ω ve ξ fuzzy kümeleri,

$$\omega = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.1), (x_3, 0.8), (x_4, 0.5)\}$$

$$\xi = \{(x_1, 0.6), (x_2, 0.4), (x_3, 0.3), (x_4, 0.6)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$(\omega \otimes \xi)(x_1) = \omega(x_1) \cdot \xi(x_1) = 0.18$$

$$(\omega \otimes \xi)(x_2) = \omega(x_2) \cdot \xi(x_2) = 0.04$$

$$(\omega \otimes \xi)(x_3) = 0.24$$

$$(\omega \otimes \xi)(x_4) = 0.3$$

olur. Görüldüğü gibi $\omega \otimes \xi$ cebirsel çarpımı da X in bir fuzzy alt kümesi olup,

$$\omega \otimes \xi = \{(x_1, 0.18), (x_2, 0.04), (x_3, 0.24), (x_4, 0.3)\}$$

şeklindedir. Benzer şekilde,

$$\omega \oplus \xi = \{(x_1, 0.72), (x_2, 0.46), (x_3, 0.86), (x_4, 0.8)\}$$

$$\omega \odot \xi = \{(x_1, 0.3), (x_2, 0.1), (x_3, 0.7), (x_4, 0.4)\}$$

olur.

Tanım 2.1.12: μ , bir X kümesinin fuzzy alt kümesi ve f , X üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ için $f(x) = f(y)$ olması $\mu(x) = \mu(y)$ olmasını ifade ediyorsa μ ye f -invarianttır denir.

2.2 Fuzzy Kümelerin Bir Fonksiyon Altındaki Görüntüsü ve Ters Görüntüsü

Tanım 2.2.1: X ve Y iki küme, $f: X \rightarrow Y$ herhangi bir fonksiyon ve $\mu \in F(X)$, $\eta \in F(Y)$ olsun. Bu durumda,

(i) μ nün f altındaki görüntüsü $f(\mu)$, $\forall y \in Y$ için,

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) & , f^{-1}(y) \neq \emptyset \text{ ise} \\ 0 & , f^{-1}(y) = \emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Y nin bir fuzzy alt kümesidir.

(ii) η nün f altındaki ters görüntüsü $f^{-1}(\eta)$, $\forall x \in X$ için,

$$f^{-1}(\eta)(x) = \eta(f(x))$$

şeklinde tanımlı X in bir fuzzy alt kümesidir.

Eğer f bir homomorfizm ise $f(\mu)$ ye μ nün homomorfik görüntüsü, $f^{-1}(\eta)$ ye ise η nün ters homomorfik görüntüsü denir (Rosenfeld 1971).

Örnek 2.2.1: $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ olsun. $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu, $f(x_1) = f(x_2) = y_1, f(x_3) = y_2$ şeklinde tanımlansın.

(i) X in bir,

$$\mu = \{(x_1, 0.1), (x_2, 0.8), (x_3, 0.3)\}$$

fuzzy alt kümesinin f altındaki görüntüsü,

$$f(\mu)(y_1) = \sup \{\mu(x_1), \mu(x_2)\} = 0.8 \quad (f^{-1}(y_1) = \{x_1, x_2\})$$

$$f(\mu)(y_2) = \mu(x_3) = 0.3 \quad (f^{-1}(y_2) = \{x_3\})$$

$$f(\mu)(y_3) = 0 \quad (f^{-1}(y_3) = \emptyset)$$

olmak üzere,

$$f(\mu) = \{(y_1, 0.8), (y_2, 0.3), (y_3, 0)\}$$

dir. Böylece $f(\mu)$ de Y nin bir fuzzy alt kümesi olur.

(ii) Y nin bir,

$$\eta = \{(y_1, 0.5), (y_2, 0.7), (y_3, 0.1)\}$$

fuzzy alt kümesinin f altındaki ters görüntüsü,

$$f^{-1}(\eta)(x_1) = \eta(f(x_1)) = \eta(y_1) = 0.5$$

$$f^{-1}(\eta)(x_2) = \eta(f(x_2)) = \eta(y_1) = 0.5$$

$$f^{-1}(\eta)(x_3) = \eta(f(x_3)) = \eta(y_2) = 0.7$$

olmak üzere,

$$f^{-1}(\eta) = \{(x_1, 0.5), (x_2, 0.5), (x_3, 0.7)\}$$

dir. Böylece $f^{-1}(\eta)$ de X in bir fuzzy alt kümesi olur.

Teorem 2.2.1: X ve Y iki küme, $f: X \rightarrow Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi $\mu, \omega \in F(X)$ ve $\forall \eta, \xi \in F(Y)$ fuzzy alt kümeleri için,

- (a) $f^{-1}(\eta') = (f^{-1}(\eta))'$
 - (b) $(f(\mu))' \subseteq f(\mu')$
 - (c) f birebir $\Rightarrow (f(\mu))' = f(\mu')$
 - (d) $\xi \subseteq \eta \Rightarrow f^{-1}(\xi) \subseteq f^{-1}(\eta)$
 - (e) $\omega \subseteq \mu \Rightarrow f(\omega) \subseteq f(\mu)$
 - (f) $f(f^{-1}(\eta)) \subseteq \eta$
 - (g) f örten $\Rightarrow f(f^{-1}(\eta)) = \eta$
 - (h) $\mu \subseteq f^{-1}(f(\mu))$
 - (i) f birebir $\Rightarrow \mu = f^{-1}(f(\mu))$
- dir (Chang 1968).

Teorem 2.2.2: X , Y ve Z herhangi kümeler olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ ve $h: Y \rightarrow Z$ herhangi iki fonksiyon olsun. Bu durumda “ $\circ$ ” fonksiyonların bileşke işlemi olmak üzere X in her μ fuzzy alt kümesi için,

$$(h \circ f)(\mu) = h(f(\mu))$$

dir.

İspat: $\forall z \in Z$ için,

$$\begin{aligned} h(f(\mu))(z) &= \begin{cases} \sup_{y \in h^{-1}(z)} \{ \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) \} & , h^{-1}(z) \neq \emptyset, f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0 & , h^{-1}(z) = \emptyset, f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sup_{x \in f^{-1}(h^{-1}(z))} \mu(x) & , f^{-1}(h^{-1}(z)) = (h \circ f)^{-1} \neq \emptyset \\ 0 & , f^{-1}(h^{-1}(z)) = (h \circ f)^{-1} = \emptyset \end{cases} \\ &= (h \circ f)(\mu)(z) \end{aligned}$$

olur.

2.3 Fuzzy Bağntı

Bağntı kavramı fuzzy kümeler üzerinde, basit kümelerde olduğu gibi tanımlıdır. Ayrıca basit kümelerde olduğu gibi fuzzy kümelerin de teori ve uygulamalarında önemli rol oynar.

Tanım 2.3.1: X boş olmayan bir küme olsun. $X \times X$ kümesinin $\forall x, y \in X$ için $\mu(x, y) \in [0, 1]$ şeklinde tanımlı,

$$\mu: X \times X \rightarrow [0, 1]$$

fuzzy alt kümesine X üzerinde bir fuzzy bağntı denir.

Tanım 2.3.2: X ve Y boş olmayan iki küme olsun. $X \times Y$ kümesinin $\forall x \in X$ ve $\forall y \in Y$ için $\mu(x, y) \in [0, 1]$ şeklinde tanımlı,

$$\mu: X \times Y \rightarrow [0, 1]$$

fuzzy alt kümesine $X \times Y$ üzerinde bir fuzzy bağntı denir.

Tanım 2.3.3: X boş olmayan bir küme olsun. $X^n = X \times X \times X \dots \times X$ çarpım kümesinin $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $\forall x_i \in X$ için $\mu(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 1]$ şeklinde tanımlı,

$$\mu: X^n \rightarrow [0, 1]$$

fuzzy alt kümesine X üzerinde bir n -li fuzzy bağntı denir.

Tanım 2.3.4: μ ve η , X üzerinde iki fuzzy bağntı olsun. $\forall x, y \in X$ için

$$(\eta \circ \mu)(x, y) = \sup_{z \in X} \{ \min \{ \mu(x, z), \eta(y, z) \} \}$$

$$\eta \circ \mu: X \times X \rightarrow [0, 1]$$

fuzzy bağntısına μ ve η fuzzy bağntılarının bileşkesi denir.

Lemma 2.3.1: μ, η ve ξ bir X kümesinde fuzzy bağntılar ise,

$$\mu \circ (\eta \circ \xi) = (\mu \circ \eta) \circ \xi$$

dır (Zadeh 1965).

Tanım 2.3.5: X boş olmayan bir küme, μ , X üzerinde bir fuzzy bağıntı ve σ , X in bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda eğer $\forall x, y \in X$ için,

$$\mu(x, y) \leq \min \{ \sigma(x), \sigma(y) \}$$

ise μ ye σ üzerinde bir fuzzy bağıntı denir (Malik and Mordeson 1991).

Tanım 2.3.6: X boş olmayan bir küme, μ ve σ , X in fuzzy alt kümeleri olsunlar. $X \times X$ üzerinde $\forall x, y \in X$ için $(\mu \times \sigma)(x, y) = \min \{ \mu(x), \sigma(y) \}$ şeklinde tanımlı

$$\mu \times \sigma: X \times X \rightarrow [0, 1]$$

fuzzy bağıntıya μ ve η fuzzy alt kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

Teorem 2.3.1: X boş olmayan bir küme, μ ve η , X in fuzzy alt kümeleri olsunlar. Bu durumda $t \in [0, 1]$ olmak üzere,

(i) $\mu \times \eta$, X üzerinde bir fuzzy bağıntıdır.

(ii) $(\mu \times \eta)_t = \mu_t \times \eta_t$ dir.

İspat :

(i) $\forall x, y \in X$ için $(\mu \times \eta)(x, y) = \min \{ \mu(x), \eta(y) \} \in [0, 1] \Rightarrow \mu \times \eta: X \times X \rightarrow [0, 1]$ olup $\mu \times \eta$, X üzerinde bir fuzzy bağıntıdır.

(ii) $\mu_t = \{x \in X \mid \mu(x) \geq t\}$ ve $\eta_t = \{y \in X \mid \eta(y) \geq t\}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mu_t \times \eta_t &= \{(x, y) \mid \mu(x) \geq t \text{ ve } \eta(y) \geq t\} \\ &= \{(x, y) \mid \min \{ \mu(x), \eta(y) \} \geq t\} \\ &= \{(x, y) \mid (\mu \times \eta)(x, y) \geq t\} \\ &= (\mu \times \eta)_t \end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.3.7: X boş olmayan bir küme ve μ , X üzerinde bir fuzzy bağıntı olsun. Bu durumda eğer,

(i) $\mu(x, x) = 1, \forall x \in X$

(ii) $\mu(x, y) = \mu(y, x), \forall x, y \in X$

$$(iii) \mu(x, y) \geq \sup_{z \in X} \{ \min \{ \mu(x, z), \mu(z, y) \} \}$$

ise μ ye X üzerinde bir fuzzy denklik bağıntısı denir.

Tanım 2.3.8: μ , X üzerinde bir fuzzy denklik bağıntısı olsun. Her bir $a \in X$ için $\mu[a]$ ya, a nın denklik sınıfı denir ve

$$\mu[a](x) = \mu(a, x), \forall x \in X$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.3.9: μ , X üzerinde bir fuzzy denklik bağıntısı olsun. Bu durumda,

$$X/\mu = \{ \mu[a] \mid a \in X \}$$

kümesine fuzzy bölüm kümesi denir.

Lemma 2.3.2: μ , X üzerinde bir fuzzy denklik bağıntısı olsun. Bu durumda,

$$(i) \mu(a, b) = 0 \Leftrightarrow \min \{ \mu[a], \mu[b] \} \equiv 0 \quad (a, b \in X)$$

$$(ii) \sup_{a \in X} \mu[a] \equiv 1$$

$$(iii) \mu[a] = \mu[b] \Leftrightarrow \mu(a, b) = 1$$

$$(iv) \forall x \in X \text{ için } p(x) = \mu[x] \text{ şeklinde tanımlı bir}$$

$$p : X \rightarrow X/\mu$$

birebir ve örten dönüşümü vardır (Kuraoka and Kuroki 1992).

3. FUZZY GRUPLAR

Bu bölümde fuzzy alt grupoid, fuzzy alt grup, fuzzy seviye alt grup ve fuzzy normal alt grup incelenecek, gruplar üzerinde fuzzy yan cümle tanımı yapılarak fuzzy bölüm grubu tanımlanacaktır.

3.1 Fuzzy Alt Grupoidler

H kümesi S grupoidinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in H$ için $xy \in H$ ise H ye S nin bir alt grupoididir denir.

Tanım 3.1.1: μ , S grupoidinin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in S$ için,

$$\mu(xy) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$$

ise μ ye S nin bir fuzzy alt grupoidi denir.

μ , (S, $\cdot$) grupoidinin bir fuzzy alt grupoidi ve $\forall x \in S, n \in \mathbb{N}^+$ için x lerin " $\cdot$ " işlemi altında herhangi bir birleşimi x^n olsun. Bu durumda $\mu(x^n) \geq \mu(x)$ dir.

Tanım 3.1.2: σ , S nin bir fuzzy alt grupoidi olsun. $\forall i \in I$ için μ^i , S nin bir fuzzy alt grupoidi olmak üzere,

$$\mu = \{ \mu^i \mid \sigma \subseteq \mu^i, i \in I \}$$

cümlesinin en küçük elemanına, σ tarafından üretilmiş fuzzy alt grupoid denir ve (σ) ile gösterilir (Rosenfeld 1971).

Önerme 3.1.1: μ , S nin bir fuzzy alt grupoidi ise $\forall t \in [0,1]$ için μ_t seviye alt kümesi S nin bir alt grupoididir.

İspat : $x, y \in \mu_t$ olsun. Bu durumda $\mu(x) \geq t$ ve $\mu(y) \geq t$ dir. μ bir fuzzy alt grupoid olduğunda $\mu(xy) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \} \geq t$ olup $xy \in \mu_t$ dir. Böylece μ_t , S nin bir alt grupoididir.

Önerme 3.1.2: T , S grupoidinin herhangi bir alt kümesi ve μ , T nin karakteristik fonksiyonu olsun. Bu durumda μ nün S grupoidinin fuzzy alt grupoidi olması için gerek ve yeter koşul T nin S nin bir alt grupoidi olmasıdır.

İspat : $\mu : T \rightarrow \{0, 1\}$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\mu(xy) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\} &\Leftrightarrow "\mu(x) = \mu(y) = 1 \Rightarrow \mu(xy) = 1" \\ &\Leftrightarrow "x, y \in T \Rightarrow xy \in T"\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.1: $i \in I$ için μ^i , S nin fuzzy alt grupoidi olsun. Bu durumda $(\bigcap_{i \in I} \mu^i)$, S nin bir fuzzy alt grupoididir.

İspat : $\forall x, y \in S$ için,

$$\begin{aligned}(\bigcap_{i \in I} \mu^i)(xy) &= \inf_{i \in I} (\mu^i(xy)) \geq \inf_{i \in I} \{\min \{\mu^i(x), \mu^i(y)\}\} \\ &\geq \min \{\inf_{i \in I} \mu^i(x), \inf_{i \in I} \mu^i(y)\} \\ &= \min \{(\bigcap_{i \in I} \mu^i)(x), (\bigcap_{i \in I} \mu^i)(y)\}\end{aligned}$$

olur. Böylece $(\bigcap_{i \in I} \mu^i)$, S nin bir fuzzy alt grupoididir.

Teorem 3.1.2: S ve S' iki grupoid, $f: S \rightarrow S'$ bir homomorfizm ve v , S' nün herhangi bir fuzzy grupoidi olsun. Bu durumda v nin ters homomorfik görüntüsü $f^{-1}(v)$, S nin bir fuzzy alt grupoididir.

İspat : $\forall x, y \in S$ için,

$$\begin{aligned}(f^{-1}(v))(xy) &= v(f(xy)) = v(f(x)f(y)) \geq \min \{v(f(x)), v(f(y))\} \\ &= \min \{(f^{-1}(v))(x), (f^{-1}(v))(y)\}\end{aligned}$$

olur. Böylece $f^{-1}(v)$, S nün bir fuzzy alt grupoididir.

Tanım 3.1.3: μ , S nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Herhangi bir $T \subseteq S$ alt kümesi için,

$$\mu(t_0) = \sup_{t \in T} \mu(t)$$

olacak biçimde $\exists t_0 \in T$ varsa μ ye sup özelliğine sahiptir denir (Rosenfeld 1971).

Eğer μ fuzzy alt kümesi, sınırlı sayıda değer alıyorsa, yani $\text{Im}(\mu) < \infty$ ise μ sup özelliğine sahiptir. Örneğin karakteristik fonksiyon sup özelliğine sahiptir.

Teorem 3.1.3: f , S üzeride bir homomorfizm ve μ , S grupoidinin sup özelliğine sahip bir fuzzy alt grupoidi olsun. Bu durumda μ nün homomorfik görüntüsü $f(\mu)$, $f(S)$ nin bir fuzzy alt grupoididir.

İspat : $x, y \in S$ olmak üzere $f(x), f(y) \in f(S)$ için $x_0 \in f^{-1}(f(x))$ ve $y_0 \in f^{-1}(f(y))$ olacak biçimde $x_0, y_0 \in f(S)$ olsun. Bu durumda μ sup özelliğine sahip olduğu için,

$$\mu(x_0) = \sup_{t \in f^{-1}(f(x))} \mu(t) \text{ ve } \mu(y_0) = \sup_{t \in f^{-1}(f(y))} \mu(t)$$

dir.

$f(x), f(y) \in f(S)$ için,

$$\begin{aligned} (f(\mu))(f(x)f(y)) &= \sup_{z \in f^{-1}(f(x)f(y))} \mu(z) \geq \min \{\mu(x_0), \mu(y_0)\} \\ &= \min \{f(\mu)(x), f(\mu)(y)\} \end{aligned}$$

olur. Böylece $f(\mu)$, $f(S)$ nin bir fuzzy alt grupoididir.

Teorem 3.1.4: f , S üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

(i) v , $f(S)$ nin herhangi bir fuzzy alt kümesi olsun. $f(f^{-1}(v)) = v$ ise, $\forall y \in f(S)$ için,

$$\gamma(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} v(f(x)) = v(y)$$

olup $\gamma = v$ dir.

(ii) μ , S nin bir fuzzy alt kümesi olsun. $f(f^{-1}(\mu)) = \zeta$ ise $\forall x \in S$ için,

$$\zeta(x) = \sup_{z \in f^{-1}(f(x))} \mu(z) \geq \mu(x)$$

olup $\mu \subseteq \zeta$ dür.

Ayrıca μ , f -invariant ise $\mu = \zeta$ dir.

(iii) f , S deki f -invariant fuzzy kümeler ile $f(S)$ deki fuzzy kümeler arasında birebir eşleme yapar.

(iv) f , S deki sup özelliğine sahip f -invariant fuzzy alt grupoidler ile $f(S)$ deki sup özelliğine sahip fuzzy alt grupoidler arasında birebir eşleme yapar (Rosenfeld 1971).

3.2 Fuzzy Alt Gruplar

H kümesi G grubunun boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in H$ için $xy^{-1} \in H$ ise H ye G nin bir alt grubudur denir.

G grubunun birim elemanını e ile gösterelim.

Tanım 3.2.1: μ , G nin bir fuzzy alt grupoidi olsun. Eğer $\forall x \in G$ için,

$$\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$$

ise μ ye G nin bir fuzzy alt grubu denir.

Tanım 3.2.2: μ , G nin herhangi bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için,

(i) $\mu(xy) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

ise μ ye G nin bir fuzzy alt grubu denir.

Önerme 3.2.1: μ , G nin bir fuzzy alt grubu ise $\forall x \in G$ için,

(i) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$

(ii) $\mu(e) \geq \mu(x)$

dir.

İspat :

(i) μ bir fuzzy alt grup olduğundan $\forall x \in G$ için $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$ dir. $x = x^{-1}$ alınırsa,

$$\mu((x^{-1})^{-1}) \geq \mu(x^{-1}) \Rightarrow \mu(x) \geq \mu(x^{-1})$$

olur. Böylece $\mu(x) = \mu(x^{-1})$ dir.

(ii) μ bir fuzzy alt grup olduğundan $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$ dir.

$y = x^{-1}$ alınırsa,

$$\mu(xx^{-1}) \geq \min \{\mu(x), \mu(x^{-1})\} \Rightarrow \mu(e) \geq \min \{\mu(x), \mu(x)\} = \mu(x)$$

olur. Böylece $\mu(e) \geq \mu(x)$ dir.

Sonuç 3.2.1: μ , G nin bir fuzzy alt grubu ise $x \in G$ olmak üzere $\mu_e = \{x \mid \mu(x) = \mu(e)\}$ G nin bir alt grubudur (Rosenfeld 1971).

Sonuç 3.2.2: μ , G nin bir fuzzy alt grubu ise, μ fuzzy alt grubu, μ_e nin her bir yan cümlesi üzerinde sabittir (Rosenfeld 1971).

Sonuç 3.2.3: μ , G nin bir fuzzy alt grubu ve μ_e sınırlı ise μ sup özelliğine sahiptir (Rosenfeld 1971).

Önerme 3.2.2: μ , G nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda,

μ , G nin bir fuzzy alt grubudur $\Leftrightarrow \forall x, y \in G$ için $\mu(xy^{-1}) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$ dir.

İspat :

($\Rightarrow$) μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $\mu(y^{-1}) = \mu(y)$ olduğundan,

$$\mu(xy^{-1}) \geq \min \{\mu(x), \mu(y^{-1})\} = \min \{\mu(x), \mu(y)\}$$

olur.

($\Leftarrow$) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy^{-1}) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$ olsun.

$x = y$ alınırsa $\mu(e) \geq \mu(y)$ elde edilir. Dolayısıyla $\forall y \in G$ için,

$$\begin{aligned} \mu(y^{-1}) = \mu(ey^{-1}) &\geq \min \{\mu(e), \mu(y^{-1})\} = \mu(y) \Rightarrow \mu(xy) = \mu(x(y^{-1})^{-1}) \geq \min \{\mu(x), \mu(y^{-1})\} \\ &\geq \min \{\mu(x), \mu(y)\} \end{aligned}$$

olur. Böylece μ , G nin bir fuzzy alt grubu olur.

Önerme 3.2.3: μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $x, y \in G$ için,

$$\mu(x) \neq \mu(y) \Rightarrow \mu(xy) = \min \{\mu(x), \mu(y)\}$$

dir.

İspat : Genelliği bozmadan $\mu(x) > \mu(y)$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} \mu(y) = \mu(x^{-1}xy) &\geq \{\mu(x^{-1}), \mu(xy)\} = \min \{\mu(x), \mu(xy)\} \quad (\mu(x) > \mu(y)) \\ &= \mu(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \} \\ &= \mu(y) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\mu(xy) = \mu(y) = \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$$

dir.

Önerme 3.2.4: μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $\forall x, y \in G$ için,

$$\mu(xy) = \mu(y) \Leftrightarrow \mu(x) = \mu(e)$$

dir.

İspat :

($\Rightarrow$) $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(y)$ olsun. $y = e$ alınırsa $\mu(x) = \mu(e)$ olur.

($\Leftarrow$) $\forall x \in G$ için $\mu(x) = \mu(e)$ olsun. $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$ olduğundan $\mu(xy) \geq \mu(y)$ dir.

$$\begin{aligned} \mu(y) &= \mu(x^{-1}xy) \geq \min \{ \mu(x^{-1}), \mu(xy) \} \\ &= \min \{ \mu(x), \mu(xy) \} \\ &= \min \{ \mu(e), \mu(xy) \} \quad (\mu(e) \geq \mu(y)) \\ &= \mu(xy) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\mu(xy) = \mu(y)$ dir.

Teorem 3.2.1: μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $\forall x, y \in G$ için,

$$\mu(x) < \mu(y) \Rightarrow \mu(xy) = \mu(x) = \mu(yx)$$

dir.

İspat : Önerme 3.2.3 ten $\mu(x) < \mu(y) \Rightarrow \mu(x) \neq \mu(y) \Rightarrow \mu(yx) = \mu(x)$ olur. Ayrıca,

$$\mu(xy) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \} = \mu(x) \text{ ve}$$

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu(xyy^{-1}) \geq \min \{ \mu(xy), \mu(y^{-1}) \} \\ &= \min \{ \mu(xy), \mu(y) \} \quad (\mu(x) < \mu(y)) \\ &= \mu(xy) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\mu(xy) = \mu(x)$ dir.

Teorem 3.2.2: T , G grubunun herhangi bir alt kümesi ve λ_T , T nin karakteristik fonksiyonu olsun. Bu durumda λ_T nin G nin bir fuzzy alt grubu olması için gerek ve yeter koşul, T nin G nin bir alt grubu olmasıdır (Rosenfeld 1971).

Teorem 3.2.3: μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. $x, y \in G$ için,

$$\mu(xy^{-1}) = \mu(e) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)$$

dir.

İspat: $\mu(xy^{-1}) = \mu(e)$ olsun.

$$\mu(x) = \mu(xy^{-1}y) \geq \min \{ \mu(xy^{-1}), \mu(y) \}$$

$$= \min \{ \mu(e), \mu(y) \}$$

$$= \mu(y)$$

$$\mu(y) = \mu(yx^{-1}x) \geq \min \{ \mu(yx^{-1}), \mu(x) \} \quad (\mu((yx^{-1})^{-1}) = \mu(xy^{-1}))$$

$$= \min \{ \mu(xy^{-1}), \mu(x) \}$$

$$= \min \{ \mu(e), \mu(x) \}$$

$$= \mu(x)$$

olur. Böylece $\mu(x) = \mu(y)$ dir.

Teorem 3.2.4: μ ve ξ , G nin fuzzy alt grupları olsun. Bu durumda $\mu \cap \xi$, G nin bir fuzzy alt grubudur.

İspat: $\forall x, y \in G$ için,

$$(\mu \cap \xi)(xy^{-1}) = \min \{ \mu(xy^{-1}), \xi(xy^{-1}) \}$$

$$\geq \min \{ \min \{ \mu(x), \mu(y) \}, \min \{ \xi(x), \xi(y) \} \}$$

$$= \min \{ \min \{ \mu(x), \xi(x) \}, \min \{ \mu(y), \xi(y) \} \}$$

$$= \min \{ (\mu \cap \xi)(x), (\mu \cap \xi)(y) \}$$

olur. Böylece $\mu \cap \xi$, G nin bir fuzzy alt grubudur.

Önerme 3.2.5: $i \in I$ için μ^i , G nin fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $(\bigcap_{i \in I} \mu^i)$, G nin bir fuzzy alt grubudur (Rosenfeld 1971).

Klasik grup teorisinden bilindiği gibi bir grup, sabit olmayan iki alt grubunun birleşimi olarak ifade edilemez. Rosenfeld (1971) bu ifadeye benzer bir durumu aşağıdaki şekilde vermiştir.

Sonuç 3.2.4: Bir grup sabit olmayan iki fuzzy alt grubunun birleşimi olamaz (Rosenfeld 1971).

İspat: μ ve ν , G nin sabit olmayan iki fuzzy alt grubu olsun. $\mu \cup \nu = G$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall x \in G$ için $G(x) = 1$ olacağından,

$$(\mu \cup \nu)(x) = \max \{\mu(x), \nu(x)\} = 1 \Rightarrow \mu(x) = 1 \text{ veya } \nu(x) = 1$$

dir. Ancak μ ve ν sabit olmadığından $\exists a, b \in G$ için,

$$\mu(a) = 1, \mu(b) < 1, \nu(a) < 1, \nu(b) = 1$$

dir. $\mu(a) = \mu(a^{-1}) = 1$ olacağından,

$$\mu(ab) = 1 \Rightarrow \mu(b) = \mu(a^{-1}ab) \geq \min \{\mu(a^{-1}), \mu(ab)\} = 1$$

olur. Bu ise $\mu(b) < 1$ olmasıyla çelişir. Aynı şekilde $\nu(b) = \nu(b^{-1}) = 1$ olacağından,

$$\nu(ab) = 1 \Rightarrow \nu(a) = \nu(b^{-1}ba) \geq \min \{\nu(b^{-1}), \nu(ba)\} = 1$$

olur. Bu ise $\nu(a) < 1$ olmasıyla çelişir.

Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup G grubu, sabit olmayan iki fuzzy alt grubunun birleşimi olarak ifade edilemez.

Klasik küme teorisinde A ve B bir G grubunun sabit olmayan iki alt grubu ise $A \cup B$ nin de G nin bir alt grubu olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq B$ veya $B \subseteq A$ olmasıdır. Ancak bu sonuç fuzzy grup teorisine genişletilememektedir. Birleşimleri fuzzy alt grup olan fakat birbirini içermeyen fuzzy alt gruplar mevcut olabilir. Genel olarak iki fuzzy alt grubun birleşiminin fuzzy alt grup olup olmadığı, birleşimlerinin görüntü kümesine bağlıdır.

Örnek 3.2.1 de iki fuzzy alt grubun birleşimlerinin fuzzy alt grup olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 3.2.1: $G = \{e, a, b, ab \mid a^2 = b^2 = e, ab = ba\}$ Klein-4 grubu olsun.

G nin μ ve η fuzzy alt kümeleri, $0 \leq i \leq 5$, $t_i \in [0, 1]$ için $t_5 < t_4 < t_3 < t_2 < t_1 < t_0$ olmak üzere,

$$\mu(e) = t_1, \mu(a) = t_3 \text{ ve } \mu(b) = \mu(ab) = t_4$$

$$\eta(e) = t_0, \eta(a) = t_5, \eta(b) = t_2 \text{ ve } \eta(ab) = t_5$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda μ ve η , G nin fuzzy alt gruplarıdır. Ancak,

$$(\mu \cup \eta)(ab) = \max \{\mu(ab), \eta(ab)\} = t_4$$

$$(\mu \cup \eta)(a) = \max \{\mu(a), \eta(a)\} = t_3$$

$$(\mu \cup \eta)(b) = \max \{\mu(b), \eta(b)\} = t_2$$

$$\min \{(\mu \cup \eta)(a), (\mu \cup \eta)(b)\} = t_3$$

olduğundan $(\mu \cup \eta)(ab) \neq \min \{(\mu \cup \eta)(a), (\mu \cup \eta)(b)\}$ dir. Dolayısıyla $\mu \cup \eta$, G nin bir fuzzy alt grubu değildir.

Sonuç 3.2.5: ξ , G nin sabit bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda ξ fuzzy alt grubu, $\mu \not\subseteq \eta$ ve $\eta \not\subseteq \mu$ olmak üzere G nin μ ve η fuzzy alt gruplarının birleşimi olarak ifade edilemez (Dixit *et al.* 1990).

Aşağıdaki örnekte G nin sabit olmayan bir θ fuzzy alt grubunun, $\mu \neq \theta$ ve $\eta \neq \theta$ olmak üzere G nin sabit olmayan μ ve η fuzzy alt gruplarının birleşimi olarak ifade edilebileceği gösterilmiştir.

Örnek 3.2.2: G grubunun θ fuzzy alt kümesi $t_0, t_1 \in]0, 1]$ ve $t_1 < t_0$ olmak üzere $\forall x \in G$ için,

$$\theta(x) = \begin{cases} t_0 & , x = e \text{ ise} \\ t_1 & , x \neq e \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda θ , G nin sabit olmayan bir fuzzy alt grubudur.

G nin μ ve η fuzzy alt kümeleri, $t_0 > t_0' > t_1 > t_1'$ ve $t_0', t_1' \in [0, 1]$ olmak üzere $\forall x \in G$ için,

$$\mu(x) = \begin{cases} t_0' & , x = e \text{ ise} \\ t_1 & , x \neq e \text{ ise} \end{cases}$$

$$\eta(x) = \begin{cases} t_0 & , x = e \text{ ise} \\ t_1' & , x \neq e \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa açıkça μ ve η , G nin fuzzy alt grupları, $\mu \neq \theta$, $\eta \neq \theta$, $\mu \neq \eta$ ve $\theta = \mu \cup \eta$ dır.

Sonuç 3.2.6: G nin sabit olmayan bir θ fuzzy alt grubu için $t \in]0, 1]$, $\text{Im}(\theta) = \{0, t\}$ olsun. Bu durumda μ ve η , R nin fuzzy alt grupları olmak üzere,

$$\theta = \mu \cup \eta \Rightarrow \mu \subseteq \eta \text{ veya } \eta \subseteq \mu$$

dir.

İspat: $\theta = \mu \cup \eta$ olsun.

$\mu \not\subseteq \eta$ ve $\eta \not\subseteq \mu$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\exists x_1, x_2 \in G$ için,

$$\mu(x_1) > \eta(x_1) \text{ ve } \mu(x_2) < \eta(x_2) \Rightarrow \theta(x_1) = \mu(x_1) > \eta(x_1) \geq 0 \text{ ve } \theta(x_2) = \eta(x_2) > \mu(x_2) \geq 0$$

$$(\text{Im}(\theta) = \{t, 0\}) \Rightarrow \theta(x_1) = \mu(x_1) = t = \eta(x_2) = \theta(x_2) = \theta(x_1 x_2)$$

$$\Rightarrow \mu(x_2) < t = \mu(x_1) \text{ ve } \eta(x_1) < t = \eta(x_2)$$

$$(\text{Teorem 3.2.1 den}) \Rightarrow \mu(x_1 x_2) = \mu(x_2) \text{ ve } \eta(x_1 x_2) = \eta(x_1)$$

$$\Rightarrow \theta(x_1 x_2) = \max\{\mu(x_1 x_2), \eta(x_1 x_2)\}$$

$$= \max\{\mu(x_2), \eta(x_1)\}$$

$$< t$$

$$\Rightarrow \theta(x_1 x_2) \leq \min\{\theta(x_1), \theta(x_2)\} = t$$

olur. Bu ise θ nın bir fuzzy alt grup olmasıyla çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

Teorem 3.2.5: $3 \leq |\text{Im}(\mu)| < \infty$ olmak üzere μ , G nin sabit olmayan bir fuzzy alt grubu ise bu durumda $\mu \neq \eta$, $\mu \neq \theta$ ve $\eta \neq \theta$ olmak üzere μ fuzzy alt grubu, G nin sabit olmayan herhangi η ve θ fuzzy alt gruplarının birleşimi olarak ifade edilebilir.

İspat: $\text{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, $2 \leq m \leq \infty$ ve $t_0 > t_1 > \dots > t_m$ olmak üzere μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. η ve $\theta : G \rightarrow [0, 1]$ fuzzy alt kümeleri $s_1, s_2 \in]0, 1[$ ve $1 \geq t_0 > s_1 > t_1 > s_2 > t_2 > t_3 > \dots > t_m$ olmak üzere $\forall x \in G$ için,

$$\eta(x) = \begin{cases} s_1 & , \mu(x) = t_0 \text{ ise} \\ \mu(x) & , \mu(x) \neq t_0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\theta(x) = \begin{cases} s_2 & , \mu(x) = t_1 \text{ ise} \\ \mu(x) & , \mu(x) \neq t_1 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda η ve θ , G nin sabit olmayan fuzzy alt gruplarıdır ve $\eta \neq \theta$, $\mu \neq \eta$, $\mu \neq \theta$, $\mu = \eta \cup \theta$ dır.

Sonuç 3.2.7: G nin bir μ fuzzy alt grubu için, $t \in]0, 1[$ olmak üzere $\text{Im}(\mu) = \{1, t\}$ olsun. Bu durumda, $\mu \neq \eta$, $\mu \neq \theta$ ve $\eta \neq \theta$ olmak üzere μ fuzzy alt grubu, G nin sabit olmayan herhangi η ve θ fuzzy alt gruplarının birleşimi olarak ifade edilebilir (Dixit *et al.* 1990).

Teorem 3.2.6: G ve G' iki grup, $f: G \rightarrow G'$ bir örten homomorfizm, η , G' nün bir fuzzy alt grubu, μ ise G grubunun sup özelliğine sahip bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda,
 (i) μ nün homomorfik görüntüsü $f(\mu)$, G' nün bir fuzzy alt grubudur.
 (ii) η nün ters homomorfik görüntüsü $f^{-1}(\eta)$, G nin bir fuzzy alt grubudur.

İspat:

(i) Teorem 3.1.3 den $f(\mu)$, G' nün bir fuzzy alt grupoididir. $x \in G$ olsun. μ sup özelliğine sahip olduğundan $f(x) \in G'$ olmak üzere,

$$\mu(x_0) = \sup_{z \in f^{-1}(f(x))} \mu(z)$$

olacak biçimde $x_0 \in f^{-1}(f(x)) \subseteq G$ vardır.

Bu durumda $\forall f(x) \in G'$ için,

$$\begin{aligned}
f(\mu)((f(x))^{-1}) &= \sup_{t \in f^{-1}((f(x))^{-1})} \mu(t) \geq \mu(x_0^{-1}) \\
&\geq \mu(x_0) \\
&= \sup_{z \in f^{-1}(f(x))} \mu(z) \\
&= f(\mu)(f(x))
\end{aligned}$$

olur. Böylece $f(\mu)$, G' nün bir fuzzy alt grubudur.

(ii) Teorem 3.1.2 den $f^{-1}(\eta)$, G nin bir fuzzy alt grupoididir. $\forall x \in G$ için,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\eta)(x^{-1}) &= \eta(f(x^{-1})) \\
&= \eta((f(x))^{-1}) \\
&\geq \eta(f(x)) \\
&= f^{-1}(\eta)(x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece $f^{-1}(\eta)$, G nin bir fuzzy alt grubudur.

Klasik grup teorisinden bilindiği gibi bir G grubunun A ve B alt grupları için,

$$AB, G \text{ nin bir alt grubudur} \Leftrightarrow AB = BA$$

dır. Bu sonuç fuzzy kümelere de genişletilebilmektedir.

Teorem 3.2.7: μ ve ξ , G nin fuzzy alt grupları olsun. Bu durumda,

$$\mu\xi, G \text{ nin bir fuzzy alt grubudur} \Leftrightarrow \mu\xi = \xi\mu$$

dir (Malik and Mordeson 1991).

3.3 Fuzzy Seviye Alt Grupları

Teorem 3.3.1: μ , G nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda $\forall t \in [0, \mu(e)]$ için, μ_t , G nin bir fuzzy alt grubudur $\Leftrightarrow$ Her bir μ_t seviye alt kümesi G nin bir alt grubudur.

İspat :

($\Rightarrow$) μ_t , G nin bir fuzzy alt grubu olsun.

(i) $\mu_t = \{x \in G \mid \mu(x) \geq t\}$ ve $\mu(e) \geq \mu(x)$ olduğundan $e \in \mu_t$ olup $\mu_t \neq \emptyset$ dir.

(ii) $x, y \in \mu_t$ olsun. Bu durumda $\mu(x) \geq t$ ve $\mu(y) \geq t$ dir. Ayrıca μ bir fuzzy alt grup olduğundan,

$$\begin{aligned}\mu(xy^{-1}) &\geq \min \{\mu(x), \mu(y)\} \Rightarrow xy^{-1} \geq t \\ &\Rightarrow xy^{-1} \in \mu_t\end{aligned}$$

olur. Böylece (i) ve (ii) den μ_t , G nin bir alt grubudur.

($\Leftarrow$) $\forall t \in [0, \mu(e)]$ için μ_t seviye alt kümeleri G nin bir alt grubu olsun.

(i) $x, y \in G$ ve $t', t'' \in [0, \mu(e)]$ için $\mu(x) = t'$, $\mu(y) = t''$ olsun. Bu durumda $x \in \mu_{t'}$ ve $y \in \mu_{t''}$ olur. $t' < t''$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\mu(y) \geq t'' > t' &\Rightarrow y \in \mu_{t'} \\ &\Rightarrow \mu_{t''} \subseteq \mu_{t'} \\ &\Rightarrow x, y \in \mu_{t'} \\ &\Rightarrow xy \in \mu_{t'} \quad (\mu_{t'}, G \text{ nin alt grubu olduğundan}) \\ &\Rightarrow \mu(xy) \geq t' = \min \{\mu(x), \mu(y)\}\end{aligned}$$

olur.

(ii) $x \in G$ ve $\mu(x) = t$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}x \in \mu_t &\Rightarrow x^{-1} \in \mu_t \quad (\mu_t, G \text{ nin alt grubu olduğundan}) \\ &\Rightarrow \mu(x^{-1}) \geq t \\ &\Rightarrow \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)\end{aligned}$$

dir. Böylece (i) ve (ii) den μ , G nin bir fuzzy alt grubudur.

Teorem 3.3.2: μ , G nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda $\forall t \in [0, 1]$ için, μ , G nin bir fuzzy alt grubudur $\Leftrightarrow \mu$ nün boş küme olmayan her bir μ_t seviye alt kümesi G nin bir alt grubudur.

İspat:

($\Rightarrow$) μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. $x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned}x, y \in \mu_t &\Rightarrow \mu(x) \geq t \text{ ve } \mu(y) \geq t \\ &\Rightarrow \mu(xy) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\} \geq t \\ &\Rightarrow xy \in \mu_t\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $\forall x \in \mu_t$ için,
 $\mu(x) \geq t$ ve $\mu(x) = \mu(x^{-1})$ olduğundan $x^{-1} \in \mu_t$ dir. Böylece μ_t , G nin bir alt grubudur.

($\Leftarrow$) Boş olmayan her bir μ_t seviye alt kümesi G nin bir alt grubu olsun.

$x, y \in G$ için $\mu(x) = t'$, $\mu(y) = t''$ ve $t' \geq t''$ olsun. Bu durumda,

$$x \in \mu_{t'}, y \in \mu_{t''} \text{ ve } \mu_{t'} \subseteq \mu_{t''} \Rightarrow x \in \mu_{t''}$$

$$\Rightarrow xy \in \mu_{t''}$$

$$\Rightarrow \mu(xy) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \} = t''$$

olur.

$\mu(x) > \mu(x^{-1})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in \mu_{t'}$ ve $x^{-1} \notin \mu_{t'}$ olur. Bu ise $\mu_{t'}$ nin alt grup olması ile çelişir. Dolayısıyla $\mu(x) \leq \mu(x^{-1})$ dir. Böylece μ , G nin bir fuzzy alt grubudur.

Tanım 3.3.1: μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. $t \leq \mu(e)$ olmak üzere $\forall t \in [0, 1]$ için μ_t alt grubuna μ nün seviye alt grubu denir (Das 1981).

G sonlu bir grup ve μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. μ nün her bir seviye alt grubu G nin bir alt grubudur. Ancak μ nün seviye alt gruplarının hepsi farklı olmayacağından, G nin alt gruplarının sayısı sınırlı iken μ nün seviye alt gruplarının sayısı sınırsızdır. Aşağıdaki teorem bu durumu karakterize etmektedir.

Teorem 3.3.3: G bir grup ve μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. $t' < t''$, $t', t'' \in [0, 1]$ olmak üzere μ nün $\mu_{t'}$ ve $\mu_{t''}$ seviye alt grupları için,
 $\mu_{t'} = \mu_{t''} \Leftrightarrow t' < \mu(x) < t''$ olacak biçimde G nin bir x elemanı yoktur.

İspat :

($\Rightarrow$) $\mu_{t'} = \mu_{t''}$ olsun. $t' < \mu(x) < t''$ olacak biçimde G nin bir x elemanının olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in \mu_{t'}$ ve $x \notin \mu_{t''}$ olup $\mu_{t'} = \mu_{t''}$ olması ile çelişir. Böylece kabulümüz yanlıştır.

($\Leftarrow$) $t' < \mu(x) < t''$ olacak biçimde G nin bir x elemanı olmasın. $t' < t''$ olduğundan $\mu_{t''} \subseteq \mu_{t'}$ dir. $x \in \mu_{t'}$ olsun. Bu durumda $\mu(x) \geq t'$ olup, $t' < \mu(x) < t''$ olamayacağından $\mu(x) \geq t''$ olup $\mu_{t'} \subseteq \mu_{t''}$ dir. Böylece $\mu_{t'} = \mu_{t''}$ olur.

Teorem 3.3.3 ten bir μ fuzzy alt grubunun seviye alt gruplarının farklı olması gerekmediği anlaşılır. Dahası seviye alt grupları bir zincir oluşturur. $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(e)$ olduğundan $t = \mu(e)$ olmak üzere μ_t seviye alt grubu μ nün tüm seviye alt grupları ailesinin en küçük elemanı olur. Eğer,

$\text{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, $t_0 > t_1 > \dots > t_m$ ise μ nün seviye alt gruplarının zinciri,

$$\mu_{t_0} \subseteq \mu_{t_1} \subseteq \dots \subseteq \mu_{t_m} = G$$

dir.

Tanım 3.3.2: μ ve ξ , G nin fuzzy alt grupları, F_μ ve F_ξ sırasıyla μ ve ξ nin seviye alt gruplarının ailesi olsun. Eğer $F_\mu = F_\xi$ ise μ ve ξ fuzzy alt gruplarına denk fuzzy alt gruplar denir.

Lemma 3.3.1: μ ve ξ , G nin fuzzy alt grupları, F_μ ve F_ξ sırasıyla μ ve ξ nin seviye alt gruplarının ailesi olsun. Bu durumda,

$$F_\mu = F_\xi \text{ ve } \text{Im}(\mu) = \text{Im}(\xi) \Rightarrow \mu = \xi$$

dır (Dixit *et al.* 1990).

Teorem 3.3.4: G sınırlı bir grup, G' herhangi bir grup ve $f: G \rightarrow G'$ homomorfizmi örten olsun. μ , G nin $\text{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, $t_0 > t_1 > \dots > t_n$ olacak biçimde fuzzy alt grubu ve μ nün seviye alt gruplarının zinciri,

$$\mu_{t_1} \subseteq \mu_{t_2} \subseteq \dots \subseteq \mu_{t_n} = G$$

ise $f(\mu)$ nün seviye alt gruplarının zinciri,

$$f(\mu_{t_0}) \subseteq f(\mu_{t_1}) \subseteq \dots \subseteq f(\mu_{t_n}) = G'$$

dir (Dixit *et al.* 1990).

3.4 Fuzzy Normal Alt Gruplar

H kümesi G grubunun bir alt grubu olsun. Eğer $\forall x \in H$ ve $\forall g \in G$ için $xgx^{-1} \in H$ ise H ye G nin bir normal alt grubudur denir.

Tanım 3.4.1: μ , G nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için,

(i) $\mu(xy) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$

(iii) $\mu(e) = 1$

(iv) $\mu(xy) = \mu(yx)$

ise μ ye G nin bir fuzzy normal alt grubu denir.

Tanım 3.4.2: μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için,

$$\mu(xy) = \mu(yx)$$

ise μ ye G nin fuzzy normal alt grubu denir (Mukherjee and Bhattacharya 1984).

Tanım 3.4.3: μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Eğer $\forall x, y \in G$ için,

$$\mu(x) = \mu(yxy^{-1})$$

ise μ ye G nin bir fuzzy normal alt grubu denir (Abou-Zaid 1991).

Teorem 3.4.1: μ , G nin bir fuzzy normal alt grubu olsun. Bu durumda $t \leq \mu(e)$ olmak üzere $\forall t \in [0, 1]$ için μ nün μ_t seviye alt grubu G nin bir normal alt grubudur.

İspat: $\forall x \in \mu_t$ ve $\forall g \in G$ için,

$$\mu(xgx^{-1}) = \mu(x) \geq t \Rightarrow xgx^{-1} \in \mu_t$$

olur. Dolayısıyla μ_t , G nin bir normal alt grubudur.

Teorem 3.4.2: μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $\forall t \in [0, 1]$ için,

μ , G nin bir fuzzy normal alt gruptur $\Leftrightarrow \mu$ nün boş olmayan her bir μ_t seviye alt grubu G nin bir normal alt grubudur.

İspat:

$(\Rightarrow)$ μ , G nin bir fuzzy normal alt grubu olsun.

$\forall x \in \mu_t$ ve $\forall g \in G$ için,

$$\mu(xgx^{-1}) = \mu(x) \geq t \Rightarrow xgx^{-1} \in \mu_t$$

dir. Böylece μ_t , G nin bir normal alt grubudur.

$(\Leftarrow)$ $\forall t \in [0, 1]$ için μ nün boş olmayan her bir μ_t seviye alt grubu G nin bir normal alt grubu olsun. $\exists x, y \in G$ için $\mu(xy) > \mu(yx)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\mu(xy) = t' \Rightarrow xy \in \mu_{t'}$ ve $yx \notin \mu_{t'}$ olur. Bu ise $\mu_{t'}$ nün bir normal alt grup olması ile çelişir. Böylece kabulümüz yanlış olup μ bir fuzzy normal alt gruptur.

Teorem 3.4.3: μ , G nin bir fuzzy normal alt grubu olsun. Bu durumda,

$$\mu_e = \{x \in G \mid \mu(x) = \mu(e)\}$$

G nin bir normal alt grubudur (Mukherjee and Bhattacharya 1984).

Eğer μ , G nin bir fuzzy normal alt grubu ve $t_0 > t_1 > \dots > t_m$ olmak üzere, $\text{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$ ise G nin normal alt gruplarının zinciri,

$$\mu_{t_0} \subset \mu_{t_1} \subset \dots \subset \mu_{t_m} = G$$

dir.

Teorem 3.4.4: μ , G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $\forall x, y \in G$ için,

$$(a) \mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y)$$

$$(b) \mu(xyx^{-1}) = \mu(y)$$

$$(c) \mu(xy) = \mu(yx)$$

önergeleri denktir (Sidky and Mishref 1991).

Teorem 3.4.5: G ve H iki grup, $f: G \rightarrow H$ bir homomorfizm, B , H in bir fuzzy normal alt grubu ve $f^{-1}(B) = A$ olsun. Bu durumda $\forall g \in G$ için,

$$\varphi(gA) = f(g)B$$

şeklinde tanımlı $\varphi: G/A \rightarrow H/B$ fonksiyonu bir izomorfizmdir. (Sidky and Mishref 1991).

3.5 Fuzzy Yan Cümleler

H , G grubunun bir alt kümesi olsun. $x \in G$ olmak üzere,

$$xH = \{xh \mid h \in H\}$$

$$Hx = \{hx \mid h \in H\}$$

kümelerine sırasıyla G nin sol ve sağ yan cümlesi denir.

Tanım 3.5.1: μ , G grubunun bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in G$ olmak üzere,

$$x\mu = \{(y_i, \mu(xy_i)) \mid i \in I, y_i \in G\}$$

$$\mu x = \{(y_i, \mu(y_i x)) \mid i \in I, y_i \in G\}$$

şeklinde tanımlı G nin $x\mu$ ve μx fuzzy alt kümelerine sırasıyla G nin fuzzy sol ve fuzzy sağ yan cümlesi denir.

Tanım 3.5.2: μ , G grubunun bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda $x \in G$ olmak üzere $\forall g \in G$ için,

$$(x\mu)(g) = \mu(xg) \text{ ve } (\mu x)(g) = \mu(gx)$$

şeklinde tanımlı G nin $x\mu$ ve μx fuzzy alt kümelerine sırasıyla G nin fuzzy sol ve fuzzy sağ yan cümlesi denir.

Lemma 3.5.1: μ , G nin bir fuzzy alt grubu ise $\forall x, y, g \in G$ için,

- (i) $(x\mu)(g) = \mu(x^{-1}g)$
- (ii) $(\mu x)(g) = \mu(gx^{-1})$
- (iii) $((xy)(\mu))(g) = (x(y\mu))(g)$
- (iv) $(\mu(xy))(g) = ((\mu x)y)(g)$
- (v) $x\mu = \mu \Rightarrow \mu(x) = 1$
- (vi) $x\mu = \mu x$
- (vii) $x\mu x^{-1} = \mu$

dir (Sidky and Mishref 1991).

Klasik küme teorisinde bir grubun herhangi iki sağ (sol) yan cümlesi eşit ya da ayrıktır. Ancak bu sonuç fuzzy kümeler için geçerli değildir. Aşağıdaki örnekte bir grubun fuzzy sağ (sol) yan cümlelerinin eşit ya da ayrık olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 3.5.1: $G = \{e, a, b, ab\}$ Klein-4 grubu ve μ, G nin, $0 < t_2 \leq t_1 < 1$ olmak üzere,

$$\mu(e) = 1, \mu(a) = t_1, \mu(b) = \mu(ab) = t_2$$

şeklinde tanımlı bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda,

$$b\mu = \{(e, t_2), (a, t_2), (b, 1), (ab, t_1)\}$$

$$ab\mu = \{(e, t_2), (a, t_2), (b, t_1), (ab, 1)\}$$

olup $b\mu$ ve $ab\mu$ eşit ya da ayrık değildir.

Teorem 3.5.1: μ, G nin bir fuzzy alt grubu ise $\forall x \in G$ ve $\forall t \in [0, 1]$ için,

$$x\mu_t = (x\mu)_t$$

dir (Sidky and Mishref 1991).

Lemma 3.5.2: μ, G nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $g_1, g_2 \in G$ için,

$$g_1\mu = g_2\mu \Rightarrow \mu(g_1) = \mu(g_2)$$

dir.

İspat: $\forall x \in G$ için,

$$g_1\mu = g_2\mu \Rightarrow g_1\mu(x) = g_2\mu(x)$$

$$\Rightarrow \mu(xg_1^{-1}) = \mu(xg_2^{-1})$$

dir. Sırayla $x = g_1$ ve $x = g_2$ alınırsa,

$$\mu(e) = \mu(g_1g_2^{-1}) \tag{1}$$

$$\mu(e) = \mu(g_2g_1^{-1}) \tag{2}$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$\mu(g_1) = \mu(g_1g_2^{-1}g_2) \geq \min \{\mu(g_1g_2^{-1}), \mu(g_2)\} \tag{1 den}$$

$$= \mu(g_2)$$

$$\mu(g_2) = \mu(g_2g_1^{-1}g_1) \geq \min \{\mu(g_2g_1^{-1}), \mu(g_1)\} \tag{2 den}$$

$$= \mu(g_1)$$

olup $\mu(g_1) = \mu(g_2)$ dir.

Lemma 3.5.3: μ , G nin bir fuzzy alt grubu ve $t \in [0, 1]$ olmak üzere $x, y \in G - \mu_t$ için $x\mu_t = y\mu_t$ olsun. Bu durumda $\mu(x) = \mu(y)$ dir (Sidky and Mishref 1991).

Klasik grup teorisinde H bir G grubunun normal alt grubu ise $\forall x \in G$ için $xH = Hx$ dir. Aşağıdaki teorem bu sonucun fuzzy grup teorisinde de benzer şekilde olduğunu göstermektedir.

Teorem 3.5.2: μ , G grubunun bir fuzzy normal alt grubu ise herhangi $x, g \in G$ için

$$\mu x(xg) = \mu x(gx) = \mu(g)$$

dir.

İspat :

$$\mu x(xg) = \mu x(xgx^{-1}x) = \mu(xgx^{-1}xx^{-1}) = \mu(xgx^{-1}) = \mu(g) \text{ ve}$$

$$\mu x(gx) = \mu x(xx^{-1}gx) = \mu(xx^{-1}gxx^{-1}) = \mu(g) \text{ olduğundan}$$

$$\mu x(xg) = \mu x(gx) = \mu(g) \text{ dir.}$$

μ bir G grubunun fuzzy alt grubu olmak üzere μ nün tüm fuzzy yan cümlelerinin kümesini G_μ ile gösterelim.

Teorem 3.5.3: G_μ cümlesi $\forall x, y \in G$ için,

$$\mu x \circ \mu y = \mu xy$$

şeklinde tanımlı,

$$\circ : G_\mu \rightarrow G_\mu$$

işlemi altında gruptur.

İspat: İlk olarak işlemin iyi tanımlı olduğunu göstermek için

$a, b, c, d \in G$ olmak üzere $\mu a = \mu b$ ve $\mu c = \mu d$ olsun. Bu durumda $\forall g \in G$ için,

$$\mu a(g) = \mu b(g) \Rightarrow \mu(ga^{-1}) = \mu(gb^{-1}) \quad (1)$$

$$\mu c(g) = \mu d(g) \Rightarrow \mu(gc^{-1}) = \mu(gd^{-1}) \quad (2)$$

olur. Ayrıca (1) de $g = acd^{-1}$ alınırsa,

$$\mu(acd^{-1}a^{-1}) = \mu(acd^{-1}b^{-1}) = \mu(cd^{-1}) \quad (3)$$

ve (2) de $g = c$ alınırsa,

$$\mu(cc^{-1}) = \mu(cd^{-1}) = \mu(e) \quad (4)$$

elde edilir.

$g \in R$ için,

$$\begin{aligned} (\mu_a \circ \mu_c)(g) &= \mu_{ac}(g) \\ &= \mu(g(ac)^{-1}) \\ &= \mu(gc^{-1}a^{-1}) \\ &= \mu((gb^{-1}d^{-1})(acb^{-1}d^{-1})^{-1}) \\ &\geq \min \{ \mu(gb^{-1}d^{-1}), \mu(acb^{-1}d^{-1}) \} \quad (\text{Önerme 3.2.2 den}) \\ &= \min \{ \mu(gb^{-1}d^{-1}), \mu(e) \} \quad ((3) \text{ ve } (4) \text{ ten}) \\ &= \mu(gb^{-1}d^{-1}) \\ &= \mu_{bd}(g) \\ &= (\mu_b \circ \mu_d)(g) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\mu_b \circ \mu_d \subseteq \mu_a \circ \mu_c$ olur. Aynı şekilde $\mu_a \circ \mu_c \subseteq \mu_b \circ \mu_d$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla $\mu_a \circ \mu_c = \mu_b \circ \mu_d$ olup “ $\circ$ ” işlemi iyi tanımlıdır.

$\forall x \in G$ için μ_e , “ $\circ$ ” işlemine göre birim eleman, $\mu_{x^{-1}}$, μ_x in tersidir. Ayrıca,

$$\mu_a \circ (\mu_b \circ \mu_c) = \mu_a \circ \mu_{bc} = \mu_{a(bc)} = \mu(ab)c = (\mu_a \circ \mu_b) \circ \mu_c$$

olup “ $\circ$ ” işlemi birleşmelidir. Böylece $(G_\mu, \circ)$ bir gruptur. Bu gruba bölüm grubu ya da faktör grup denir.

3.6 Fuzzy Bölüm Grubu

Teorem 3.6.1: μ , G nin herhangi bir fuzzy alt grubu ve $\tilde{\mu} : R_\mu \rightarrow [0, 1]$, $\forall x \in R$ için,

$$\tilde{\mu}(\mu_x) = \mu(x)$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\tilde{\mu}$ dönüşümü $(G_\mu, \circ)$ grubunun bir fuzzy alt grubudur.

İspat : $\forall \mu_x, \mu_y \in G_\mu$ için,

$$\begin{aligned} (i) \tilde{\mu}(\mu_x \circ \mu_y) &= \tilde{\mu}(\mu_{xy}) \\ &= \mu(xy) \\ &\geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \} \end{aligned}$$

$$= \min \{ \tilde{\mu}(\mu x), \tilde{\mu}(\mu y) \}$$

$$(ii) \tilde{\mu}(\mu x^{-1}) = \mu(x^{-1}) \geq \mu(x) = \tilde{\mu}(\mu x)$$

olur. Böylece (i) ve (ii) den $\tilde{\mu}$, G_μ grubunun bir fuzzy alt grubudur.

Teorem 3.6.2: μ , G nin herhangi bir fuzzy normal alt grubu olsun. Bu durumda Teorem 3.6.1 de tanımlanan $\tilde{\mu}$ fuzzy alt grubu, G_μ grubunun bir fuzzy normal alt grubudur.

İspat: $\forall x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}((\mu x) \circ (\mu y)) &= \tilde{\mu}(\mu xy) = \mu(xy) \\ &= \mu(yx) \\ &= \tilde{\mu}(\mu yx) \\ &= \tilde{\mu}((\mu y) \circ (\mu x)) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\tilde{\mu}$, G_μ grubunun bir fuzzy normal alt grubudur.

Tanım 3.6.1: μ , G nin bir fuzzy normal alt grubu olsun. Bu durumda G_μ nün $\forall x \in G$ için,

$$\tilde{\mu}(\mu x) = \mu(x)$$

şeklinde tanımlı $\tilde{\mu}$ fuzzy alt grubuna fuzzy bölüm grubu denir.

Teorem 3.6.3: μ , G nin bir fuzzy normal alt grubu ve $\forall x \in G$ için,

$$\theta : G \rightarrow G_\mu$$

dönüşümü $\theta(x) = \mu x$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda,

(i) θ dönüşümü bir homomorfizmdir

(ii) $\text{Ker } \theta = \{ x \in G \mid \mu(x) = \mu(e) \}$

dir.

İspat:

(i) $x, y \in G$ için,

$$\theta(xy) = \mu xy = \mu x \circ \mu y = \theta(x) \circ \theta(y)$$

olur. Böylece θ bir homomorfizmdir.

(ii) $H = \{h \in G \mid \mu h = \mu e\}$ olsun. Bu durumda,

$$h \in \text{Ker } \theta \Leftrightarrow \theta(h) = \mu e$$

$$\Leftrightarrow \mu h = \mu e$$

$$\Leftrightarrow h \in H$$

olur. Böylece $\text{Ker } \theta = H$ dir. Ayrıca $\mu_e = \{x \in G \mid \mu(x) = \mu(e)\}$ olmak üzere $\forall x \in G$ için,

$$h \in H \Leftrightarrow \mu h(x) = \mu e(x)$$

$$\Leftrightarrow \mu(xh^{-1}) = \mu(x)$$

$$\Leftrightarrow \mu(h^{-1}) = \mu(e) \quad (\text{Önerme 3.2.4 ten})$$

$$\Leftrightarrow \mu(h) = \mu(e)$$

$$\Leftrightarrow h \in \mu_e$$

olur. Böylece $\text{Ker } \theta = \mu_e$ dir.

Teorem 3.6.4: μ , G grubunun bir fuzzy normal alt grubu ve $H = \{h \in G \mid h\mu = e\mu\}$ olsun. Bu durumda,

$$G/H = G / \mu_e = G/\mu$$

dür (Mukherjee and Bhattacharya 1986).

4. FUZZY HALKALAR

4.1 Fuzzy Alt Halka ve Fuzzy İdealler

Bu bölümde fuzzy alt halka, fuzzy ideal, fuzzy seviye alt halka ve fuzzy seviye idealleri incelenecek, halkalar üzerinde fuzzy yan cümle tanımı yapılarak fuzzy bölüm halkası oluşturulacaktır. Ayrıca fuzzy asal idealler ve fuzzy maksimal ideal tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1: R bir halka ve μ , R nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in R$ için,

(i) $\mu(x - y) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\mu(xy) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$

ise μ ye R nin bir fuzzy alt halkası denir.

Tanım 4.1.2: μ , R nin fuzzy alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in R$ için,

(i) $\mu(x - y) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\mu(xy) \geq \mu(x)$

ise μ ye R halkasının bir fuzzy sağ ideali, (ii) yerine

(iii) $\mu(xy) \geq \mu(y)$

ise μ ye R halkasının bir fuzzy sol ideali denir. Eğer μ , R halkasının hem sol hem sağ ideali ise μ ye R halkasının fuzzy ideali denir.

Tanım 4.1.3: μ , R halkasının fuzzy alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in R$ için,

(i) $\mu(x - y) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\}$

(ii) $\mu(xy) \geq \max \{\mu(x), \mu(y)\}$

ise μ ye R halkasının fuzzy ideali denir.

Lemma 4.1.1: μ , R halkasının fuzzy ideali olsun. Bu durumda 0_R , R nin toplamaya göre birim elemanı olmak üzere $\forall x \in R$ için,

(i) $\mu(-x) = \mu(x)$

(ii) $\mu(0_R) \geq \mu(x)$

dir (Dixit *et al.* 1992).

Lemma 4.1.2: μ , R halkasının fuzzy ideali olsun. Eğer $x, y \in R$ için $\mu(x) < \mu(y)$ ise,

$$\mu(x - y) = \mu(x) = \mu(y - x)$$

dir.

İspat : $x, y \in R$ için $\mu(x) < \mu(y)$ olsun.

$$\mu(x - y) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$$

$$= \mu(x)$$

$$\mu(x) = \mu(x - y - (-y)) \geq \min \{ \mu(x - y), \mu(-y) \}$$

$$= \min \{ \mu(x - y), \mu(y) \} \quad (\mu(x) < \mu(y))$$

$$= \mu(x - y)$$

olur. Böylece $\mu(x - y) = \mu(x)$ dir. Benzer şekilde $\mu(x) = \mu(y - x)$ olur. Böylece

$$\mu(x - y) = \mu(x) = \mu(y - x) \text{ dir.}$$

Lemma 4.1.3: μ bir R halkasının fuzzy alt halkası olsun. Eğer $x, y \in R$ için $\mu(x) < \mu(y)$ ise,

$$\mu(x - y) = \mu(x) = \mu(y - x)$$

dir (Dixit *et al.* 1992).

Teorem 4.1.1: μ , R nin bir fuzzy ideali olsun. $x, y \in R$ olmak üzere,

$$\mu(x - y) = \mu(0_R) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)$$

dir.

İspat : $x, y \in R$ olmak üzere $\mu(x - y) = \mu(0_R)$ olsun.

$$\mu(x) = \mu(x - y - (-y)) \geq \min \{ \mu(x - y), \mu(-y) \}$$

$$= \min \{ \mu(0_R), \mu(y) \}$$

$$= \mu(y)$$

$$\mu(y) = \mu(y - x - (-x)) \geq \min \{ \mu(y - x), \mu(-x) \}$$

$$= \min \{ \mu(x - y), \mu(x) \}$$

$$= \min \{ \mu(0_R), \mu(x) \}$$

$$= \mu(x)$$

olur. Böylece $\mu(x) = \mu(y)$ dir.

Aşağıdaki örnekte bir R halkasının fuzzy alt halkasının R nin bir fuzzy ideali olmayabileceği gösterilmiştir.

Örnek 4.1.1: R reel sayıların bilinen anlamda toplama ve çarpma işlemi altında halkası olsun. R nin bir μ fuzzy alt kümesi $t_0, t_1 \in [0, 1]$ ve $t_0 > t_1$ olmak üzere,

$$\mu(x) = \begin{cases} t_0 & , x \text{ rasyonel ise} \\ t_1 & , x \text{ irrasyonel ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda x rasyonel ve y irrasyonel ise xy irrasyonel olup $\mu(xy) = t_1$, $\mu(x) = t_0$, $\mu(y) = t_1$ dir. Dolayısıyla $t_1 = \mu(xy) \geq \min \{\mu(x), \mu(y)\} = t_1$ ancak $\mu(xy) \not\geq \max \{\mu(x), \mu(y)\} = t_0$ olup μ , R nin bir fuzzy alt halkasıdır ancak fuzzy ideali değildir.

Önerme 4.1.1: R halkasının fuzzy alt halkalarının herhangi bir ailesinin kesişimi R nin bir fuzzy alt halkasıdır (Dixit *et al.* 1992).

Önerme 4.1.2: μ bir R halkasının fuzzy alt halkası, η ise fuzzy ideali olsun. Bu durumda $\mu \cap \eta$, R nin $\{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0_R)\}$ alt halkasının bir fuzzy idealidir.

Teorem 4.1.2: μ ve η , R halkasının fuzzy idealleri olsun. Bu durumda $\mu \cap \eta$ de R halkasının bir fuzzy idealidir.

İspat : $\forall x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned} (\mu \cap \eta)(x - y) &= \min \{\mu(x - y), \eta(x - y)\} \\ &\geq \min \{\min(\mu(x), \mu(y)), \min(\eta(x), \eta(y))\} \\ &= \min \{(\mu \cap \eta)(x), (\mu \cap \eta)(y)\} \\ (\mu \cap \eta)(xy) &= \min \{\mu(xy), \eta(xy)\} \\ &\geq \min \{\mu(x), \eta(y)\} \\ &= (\mu \cap \eta)(xy) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\mu \cap \eta$, R halkasının bir fuzzy idealidir.

Teorem 4.1.3: μ , R nin bir fuzzy sağ ideali, η ise fuzzy sol ideali olsun. Bu durumda,

$$\mu\eta \subseteq \mu \cap \eta$$

dür.

İspat: Eğer $x \in R$ için $\mu\eta(x) = 0$ ise sonuç açıktır.

$\mu\eta(x) \neq 0$ olsun. μ fuzzy sağ, η ise fuzzy sol ideal olduğundan $\forall y, z \in R$ için $\mu(y) \leq \mu(yz)$ ve $\eta(z) \leq \eta(yz)$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \mu\eta(x) &= \sup_{x=yz} \{ \min \{ \mu(y), \eta(z) \} \} \\ &\leq \min \{ \mu(yz), \eta(yz) \} \\ &= \min \{ \mu(x), \eta(x) \} \\ &= (\mu \cap \eta)(x) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\mu\eta \subseteq \mu \cap \eta$ dir.

Teorem 4.1.4: $\forall i \in I$ için $\{\mu^i\}$, R halkasının fuzzy ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,

$$\mu = \bigcap_{i \in I} \mu^i$$

R nin bir fuzzy idealidir.

İspat: $x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned} \mu(x - y) &= \inf_{i \in I} \{ \mu^i(x - y) \} \\ &\geq \inf_{i \in I} \{ \min \{ \mu^i(x), \mu^i(y) \} \} \\ &\geq \min \{ \inf_{i \in I} \mu^i(x), \inf_{i \in I} \mu^i(y) \} \\ &= \min \{ \mu(x), \mu(y) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(xy) &= \inf_{i \in I} \{ \mu^i(xy) \} \\ &\geq \inf_{i \in I} \{ \max \{ \mu^i(x), \mu^i(y) \} \} \\ &\geq \max \{ \inf_{i \in I} \mu^i(x), \inf_{i \in I} \mu^i(y) \} \quad (*) \\ &= \max \{ \mu(x), \mu(y) \} \end{aligned}$$

olur. Böylece μ , R nin bir fuzzy idealidir. Burada (*) doğrudur, çünkü $\forall i \in I$ için,

$$\mu^i(x) \geq \inf_{i \in I} \{ \mu^i(xy) \} \text{ ve } \mu^i(y) \geq \inf_{i \in I} \{ \mu^i(xy) \}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \max \{ \mu^i(x), \mu^i(y) \} \geq \max \{ \inf_{i \in I} \mu^i(x), \inf_{i \in I} \mu^i(y) \} \\ &\Rightarrow \inf_{i \in I} \{ \max \{ \mu^i(x), \mu^i(y) \} \} \geq \max \{ \inf_{i \in I} \mu^i(x), \inf_{i \in I} \mu^i(y) \} \end{aligned}$$

dır.

Klasik halka teorisinden bilindiği gibi A ve B bir R halkasının iki ideali ise $A \cup B$ nin de R nin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq B$ veya $B \subseteq A$ olmasıdır. Ancak bu sonuç fuzzy halka teorisine genişletilememektedir. Birleşimleri fuzzy ideal olan ancak birbirini içermeyen fuzzy idealler mevcut olabilir. Genel olarak iki fuzzy idealin birleşiminin fuzzy ideal olup olmadığı, birleşimlerinin görüntü kümesine bağlıdır.

Aşağıdaki örnekte iki fuzzy idealin birleşiminin fuzzy ideal olmayabileceği gösterilmektedir.

Örnek 4.1.2: Z mod 6 da tamsayıların halkası olsun.

μ ve η : $Z \rightarrow [0, 1]$ fuzzy alt kümeleri $t_i \in [0, 1]$, $0 \leq i \leq 4$ için,

$t_4 < t_3 < t_2 < t_1 < t_0$ olmak üzere,

$\mu(0) = t_0$

$\mu(1) = \mu(2) = \mu(4) = \mu(5) = t_3$

$\mu(3) = t_2$

$\eta(0) = t_1$

$\eta(1) = \eta(3) = \eta(5) = t_4$

$\eta(2) = \eta(4) = t_2$

olarak tanımlansın.

Bu durumda μ ve η , Z nin fuzzy idealleridir, ancak $\mu \cup \eta$, Z nin bir fuzzy ideali değildir.

Sonuç 4.1.1: Eğer μ , R halkasının sabit bir fuzzy ideali ise bu durumda μ fuzzy ideali $A \not\subseteq B$ ve $B \not\subseteq A$ olmak üzere R nin A ve B fuzzy ideallerinin birleşimi olarak ifade edilemez (Dixit *et al.* 1991).

Aşağıdaki örnekte birbirini içermeyen iki fuzzy idealin birleşiminin bir fuzzy ideal olabileceği gösterilmektedir.

Örnek 4.1.3: R herhangi bir halka ve 0_R , R nin toplamaya göre birim elemanı olsun. μ ve η : $R \rightarrow [0, 1]$ fuzzy alt kümeleri $t_i \in [0, 1]$, $0 \leq i \leq 3$ için $t_3 < t_2 < t_1 < t_0$ olmak üzere,

$$\mu(x) = \begin{cases} t_0 & , x = 0_R \text{ ise} \\ t_1 & , x \neq 0_R \text{ ise} \end{cases}$$

$$\eta(x) = \begin{cases} t_1 & , x = 0_R \text{ ise} \\ t_2 & , x \neq 0_R \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\mu \not\subseteq \eta$ ve $\eta \not\subseteq \mu$ olup μ , η ve $\mu \cup \eta$, R nin fuzzy idealleridir.

Teorem 4.1.5: R halkasının μ fuzzy ideali için $t \in]0, 1]$, $\text{Im}(\mu) = \{0, t\}$ olsun. Bu durumda η ve θ , R nin fuzzy idealleri olmak üzere,

$$\mu = \eta \cup \theta \Rightarrow \eta \subseteq \theta \text{ veya } \theta \subseteq \eta$$

dir.

İspat : $\eta \not\subseteq \theta$ ve $\theta \not\subseteq \eta$ ise $\mu \neq \eta \cup \theta$ olduğunu gösterelim. $x, y \in R$ için,

$\eta(x) > \theta(x)$ ve $\theta(y) > \eta(y)$ olsun. $\mu = \eta \cup \theta$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\mu(x) = \eta(x) > \theta(x) \geq 0 \text{ ve } \mu(y) = \theta(y) > \eta(y) \geq 0 \quad (a)$$

olur. Ayrıca, $\text{Im}(\mu) = \{0, t\}$ ve (a) dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \eta(x) = t \\ \mu(y) &= \theta(y) = t \\ \mu(x - y) &= t \end{aligned} \quad (b)$$

olur. Bu durumda,

$$t = \eta(x) > \eta(y) \text{ ve } t = \theta(y) > \theta(x)$$

dir. Böylece Lemma 4.1.2 den,

$$\eta(x - y) = \eta(y) < t \text{ ve } \theta(x - y) = \theta(x) < t$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\mu(x - y) &= \max \{ \eta(x - y), \theta(x - y) \} \\ &= \max \{ \eta(y), \theta(x) \} \\ &< t\end{aligned}$$

olur. Bu ise (b) ile çelişir. Kabulümüz yanlıştır.

Teorem 4.1.6: $3 \leq |\text{Im}(\mu)| < \infty$ olmak üzere μ , R halkasının fuzzy ideali ise bu durumda $\mu \neq \eta$, $\mu \neq \theta$ ve $\eta \neq \theta$ olmak üzere μ fuzzy ideali R nin η ve θ fuzzy ideallerinin $\eta \cup \theta$ birleşimi olarak ifade edilebilir.

İspat : $\text{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, $2 \leq m \leq \infty$ ve $t_0 > t_1 > \dots > t_m$ olmak üzere μ , R nin bir fuzzy ideali olsun. η ve $\theta : R \rightarrow [0, 1]$ fuzzy alt kümeleri $s_1, s_2 \in]0, 1[$ ve $1 \geq t_0 > s_1 > t_1 > s_2 > t_2 > t_3 > \dots > t_m$ olmak üzere $\forall x \in R$ için,

$$\begin{aligned}\eta(x) &= \begin{cases} s_1 & , \mu(x) = t_0 \text{ ise} \\ \mu(x) & , \mu(x) \neq t_0 \text{ ise} \end{cases} \\ \theta(x) &= \begin{cases} s_2 & , \mu(x) = t_1 \text{ ise} \\ \mu(x) & , \mu(x) \neq t_1 \text{ ise} \end{cases}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda η ve θ , R nin fuzzy idealleridir ve $\eta \neq \theta$, $\mu \neq \eta$, $\mu \neq \theta$, $\mu = \eta \cup \theta$ dır.

Sonuç 4.1.2: $\mu, t \in]0, 1[$ için $\text{Im}(\mu) = \{1, t\}$ olmak üzere bir R halkasının fuzzy ideali olsun. Bu durumda $\mu \neq \eta$, $\mu \neq \theta$ ve $\eta \neq \theta$ olmak üzere μ fuzzy ideali, R nin herhangi η ve θ fuzzy ideallerinin birleşimi olarak ifade edilebilir (Dixit *et al.* 1991).

Teorem 4.1.7: R ve R' iki halka, $f: R \rightarrow R'$ bir örten homomorfizm ve μ ve ξ , R nin herhangi fuzzy idealleri olsunlar. Bu durumda,

- (i) $f(\mu + \xi) = f(\mu) + f(\xi)$
 - (ii) $f(\mu\xi) = f(\mu)f(\xi)$
 - (iii) $f(\mu \cap \xi) \subseteq f(\mu) \cap f(\xi)$ (μ veya ξ , f -invariant ise eşitlik sağlanır)
- dir (Kumar 1992b).

Teorem 4.1.8: R ve R' iki halka, $f: R \rightarrow R'$ bir homomorfizm ve μ , R nin, η ise R' nün bir fuzzy ideali olsun. Eğer f birebir ve örten ise,

- (i) $f(\mu)$, R' nün bir fuzzy idealidir
- (ii) $f^{-1}(\eta)$, R nin bir fuzzy idealidir.

İspat :

- (i) $x', y' \in R'$ için,

$$\begin{aligned}
 f(\mu)(x' - y') &= \sup_{f(z)=x'-y'} \mu(z) \\
 &\geq \sup_{\substack{f(x)=x' \\ f(y)=y'}} \mu(x - y) \\
 &= \sup_{f(x)=x'} \sup_{f(y)=y'} \{\min \{\mu(x), \mu(y)\}\} \\
 &= \min \left\{ \sup_{f(x)=x'} \mu(x), \sup_{f(y)=y'} \mu(y) \right\} \\
 &= \min \{f(\mu)(x), f(\mu)(y)\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(\mu)(xy) &= \sup_{f(z)=x'y'} \mu(z) \\
 &\geq \sup_{\substack{f(x)=x' \\ f(y)=y'}} \mu(xy) \\
 &= \sup_{f(x)=x'} \sup_{f(y)=y'} \{\max \{\mu(x), \mu(y)\}\} \\
 &= \max \left\{ \sup_{f(x)=x'} \mu(x), \sup_{f(y)=y'} \mu(y) \right\} \\
 &= \max \{f(\mu)(x), f(\mu)(y)\}
 \end{aligned}$$

olur. Böylece $f(\mu)$, R' nün bir fuzzy idealidir.

(ii) $x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned}
 f^{-1}(\eta)(x - y) &= \eta(f(x - y)) \\
 &= \eta(f(x) - f(y)) \\
 &\geq \min \{ \eta(f(x)), \eta(f(y)) \} \\
 &= \min \{ f^{-1}(\eta)(x), f^{-1}(\eta)(y) \} \\
 f^{-1}(\eta)(xy) &= \eta(f(xy)) \\
 &= \eta(f(x)f(y)) \\
 &\geq \max \{ \eta(f(x)), \eta(f(y)) \} \\
 &= \max \{ f^{-1}(\eta)(x), f^{-1}(\eta)(y) \}
 \end{aligned}$$

olur. Böylece $f^{-1}(\eta)$, R nin bir fuzzy idealidir.

Teorem 4.1.9: R ve R' iki halka, $f : R \rightarrow R'$ bir homomorfizm olsun. Bu durumda,

- (i) μ ve θ , R nin fuzzy idealleri olmak üzere $f(\mu)f(\theta) \subseteq f(\mu\theta)$
 - (ii) η ve ξ , R' nün fuzzy idealleri olmak üzere $f^{-1}(\eta)f^{-1}(\xi) \subseteq f^{-1}(\eta\xi)$
- dır.

İspat :

(i) $y \in R'$, $\alpha = (f(\mu)f(\theta))(y)$ ve $\beta = (f(\mu\theta))(y)$ olsun.

Eğer $\forall y_1, y_2 \in R'$ için $y \neq y_1 y_2$ ise $\alpha = 0 \leq \beta$ dir.

$y_1, y_2 \in R'$ olmak üzere $y = y_1 y_2$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
 \alpha &= (f(\mu)f(\theta))(y) \\
 &= \sup_{y=y_1 y_2} \{ \min \{ (f(\mu))(y_1), (f(\theta))(y_2) \} \} \\
 &= \sup_{y=y_1 y_2} \{ \min \{ \sup_{x \in f^{-1}(y_1)} \mu(x), \sup_{x \in f^{-1}(y_2)} \theta(x) \} \}
 \end{aligned}$$

dir. Böylece herhangi $x_1 \in f^{-1}(y_1)$ ve $x_2 \in f^{-1}(y_2)$ için,

$$\begin{aligned}
 \alpha - \varepsilon &< \min \{ \mu(x_1), \theta(x_2) \} \\
 &\leq (\mu\theta)(x_1 x_2) \quad (f(x_1 x_2) = y_1 y_2 = y) \\
 &\leq \sup_{x \in f^{-1}(y)} (\mu\theta)(x) \\
 &= (f(\mu\theta))(y) = \beta
 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $\alpha \leq \beta$ dir.

(ii) $x \in R$, $\omega = (f^{-1}(\eta)f^{-1}(\xi))(x)$ ve $\gamma = (f^{-1}(\eta\xi))(x)$ olsun.

Eğer $\forall x_1, x_2 \in R$ için $x \neq x_1x_2$ ise $\omega = 0 \leq \gamma$ dır.

$x_1, x_2 \in R$ olmak üzere $x = x_1x_2$ ve $\delta > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\omega &= (f^{-1}(\eta)f^{-1}(\xi))(x) = \sup_{x=x_1x_2} \{ \min \{ (f^{-1}(\eta))(x_1), (f^{-1}(\xi))(x_2) \} \} \\ &= \sup_{x=x_1x_2} \{ \min \{ \eta(f(x_1)), \xi(f(x_2)) \} \}\end{aligned}$$

dir. Böylece $x = x_1x_2$ olmak üzere $x_1, x_2 \in R$ için,

$$\begin{aligned}\omega - \delta &< \min \{ \eta(f(x_1)), \xi(f(x_2)) \} \quad (f(x) = f(x_1)f(x_2)) \\ &\leq (\eta\xi)(f(x)) \\ &= (f^{-1}(\eta\xi))(x) = \gamma\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $\delta > 0$ keyfi olduğundan $\omega \leq \gamma$ dır.

4.2 Fuzzy Seviye Alt Halkaları ve Fuzzy Seviye İdealleri

Lemma 4.2.1: μ bir R halkasının fuzzy alt halkası olsun. Bu durumda $t \leq \mu(0_R)$ olmak üzere her bir μ_t seviye alt kümesi R nin bir alt halkasıdır (Dixit *et al.* 1992).

Teorem 4.2.1: μ bir R halkasının fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda, μ , R nin bir fuzzy alt halkasıdır $\Leftrightarrow t \in \text{Im}(\mu)$ olmak üzere her bir μ_t seviye alt kümesi R nin bir alt halkasıdır (Dixit *et al.* 1992).

Teorem 4.2.2: μ bir R halkasının fuzzy sol (sağ) ideali olsun. Bu durumda $0 \leq t \leq \mu(0_R)$ olmak üzere μ_t seviye alt kümeleri R nin sol (sağ) idealleridir.

İspat : $0 \leq t \leq \mu(0_R)$ olsun.

$$\begin{aligned}(i) \mu_t &= \{x \mid \mu(x) \geq t\} \Rightarrow 0_R \in \mu_t \\ &\Rightarrow \mu_t \neq \emptyset \text{ dir.}\end{aligned}$$

(ii) μ bir fuzzy sol (sağ) ideal olduğundan,
 $\mu(x - y) \geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \} \geq t \Rightarrow x - y \in \mu_t$ dir.

$r \in R$ olsun. $\forall x \in R$ için,

$$\mu(rx) \geq \mu(x) \geq t \Rightarrow rx \in \mu_t \quad (\mu(xr) \geq \mu(x) \geq t \Rightarrow xr \in \mu_t)$$

dir. Böylece (i) ve (ii) den μ_t , R nin bir sol (sağ) idealidir.

Teorem 4.2.3: μ bir R halkasının fuzzy alt kümesi olsun. Eğer $\forall t \in \text{Im}(\mu)$ için,

(i) μ_t , R nin bir sol ideali $\Rightarrow \mu$, R nin bir fuzzy sol ideali

(ii) μ_t , R nin bir sağ ideali $\Rightarrow \mu$, R nin bir fuzzy sağ ideali

dir.

İspat :

(i) $\forall t \in \text{Im}(\mu)$ için μ_t , R nin bir sol ideali olsun. Bu durumda $\forall t \in \text{Im}(\mu)$ için $0_R \in \mu_t$ dir. Dolayısıyla $\mu(0_R) \geq t$ dir.

$x, y \in R$ ve $t, s \in \text{Im}(\mu)$ için $\mu(x) = t, \mu(y) = s$ olsun. Genelliği bozmadan $s \geq t$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\mu(y) = s \geq t \Rightarrow x, y \in \mu_t$$

olur. μ_t , R nin bir sol ideali olduğundan $x - y \in \mu_t$ dir. Bu nedenle,

$$\mu(x - y) \geq t = \min \{\mu(x), \mu(y)\}$$

dir. $y \in \mu_s$ ve μ_s , R nin bir sol ideali olduğundan $xy \in \mu_s$ olur. Dolayısıyla,

$$\mu(xy) \geq s = \mu(y)$$

olur. Böylece μ , R nin bir fuzzy sol idealidir.

(ii) Benzer şekilde ispatlanır.

Lemma 4.2.2: μ bir R halkasının fuzzy sol (sağ) ideali ve $t, s \in \text{Im}(\mu)$ olsun.

Bu durumda,

$$\mu_t = \mu_s \Leftrightarrow t = s$$

dir.

İspat :

($\Leftarrow$) $t = s$ ise $\mu_t = \mu_s$ olur.

($\Rightarrow$) $\mu_t = \mu_s$ olsun. $t \in \text{Im}(\mu)$ olduğundan $\mu(x) = t$ olacak biçimde $\exists x \in R$ vardır. Bu durumda $x \in \mu_s$ olup böylece $t = \mu(x) \geq s$ olur. Benzer şekilde $s \geq t$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla $t = s$ dir.

Lemma 4.2.3: A bir R halkasının sol (sağ) ideali olsun. Bu durumda $\exists t \in]0,1]$ için R nin $\mu_t = A$ olacak biçimde bir μ fuzzy sol (sağ) ideali vardır.

İspat : $t \in]0, 1]$ ve R nin bir μ fuzzy alt kümesi

$$\mu(x) = \begin{cases} t & , x \in A \text{ ise} \\ 0 & , x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda μ , R nin bir fuzzy sol (sağ) ideali ve $A = \mu_t$ dir.

Tanım 4.2.1: μ bir R halkasının fuzzy alt halkası ve $0 \leq t \leq \mu(0_R)$ olsun. Bu durumda μ_t alt halkasına μ nün bir seviye alt halkası denir.

μ bir R halkasının fuzzy alt halkası olsun. Eğer,

$\text{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, $t_0 > t_1 > \dots > t_m$ ise μ nün seviye alt halkalarının zinciri,

$$\mu_{t_0} \subset \mu_{t_1} \subset \dots \subset \mu_{t_m} = R$$

dir.

Tanım 4.2.2: μ , R nin bir fuzzy sol (sağ) ideali ve $t \in [0, 1]$ olsun. Eğer μ_t , R nin bir sol (sağ) ideali ise bu durumda μ_t ye R nin bir seviye sol (sağ) ideali denir.

Tanım 4.2.3: μ bir R halkasının herhangi bir fuzzy ideali olsun. $t \in [0, 1]$ ve $t \leq \mu(0_R)$ olmak üzere μ_t ideallerine μ nün seviye idealleri denir.

Lemma 4.2.4: A bir R halkasının fuzzy sol (sağ) ideali olsun. Bu durumda,

$$A_0 = \{x \in R \mid A(x) = A(0_R)\}$$

kümesi R nin bir sol (sağ) idealidir (Malik and Mordeson 1990).

Teorem 4.2.4: Eğer μ bir R halkasının herhangi bir fuzzy ideali ise $s < t$ olmak üzere, μ nün μ_t ve μ_s seviye idealleri eşittir $\Leftrightarrow s \leq \mu(x) < t$ olacak biçimde R nin bir x elemanı yoktur (Kumar 1992a).

Teorem 4.2.4 ten bir μ fuzzy idealinin seviye ideallerinin farklı olması gerekmediği anlaşılr. Dahası seviye idealleri bir zincir oluşturur. $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0_R)$ olduğundan $t = \mu(0_R)$ olmak üzere μ_t seviye ideali μ nün tüm seviye ideallerinin ailesinin en küçük elemanı olur. Eğer,

$\text{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, $t_0 > t_1 > \dots > t_m$ ise μ nün seviye ideallerinin zinciri,

$$\mu_{t_0} \subset \mu_{t_1} \subset \dots \subset \mu_{t_m} = R$$

dir.

Teorem 4.2.5: μ bir R halkasının fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda, μ , R nin bir fuzzy idealidir $\Leftrightarrow t \in \text{Im}(\mu)$ olmak üzere her bir μ_t seviye alt kümesi R nin bir idealidir (Dixit *et al.* 1992).

Teorem 4.2.6: R bir halka, $\mathcal{J}(a) = \{A \mid A, R \text{ nin bir ideali, } a \in A\}$ ve μ , R nin bir fuzzy ideali olsun. Bu durumda $x, y \in R$ için,

- (i) $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}(y) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)$ dir
- (ii) $\mathcal{J}(x) \subsetneq \mathcal{J}(y) \Rightarrow \mu(x) \leq \mu(y)$ dir.

İspat :

(i) $x, y \in R$ için $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}(y)$ olsun. $\mu(x) > \mu(y)$ olduğunu kabul edelim.

$$\mu(x) = t \Rightarrow x \in \mu_t \text{ ve } y \notin \mu_t$$

$$\Rightarrow \mu_t \in \mathcal{J}(x) \text{ ve } \mu_t \notin \mathcal{J}(y)$$

olur. Bu ise $\mathcal{J}(x) = \mathcal{J}(y)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

(ii) $x, y \in R$ için $\mathcal{J}(x) \subsetneq \mathcal{J}(y)$ olsun. Bu durumda

$$\mu(x) = t \Rightarrow x \in \mu_t$$

$$\Rightarrow \mu_t \in \mathcal{J}(x)$$

$$\Rightarrow \mu_t \in \mathcal{J}(y)$$

$$\Rightarrow y \in \mu_t \Rightarrow \mu(y) \geq t$$

dir. Böylece $\mu(x) \leq \mu(y)$ dir.

Teorem 4.2.7: R ve R' herhangi iki halka ve $f: R \rightarrow R'$ homomorfizmi örten olsun.

μ , R nin $\text{Im}(\mu) = \{t_0, t_1, \dots, t_m\}$, $t_0 > t_1 > \dots > t_m$ olacak biçimde bir f -invariant fuzzy ideali, η ise R' nün $\text{Im}(\eta) = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k\}$, $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_k$ olacak biçimde bir fuzzy ideali olsun. Bu durumda,

(i) Eğer η nün seviye ideallerinin zinciri,

$$\eta_{\alpha_0} \subset \eta_{\alpha_1} \subset \dots \subset \eta_{\alpha_k} = R'$$

ise $f^{-1}(\eta)$ nün seviye ideallerinin zinciri,

$$f^{-1}(\eta_{\alpha_0}) \subset f^{-1}(\eta_{\alpha_1}) \subset \dots \subset f^{-1}(\eta_{\alpha_k}) = R$$

olur.

(ii) Eğer μ nün seviye ideallerinin zinciri,

$$\mu_{t_1} \subset \mu_{t_2} \subset \dots \subset \mu_{t_m} = R$$

ise $f(\mu)$ nün seviye ideallerinin zinciri,

$$f(\mu_{t_0}) \subseteq f(\mu_{t_1}) \subseteq \dots \subseteq f(\mu_{t_m}) = R'$$

olur.

İspat :

(i) $\eta(f(x)) = (f^{-1}(\eta))(x)$ olduğundan $\text{Im}(\eta) = \text{Im}(f^{-1}(\eta))$ dür. Ayrıca,

$$x \in (f^{-1}(\eta))_{\alpha_i} \Leftrightarrow (f^{-1}(\eta))(x) \geq \alpha_i$$

$$\Leftrightarrow \eta(f(x)) \geq \alpha_i$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in \eta_{\alpha_i}$$

$$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(\eta_{\alpha_i})$$

oldüğundan,

$(f^{-1}(\eta))_{\alpha_i} = f^{-1}(\eta_{\alpha_i})$ olur. Böylece $f^{-1}(\eta)$ nün seviye ideallerinin zinciri,

$$f^{-1}(\eta_{\alpha_0}) \subset f^{-1}(\eta_{\alpha_1}) \subset \dots \subset f^{-1}(\eta_{\alpha_k}) = R$$

dir.

(ii) Açıkça $\text{Im}(f(\mu)) \subseteq \text{Im}(\mu)$ dür. $(f(\mu))_{t_i} = f(\mu_{t_i})$ olduğunu göstermek için,

$y \in (f(\mu))_{t_i}$ olsun. Bu durumda,

$t_i \leq (f(\mu))(y) = \sup_{z \in f^{-1}(y)} \mu(z)$ dir. Dolayısıyla $\exists x \in f^{-1}(y)$ için $t_i \leq \mu(x)$ dir.

Böylece $x \in \mu_{t_i}$ olup $y \in f(x) \in f(\mu_{t_i}) \Rightarrow (f(\mu))_{t_i} \subset f(\mu_{t_i})$ olur.

Sonuç olarak $(f(\mu))_{t_i} = f(\mu_{t_i})$ dir. Böylece $f(\mu)$ nün seviye ideallerinin zinciri,

$$f(\mu_{t_0}) \subseteq f(\mu_{t_1}) \subseteq \dots \subseteq f(\mu_{t_m}) = R'$$

dir.

4.3 Halkaların Fuzzy Yan Cümleleri

R bir halka, 0_R , R nin toplamaya göre birim elemanı ve μ , R nin bir fuzzy alt kümesi olmak üzere,

$$\mu_0 = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0_R)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda R/μ_0 bölüm cümlesi,

$$R/\mu_0 = \{\mu_0 + x \mid x \in R\}$$

dir.

Teorem 4.3.1:

(i) Bir $\varphi : R/\mu_0 \rightarrow [0,1]$ dönüşümü $\forall x \in R$ için $\varphi(\mu_0 + x) = \mu(x)$ şeklinde tanımlansın.

Bu durumda φ iyi tanımlıdır ve R/μ_0 ın bir fuzzy idealidir.

(ii) Eğer A , R nin bir ideali ve $r \in A$ için $\eta(A + r) = \eta(A)$ olmak üzere η , R/A bölüm halkasının bir fuzzy ideali ise bu durumda (i) de $\mu_0 = A$ ve $\varphi = \eta$ olacak biçimde R nin bir μ fuzzy ideali vardır.

İspat :

(i) φ nin iyi tanımlı olduğunu göstermek için $\exists x, y \in R$ için $\mu_0 + x = \mu_0 + y$ olsun. Bu durumda,

$$x - y \in \mu_0 \Rightarrow \mu(x - y) = \mu(0_R) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)$$

$$\Rightarrow \varphi(\mu_0 + x) = \varphi(\mu_0 + y)$$

olur. Böylece φ iyi tanımlıdır.

$x, y \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
\varphi((\mu_0 + x) + (\mu_0 + y)^{-1}) &= \varphi((\mu_0 + x) + (\mu_0 - y)) \\
&= \varphi(\mu_0 + (x - y)) \\
&= \mu(x - y) \\
&\geq \min \{\mu(x), \mu(y)\} \\
&= \min \{\varphi(\mu_0 + x), \varphi(\mu_0 + y)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi((\mu_0 + x) \cdot (\mu_0 + y)) &= \varphi(\mu_0 + xy) \\
&= \mu(xy) \\
&\geq \max \{\mu(x), \mu(y)\} \\
&= \max \{\varphi(\mu_0 + x), \varphi(\mu_0 + y)\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\varphi, R/\mu_0$ in bir fuzzy idealidir.

(ii) $\eta, R/A$ nın bir fuzzy ideali olsun. Bir $\mu : R \rightarrow [0, 1]$ dönüşümü $\forall x \in R$ için,

$$\mu(x) = \eta(A + x)$$

olarak tanımlansın. $x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned}
x = y &\Rightarrow A + x = A + y \Rightarrow \eta(A + x) = \eta(A + y) \\
&\Rightarrow \mu(x) = \mu(y)
\end{aligned}$$

dir. Böylece μ iyi tanımlıdır. $x, y \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}
\mu(x - y) &= \eta(A + (x - y)) \\
&= \eta((A + x) + (A - y)) \\
&\geq \min \{\eta(A + x), \eta(A - y)\} \\
&= \min \{\eta(A + x), \eta(A + y)\} \\
&= \min \{\mu(x), \mu(y)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(xy) &= \eta(A + (xy)) \\
&= \eta((A + x) \cdot (A - y)) \\
&\geq \min \{\eta(A + x), \eta(A + y)\} \\
&= \min \{\mu(x), \mu(y)\}
\end{aligned}$$

dir. Böylece μ, R nin bir fuzzy idealidir. Ayrıca $x \in \mu_0 \Leftrightarrow \mu(x) = \mu(0_R)$

$$\Leftrightarrow \eta(A + x) = \eta(A) \Leftrightarrow x \in A$$

Dolayısıyla $A = \mu_0$ dır. Son olarak,

$$\varphi(A + x) = \varphi(\mu_0 + x) = \mu(x) = \eta(A + x) \text{ olup } \varphi = \eta \text{ dır.}$$

Tanım 4.3.1: μ bir R halkasının fuzzy ideali olsun. $\forall r \in R$ için,

$$\mu_x^*(r) = \mu(r - x), x \in R$$

şeklinde tanımlı R nin μ_x^* fuzzy alt kümesine x ve μ tarafından belirlenmiş fuzzy yan cümle denir.

Lemma 4.3.1: μ bir R halkasının fuzzy ideali olsun. Bu durumda $\mu_0^*(r) = \mu(r - 0_R)$ olmak üzere,

$$\mu(x) = \mu(0_R) \Leftrightarrow \mu_x^* = \mu_0^*$$

dır.

İspat :

($\Rightarrow$) $\mu(x) = \mu(0_R)$ olsun. $r \in R$ için $\mu(r) \leq \mu(x) = \mu(0_R)$ dır.

Eğer $\mu(r) < \mu(x)$ ise $\mu(r - x) = \mu(r)$ dir.

Eğer $\mu(r) = \mu(x)$ ise $t = \mu(0_R)$ olmak üzere, $x \in \mu_t$ dir. Dolayısıyla

$\mu(r - x) = \mu(0_R) = \mu(x) = \mu(r)$ dir. Böylece $r \in R$ için,

$\mu(r - x) = \mu(r) \Rightarrow \mu_x^* = \mu_0^*$ olur.

($\Leftarrow$) Benzer şekilde ispatlanır.

Lemma 4.3.2: K , R nin bir ideali olsun. Eğer A , K nın karakteristik fonksiyonu ise $\forall x \in R$ için A_x^* , $K + x$ in karakteristik fonksiyonudur.

İspat : $\forall x \in R$ için,

$h \in K \Rightarrow A(h) = 1$ ve $h + x \in K + x$

$$\Rightarrow A_x^*(h + x) = A(h + x - x) = A(h) = 1$$

$h \notin K \Rightarrow A(h) = 0$ ve $h + x \notin K + x$

$$\Rightarrow A_x^*(h + x) = A(h + x - x) = A(h) = 0$$

olur.

Böylece,

$$A_x^*(x) = \begin{cases} 1 & , h \notin K + x \text{ ise} \\ 0 & , h \in K + x \text{ ise} \end{cases}$$

olup A_x^* , $K + x$ in karakteristik fonksiyonudur.

μ bir R halkasının fuzzy ideali olmak üzere $x \in R$ için x ve μ tarafından belirlenmiş μ_x^* fuzzy yan cümlelerinin kümesini R_μ ile gösterelim.

Teorem 4.3.2: R_μ cümlesi $\forall x, y \in R$ için,

$$\mu_x^* + \mu_y^* = \mu_{x+y}^* \text{ ve } \mu_x^* \cdot \mu_y^* = \mu_{xy}^*$$

şeklinde tanımlı toplama ve çarpma işlemleri altında bir halkadır.

İspat : Toplama ve çarpma işleminin iyi tanımlı olduğunu göstermek için,

$a, b, c, d \in R$ olmak üzere $\mu_a^* = \mu_b^*$ ve $\mu_c^* = \mu_d^*$ olsun. Bu durumda $\forall r \in R$ için,

$$\mu(r - a) = \mu(r - b) \quad (1)$$

$$\mu(r - c) = \mu(r - d) \quad (2)$$

olur. (1) de $r = a + c - d$, (2) de $r = c$ ve (1) de $r = a$ alınırsa,

$$\mu(a + c - d - a) = \mu(a + c - d - b) = \mu(c - d) \quad (3)$$

$$\mu(c - c) = \mu(c - d) = \mu(0_R) \quad (4)$$

$$\mu(a - a) = \mu(a - b) = \mu(0_R) \quad (5)$$

elde edilir.

$r \in R$ için,

$$\begin{aligned} (\mu_a^* + \mu_c^*)(r) &= \mu_{a+c}^*(r) = \mu(r - a - c) \\ &= \mu((r - b - d) - (a + c - b - d)) \\ &\geq \min \{ \mu(r - b - d), \mu(a + c - b - d) \} \\ &= \min \{ \mu(r - b - d), \mu(0_R) \} \quad ((3) \text{ ve } (4) \text{ ten}) \\ &= \mu(r - b - d) = \mu_{b+d}^*(r) = (\mu_b^* + \mu_d^*)(r) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\mu_b^* + \mu_d^* \subseteq \mu_a^* + \mu_c^*$ olur. Aynı şekilde $\mu_a^* + \mu_c^* \subseteq \mu_b^* + \mu_d^*$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla $\mu_a^* + \mu_c^* = \mu_b^* + \mu_d^*$ olup toplama işlemi iyi tanımlıdır.

$r \in R$ için,

$$\begin{aligned} (\mu_a^* \cdot \mu_c^*)(r) &= \mu_{ac}^*(r) = \mu(r - ac) \\ &= \mu((r - bd) - (ac - bd)) \\ &\geq \min \{ \mu(r - bd), \mu(ac - bd) \} \\ &= \min \{ \mu(r - bd), \mu((a - b)c - b(d - c)) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \min \{ \mu(r - bd), \min \{ \mu(a - b), \mu(d - c) \} \} \\
&= \min \{ \mu(r - bd), \min \{ \mu(0_R), \mu(0_R) \} \} \quad ((4) \text{ ve } (5) \text{ ten}) \\
&= \mu(r - bd) = \mu_{bd}^*(r) = (\mu_b^* \cdot \mu_d^*)(r)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\mu_b^* \cdot \mu_d^* \subseteq \mu_a^* \cdot \mu_c^*$ olur. Aynı şekilde $\mu_a^* \cdot \mu_c^* \subseteq \mu_b^* \cdot \mu_d^*$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla $\mu_a^* \cdot \mu_c^* = \mu_b^* \cdot \mu_d^*$ olup çarpma işlemi iyi tanımlıdır.

$\forall x \in R$ için $\mu_0^* (= \mu)$ toplama işlemine göre birim elemanı, $\mu_{(-x)}^*$ toplamaya göre μ_x^* in tersi, R halkasının çarpmaya göre birim elemanı e olmak üzere μ_e^* çarpma işlemine göre birim elemandır. $\forall a, b, c, d \in R$ için,

$$\begin{aligned}
\mu_a^* \cdot (\mu_b^* \cdot \mu_c^*) &= \mu_a^* \cdot \mu_{bc}^* = \mu_{a(bc)}^* = \mu_{(ab)c}^* \\
&= \mu_{ab}^* \cdot \mu_c^* \\
&= (\mu_a^* \cdot \mu_b^*) \cdot \mu_c^*
\end{aligned}$$

olup çarpma işlemi birleşmelidir. $\forall a, b, c, d \in R$ için,

$$\begin{aligned}
\mu_a^* \cdot (\mu_b^* + \mu_c^*) &= \mu_a^* \cdot \mu_{b+c}^* \\
&= \mu_{a(b+c)}^* \\
&= \mu_{(ab+ac)}^* \\
&= \mu_{ab}^* + \mu_{ac}^* \\
&= (\mu_a^* \cdot \mu_b^*) + (\mu_a^* \cdot \mu_c^*)
\end{aligned}$$

olup çarpma işleminin toplama üzerine soldan dağılma özelliği vardır. Aynı şekilde sağdan dağılma özelliğini de sağladığı gösterilebilir. Böylece $(R_\mu, +, \cdot)$ bir halkadır.

Eğer μ sabit ise $R_\mu = \{\mu_0^*\}$ dir.

Teorem 4.3.3: μ , R halkasının herhangi bir fuzzy ideali ve $\mu^\forall: R_\mu \rightarrow [0, 1], \forall x \in R$ için,

$$\mu^\forall(\mu_x^*) = \mu(x)$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\mu^\forall$ dönüşümü R_μ halkasının bir fuzzy idealidir.

İspat : $\forall \mu_x^*, \mu_y^* \in R_\mu$ için,

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } \mu^\forall(\mu_x^* - \mu_y^*) &= \mu^\forall(\mu_{x-y}^*) \\
 &= \mu(x - y) \\
 &\geq \min \{ \mu(x), \mu(y) \} \\
 &= \min \{ \mu^\forall(\mu_x^*), \mu^\forall(\mu_y^*) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } \mu^\forall(\mu_x^* \cdot \mu_y^*) &= \mu^\forall(\mu_{xy}^*) \\
 &= \mu(xy) \\
 &\geq \max \{ \mu(x), \mu(y) \} \\
 &= \max \{ \mu^\forall(\mu_x^*), \mu^\forall(\mu_y^*) \}
 \end{aligned}$$

olup $\mu^\forall$, R_μ halkasının bir fuzzy idealidir.

Teorem 4.3.4: μ , R halkasının bir fuzzy ideali olsun. Bu durumda $\mu^\forall$, R_μ halkasının herhangi bir fuzzy ideali olmak üzere $\forall x \in R$ için,

$$\theta(x) = \mu^\forall(\mu_x^*)$$

şeklinde tanımlanmış R halkasının θ fuzzy alt kümesi, R nin bir fuzzy idealidir.

İspat : $\forall x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned}
 \theta(x - y) &= \mu^\forall(\mu_{x-y}^*) \\
 &= \mu^\forall(\mu_x^* - \mu_y^*) \\
 &\geq \min \{ \mu^\forall(\mu_x^*), \mu^\forall(\mu_y^*) \} \\
 &= \min \{ \theta(x), \theta(y) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta(xy) &= \mu^\forall(\mu_{xy}^*) \\
 &= \mu^\forall(\mu_x^* \cdot \mu_y^*) \\
 &\geq \max \{ \mu^\forall(\mu_x^*), \mu^\forall(\mu_y^*) \} \\
 &= \max \{ \theta(x), \theta(y) \}
 \end{aligned}$$

olup θ , R nin bir fuzzy idealidir.

Tanım 4.3.2: μ , R halkasının herhangi bir fuzzy ideali olsun. Bu durumda R_μ halkasının

$$\mu^*(\mu_x^*) = \mu(x)$$

şeklinde tanımlı μ^* fuzzy ideale μ tarafından belirlenmiş fuzzy bölüm ideali denir.

Teorem 4.3.5: μ , R halkasının herhangi bir fuzzy ideali olmak üzere,

$$R/\mu_0 \cong R_\mu$$

dir.

İspat : $f: R \rightarrow R_\mu$ fonksiyonu $\forall x \in R$ için $f(x) = \mu_x^*$ şeklinde tanımlı olsun. Açıkça f bir üzerine homomorfizmdir. $f(x) = \mu_0^* \Leftrightarrow \mu_x^* = \mu_0^* \Leftrightarrow \mu(x) = \mu(0_R)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \text{Ker } f &= \{x \in R \mid f(x) = \mu_0^*\} \\ &= \{x \in R \mid \mu_x^* = \mu_0^*\} \\ &= \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0_R)\} \\ &= \mu_0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $R/\mu_0 \cong R_\mu$ dür.

Teorem 4.3.6: f bir R halkasından R' halkasına örten homomorfizm ve $\mu_0 \subseteq \text{Ker } f$ olmak üzere μ , R nin bir fuzzy ideali olsun. Bu durumda $\forall x \in R$ için $g(x) = \mu_x^*$ olmak üzere $f = h \circ g$ özelliğini sağlayan R_μ den R' üzerine tek bir homomorfizm vardır.

İspat : $h: R_\mu \rightarrow R'$ fonksiyonunu $\forall x \in R$ için,

$h(\mu_x^*) = f(x)$ şeklinde tanımlansın.

$$\begin{aligned} \mu_x^* = \mu_y^* &\Rightarrow \mu_x^* + \mu_{-y}^* = \mu_y^* + \mu_{-y}^* \\ &\Rightarrow \mu_{(x-y)}^* = \mu_0^* \\ &\Rightarrow \mu(x - y) = \mu(0_R) \\ &\Rightarrow x - y \in \mu_0 \subseteq \text{Ker } f \\ &\Rightarrow f(x - y) = 0_{R'} \\ &\Rightarrow f(x) - f(y) = 0_{R'} \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) = h(\mu_x^*) = h(\mu_y^*) \end{aligned}$$

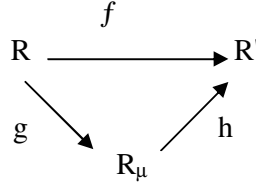
olur. Böylece h iyi tanımlıdır.

Ayrıca f örten olduğundan h de örtendir.

$$\begin{aligned} h(\mu_x^* + \mu_y^*) &= h(\mu_{(x+y)}^*) \\ &= f(x + y) \\ &= f(x) + f(y) \\ &= h(\mu_x^*) + h(\mu_y^*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(\mu_x^* \cdot \mu_y^*) &= h(\mu_{xy}^*) \\ &= f(xy) \\ &= f(x)f(y) \\ &= h(\mu_x^*) \cdot h(\mu_y^*) \end{aligned}$$

olduğundan h bir homomorfizmdir.



diyagramı $\forall x \in R$ için,

$$f(x) = h(\mu_x^*) = h(g(x)) = (h \circ g)(x) \text{ olduğundan değişmelidir.}$$

h tek olmasın. $h': R_\mu \rightarrow R'$ fonksiyonu için $f = h' \circ g$ olsun. Bu durumda $\forall x \in R$ için,

$$h(\mu_x^*) = f(x) = (h' \circ g)(x) = h'(\mu_x^*) \text{ dir. Böylece } h = h' \text{ olur. Dolayısıyla } h \text{ tektir.}$$

Önerme 4.3.1: Teorem 4.3.6 da tanımlanan h bir izomorfizmdir $\Leftrightarrow \mu, f$ -invarianttır.

İspat :

($\Rightarrow$) $h, 1:1$ olsun. $\forall x, y \in R$ için,

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow h(\mu_x^*) = h(\mu_y^*) \\ &\Rightarrow \mu_x^* = \mu_y^* \\ &\Rightarrow \mu_{(x-y)}^* = \mu_0^* \\ &\Rightarrow \mu(x - y) = \mu(0_R) \\ &\Rightarrow \mu(x) = \mu(y) \quad (\text{Teorem 4.1.1 den}) \end{aligned}$$

olur. Böylece μ, f -invarianttır.

($\Leftarrow$) μ , f -invariant olsun. Bu durumda,

$$h(\mu_x^*) = h(\mu_y^*) \Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$\Rightarrow \mu(x) = \mu(y)$$

$$\Rightarrow \mu_x^* = \mu_y^*$$

olur. Böylece h birebirdir.

Teorem 4.3.7: f bir R halkasından R' halkasına üzerine homomorfizm ve μ , R nin herhangi bir f -invariant fuzzy ideali olsun. Bu durumda $R_\mu \cong R'_{f(\mu)}$ dir.

İspat : μ , f -invariant olduğundan $\text{Ker } f \subseteq \mu_0$ olur. $t = \mu(0_R)$ ve R' nün toplamaya göre birim elemanı $0_{R'}$ ile gösterilsin. $f(0) = 0_{R'}$ ve $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0_R)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (f(\mu))(0_{R'}) &= \sup_{x \in f^{-1}(0_{R'})} \mu(x) \\ &= \mu(0_R) \\ &= t \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} f(x) \in (f(\mu))_t &\Leftrightarrow (f(\mu))(f(x)) \geq t \\ &\Leftrightarrow (f^{-1}(f(\mu)))(x) \geq t \quad (f^{-1}(f(\mu))) = \mu \\ &\Leftrightarrow \mu(x) \geq t = \mu(0_R) \\ &\Leftrightarrow x \in \mu_0 \quad (\text{Ker } f \subseteq \mu_0) \\ &\Leftrightarrow f(x) \in f(\mu_0) \end{aligned}$$

dir. Böylece $(f(\mu))_t = f(\mu_0)$ dir. Teorem 4.3.5 ten $R_\mu \cong R'/\mu_0$ ve $R'_{f(\mu)} \cong R'/(f(\mu))_t$ olur.

Ayrıca $R/\mu_0 \cong R'_{f(\mu_0)}$ olduğu biliniyor. Dolayısıyla $R_\mu \cong R'_{f(\mu)}$ dir.

4.4 Fuzzy Bölüm Halkaları

Teorem 4.4.1: I bir R halkasının fuzzy ideali olmak üzere $\forall (x, y) \in R \times R$ için,

$$\mu(x, y) = I(x - y)$$

şeklinde tanımlı μ fuzzy bağıntısı bir denklik bağıntısıdır (Kuraoka and Kuroki 1992).

Lemma 4.4.1: I bir R halkasının fuzzy ideali ve $\forall (x, y) \in R \times R$ için μ denklik bağıntısı $\mu(x, y) = I(x - y)$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\forall x, x' \in R$ için,

$$\mu[x] = \mu[x'] \Leftrightarrow I(x - x') = 1 \text{ dir.}$$

İspat : Lemma 2.3.2 den $\forall (x, y) \in R \times R$ için,

$\mu[x] = \mu[x'] \Leftrightarrow \mu(x, x') = 1$ dir. Bu durumda $\mu[x] = \mu[x'] \Leftrightarrow I(x - x') = 1$ olur.

$R/\mu = \{\mu[x] \mid x \in R\}$ olmak üzere R/μ üzerinde toplama ve çarpma sırasıyla $\forall x \in R$ için,

$$+ : R/\mu \times R/\mu \rightarrow R/\mu \text{ olmak üzere } \mu[x] + \mu[y] = \mu[x + y]$$

$$\cdot : R/\mu \times R/\mu \rightarrow R/\mu \text{ olmak üzere } \mu[x] \cdot \mu[y] = \mu[xy]$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$(\mu[x], \mu[y]) = (\mu[x'], \mu[y']) \Rightarrow \mu[x] = \mu[x'] \text{ ve } \mu[y] = \mu[y']$$

$$\Rightarrow \mu[x] + \mu[y] = \mu[x'] + \mu[y'] \text{ ve } \mu[x] \cdot \mu[y] = \mu[x'] \cdot \mu[y']$$

$$\Rightarrow \mu[x + y] = \mu[x' + y'] \text{ ve } \mu[xy] = \mu[x'y']$$

dir. R/μ bu şekilde tanımlanan işlemler altında bir halkadır. Bu halkayı R/I ile göstereceğiz.

Tanım 4.4.1: R bir halka, I , R nin bir fuzzy ideali ve $\mu, \forall (x, y) \in R \times R$ için,

$$\mu(x, y) = I(x - y)$$

şeklinde tanımlı R nin bir fuzzy denklik bağıntısı olsun. Bu durumda R/I halkasına R nin I tarafından üretilmiş fuzzy bölüm halkası denir.

Lemma 4.4.2: R halka ve R/I fuzzy bölüm halkası olmak üzere $\forall x \in R$ için $p(x) = \mu[x]$ şeklinde tanımlı örten ve birebir $p: R \rightarrow R/I$ dönüşümü bir homomorfizmdir (Kuraoka and Kuroki 1992).

Lemma 4.4.2 de tanımlanan p homomorfizmine doğal homomorfizm denir.

Teorem 4.4.2: R ve R' iki halka $f: R \rightarrow R'$ homomorfizm ve $f(I) \subseteq I'$ olmak üzere I ve I' sırasıyla R ve R' nün fuzzy idealleri olsun. Bu durumda,

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & R' \\ \downarrow & & \downarrow \\ R/I & \xrightarrow{f^*} & R'/I' \end{array}$$

diyagramı değişmeli olmak üzere $f^*: R/I \rightarrow R'/I'$ bir homomorfizmdir.

İspat : $f^*(\mu[x]) = \nu[f(x)]$ olmak üzere μ ve ν ,

$$\forall x, y \in R \text{ için } \mu(x, y) = I(x - y)$$

$$\forall x', y' \in R' \text{ için } \nu(x', y') = I'(x' - y')$$

şeklinde tanımlı fuzzy denklik bağıntıları olsun. Eğer,

$$\mu[x_1] = \mu[x_2] \Rightarrow I(x_1 - x_2) = 1 \text{ olup,}$$

$$\begin{aligned} \nu(f(x_1), f(x_2)) &= I'(f(x_1) - f(x_2)) = I'(f(x_1 - x_2)) = f^{-1}(I')(x_1 - x_2) \quad (f(I) \subseteq I') \\ &\geq I(x_1 - x_2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\nu(f(x_1), f(x_2)) = 1$ olup Lemma 2.3.2 den $\nu[f(x_1)] = \nu[f(x_2)]$ dir.

Dolayısıyla f^* iyi tanımlıdır. Ayrıca,

$$\begin{aligned} f^*(\mu[x] + \mu[y]) &= f^*(\mu[x + y]) \\ &= \nu[f(x + y)] \\ &= \nu[f(x) + f(y)] \\ &= \nu[f(x)] + \nu[f(y)] \\ &= f^*(\mu[x]) + f^*(\mu[y]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^*(\mu[x] \cdot \mu[y]) &= f^*(\mu[xy]) \\ &= \nu[f(xy)] \\ &= \nu[f(x) \cdot f(y)] \\ &= \nu[f(x)] \cdot \nu[f(y)] \\ &= f^*(\mu[x]) \cdot f^*(\mu[y]) \end{aligned}$$

olup f^* bir homomorfizmdir.

Teorem 4.4.3: (İzomorfizm Teoremi)

R ve R' iki halka $f : R \rightarrow R'$ birebir ve örten bir homomorfizm, I' , R' nün fuzzy ideali ve $f^{-1}(I') = I$ olsun. Bu durumda,

$$R/I \cong R'/I'$$

dir.

İspat : Teorem 4.1.8 den I , R nin bir fuzzy idealidir. Ayrıca $f(I) = f(f^{-1}(I')) = I'$ dür.

Teorem 4.4.2 den $f^*: R/I \rightarrow R'/I'$ bir homomorfizmdir. f^* ın bir örten fonksiyon olduğu açıktır. f^* ın birebir olduğunu göstermek için $\mu[a] \in \text{Ker } f$ olsun.

$$f^*(\mu[a]) = \nu[f(a)] = \nu[0_{R'}] \Rightarrow I'(f(a)) = 1$$

$$\Rightarrow I(a - 0_R) = I(a) = f^{-1}(I')(a) = I'(f(a)) = 1$$

$$\Rightarrow \mu[a] = \mu[0_R]$$

olur. Böylece f^* birebir olup bir izomorfizmdir. Dolayısıyla $R/I \cong R'/I'$ dir.

Tanım 4.4.2: R ve R' iki halka $f : R \rightarrow R'$ homomorfizm olsun.

(i) f nin fuzzy çekirdeği $\text{Ker } f$, R' nün 0_1 fuzzy noktası için $\text{Ker } f = f^{-1}(0_1)$ şeklinde tanımlıdır.

(ii) f nin fuzzy görüntüsü $\text{Im } f$, R nin R fuzzy kümesi için $\text{Im } f = f(R)$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 4.4.4: R ve R' iki halka $f : R \rightarrow R'$ homomorfizm olsun.

(i) $\text{Ker } f = \lambda_{\text{Ker } f}$

(ii) $\text{Im } f = \lambda_{\text{Im } f}$

dir.

İspat :

(i) $\forall x \in R$ için,

$$0_1(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0_{R'} \text{ ise} \\ 0 & , x \neq 0_{R'} \text{ ise} \end{cases}$$

dir.

(i) $z \in \text{Ker } f \Rightarrow f(z) = 0_{R'}$ olup

$f^{-1}(0_1)(z) = 0_1(f(z)) = 0_1(0_{R'}) = 1$ dir.

$z \notin \text{Ker } f \Rightarrow f(z) \neq 0$ olup

$f^{-1}(0_1)(z) = 0_1(f(z)) = 0$ dir. Böylece $f^{-1}(0_1) = \text{Ker } f = \lambda_{\text{Ker } f}$ dir.

(ii) R fuzzy kümesi $\forall x \in R$ için $R(x) = 1$ şeklinde tanımlıdır.

$y \in \text{Im } f \Rightarrow \exists x \in R$ için $f(x) = y$ olup

$f(R)(y) = R(f^{-1}(y)) = R(x) = 1$ dir.

$y \notin \text{Im } f \Rightarrow \forall x \in R$ için $f(x) \neq y$ olup

$f(R)(y) = R(f^{-1}(y)) = 0$ dir. Böylece $f(R) = \text{Im } f = \lambda_{\text{Im } f}$ dir.

Teorem 4.4.5: (Homomorfizm Teoremi)

R ve R' iki halka $f : R \rightarrow R'$ birebir ve örten homomorfizm olsun. Bu durumda,

$$R/\text{Ker } f \cong R'$$

olur.

İspat : $f^{-1}(0_1) = \text{Ker } f$ olduğu için Teorem 4.4.3 den $R/\text{Ker } f \cong R'/0_1$ dir.

$$R'/0_1 = \{x'_1 \mid x' \in R'\}$$

olduğundan $R' \cong R'/0_1$ olup böylece $R/\text{Ker } f \cong R'$ dir.

I, R halkasının bir fuzzy ideali olmak üzere $I_* = \{x \in R \mid I(x) = 1\}$ olsun.

Teorem 4.4.6: I, R halkasının bir fuzzy ideali ise

$$R/I_* \cong R/I \cong R/\lambda_{I_*}$$

dir.

İspat : $\varphi : R \rightarrow R/I$ doğal homomorfizm olsun.

$$\text{Ker } \varphi = \{x \in R \mid \varphi(x) = \mu[0_R]\}$$

$$= \{x \in R \mid \mu[x] = \mu[0_R]\}$$

$$= \{x \in R \mid I(x) = 1\} = I_*$$

olur. Böylece Teorem 4.4.2 den,

$$R/I_* \cong R/I$$

dir. Diğer taraftan $\text{Ker } \varphi = \lambda_{\text{Ker } \varphi} = \lambda_{I_*}$ olduğundan,

$$R/\lambda_{I_*} \cong R/I$$

olur. Böylece,

$$R/I_* \cong R/I \cong R/\lambda_{I_*}$$

dir.

Teorem 4.4.7: R ve R' iki halka $f : R \rightarrow R'$ homomorfizm ve I , R nin, I' de R' nün fuzzy ideali olsun.

$$(i) \quad f^{-1}(f(I)) = I + \text{Ker } f$$

$$(ii) \quad f(f^{-1}(I')) = I' \cap \text{Im } f$$

dir.

İspat :

(i) $z \in R$ olsun.

$$\begin{aligned} (I + \text{Ker } f)(z) &= \sup_{z=a+b} \{ \min \{ I(a), \text{Ker } f(b) \} \} \\ &= \sup_{z=a+b} \{ \min \{ I(a), \lambda_{\text{Ker } f}(b) \} \} \\ &= \sup_{\substack{z=a+b \\ b \in \text{Ker } f}} I(a) \\ &= \sup_{f(a+b)=f(z)} I(a) \\ &= \sup_{f(a)+f(b)=f(z)} I(a) \quad (b \in \text{Ker } f \Rightarrow f(b) = 0_{R'}) \\ &= \sup_{f(a)=f(z)} I(a) \\ &= f(I)(f(z)) = f^{-1}(f(I))(z) \end{aligned}$$

olur. Böylece $f^{-1}(f(I)) = I + \text{Ker } f$ dir.

(ii) $\forall x' \in R'$ için,

$$(I' \cap \text{Im } f)(x') = \min \{ I'(x'), \text{Im } f(x') \}$$

$$\begin{aligned}
&= \min \{I'(x'), \lambda_{\text{Im } f}(x')\} \quad (x' \in \text{Im } f) \\
&= I'(x') \quad (x' \in \text{Im } f \Rightarrow \exists y' \in R' \text{ için } f(y') = x') \\
&= I'(f(y')) \\
&= f^{-1}(I')(y') \\
&= (f^{-1}(I'))(f^{-1}(x')) \\
&= f(f^{-1}(I'))(x')
\end{aligned}$$

olur. Böylece $f(f^{-1}(I')) = I' \cap \text{Im } f$ dir.

Teorem 4.4.8: R ve R' iki halka, $f: R \rightarrow R'$ birebir ve örten bir homomorfizm ve

$$\mathcal{A} = \{I \mid I, R \text{ nin fuzzy ideali, } \text{Ker } f \subseteq I\}$$

$$\mathcal{B} = \{I' \mid I', R' \text{ nün fuzzy ideali}\}$$

olsun. Bu durumda $\mathcal{A}$ dan $\mathcal{B}$ ye birebir ve örten bir dönüşüm vardır.

İspat: $\Psi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ dönüşümü $\forall I \in \mathcal{A}$ için $\Psi(I) = f(I)$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $f(I)$, R' nün bir fuzzy ideali olup $\forall I \in \mathcal{A}$ için $\Psi(I) = f(I) \in \mathcal{B}$ olur.

Ψ nin birebir olduğunu göstermek için $\Psi(I) = \Psi(J)$ olsun. Bu durumda $f(I) = f(J)$ dir.

Ayrıca f birebir ve örten olduğundan $I = I + \text{Ker } f$ ve $J = J + \text{Ker } f$ olup,

$$\begin{aligned}
I &= I + \text{Ker } f = f^{-1}(f(I)) \\
&= f^{-1}(f(J)) \\
&= J + \text{Ker } f \\
&= J
\end{aligned}$$

dir. Böylece Ψ birebirdir.

Ψ nin örten olduğunu göstermek için $I' \in \mathcal{B}$ olsun. Teorem 4.1.1 den $f^{-1}(I')$, R nin bir fuzzy idealidir. $z \in \text{Ker } f$ olsun. Bu durumda,

$$f^{-1}(I')(z) = I'(f(z)) = I'(0_{R'}) = 1 \text{ olur. Böylece,}$$

$$\text{Ker } f \subseteq f^{-1}(I')$$

dir. Ayrıca Teorem 4.4.7 den

$$\Psi(f^{-1}(I')) = f(f^{-1}(I'))$$

$$= I' \cap \text{Im } f$$

$$= I'$$

olur. Böylece Ψ örtendir.

Teorem 4.4.9: R bir halka, I ve J , $I \subseteq J$ olmak üzere R nin fuzzy idealleri olsun. Herhangi bir $\varphi : R \rightarrow R/I$ doğal homomorfizmi için,

$$R/I \cong (R/I) / (\varphi(J))$$

dir.

İspat : $\text{Ker } \varphi = \lambda_{I*} \subseteq I \subseteq J$ olduğu için Teorem 4.1.1 den $\varphi(J)$, R/I nin bir fuzzy idealidir.

Ayrıca

$\varphi^{-1}(\varphi(J)) = J + \text{Ker } \varphi = J$ olduğu için Teorem 4.4.1 den

$$R/I \cong (R/I) / (\varphi(J))$$

dir.

4.5 Fuzzy Asal İdeal ve Fuzzy Maksimal İdeal

R değişmeli bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. $x, y \in R$ için $xy \in I$ olması, $\exists m \in \mathbb{Z}^+$ için $x^m \in I$, veya $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için $y^n \in I$ olmasını ifade ediyorsa I ya R nin semiprimary ideali denir.

R değişmeli bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. $x, y \in R$ için $xy \in I$ olması, $x \in I$ veya $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için $y^n \in I$ olmasını ifade ediyorsa I ya R nin primary ideali denir.

R değişmeli bir halka ve $I (\neq R)$, R nin bir ideali olsun. R nin herhangi bir J ideali ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için $J^n \subset I$ olması, $J \subset I$ olmasını ifade ediyorsa I ya R nin yarı asal ideali denir.

R değişmeli bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. R nin herhangi A ve B idealleri için $AB \subset I$ olması, $A \subset I$ veya $B \subset I$ olmasını ifade ediyorsa I ya R nin asal ideali denir.

R değişmeli herhangi bir halka ve e , R nin çarpmaya göre birim elemanı olsun.

Tanım 4.5.1: μ bir R halkasının fuzzy ideali olsun. Eğer R nin η ve θ gibi herhangi iki fuzzy ideali ve $\forall m \in \mathbb{Z}^+, x \in R$ için $\eta\theta \subseteq \mu$ ve $\eta(x) > \mu(x^m)$ olması verilen bir $y \in R$ ve $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\theta(y) \leq \mu(y^n)$$

olmasını ifade ediyorsa μ ye fuzzy semiprimary ideal denir.

Tanım 4.5.2: μ bir R halkasının fuzzy ideali olsun. Eğer R nin η ve θ gibi herhangi iki fuzzy ideali için $\eta\theta \subseteq \mu$ ve $\eta \not\subseteq \mu$ olması $\exists y \in R$ ve $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ için $\theta(y) \leq \mu(y^n)$ olmasını ifade ediyorsa μ ye R nin fuzzy primary ideali denir.

Lemma 4.5.1: μ bir R halkasının bir sabit fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda μ , R nin bir fuzzy semiprimary idealidir.

İspat : $\forall x \in R$ için $c \in [0, 1]$ keyfi bir sabit olmak üzere $\mu(x) = c$ olsun. Bu durumda μ , R nin bir fuzzy idealidir. R nin η ve θ gibi herhangi iki fuzzy ideali ve $\forall m \in \mathbb{Z}^+, x \in R$ için $\eta\theta \subseteq \mu$ ve $\eta(x) > \mu(x^m)$ olsun. μ nün fuzzy semiprimary olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\exists y \in R$ için,

$$\theta(y) > \mu(y^n)$$

olur. $(\eta\theta)(xy) \geq \min \{\eta(x), \theta(y)\}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} (\eta\theta)(xy) &> \min \{\mu(x^m), \mu(y^n)\} \\ &= c \\ &= \mu(xy) \end{aligned}$$

dir. Bu ise $\eta\theta \subseteq \mu$ olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olup μ bir fuzzy semiprimary idealdir.

Teorem 4.5.1: $I (\neq R)$, R halkasının herhangi bir semiprimary ideali ve $c \in [0, 1[$ keyfi bir sabit olsun. Bu durumda R nin,

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & , x \in I \text{ ise} \\ c & , x \in I \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fuzzy alt kümesi R nin bir fuzzy semiprimary idealidir.

İspat : μ , R nin bir fuzzy idealidir. R nin η ve θ gibi herhangi iki fuzzy ideali ve $\forall m \in \mathbb{Z}^+$, $x \in R$ için $\eta\theta \subseteq \mu$ ve $\eta(x) > \mu(x^m)$ olsun. μ nün fuzzy semiprimary olmadığını kabul edelim. Bu durumda $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ve $\exists y \in R$ için $\theta(y) > \mu(y^n)$ olur.

Dolayısıyla,

$$x^m \notin I \text{ ve } y^n \notin I \Rightarrow xy \notin I$$

$$\Rightarrow \mu(xy) = c = \mu(x^m) = \mu(y^n)$$

dir. $(\eta\theta)(xy) \geq \min \{ \eta(x), \theta(y) \}$ olduğundan,

$$(\eta\theta)(xy) > \min \{ \mu(x^m), \mu(y^n) \}$$

$$= c$$

$$= \mu(xy)$$

dir. Bu ise $\eta\theta \subseteq \mu$ olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlış olur. Böylece μ bir fuzzy semiprimary idealdir.

Tanım 4.5.3: μ bir R halkasının fuzzy ideali olsun. Eğer $\forall x \in R$ ve $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\mu(x^n) = \mu(x)$$

ise μ ye R nin fuzzy yarı asal ideali denir.

Tanım 4.5.4: μ , R halkasının bir fuzzy ideali olsun. Eğer R nin bir θ fuzzy ideali için $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\theta^m \subseteq \mu$ olması $\theta \subseteq \mu$ olmasını ifade ediyorsa μ ye R halkasının fuzzy yarı asal ideali denir.

Teorem 4.5.2: μ , R halkasının bir fuzzy ideali olsun. Bu durumda,

μ yarı asal idealdir $\Leftrightarrow t \in \text{Im}(\mu)$ olmak üzere μ_t seviye ideali R nin yarı asal idealidir (Dixit, 1992).

Sonuç 4.5.1: I , R nin bir ideali olsun. Bu durumda,

I , R nin bir yarı asal idealidir $\Leftrightarrow \lambda_I$ karakteristik fonksiyonu R nin bir fuzzy yarı asal idealidir (Dixit, 1992).

Tanım 4.5.5: P bir R halkasının fuzzy ideali olsun. Eğer P sabit değil ve R nin herhangi iki A ve B fuzzy idealleri için $AB \subseteq P$ olması ya $A \subseteq P$ ya da $B \subseteq P$ olmasını ifade ediyorsa P ye R nin fuzzy asal ideali denir.

Tanım 4.5.6: μ bir R halkasının fuzzy ideali olsun. Eğer,

$$\mu_0 = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0_R)\}$$

ideali bir asal (primary) ideal ise μ ye fuzzy asal (fuzzy primary) ideal denir.

Teorem 4.5.3: Eğer $I (\neq R)$ bir R halkasının asal ideali ise bu durumda λ_I karakteristik fonksiyonu R nin bir fuzzy asal idealidir.

İspat : $I \neq R$ olduğundan λ_I fonksiyonu sabit değildir. λ_I nın fuzzy ideal olmadığını kabul edelim. Bu durumda A ve B , R nin herhangi iki fuzzy ideali olmak üzere,

$AB \subseteq \lambda_I$ ve $A \not\subseteq \lambda_I$, $B \not\subseteq \lambda_I$ olsun. Dolayısıyla $\exists x, y \in R$ için,

$$\lambda_I(x) < A(x) \text{ ve } \lambda_I(y) < B(y) \Rightarrow A(x) \neq 0 \text{ ve } B(y) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_I(x) = 0 \text{ ve } \lambda_I(y) = 0$$

$$\Rightarrow x \notin I \text{ ve } y \notin I$$

$$\Rightarrow \exists r \in R \text{ için } xry \notin I \quad (I \text{ asal ideal})$$

$$\Rightarrow \lambda_I(xry) = 0$$

$$\Rightarrow AB(xry) = 0 \text{ dır.} \quad (*)$$

$$AB(xry) = \sup_{xry=cd} \{\min \{(A(c), B(d))\}\}$$

$$\geq \min \{(A(x), B(ry))\}$$

$$\geq \min \{(A(x), B(y))\} \quad (B \text{ fuzzy ideal} \Rightarrow B(ry) \geq B(y))$$

$$> 0$$

olup bu sonuç (*) ile çelişir. Dolayısıyla λ_I karakteristik fonksiyonu R nin bir fuzzy asal idealidir.

Teorem 4.5.4: Bir R halkasının, λ_I karakteristik fonksiyonu fuzzy asal ideal olan her bir I ideali R nin bir asal idealidir.

İspat : λ_I karakteristik fonksiyonu bir fuzzy asal ideal olduğundan $I \neq R$ dir. $AB \subseteq I$ olmak üzere A ve B , R halkasının iki ideali olsun. $\lambda_A \lambda_B$ çarpımını göz önüne alalım.
 $x \in R$ olsun.

Eğer $\lambda_A \lambda_B = 0$ ise $\lambda_A \lambda_B \leq \lambda_I(x)$ olur.

$\lambda_A \lambda_B \neq 0$ olsun. Bu durumda,

$$\lambda_A \lambda_B(x) = \sup_{x=yz} \{\min(\lambda_A(y), \lambda_B(z))\} \neq 0 \Rightarrow \exists y, z \in R \text{ için } x = yz \text{ ve } \lambda_A(y) \neq 0, \lambda_B(z) \neq 0$$

$$\Rightarrow \lambda_A(y) = 1 \text{ ve } \lambda_B(z) = 1$$

$$\Rightarrow y \in A \text{ ve } z \in B$$

$$\Rightarrow x = yz \in AB \subseteq I$$

$$\Rightarrow \lambda_I(x) = 1$$

$$\Rightarrow \forall x \in R \text{ için } \lambda_A \lambda_B(x) \leq \lambda_I(x)$$

$$\Rightarrow \forall x \in R \text{ için } \lambda_A \lambda_B \subseteq \lambda_I$$

$$\Rightarrow \lambda_A \subseteq \lambda_I \text{ veya } \lambda_B \subseteq \lambda_I$$

$$\Rightarrow A \subseteq I \text{ veya } B \subseteq I$$

dır. Böylece I , R nin bir asal idealidir.

Teorem 4.5.5: P bir R halkasının fuzzy asal ideali olsun.

$$P_0 = \{x \mid x \in R, P(x) = P(0_R)\}$$

şeklinde tanımlı P_0 , R nin bir asal idealidir (Mukherjee and Sen 1987).

Teorem 4.5.6: R bir halka ve A , R nin bir fuzzy asal ideali olsun. Bu durumda $|\text{Im}(A)| = 2$ dir (Malik and Mordeson 1990).

Teorem 4.5.7: A bir R halkasının fuzzy asal ideali olsun. Bu durumda $A(0_R) = 1$ dir (Malik and Mordeson 1990).

Teorem 4.5.8: A bir R halkasının fuzzy alt kümesi, $|\text{Im}(A)| = 2$, $A(0_R) = 1$ ve $A_0 = \{x \in R \mid A(x) = A(0_R)\}$ R nin bir asal ideali olsun. Bu durumda A , R nin bir fuzzy asal idealidir (Malik and Mordeson 1990).

H bir halka ve $A \neq H$, H nin bir ideali olsun. H nin bir B ideali için, $A \subseteq B$ olması $A = B$ veya $B = H$ olmasını ifade ediyorsa A ya H nin maksimal ideali denir. Diğer bir deyişle A ve H arasında H nin A dan farklı bir ideali yoksa A ya H nin bir maksimal ideali denir.

I, R halkasının bir fuzzy ideali olmak üzere $I_* = \{x \in R \mid I(x) = 1\}$ olsun.

Tanım 4.5.7: M, R halkasının bir fuzzy ideali olsun. R nin herhangi bir sabit olmayan A fuzzy ideali için,

$$M \subseteq A \Rightarrow A_* = M_* \text{ veya } A = \lambda_R$$

oluyorsa M ye R nin fuzzy maksimal ideali denir.

Tanım 4.5.8: μ , R halkasının bir fuzzy ideali olsun. Eğer $\alpha \in [0, 1[$ olmak üzere $\text{Im}(\mu) = \{1, \alpha\}$ ve $\mu_* = \{x \in R \mid \mu(x) = 1\}$ R nin bir maksimal ideali ise μ ye R nin fuzzy maksimal ideali denir.

Teorem 4.5.9: μ , R nin herhangi bir fuzzy ideali olsun. Bu durumda μ nün fuzzy maksimal ideal olması için gerek ve yeter koşul R nin cisim olmasıdır (Dixit *et al.*, 1991).

5. FUZZY İDEALLERİN VE FUZZY GRUPLARIN KARTEZYEN ÇARPIMI

Bu bölümde fuzzy grupların ve fuzzy ideallerin kartezyen çarpımının oluşturularak, karakterizasyonları üzerinde durulmuştur.

Teorem 5.1:

- (i) μ ve η , R halkasının fuzzy sol (sağ) idealleri olsun. Bu durumda $\mu \times \eta$, $R \times R$ nin bir fuzzy sol (sağ) idealidir.
- (ii) ξ ve θ , G grubunun fuzzy alt grupları olsun. Bu durumda $\xi \times \theta$, $G \times G$ nin bir fuzzy alt grubudur.

İspat :

- (i) μ ve η , R nin fuzzy sol ideali olsun.

$(\mu \times \eta)(x, y) = \min \{ \mu(x), \eta(y) \}$ ve $\forall x, y \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0_R)$ ve $\eta(y) \leq \eta(0_R)$ olduğundan,

$$t \in \text{Im}(\mu \times \eta) \Rightarrow t \leq \mu(0_R) \text{ ve } t \leq \eta(0_R)$$

dir. Böylece Teorem 4.2.2 ten μ_t ve η_t , R nin sol idealidir.

$$\forall (x, y), (z, w) \in (\mu \times \eta)_t \Rightarrow (\mu \times \eta)(x, y) \geq t \text{ ve } (\mu \times \eta)(z, w) \geq t$$

$$\Rightarrow \min \{ \mu(x), \eta(y) \} \geq t \text{ ve } \min \{ \mu(z), \eta(w) \} \geq t$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} (\mu \times \eta)((x - z), (y - w)) &= \min \{ \mu(x - z), \eta(y - w) \} \\ &\geq \min \{ \min \{ \mu(x), \mu(z) \}, \min \{ \eta(y), \eta(w) \} \} \\ &\geq t \end{aligned}$$

dir. Böylece $((x - z), (y - w)) \in (\mu \times \eta)_t$ dir. Ayrıca $\forall (a, b) \in R \times R$ için,

$$\begin{aligned} (\mu \times \eta)(xa, yb) &= \min \{ \mu(xa), \eta(yb) \} \\ &\geq \min \{ \max \{ \mu(x), \mu(a) \}, \max \{ \eta(y), \eta(b) \} \} \geq t \end{aligned}$$

dir. Böylece $(xa, yb) \in (\mu \times \eta)_t$ dir.

Dolayısıyla $(\mu \times \eta)_t$, $R \times R$ nin bir sol ideali olup Teorem 4.2.4 ten $\mu \times \eta$, R nin bir fuzzy sol idealidir.

- (ii) İspat aynı yöntemle yapılır.

Tanım 5.1:

(i) $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n$ sırasıyla $R_1, R_2, \dots, R_n$ halkalarının fuzzy idealleri ise, $\mu^1 \times \mu^2 \times \dots \times \mu^n$ çarpımı, $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $\forall x_i \in R_i$ için,

$$(\mu^1 \times \mu^2 \times \dots \times \mu^n)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min \{\mu^1(x_1), \mu^2(x_2), \dots, \mu^n(x_n)\}$$

şeklinde tanımlı,

$$\mu^1 \times \mu^2 \times \dots \times \mu^n : R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n \rightarrow [0, 1]$$

fonksiyonudur.

(ii) $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^t$ sırasıyla $G_1, G_2, \dots, G_t$ gruplarının fuzzy alt grupları ise, $\eta^1 \times \eta^2 \times \dots \times \eta^t$ çarpımı, $i = 1, \dots, n$ olmak üzere $\forall x_i \in G_i$ için,

$$(\eta^1 \times \eta^2 \times \dots \times \eta^t)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min \{\eta^1(x_1), \eta^2(x_2), \dots, \eta^n(x_n)\}$$

şeklinde tanımlı,

$$\eta^1 \times \eta^2 \times \dots \times \eta^t : G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t \rightarrow [0, 1]$$

fonksiyonudur.

Sonuç 5.1:

(i) $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^n$ sırasıyla $R_1, R_2, \dots, R_n$ halkalarının fuzzy idealleri ise,

$\mu^1 \times \mu^2 \times \dots \times \mu^n$ çarpımı $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ in fuzzy idealidir

(ii) $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^t$ sırasıyla $G_1, G_2, \dots, G_t$ gruplarının fuzzy alt grupları ise,

$\eta^1 \times \eta^2 \times \dots \times \eta^t$ çarpımı $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t$ nin bir fuzzy alt grubudur

(Ersoy, 2003).

Teorem 5.2: $\mu \times \eta, R \times R$ nin bir fuzzy sol ideali olmak üzere R nin μ ve η fuzzy alt kümeleri için,

(i) $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0_R)$ veya $\eta(x) \leq \eta(0_R)$

(ii) $\mu(x) \leq \mu(0_R) \Rightarrow \forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \eta(0_R)$ veya $\eta(x) \leq \eta(0_R)$

(iii) $\eta(x) \leq \eta(0_R) \Rightarrow \forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0_R)$ veya $\eta(x) \leq \mu(0_R)$

(iv) μ veya η, R nin bir fuzzy sol (sağ) idealidir.

İspat :

(i) $\mu(x) > \mu(0_R)$ ve $\eta(y) > \eta(0_R)$ olacak biçimde $x, y \in R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(\mu \times \eta)(x, y) &= \min \{ \mu(x), \eta(y) \} \\
&> \min \{ \mu(0_R), \eta(0_R) \} \\
&= (\mu \times \eta)(0_R, 0_R)
\end{aligned}$$

olup bu sonuç, $\mu \times \eta$ nin $R \times R$ nin bir fuzzy sol ideali olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

(ii) $\mu(x) > \eta(0_R)$ ve $\eta(y) > \eta(0_R)$ olacak biçimde $x, y \in R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(\mu \times \eta)(0_R, 0_R) &= \min \{ \mu(0_R), \eta(0_R) \} \\
&= \eta(0_R)
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
(\mu \times \eta)(x, y) &= \min \{ \mu(x), \eta(y) \} \\
&> \eta(0_R) \\
&= (\mu \times \eta)(0_R, 0_R)
\end{aligned}$$

olup bu sonuç, $\mu \times \eta$ nin $R \times R$ nin bir fuzzy sol ideali olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

(iii) $\eta(x) > \mu(0_R)$ ve $\mu(y) > \mu(0_R)$ olacak biçimde $x, y \in R$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
(\mu \times \eta)(0_R, 0_R) &= \min \{ \mu(0_R), \eta(0_R) \} \\
&= \mu(0_R)
\end{aligned}$$

dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
(\mu \times \eta)(x, y) &= \min \{ \mu(x), \eta(y) \} \\
&> \mu(0_R) \\
&= (\mu \times \eta)(0_R, 0_R)
\end{aligned}$$

olup bu sonuç, $\mu \times \eta$ nin $R \times R$ nin bir fuzzy sol ideali olması ile çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır.

(iv) (i) den $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0_R)$ veya $\eta(x) \leq \eta(0_R)$ dir.

Genelliği bozmadan $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \eta(0_R)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda (ii) den $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \eta(0_R)$ veya $\eta(x) \leq \eta(0_R)$ dir.

1. Durum: $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \eta(0_R)$ olsun. Bu durumda $(\mu \times \eta)(x, 0_R) = \mu(x)$ dir.

$x, y \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}\mu(x - y) &= (\mu \times \eta)(x - y, 0_R) \\ &\geq \min \{(\mu \times \eta)(x, 0_R), (\mu \times \eta)(y, 0_R)\} \\ &= \min \{\mu(x), \mu(y)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu(xy) &= (\mu \times \eta)(xy, 0_R) \\ &= (\mu \times \eta)((x, 0_R)(y, 0_R)) \\ &\geq (\mu \times \eta)(y, 0_R) \\ &= \mu(y)\end{aligned}$$

olur. Böylece μ , R nin bir fuzzy sol idealidir.

2. Durum: $\forall x \in R$ için $\eta(x) \leq \eta(0_R)$ olsun. 1. durum gerçekleşmesin. Bu durumda

$\exists y \in R$ için $\mu(y) > \eta(0_R) \Rightarrow \mu(0_R) \geq \mu(y) > \eta(0_R)$ olup $\forall x \in R$ için,

$$(\mu \times \eta)(0_R, x) = \min \{\mu(0_R), \eta(x)\} = \eta(x)$$

dir. $x, y \in R$ olsun.

$$\begin{aligned}\eta(x - y) &= (\mu \times \eta)(0_R, x - y) \\ &\geq \min \{(\mu \times \eta)(0_R, x), (\mu \times \eta)(0_R, y)\} \\ &= \min \{\eta(x), \eta(y)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta(xy) &= (\mu \times \eta)(0_R, xy) \\ &= (\mu \times \eta)((0_R, x)(0_R, y)) \\ &\geq (\mu \times \eta)(0_R, y) \\ &= \eta(y)\end{aligned}$$

olur. Böylece η , R nin bir fuzzy sol idealidir.

Teorem 5.3: $\mu \times \eta$, $G \times G$ nin bir fuzzy alt grubu olmak üzere G nin μ ve η fuzzy alt kümeleri için,

- (i) $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(e)$ veya $\eta(x) \leq \eta(e)$
 - (ii) $\mu(x) \leq \mu(e) \Rightarrow \forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \eta(e)$ veya $\eta(x) \leq \eta(e)$
 - (iii) $\eta(x) \leq \eta(e) \Rightarrow \forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(e)$ veya $\eta(x) \leq \mu(e)$
 - (iv) μ ya da η , G nin bir fuzzy alt grubudur
- (Malik and Mordeson 1991).

Sonuç 5.2:

(a) $\mu \times \eta$, $R \times R$ nin bir fuzzy sol ideali olmak üzere R nin μ ve η fuzzy alt kümeleri ve $\forall x \in R$ için eğer,

$$(i) \quad \mu(0_R) = \eta(0_R)$$

$$(ii) \quad \mu(0_R) \geq \eta(x)$$

$$(iii) \quad \eta(0_R) \geq \eta(x)$$

ise μ ve η , R nin fuzzy sol idealidir

(b) $\mu \times \eta$, $G \times G$ nin bir fuzzy alt grubu olmak üzere G nin μ ve η fuzzy alt kümeleri ve $\forall x \in G$ için eğer,

$$(i) \quad \mu(e) = \eta(e)$$

$$(ii) \quad \mu(e) \geq \eta(x)$$

$$(iii) \quad \eta(e) \geq \eta(x)$$

ise μ ve η , G nin fuzzy alt grubudur

(Malik and Mordeson 1991).

Teorem 5.4: G grubunun μ ve η fuzzy alt kümeleri için,

$\mu \times \eta$, $G \times G$ nin fuzzy alt grubu $\Rightarrow \mu$ veya η , G nin bir fuzzy alt grubudur.

İspat: $\mu \times \eta$, $G \times G$ nin fuzzy alt grubu olduğundan $\forall x, y \in G$ için,

$$(\mu \times \eta)(e, e) = \min \{ \mu(e), \eta(e) \} \geq (\mu \times \eta)(x, y) \Rightarrow \mu(x) \leq \mu(e) \text{ veya } \eta(y) \leq \eta(e)$$

dir. Genelliği bozmadan $\mu(x) \leq \mu(e)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\mu(x) \leq \eta(e) \text{ veya } \eta(y) \leq \eta(e)$$

dir.

1. Durum: $\mu(x) \leq \eta(e)$ olsun. Bu durumda $\forall x, y \in G$ için,

$$(\mu \times \eta)(x, e) = \mu(x) \text{ olduğundan,}$$

$$\mu(xy) = (\mu \times \eta)(xy, e)$$

$$= (\mu \times \eta)((x, e), (y, e))$$

$$\geq \min \{ (\mu \times \eta)(x, e), (\mu \times \eta)(y, e) \}$$

$$= \min \{ \mu(x), \mu(y) \}$$

$$\mu(x^{-1}) = (\mu \times \eta)(x^{-1}, e)$$

$$= (\mu \times \eta)(x^{-1}, e^{-1})$$

$$\begin{aligned}
&= (\mu \times \eta)(x, e)^{-1} \\
&\geq (\mu \times \eta)(x, e) \\
&= \mu(x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece μ , G nin bir fuzzy alt grubudur.

2. Durum: 1. Durum gerçekleşmesin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\exists x \in G \text{ için } \mu(x) > \mu(e) &\Rightarrow \forall y \in G \text{ için } \eta(y) \leq \eta(e) \\
&\Rightarrow \forall y \in G \text{ için } (\mu \times \eta)(e, y) = \eta(y)
\end{aligned}$$

dir. $\forall x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned}
\eta(xy) &= (\mu \times \eta)(e, xy) \\
&= (\mu \times \eta)((e, x), (e, y)) \\
&\geq \min \{ (\mu \times \eta)(e, x), (\mu \times \eta)(e, y) \} \\
&= \min \{ \eta(x), \eta(y) \} \\
\eta(x^{-1}) &= (\mu \times \eta)(e, x^{-1}) \\
&= (\mu \times \eta)(e^{-1}, x^{-1}) \\
&= (\mu \times \eta)(e, x)^{-1} \\
&\geq (\mu \times \eta)(e, x) \\
&= \eta(x)
\end{aligned}$$

olur. Böylece η , G nin bir fuzzy alt grubudur.

Sonuç olarak μ veya η , G nin bir fuzzy alt grubudur.

Teorem 5.5: R halkasının μ ve η fuzzy alt kümeleri için,

$\mu \times \eta$, $R \times R$ nin fuzzy ideali $\Rightarrow \mu$ veya η , R nin bir fuzzy idealidir (Ersoy, 2003).

Teorem 5.4 ve Teorem 5.5 in tersi her zaman doğru değildir. Yani μ ve η , R halkasının fuzzy alt kümeleri ve $\mu \times \eta$, $R \times R$ nin bir fuzzy sol (sağ) ideali ise μ ve η nün R nin bir fuzzy sol (sağ) ideali olması gerekmemektedir. Aynı şekilde ξ ve ν , G nin fuzzy alt kümeleri ve $\xi \times \nu$, $G \times G$ nin bir fuzzy alt grubu ise ξ ve ν nin G nin bir fuzzy alt grubu olması gerekmemektedir. Örnek 5.1 ve Örnek 5.2 de bu durum gösterilmiştir.

Örnek 5.1: R en az iki elemanlı bir halka ve $0 \leq t \leq s < 1$ olsun. R nin μ ve σ fuzzy alt kümeleri $\forall x \in R$ için $\mu(x) = t$ ve

$$\sigma(x) = \begin{cases} s & , x = 0_R \text{ ise} \\ 1 & , x \neq 0_R \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $\forall x, y \in R$ için,

$$(\mu \times \sigma)(x, y) = \min \{\mu(x), \sigma(y)\} = t$$

olur. Böylece $\mu \times \sigma$ bir sabit fonksiyon olduğundan $R \times R$ nin bir fuzzy sol (sağ) idealidir. Ancak μ , R nin bir fuzzy ideali olmasına rağmen $x \neq 0_R$ olmak üzere $\forall x \in R$ için,

$$\sigma(0_R) < \sigma(x)$$

olduğundan σ , R nin fuzzy sol (sağ) ideali değildir.

Örnek 5.2: G en az iki elemanlı bir grup ve $0 \leq t \leq s < 1$ olsun. G nin μ ve η fuzzy alt kümeleri $\forall x \in G$ için $\mu(x) = t$ ve

$$\sigma(x) = \begin{cases} s & , x = e \text{ ise} \\ 1 & , x \neq e \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda $\mu \times \eta$, $G \times G$ nin bir fuzzy alt grubu ancak σ , G nin bir fuzzy alt grubu değildir.

Sonuç 5.3:

- (i) σ , R nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda σ üzerine tanımlı μ_σ bağıntısı, $R \times R$ nin bir fuzzy sol (sağ) idealidir $\Leftrightarrow \sigma$, R nin bir fuzzy sol (sağ) idealidir
 - (ii) σ , G nin bir fuzzy alt kümesi olsun. Bu durumda σ üzerine tanımlı μ_σ bağıntısı, $G \times G$ nin bir fuzzy alt grubudur $\Leftrightarrow \sigma$, G nin bir fuzzy alt grubudur
- (Malik and Mordeson 1991).

Teorem 5.6:

(a) μ , $R \times R$ nin bir fuzzy sol (sağ) ideali olsun. Bu durumda $\forall x, y, z \in R$ için aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır

$$(i) \quad \mu(x - y, z) = \mu(y, 0_R)$$

$$(ii) \quad \mu(x - y, z) = \mu(x, z)$$

$$(iii) \quad \mu(x, z) = \mu(y, 0_R)$$

(b) μ , $G \times G$ nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $\forall x, y, z \in G$ için aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır

$$(i) \quad \mu(xy^{-1}, z) = \mu(y, e)$$

$$(ii) \quad \mu(xy^{-1}, z) = \mu(x, z)$$

$$(iii) \quad \mu(x, z) = \mu(y, e)$$

(Malik and Mordeson 1991).

İspat :

(a) $t_1, t_2, t_3 \in [0, 1]$ olmak üzere $\mu(x - y, z) = t_1, \mu(y, 0_R) = t_2, \mu(x, z) = t_3$ olsun.

μ , $R \times R$ nin bir fuzzy sol (sağ) ideali olduğundan,

$$t_1 \geq \min \{t_2, t_3\}, \quad t_2 \geq \min \{t_3, t_1\}, \quad t_3 \geq \min \{t_1, t_2\}$$

olup (i), (ii) veya (iii) den birisi sağlanır.

(b) Aynı yöntemle ispatlanır.

Sonuç 5.4:

(a) μ , $R \times R$ nin bir fuzzy sol (sağ) ideali olsun. Bu durumda $\forall b \in R$ için aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır

$$(i) \quad \mu(b, b) = \mu(b, 0_R)$$

$$(ii) \quad \mu(b, b) = \mu(0_R, b)$$

$$(iii) \quad \mu(b, 0_R) = \mu(0_R, b)$$

(b) μ , $G \times G$ nin bir fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda $\forall b \in G$ için aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır

$$(i) \quad \mu(b, b) = \mu(b, e)$$

$$(ii) \quad \mu(b, b) = \mu(e, b)$$

$$(iii) \mu(b, e) = \mu(e, b)$$

İspat :

(a) Teorem 5.6 (a) da $x = y = z = b$ alınarak sonuca ulaşılır.

(b) Teorem 5.6 (b) de $x = y = z = b$ alınarak sonuca ulaşılır.

Aşağıdaki örnekte Sonuç 5.4 deki (i), (ii) ve (iii) nin eşit olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 5.3: $R = \mathbb{Z}$ tamsayılar halkası ve $\forall x \in R$ için,

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \langle 2 \rangle \text{ ise} \\ 0 & , x \notin \langle 2 \rangle \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı σ , R nin bir fuzzy alt kümesi olsun. μ, R üzerinde $\forall x, y \in R$ için,

$$\mu(x, y) = \sigma(x)$$

şeklinde tanımlı bir fuzzy bağıntı olsun. Bu durumda μ, R nin bir fuzzy idealidir.

$b = 1$ alırsak,

$$\mu(b, b) = \sigma(b) = 0, \mu(b, 0) = \sigma(b) = 0 \text{ ve } \mu(0, b) = \sigma(0) = 1$$

olur. Böylece $\mu(b, b) = \mu(b, 0) < \mu(0, b)$ dir. Aynı durum $G = \mathbb{Z}$ tamsayılar grubu için de geçerli olur.

$\mu, R \times R$ nin bir fuzzy sol (sağ) ideali ise $\forall x, y \in R$ için $\mu(0_R, 0_R) \geq \mu(x, y)$ dir. Aynı şekilde $\mu, G \times G$ nin bir fuzzy alt grubu ise $\forall x, y \in G$ için $\mu(e, e) \geq \mu(x, y)$ dir. Örnek 5.4 ve Örnek 5.5 de $\mu, R \times R$ nin ($G \times G$ nin) bir fuzzy sol (sağ) ideali (fuzzy alt grubu) olduğunda $\exists x, y, z \in R$ (G) için $\mu(x, z) > \mu(y, 0_R)$ ($\mu(x, z) \geq \mu(y, e)$) olabileceği gösterilmiştir.

Örnek 5.4: R en az dört elemanlı bir halka ve A, R nin sabit olmayan bir sol (sağ) ideali olsun. R nin bir σ fuzzy alt kümesi,

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \text{ ise} \\ 0 & , x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda σ , R nin bir fuzzy sol (sağ) ideali olur.

$\mu = \mu_\sigma = \sigma \times \sigma$ olsun. Bu durumda μ , $R \times R$ nin bir fuzzy sol (sağ) idealidir.

$x, z \in A$ ve $y \notin A \Rightarrow \mu(y, 0_R) = \min \{ \sigma(y), \sigma(0_R) \} = 0$ ve

$$\mu(x, z) = \min \{ \sigma(x), \sigma(z) \} = 1$$

olur. Böylece $\mu(x, z) > \mu(y, 0_R)$ dır. Ayrıca $\mu(0_R, y) = 0 = \mu(y, 0_R)$ olup

$\mu(x, z) > \mu(0_R, y)$ dir.

Örnek 5.5: G en az dört elemanlı bir grup ve H, G nin sabit olmayan bir alt grubu olsun. G nin bir ζ fuzzy alt kümesi,

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1 & , x \in H \text{ ise} \\ 0 & , x \notin H \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. ζ , G nin bir fuzzy alt grubudur.

$\mu = \mu_\zeta = \zeta \times \zeta$ olsun. Bu durumda μ , $G \times G$ nin bir fuzzy alt grubudur.

$x, z \in H$ ve $y \notin H \Rightarrow \mu(y, e) = \min \{ \zeta(y), \zeta(e) \} = 0$ ve

$$\mu(x, z) = \min \{ \zeta(x), \zeta(z) \} = 1$$

olur. Böylece $\mu(x, z) > \mu(y, e)$ dır. Ayrıca $\mu(e, y) = 0 = \mu(y, e)$ olup

$\mu(x, z) > \mu(e, y)$ dir.

KAYNAKLAR

- Abou-Zaid, S. 1993. On fuzzy ideals and fuzzy quotient rings of a ring. *Fuzzy Sets and Systems* 59, 205-210
- Das, P.S. 1981. Fuzzy groups and level subgroups. *Journal Of Mathematical Analysis and Applications* 84, 264-269
- Dixit, V.N., Kumar, R. and Ajmal, N. 1990. Level subgroups and union of fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems* 37, 359-371
- Dixit, V.N., Kumar, R. and Ajmal, N. 1991. Fuzzy ideals and fuzzy prime ideals of a ring. *Fuzzy Sets and Systems* 44, 127-138
- Dixit, V.N., Kumar, R. and Ajmal, N. 1992. On fuzzy rings. *Fuzzy Sets and Systems* 49, 205-213
- Ersoy, B.A. 2003. A generalization of cartesian product of fuzzy subgroups and ideals. *Pakistan Journal of Applied Sciences* 3(2), 100-102
- Kumar, R. 1992a. Fuzzy subgroups, fuzzy ideals, and fuzzy cosets: Some properties. *Fuzzy Sets and Systems* 48, 267-274
- Kumar, R. 1992b. Certain fuzzy ideals of rings redefined. *Fuzzy Sets and Systems* 46, 251-260
- Kuraoka, T. and Kuroki, N. 1992. On fuzzy quotient rings induced by fuzzy ideals. *Fuzzy Sets and Systems* 47, 381-386
- Malik, D.S. and Mordeson, J.N. 1990. Fuzzy prime ideals of a ring. *Fuzzy Sets and Systems* 37, 93-98

- Malik, D.S. and Mordeson, J.N. 1991. Fuzzy relations on rings and groups. *Fuzzy Sets and Systems* 43, 117-123
- Mukherjee, N. and Bhattacharya, P. 1984. Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets. *Information Science* 34, 225-239
- Mukherjee, N. and Bhattacharya, P. 1986. Fuzzy groups: Some group theoretic analogs, *Information Science* 39, 247-268
- Mukherjee, T.K. and Sen, M.K. 1987. On fuzzy ideals of a ring I. *Fuzzy Sets and Systems* 21, 99-104
- Rosenfeld, A. 1971. Fuzzy groups. *Journal Of Mathematical Analysis and Applications* 35, 512-517
- Sidky, F.I. and Mishref, M.A. 1991. Fuzzy cosets and cyclic and abelian fuzzy subgroups. *Fuzzy Sets and Systems* 43, 243-250
- Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy sets. *Information and Control* 8, 338-353

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Sibel YURDUSEVEN

Doğum Yeri : Kırıkkale

Doğum Tarihi : 21/03/1983

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Alparslan Süper Lisesi (2002)

Lisans : Ankara Üniversitesi (2006)

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik
Anabilim Dalı (Eylül 2006- Ağustos 2008)